

Оглавление

1	Одновременное оценивание движения ВС и систематических ошибок. Алгоритмы параллельной фильтрации процессов, связанных через измерения	2
1.1	Описание задачи наблюдения за многими ВС	3
1.2	Задача фильтрации	6
1.3	Уравнения оптимальной фильтрации	9
1.4	Упрощенные алгоритмы оценивания по Henk Blom	12
1.4.1	Разделённые фильтры для фазового вектора и для систематической ошибки	13
1.4.2	Фильтр Калмана для фазового вектора, макро-фильтр для систематической ошибки	14
1.5	Алгоритм оценивания на основе CI	15
1.6	Моделирование работы алгоритмов параллельной фильтрации	17
	Литература	18

1 Одновременное оценивание движения ВС и систематических ошибок. Алгоритмы параллельной фильтрации процессов, связанных через измерения

В настоящее время в системах УВД для определения параметров движения воздушных судов (координаты, скорости, ускорения и т.д.) используются алгоритмы линейного рекуррентного оценивания, близкие по используемой математической технике к фильтру Калмана. В качестве основного метода применяется алгоритм ИММ. Главная особенность состоит в том, что задача оценки параметров движения для всех ВС, находящихся в зоне наблюдения, решается независимо для каждого ВС. Это полностью соответствует представлению о том, что движение каждого ВС никак не зависит от движения других ВС. Также это удобно с точки зрения архитектуры программы, реализующей систему мультитраекторной обработки — данные, описывающие каждое ВС, можно легко выделить в отдельный объект, который можно создавать, удалять и использовать, например, для сравнения со вновь поступающими не привязанными к конкретному ВС измерениями. С точки зрения математических алгоритмов, такое разделение также удобно, поскольку позволяет оставаться в рамках расчётов в пространстве достаточно низкой размерности (4–6 для фильтра Калмана, 15–30 для ИММ).

Наблюдение за движением ВС производится с помощью радиотехнических средств: как правило это система из нескольких радиолокаторов и система АЗН-В. Реальные измерительные средства, помимо случайных ошибок измерений, имеют систематические ошибки. Случайные ошибки измерения изначально предусмотрены архитектурой алгоритмов рекуррентного оценивания, как фильтра Калмана, так и ИММ. Систематические ошибки в случае не сложных вариантов их пространственной зависимости также легко могут быть включены в алгоритмы оценивания, но при их включении обнаруживается одно весьма существенное обстоятельство: систематические ошибки одного и того же измерительного средства присутствуют в уравнении наблюдения для разных воздушных судов. Так, в простом случае связи между неизвестными оцениваемыми состояниями и измерением РЛС возникает следующее линейное уравнение наблюдения:

$$z_{al}(t) = C^x(t)\chi_a(t) + C^s(t)\varsigma_l(t) + D(t)w_l(t). \quad (1.1)$$

Здесь t — момент времени; a — индекс, обозначающий номер воздушного судна (aircraft); l — индекс радиолокатора (locator); z_{al} — вектор измерения; χ_a — вектор параметров движения ВС; ς_l — вектор параметров, характеризующий состояние РЛС; $w_l(t)$ — текущая реализация случайной ошибки РЛС; $C^x(t)$, $C^s(t)$, $D(t)$ — матрицы, характеризующие влияние каждого параметра на измерение.

Из вида этого уравнения ясно, что систематическая ошибка локатора l может быть оценена только совместно с параметрами движения ВС a . Но этот радиолокатор наблюдает не только это движение, также верно и обратное — ВС a наблюдается не только радиолокатором l . Фазовые переменные для разных движений оказываются «сцепленными» между собой через параметры систематических ошибок. Таким образом, система всех движений и всех систематических ошибок нуждается в совместном

оценивании.

Как будет показано далее, даже в простом случае неуправляемых движений, стандартные процедуры оптимального совместного оценивания — фильтр Калмана, оценка Гаусса–Маркова — приводят к соотношениям, в которых переменные, относящиеся к разным движениям и систематическим ошибкам, существенно связаны друг с другом. Это приводит к следующим неприятным последствиям:

- нет возможности задать в программе отдельные объекты для движений разных ВС;
- затруднено создание и удаление движений;
- в вычислениях необходимо поддерживать большую матрицу ковариации ошибок оценивания, (в которую входят все кросс-ковариации для ошибок оценивания между различными ВС, между каждым ВС и каждым РЛС и т.д.) это выливается в большие затраты по времени вычисления и по памяти.

От требования, чтобы параметры оценивались оптимально, можно отказаться. При этом появляется возможность устранить нежелательные эффекты, указанные выше. Но в таком случае необходимо тщательно проектировать алгоритм оценивания, для того чтобы получаемые оценки были близки к неизвестным истинным параметрам.

Целью исследования, излагаемого ниже, является создание алгоритма лёгкого для параллельной реализации по отдельным воздушным судам и при этом обладающего низким уровнем погрешности оценивания. Исследование логически продолжает исследование, изложенное в отчёте [1].

1.1 Описание задачи наблюдения за многими ВС

Считаем, что каждое воздушное судно подчиняется независимому, но одинаковому по структуре уравнению движения. Так движение ВС номер i имеет описание

$$d\chi_i(t) = f(t, \chi_i(t), u_i(t))dt + dv_i(t),$$

где χ_i — вектор параметров движения ВС; f — функция, задающая скорости движения; $u_i(t)$ — функция управления, специфичная для ВС i ; dv_i — приращение случайного возмущения для непрерывного варианта динамики; само дифференциальное уравнение сформулировано, например, в смысле Ито. В силу того, что наблюдение за ВС ведётся «в большом масштабе», вектор χ_i может содержать не очень большое число параметров, а функция f может быть выбрана достаточно простой. Измерения при помощи РЛС производятся в дискретные моменты времени, поэтому далее удобно иметь дело с дискретизированным вариантом системы. При этом разумно ограничиться динамикой, близкой к линейной

$$\chi_i(t_k) = A_i(t_k, \chi_i(t_{k-1}), u_i(t_k))\chi_i(t_{k-1}) + B_i(t_k)v_i(t_k). \quad (1.2)$$

Здесь v_i — случайное возмущение; B_i — матричная функция, формирующая влияние случайного возмущения на движение; A_i — матрица, формирующая вид движения системы, зависящая от текущего значения управления $u(t_k)$. Моменты времени t_k принадлежат некоторому дискретному множеству \mathcal{T} и, на самом деле, определяются по ходу развития движения, т.е. не являются заданными заранее.

В программе мультирадарной обработки для метода ИММ уравнения движения используются именно в виде (1.2). Далее, будем рассматривать более простую линейную динамику без управления

$$\chi_i(t_k) = A_i(\mathcal{T}_k)\chi_i(t_{k-1}) + B_i(t_k)v_i(t_k). \quad (1.3)$$

Здесь $\mathcal{T}_k = \{t_l \in \mathcal{T} : t_l \leq t_k\}$ — множество моментов времени до текущего включительно.

В качестве основного варианта при моделировании выбираем прямолинейное равномерное движение на плоскости

$$\chi_i(t_k) = \begin{bmatrix} x_i(t_k) \\ v_i(t_k) \end{bmatrix}, \quad x_i(t_k), v_i(t_k) \in \mathbb{R}^2, \quad A_i(\mathcal{T}_k) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & (t_k - t_{k-1})I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где x_i, v_i обозначают векторы координат и скорости на плоскости \mathbb{R}^2 . Непосредственно в моделировании используется $B_i \equiv 0, v_i \equiv 0$.

Формирование наблюдений z_{ij} будем описывать следующим уравнением наблюдения, несколько более сложным, чем уравнение (1.1):

$$z_{ij}(t) = C_i^x(t_k)\chi_i(t_k) + C_j^s(t_k, \chi_i(t_k))\varsigma_j(t_k) + D_j(t_k, \chi_i(t_k))w_j(t_k). \quad (1.5)$$

Матрицы C_j^s, D_j для всех имеющих смысл случаев зависят от положения ВС, поэтому явно указывается зависимость от χ_i . В качестве параметров ς_j могут выступать постоянная систематическая ошибка по дальности и азимуту, коэффициент линейной зависимости для систематической ошибки по дальности и т.д. Матрица C_j^s описывает влияние этих неизвестных параметров на измерения.

Для параметров ς_j , характеризующих систематические ошибки РЛС, также введём динамику

$$\varsigma_j(t_k) = A_j^s(t_k)\varsigma_j(t_{k-1}) + B_j^s(t_k)v_j^s(t_k). \quad (1.6)$$

Матрица B_i^s характеризует дрейф систематических ошибок со временем. Для моделирования будем принимать:

$$\varsigma_j = \begin{bmatrix} \Delta_j^r \\ \Delta_j^\alpha \end{bmatrix}, \quad A_j^s(t_k) \equiv I_{2 \times 2}, \quad B_i^s(t_k) \equiv 0_{2 \times 2}. \quad (1.7)$$

Здесь $\Delta_j^r, \Delta_j^\alpha \in \mathbb{R}$ — значения постоянных систематических ошибок по дальности и азимуту, соответственно. Подробно понятия систематических ошибок по дальности и азимуту введены в отчёте ???.

Рассмотрим общий фазовый вектор

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \\ \vdots \\ \chi_n(t) \\ \varsigma_1(t) \\ \varsigma_2(t) \\ \vdots \\ \varsigma_m(t) \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Здесь n и m — количества наблюдаемых ВС и наблюдающих радиолокаторов. Уравнения (1.3), (1.6) можно переписать как

$$\begin{aligned} \xi(t_k) &= A(\mathcal{T}_k)\xi(t_{k-1}) + B(t_k)v(t_k) = \\ &= \begin{bmatrix} A_1(\mathcal{T}_k) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & A_n(\mathcal{T}_k) & & \\ & & & A_1^s(t_k) & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & A_m^s(t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t_{k-1}) \\ \vdots \\ \chi_n(t_{k-1}) \\ \varsigma_1(t_{k-1}) \\ \vdots \\ \varsigma_m(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_1(t_k) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & B_n(t_k) & & \\ & & & B_1^s(t_k) & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & B_m^s(t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t_k) \\ \vdots \\ v_n(t_k) \\ v_1^s(t_k) \\ \vdots \\ v_m^s(t_k) \end{bmatrix}, \quad (1.9) \end{aligned}$$

где матрицы A и B представляют собой блочно-диагональные матрицы, объединяющие все A_i , A_i^s и B_i , B_i^s . Также будем использовать символы A^χ , A^s , B^χ , B^s для обозначения верхнего и нижнего блоков матриц A и B , соответствующих динамике переменных χ и ς .

Каждый момент времени $t_k \in \mathcal{T}$ свяжем с некоторым измерением $z_{ij}(t_k)$ положения ВС с номером i при помощи радиолокатора j . При этом будем считать, что такое измерение одно и в момент t_k нет никаких других измерений. Запишем уравнение наблюдения в том виде, как оно должно применяться ко всему большому фазовому вектору.

$$\begin{aligned} z(t_k) &= z_{ij}(t_k) = C(t_k, \xi(t_k))\xi(t_k) + D(t_k, \xi(t_k))w(t_k), \quad (1.10) \\ C(t_k, \xi(t_k)) &= \begin{bmatrix} C^\chi(t_k) & C^s(t_k, \chi(t_k)) \end{bmatrix}, \\ C^\chi(t_k) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_i^\chi(t_k) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ C^s(t_k, \chi(t_k)) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_j^s(t_k, \chi_i(t_k)) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ D(t_k, \xi(t_k)) &= D_j(t_k, \chi_i(t_k)), \quad w(t_k) = w_j(t_k). \end{aligned}$$

Как указывалось выше, для моделирования будем применять предположение постоянных систематических ошибок по дальности и азимуту. При этом будем использовать линеаризованную модель воздействия таких ошибок на измерения. Соответствующие матрицы $C^\chi(t_k)$, $C^s(t_k, \chi_i(t_k))$, $D(t_k, \chi_i(t_k))$ имеют вид:

$$\begin{aligned} C_i^\chi(t_k) &\equiv \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad C_j^s(t_k, \chi_i(t_k)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|x_i(t_k) - x_j^R\|} (x_i(t_k) - x_j^R) & \Omega_{2 \times 2}^{\pi/2} (x_i(t_k) - x_j^R) \end{bmatrix}, \\ D(t_k, \chi_i(t_k)) &= C_j^s(t_k, \chi_i(t_k)), \quad \Omega_{2 \times 2}^{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Здесь x_j^R — координаты точки стояния радиолокатора j ; $\Omega_{2 \times 2}^{\pi/2}$ — матрица поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки на плоскости \mathbb{R}^2 с учётом северо-восточной системы

координат. Случайные ошибки

$$w_j^s(t_k) = \begin{bmatrix} w_j^r(t_k) \\ w_j^\alpha(t_k) \end{bmatrix}$$

разделяются на случайные ошибки, действующие по дальности и азимуту.

Для всех случайных ошибок считаем справедливыми свойства:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{v_i(t_k)\} &= \mathbb{E}\{v_i^s(t_k)\} = \mathbb{E}\{w_j(t_k)\} = 0, \\ \mathbf{Cov}\{v_{i_1}(t_k), v_{i_2}(t_l)\} &= \delta_{kl}\delta_{i_1 i_2} V_{i_1}^x, \quad \mathbf{Cov}\{w_{j_1}(t_k), w_{j_2}(t_l)\} = \delta_{kl}\delta_{j_1 j_2} W_{j_1}, \\ \mathbf{Cov}\{v_{j_1}^s(t_k), v_{j_2}^s(t_l)\} &= \delta_{kl}\delta_{j_1 j_2} V_{j_1}^s, \quad \mathbf{Cov}\{v_i(t_k), w_j(t_l)\} = \mathbf{Cov}\{v_{j_1}^s(t_k), w_{j_2}(t_l)\} = \\ &= \mathbf{Cov}\{v_j^s(t_k), v_i(t_l)\} = 0, \quad \forall i, i_1, i_2 \in 1, \dots, n, \quad \forall j, j_1, j_2 \in 1, \dots, m, \quad \forall t_k, t_l \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где δ_{pq} — символ Кронекера; V_i^x — постоянная матрица дисперсии случайных возмущений для уравнений движения; V_j^s — постоянная матрица дисперсии случайных возмущений для уравнения эволюции параметров радиолокатора j ; W_j — постоянная матрица дисперсии случайных ошибок наблюдения для радиолокатора j . Матрицы ковариаций для больших столбцов v и w будем обозначать

$$V^x = \begin{bmatrix} V_1^x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_n^x \end{bmatrix}, \quad V^s = \begin{bmatrix} V_1^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_m^s \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} V^x & 0 \\ 0 & V^s \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_m \end{bmatrix}.$$

Для моделирования будем применять W_j вида:

$$W_j = \begin{bmatrix} \sigma_{rj}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha j}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

где σ_{rj} , $\sigma_{\alpha j}$ — заданные среднеквадратичные отклонения для случайных ошибок наблюдения по дальности и азимуту, относящихся к радиолокатору j . Матрицы V_i^x будем брать одинаковыми диагональными, также будем поступать и с матрицами V_j^s (в данном случае не будем раскрывать подробный вид и смысл диагональных элементов, поскольку при моделировании эта матрица принималась равной нулю).

$$V_i^x = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & & 0 \\ & \sigma_{x2}^2 & \\ 0 & & \sigma_{v1}^2 \\ & & & \sigma_{v2}^2 \end{bmatrix}, \quad V_j^s = \begin{bmatrix} \sigma_{\zeta 1}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{\zeta q}^2 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

1.2 Задача фильтрации

Целью фильтрации является получение оценки $\hat{\xi}(t_k)$ фазового вектора ξ на момент t_k поступления последнего измерения. Предполагается, что оценка вычисляется как некоторая функция Ξ от информации обо всех измерениях до этого момента времени:

$$\hat{\xi}(t_k) = \Xi(\{z(t)\}_{t \in \mathcal{T}_k}),$$

а также от априорной информации. Также предполагается, что задан некоторый критерий, по которому будет определяться качество оценивания. Популярным выбором является:

$$J(t_k) = \mathbb{E} \left\{ \|h^\top (\hat{\xi}(t_k) - \xi(t_k))\|^2 \right\}, \quad (1.15)$$

где h^\top — некоторая заданная линейная функция, выделяющая, например, некоторую часть координат из всего вектора, $\xi(t_k)$ — истинное значение фазового вектора ξ в момент времени t_k . Поскольку речь идёт об оценивании в присутствии случайных ошибок наблюдения, оценка $\hat{\xi}(t_k)$ является случайной величиной, и в критерии присутствует символ математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$.

Наиболее простыми и разумными с точки зрения оптимальности являются линейные рекуррентные оценки с линейным прогнозированием:

$$\bar{\xi}(t_k) = A(\mathcal{T}_k) \hat{\xi}(t_{k-1}), \quad (1.16)$$

$$\hat{\xi}(t_k) = L(t_k, R(t_k)) \bar{\xi}(t_k) + K(t_k, R(t_k)) z(t_k), \quad (1.17)$$

$$R(t_k) = \mathcal{F}(t_k, R(t_{k-1})). \quad (1.18)$$

Здесь $L(t_k, R(t_k))$ и $K(t_k, R(t_k))$ — матричные коэффициенты, выбираемые для каждого момента самостоятельно, и зависящие от параметров линейных уравнений (1.9), (1.10), а также от вектора дополнительных параметров $R(t_k)$, пересчитываемого отдельно по некоторому, уже в общем случае нелинейному, правилу (1.18). Уравнение прогноза (1.16) обеспечивает оптимальную по имеющейся информации $\hat{\xi}(t_{k-1})$ оценку вектора $\xi(t_k)$ среди всех возможных оценок вообще. Т.е. при оптимальном выборе $\hat{\xi}(t_{k-1})$ оценка $\bar{\xi}(t_k)$ является оптимальной среди всех оценок вектора $\xi(t_k)$ по измерениям, предшествующим моменту t_k . Уравнение (1.17) называют уравнением коррекции. Его целью является получение новой оценки, учитывающий последнее измерение.

Далее в тексте, если рассматриваемые величины $\hat{\xi}(t_k)$, $\bar{\xi}(t_k)$, $L(t_k, R(t_k))$, и т. д. относятся к одному и тому же моменту времени t_k , скобки с аргументами в некоторых случаях будут опускаться, если это не будет создавать двусмысленности.

Популярным дополнительным условием является *условие несмещённости* оценки

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{\xi}(t_k) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \xi(t_k) \right\}, \quad (1.19)$$

которое в случае детерминированного фазового вектора ξ , например, в случае равенства нулю матрицы $B(t_k)$ в уравнении (1.9), принимает вид

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{\xi}(t_k) \right\} = \xi(t_k). \quad (1.20)$$

Если оценка $\hat{\xi}(t_{k-1})$ удовлетворяет условию (1.19), легко видеть, что и оценка $\bar{\xi}(t_k)$ ему удовлетворяет в силу уравнения (1.9). Для уравнения коррекции (1.17) условие несмещённости (1.19) приводит к следующему условию

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \hat{\xi}(t_k) \right\} &= L \mathbb{E} \left\{ \bar{\xi}(t_k) \right\} + K \mathbb{E} \left\{ z(t_k) \right\} = \\ &= L \mathbb{E} \left\{ \xi(t_k) \right\} + K \mathbb{E} \left\{ C(t_k, \xi(t_k)) \xi(t_k) \right\} + K \mathbb{E} \left\{ D(t_k, \xi(t_k)) w(t_k) \right\} = \\ &= L \mathbb{E} \left\{ \xi(t_k) \right\} + K \mathbb{E} \left\{ C(t_k, \xi(t_k)) \xi(t_k) \right\} + K \mathbb{E} \left\{ D(t_k, \xi(t_k)) \right\} \mathbb{E} \left\{ w(t_k) \right\} = \\ &= L \mathbb{E} \left\{ \xi(t_k) \right\} + K \mathbb{E} \left\{ C(t_k, \xi(t_k)) \xi(t_k) \right\}, \\ &\implies L \mathbb{E} \left\{ \xi(t_k) \right\} = I - K \mathbb{E} \left\{ C(t_k, \xi(t_k)) \xi(t_k) \right\}, \end{aligned}$$

которое для случая матрицы C , не зависящей от ξ , или для случая, когда вектор ξ является детерминированным, переходит в матричное условие

$$L(t_k, R(t_k)) = I - K(t_k, R(t_k)) C(t_k, \xi(t_k)). \quad (1.21)$$

В случае рассматриваемой нами модельной системы матрица C очень слабо зависит от ξ . Так, заменив в выражении (1.11) для матрицы $C_j^s(t_k, \xi(t_k))$ вектор $x_i(t_k)$ на $z_{ij}(t_k)$ или $\bar{x}_i(t_k)$ (часть прогнозной оценки $\bar{\xi}(t_k)$), мы получим близкое выражение, пригодное для использования в линейных алгоритмах. Далее, все алгоритмы будут рассматриваться с условием (1.21) с приближенной заменой $x_i(t_k)$ на $\bar{x}_i(t_k)$ в матрице C — это соответствует варианту Enhanced Kalman Filter (EKF) для нелинейной системы. При его подстановке в уравнение коррекции получается

$$\hat{\xi}(t_k) = \bar{\xi}(t_k) + K(t_k, R(t_k)) (z(t_k) - C(t_k, \bar{\xi}(t_k)) \bar{\xi}(t_k))$$

или в упрощённой записи

$$\hat{\xi}(t_k) = \bar{\xi}(t_k) + K (z(t_k) - C \bar{\xi}(t_k)). \quad (1.22)$$

Слагаемое $C(t_k, \bar{\xi}(t_k)) \bar{\xi}(t_k)$ можно проинтерпретировать как прогнозное измерение на момент t_k . Таким образом в выражении оценки (1.22) фигурирует разность между действительным и прогнозом измерениями.

Далее, в разделах посвящённых алгоритмам параллельной фильтрации, поскольку все рассматриваемые соотношения касаются шага между моментами t_{k-1} и t_k , аргументы будут опускаться. Т. е. будут приняты обозначения

$$A = A(\mathcal{T}_k), \quad B = B(t_k), \quad C = C(t_k, \bar{\xi}(t_k)), \quad D = D(t_k, \bar{\xi}(t_k)).$$

Введём обозначение для матрицы ковариаций ошибки оценивания для прогнозной оценки

$$\begin{aligned} \bar{P}(t_k) &= \mathbf{Cov}\{\bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k)\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Cov}\{\bar{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k), \bar{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k)\} & \cdots & \mathbf{Cov}\{\bar{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k), \bar{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Cov}\{\bar{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k), \bar{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k)\} & \cdots & \mathbf{Cov}\{\bar{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k), \bar{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k)\} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{\chi_1\chi_1}(t_k) & \cdots & \bar{P}_{\chi_1\varsigma_m}(t_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{P}_{\varsigma_m\chi_1}(t_k) & \cdots & \bar{P}_{\varsigma_m\varsigma_m}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{\chi\chi} & \bar{P}_{\chi\varsigma} \\ \bar{P}_{\varsigma\chi} & \bar{P}_{\varsigma\varsigma} \end{bmatrix} \quad (1.23) \end{aligned}$$

и для матрицы ковариации ошибки основной оценки по измерениям до момента t_k включительно

$$\begin{aligned} \hat{P}(t_k) &= \mathbf{Cov}\{\hat{\xi}(t_k) - \xi(t_k)\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Cov}\{\hat{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k), \hat{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k)\} & \cdots & \mathbf{Cov}\{\hat{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k), \hat{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Cov}\{\hat{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k), \hat{\chi}_1(t_k) - \chi_1(t_k)\} & \cdots & \mathbf{Cov}\{\hat{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k), \hat{\varsigma}_m(t_k) - \varsigma_m(t_k)\} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{P}_{\chi_1\chi_1}(t_k) & \cdots & \hat{P}_{\chi_1\varsigma_m}(t_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{P}_{\varsigma_m\chi_1}(t_k) & \cdots & \hat{P}_{\varsigma_m\varsigma_m}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{\chi\chi} & \hat{P}_{\chi\varsigma} \\ \hat{P}_{\varsigma\chi} & \hat{P}_{\varsigma\varsigma} \end{bmatrix}. \quad (1.24) \end{aligned}$$

Здесь символами $\bar{P}_{\chi\chi}$, $\bar{P}_{\chi\varsigma}$, $\bar{P}_{\varsigma\varsigma}$ и т. д. обозначены большие блоки матриц, включающие все ковариации между соответствующими частями фазового вектора. Так, например,

$$\hat{P}_{\chi\varsigma} = \mathbb{C}\text{ov}\{\hat{\chi}(t_k) - \chi(t_k), \hat{\varsigma}(t_k) - \varsigma(t_k)\}.$$

Приведём общие уравнения для эволюции этих матриц. В силу уравнения (1.9) и (1.16) справедливо

$$\bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k) = A\hat{\xi}(t_{k-1}) - A\xi(t_{k-1}) - Bv(t_k) = A\left(\hat{\xi}(t_{k-1}) - \xi(t_{k-1})\right) - Bv(t_k).$$

Следовательно, в силу независимости случайной ошибки динамики $v(t_k)$ и ошибок оценивания $\hat{\xi}(t_{k-1}) - \xi(t_{k-1})$, зависящих от случайных величин $v(t)$, $w(t)$ при $t \in \mathcal{T}_{k-1}$, верно соотношение

$$\bar{P}(t_k) = \mathbb{E}\left\{(\bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k))(\bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k))^{\top}\right\} = A\hat{P}(t_{k-1})A^{\top} + BVB^{\top}. \quad (1.25)$$

Пусть выполнено условие несмещённости и уравнение коррекции (1.17) переходит в (1.22), тогда для произвольного матричного коэффициента K (не зависимо от способа получения) справедливо

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(t_k) - \xi(t_k) &= \bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k) + K\left(z(t_k) - C\hat{\xi}(t_k)\right) = \\ &= \bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k) + K\left(C\hat{\xi}(t_k) + w(t_k) - C\hat{\xi}(t_k)\right) = (I - KC)(\bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k)) + Kw(t_k). \end{aligned}$$

Так же как и при выводе соотношения для $\bar{P}(t_k)$, можно утверждать о независимости случайной ошибки наблюдения $w(t_k)$ и ошибок оценивания $\bar{\xi}(t_k) - \xi(t_k)$, так как последние зависят от случайных величин $v(t)$, $w(t)$ при $t \in \mathcal{T}_{k-1}$ и от $v(t_k)$. Следовательно, верно соотношение

$$\begin{aligned} \hat{P}(t_k) &= \mathbb{E}\left\{\left(\hat{\xi}(t_k) - \xi(t_k)\right)\left(\hat{\xi}(t_k) - \xi(t_k)\right)^{\top}\right\} = \\ &= (I - KC)\bar{P}(t_k)(I - KC)^{\top} + KWK^{\top} \end{aligned} \quad (1.26)$$

известное как *формула Иозефа* [литература!!!].

Для критерия (1.15) известна формула

$$J(t_k) = \text{tr}\left\{h^{\top}\hat{P}(t_k)h\right\}. \quad (1.27)$$

1.3 Уравнения оптимальной фильтрации

Уравнения оптимальной фильтрации можно получить, минимизируя след матрицы $\hat{P}(t_k)$ в соотношении (1.26) варьированием различных матричных коэффициентов K . При этом выводится коэффициент $K^*(t_k)$ минимизирующий критерий на каждом шаге работы алгоритма.

$$K^*(t_k) = \bar{P}(t_k)C^{\top}(C\bar{P}(t_k)C^{\top} + DW D^{\top})^{-1}. \quad (1.28)$$

Интересно, что оптимальное значение K^* подходит и для любого h в формуле (1.27), т. е. соответствует равномерной по h оценке.

Полностью, с подстановкой соотношения (1.28), уравнения рекуррентной фильтрации называются уравнениями фильтра Калмана (или рекуррентной оценки Гаусса-Маркова для случая $B = 0$). Приведём их полностью:

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}(t_k) &= A\hat{\xi}(t_{k-1}), \\
 \bar{P}(t_k) &= A\hat{P}(t_{k-1})A^\top + BVB^\top, \\
 \Lambda &= C\bar{P}(t_k)C^\top + DWD^\top, \\
 K^* &= \bar{P}(t_k)C^\top\Lambda^{-1}, \\
 \hat{\xi}(t_k) &= \bar{\xi}(t_k) + K^*(z(t_k) - C\bar{\xi}(t_k)), \\
 \hat{P}(t_k) &= (I - K^*C)\bar{P}(t_k)(I - K^*C)^\top + K^*WK^{*\top} = \\
 &= (I - K^*C)\bar{P}(t_k) = \bar{P}(t_k) - K^*\Lambda K^{*\top}.
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Матрица Λ является матрицей ковариации отклонения прогнозного измерения $C\bar{\xi}(t_k)$ от действительного измерения $z(t_k)$. Два последних равенства в формуле для $\hat{P}(t_k)$ широко известны в литературе по фильтру Калмана. Однако следует отдавать себе отчёт, что эти соотношения ориентированы на специфический выбор K , и в общем случае не верны.

Отметим, что в качестве дополнительных параметров $R(t_k)$, по которым пересчитывается коэффициент K , в данном случае выступают прогнозная $\bar{P}(t_k)$ и действительная $\hat{P}(t_k)$ матрицы ковариаций ошибок оценивания.

Рассмотрим важную особенность фильтра Калмана. Даже для изучаемой нами системы с её специфическим видом уравнения наблюдения (1.10) и матрицы C будет справедливо:

$$\bar{P}(t_k)C^\top = [\bar{P}_{\chi_i}(t_k)(C_i^\chi)^\top \quad \bar{P}_{\varsigma_j}(t_k)(C_j^\varsigma)^\top],$$

где под символами \bar{P}_{χ_i} , \bar{P}_{ς_j} понимаются столбцы матрицы \bar{P} , соответствующие переменным χ_i и ς_j . В коэффициенте K^* активными (не равными нулю) являются все строки для всех движений ВС и всех параметров радиолокаторов, несмотря на то, что текущее измерение связано с конкретным ВС и конкретным радиолокатором. Т. е. коррекция оценки $\bar{\xi}$ затрагивает все переменные, и коррекция матрицы ковариации \bar{P} производится по всем строкам и столбцам. Это является общим свойством для фильтрации Калмана — этап коррекции затрагивает все переменные и всю матрицу ковариаций.

В отличие от этапа коррекции, на этапе прогноза (экстраполяции) в фильтре Калмана не происходит такого значительного «перемешивания» различных частей фазового вектора. Рассматриваемая нами система является системой с «разделённой» динамикой (1.9), в которой части фазового вектора χ_i , ς_j эволюционируют независимо друг от друга. Легко проверить, что в силу специфического вида матриц A и B соотношения этапа прогноза (1.29) легко «распараллеливаются»:

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}(t_k) = A\hat{\xi}(t_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad & \bar{\chi}_i(t_k) = A_i\hat{\chi}_i(t_{k-1}), \\
 & \bar{\varsigma}_j(t_k) = A_j^\varsigma\hat{\varsigma}_j(t_{k-1}), \\
 \bar{P}(t_k) = A\hat{P}(t_{k-1})A^\top + BVB^\top \quad \Rightarrow \quad & \bar{P}_{\chi_i\chi_i}(t_k) = A_i\hat{P}_{\chi_i\chi_i}(t_{k-1})A_i^\top + B_iV_i^\chi B_i^\top, \\
 & \bar{P}_{\varsigma_j\varsigma_j}(t_k) = A_j^\varsigma\hat{P}_{\varsigma_j\varsigma_j}(t_{k-1})A_j^{\varsigma\top} + B_j^\varsigma V_j^\varsigma B_j^{\varsigma\top}.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Таким образом, в задаче одновременного оценивания положения нескольких ВС и систематических ошибок РЛС, как и в других задачах с «разделённой» динамикой,

главным препятствием к параллельному применению алгоритмов фильтрации является именно этап коррекции. Содержательно можно сказать, что коррекция систематических ошибок по итогам некоторого измерения вынуждает несколько изменить оценки положения всех ВС, которые были сделаны по предыдущей, до коррекции, оценке систематических ошибок.

Рассмотрим соотношения фильтра Калмана в варианте, разделённом по фазовым переменным. Здесь и далее матрицы ковариаций разделяются на блоки, соответствующие частям фазового вектора χ и ς : Уравнение наблюдения:

$$z(t_k) = C_i^x \chi_i(t_k) + C_j^s \varsigma_j(t_k) + D_j w_j.$$

Фильтр для переменных, описывающих движение.

Этап предсказания:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(t_k) &= A^x \hat{\chi}(t_{k-1}), \\ \bar{P}_{\chi\chi}(t_k) &= A^x \hat{P}_{\chi\chi}(t_{k-1}) A^{x\top} + B^x V^x B^{x\top}.\end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned}K_\chi &= \left(\bar{P}_{\chi\chi_i}(t_k) C_i^{x\top} + \bar{P}_{\chi\varsigma_j}(t_k) C_j^{s\top} \right) \Lambda^{-1}, \\ \hat{\chi}(t_k) &= \bar{\chi}(t_k) + K_\chi \left(z(t_k) - C_i^x \bar{\chi}_i(t_k) - C_j^s \bar{\varsigma}_j(t_k) \right), \\ \hat{P}_{\chi\chi}(t_k) &= \bar{P}_{\chi\chi}(t_k) - K_\chi \Lambda K_\chi^\top.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Фильтр для систематической ошибки.

Этап предсказания:

$$\begin{aligned}\bar{\varsigma}(t_k) &= A^s \hat{\varsigma}(t_{k-1}), \\ \bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) &= A^s \hat{P}_{\varsigma\varsigma}(t_{k-1}) A^{s\top} + B^s V^s B^{s\top}.\end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned}K_\varsigma &= \left(\bar{P}_{\chi\varsigma_i}(t_k)^\top C_i^{x\top} + \bar{P}_{\varsigma\varsigma_j}(t_k) C_j^{s\top} \right) \Lambda^{-1}, \\ \hat{\varsigma}(t_k) &= \bar{\varsigma}(t_k) + K_\varsigma \left(z(t_k) - C_i^x \bar{\chi}_i(t_k) - C_j^s \bar{\varsigma}_j(t_k) \right), \\ \hat{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) &= \bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) - K_\varsigma \Lambda K_\varsigma^\top.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Обновление блока кросс-ковариации:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\chi\varsigma}(t_k) &= A^x \hat{P}_{\chi\varsigma}(t_{k-1}) A^{s\top}, \\ \hat{P}_{\chi\varsigma}(t_k) &= \bar{P}_{\chi\varsigma}(t_k) - K_\chi \Lambda K_\varsigma^\top.\end{aligned}$$

Для обоих фильтров используется одна матрица Λ :

$$\begin{aligned}\Lambda &= C_i^x \bar{P}_{\chi\chi_i}(t_k) C_i^{x\top} + C_i^x \bar{P}_{\chi\varsigma_j}(t_k) C_j^{s\top} + \\ &\quad + C_j^s \bar{P}_{\chi\varsigma_j}(t_k)^\top C_i^{x\top} + C_j^s \bar{P}_{\varsigma\varsigma_j}(t_k) C_j^{s\top} + D_j W_j D_j^\top.\end{aligned}\tag{1.33}$$

1.4 Упрощенные алгоритмы оценивания по Henk Blom

В статье [2] также как и в данном отчёте рассматривается задача одновременного оценивания движения многих ВС и определения систематических ошибок. Приводятся варианты упрощения алгоритма фильтрации Калмана, показавшие хорошую работу на практике. В основе этих упрощений лежит простое предположение. Пусть мы рассматриваем уравнение коррекции (1.31). Давайте при этом считать, что неизвестное ς на самом деле нам известно, т. е. оценка $\bar{\varsigma}$ не является случайной величиной и совпадает с ς . Это может быть дальнейшим образом обобщено тем, что ковариации $\bar{P}_{\chi\varsigma}$ и $\bar{P}_{\varsigma\chi}$ равны нулю при вычислении текущей оценки $\hat{\chi}$ переменной χ (т. е. как бы не существуют). Это приводит к следующим приближённым формулам:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\chi\varsigma}(t_k)C^\varsigma^\top &= \bar{P}_{\chi\varsigma_j}(t_k)C_j^\varsigma^\top = 0, \quad \bar{P}_{\varsigma\chi}(t_k) = 0, \quad \implies \\ K_\chi(t_k) &= \bar{P}_{\chi\chi}(t_k)C^\chi^\top\Lambda_\chi^{-1} = \bar{P}_{\chi\chi_i}(t_k)C_i^\chi^\top\Lambda_\chi^{-1}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\Lambda_\chi = C^\chi\bar{P}_{\chi\chi}(t_k)C^\chi^\top + DW D^\top = C_i^\chi\bar{P}_{\chi\chi_i}(t_k)C_i^\chi^\top + D_jW_jD_j^\top. \quad (1.35)$$

Рассмотрим формулу (1.34). Предположим, что все кросс-ковариации между параметрами движения i и параметрами других движений равны нулю на момент, предшествующий коррекции:

$$\bar{P}_{\chi_{i_1}\chi_i} = 0, \quad \forall i_1 \neq i.$$

Тогда при применении коэффициента K_χ из формулы (1.34) справедливо

$$K_{\chi_{i_1}}(t_k) = 0, \quad K_{\chi_i}(t_k) = \bar{P}_{\chi\chi_i}(t_k)C_i^\chi^\top\Lambda_\chi^{-1}. \quad (1.36)$$

Подставляя это конкретное выражение для K_χ в уравнения (1.31), получаем, что для всех $i_1 \neq i$ и любых $l = 1, \dots, n$ справедливо

$$\hat{\chi}_{i_1} = \bar{\chi}_{i_1}, \quad \hat{P}_{\chi_{i_1}\chi_l} = \bar{P}_{\chi_{i_1}\chi_l}.$$

Это означает, что параметры движений $i_1 \neq i$ не изменяются при учёте измерения $z(t_k)$, изменению подвергается только параметры движения, которое непосредственно наблюдается. Кроме того, из этого следует, что кросс-ковариации между параметрами остальных движений и параметрами движения i остаются равными нулю и после коррекции. Следовательно, если в начальный момент обеспечить для всех $i_1 \neq i_2$ нулевые кросс-ковариации

$$\bar{P}_{\chi_{i_1}\chi_{i_2}} = 0,$$

то и дальше они останутся нулевыми, а каждое движение можно будет обрабатывать отдельным фильтром в параллельном режиме.

Аналогично можно поступать и в ходе коррекции ς , считая при этом не случайными величинами текущие оценки $\bar{\chi}$ параметров движения ВС. Это приводит к приближённым соотношениям, аналогичным соотношениям (1.34), (1.35), записанным для параметров систематических ошибок ς :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\varsigma\chi}(t_k)C^\chi^\top &= \bar{P}_{\varsigma\chi_i}(t_k)C_i^\chi^\top = 0, \quad \bar{P}_{\chi\chi}(t_k) = 0, \quad \implies \\ K_\varsigma(t_k) &= \bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k)C^\varsigma^\top\Lambda_\varsigma^{-1} = \bar{P}_{\varsigma\varsigma_j}(t_k)C_j^\varsigma^\top\Lambda_\varsigma^{-1}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\Lambda_\varsigma = C^\varsigma\bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k)C^\varsigma^\top + DW D^\top = C_j^\varsigma\bar{P}_{\varsigma\varsigma_j}(t_k)C_j^\varsigma^\top + D_jW_jD_j^\top. \quad (1.38)$$

В случае пересчёта коэффициента K_ς по правилу (1.37) точно также как и для χ появляется возможность параллельного пересчёта отдельных параметров ς_j . Для этого нужно лишь обеспечить, чтобы в начальный момент времени для кросс-ковариаций выполнялось условие

$$\bar{P}_{\varsigma_1 \varsigma_2} = 0.$$

1.4.1 Разделённые фильтры для фазового вектора и для систематической ошибки

Опишем подробно соотношения параллельной фильтрации, с учётом упрощённого вычисления коэффициента K_χ по формулам (1.34), (1.35) и коэффициента K_ς по формулам (1.37), (1.38). Напомним, что уравнение наблюдения для текущего измерения выглядит следующим образом:

$$z(t_k) = C_i^\chi \chi_i(t_k) + C_j^\varsigma \varsigma_j(t_k) + D_j w_j.$$

Фильтр для переменных χ_i , описывающих движение. $i = 1, \dots, n$.

Этап предсказания:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_i(t_k) &= A_i \hat{\chi}_i(t_{k-1}), \\ \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &= A_i \hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_{k-1}) A_i^\top + B_i V_i^\chi B_i^\top.\end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_i(t_k) &= \bar{\chi}_i(t_k) + K_{\chi_i} (z(t_k) - C_i^\chi \bar{\chi}_i(t_k) - C_j^\varsigma \bar{\varsigma}_j(t_k)), \\ \hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &= \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) - K_{\chi_i} \Lambda_{\chi_i} K_{\chi_i}^\top.\end{aligned}$$

Аппроксимация:

$$\begin{aligned}K_{\chi_i} &= \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) C_i^{\chi \top} \Lambda_{\chi_i}^{-1}, \\ \Lambda_{\chi_i} &= C_i^\chi \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) C_i^{\chi \top} + D_j W_j D_j^\top.\end{aligned}$$

Фильтр для параметров систематической ошибки ς_j . $j = 1, \dots, m$.

Этап предсказания:

$$\begin{aligned}\bar{\varsigma}_j(t_k) &= A_j^\varsigma \hat{\varsigma}_j(t_{k-1}), \\ \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) &= A_j^\varsigma \hat{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_{k-1}) A_j^{\varsigma \top} + B_j^\varsigma V_j^\varsigma B_j^{\varsigma \top}.\end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned}\hat{\varsigma}_j(t_k) &= \bar{\varsigma}_j(t_k) + K_{\varsigma_j} (z(t_k) - C^\chi \bar{\chi}_i(t_k) - C_j^\varsigma \bar{\varsigma}_j(t_k)), \\ \hat{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) &= \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) - K_{\varsigma_j} \Lambda_{\varsigma_j} K_{\varsigma_j}^\top.\end{aligned}$$

Аппроксимация:

$$\begin{aligned}K_{\varsigma_j} &= \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) C_j^{\varsigma \top} \Lambda_{\varsigma_j}^{-1}, \\ \Lambda_{\varsigma_j} &= C_j^\varsigma \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) C_j^{\varsigma \top} + D_j W_j D_j^\top.\end{aligned}$$

1.4.2 Фильтр Калмана для фазового вектора, макро-фильтр для систематической ошибки

Кроме одновременного применения упрощённых формул (1.34), (1.35), (1.37), (1.38) для коэффициентов K_χ и K_ς в статье [2] приводится ещё один «промежуточный» вариант упрощения. В этом варианте рассматривается ситуация, когда для каждого движения i в некоторый момент t_k одновременно приходят измерения нескольких радиолокаторов. Будем считать для простоты, что это радиолокаторы с номерами от 1 до $m' \leq m$. При этом упрощение и, как следствие, «распараллеливание» выполняется только для переменных χ_i . Для параметров систематических ошибок ς_j принимаются дополнительные упрощающие формулы, позволяющие не пересчитывать кросс-ковариации $\bar{P}_{\chi\varsigma}$. Не останавливаясь на подробной интерпретации метода, приведём вычислительные соотношения.

Напоминаем, что уравнение наблюдения выглядит следующим образом:

$$z(t_k) = C_i^x \chi_i(t_k) + C_j^s \varsigma_j(t_k) + D_j w_j.$$

Фильтр для переменных, описывающих движение.

Этап предсказания:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_i(t_k) &= A_i \hat{\chi}_i(t_{k-1}), \\ \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &= A_i \hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_{k-1}) A_i^\top + B_i V_i^x B_i^\top. \end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_i(t_k) &= \bar{\chi}_i(t_k) + K_{\chi_i} (z(t_k) - C_i^x \bar{\chi}_i(t_k) - C_j^s \bar{\varsigma}_j(t_k)), \\ \hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &= \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) - K_{\chi_i} \Lambda_{\chi_i} K_{\chi_i}^\top. \end{aligned}$$

Аппроксимация:

$$\begin{aligned} K_{\chi_i} &= \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) C_i^{x\top} \Lambda_{\chi_i}^{-1}, \\ \Lambda_{\chi_i} &= C_i^x \bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) C_i^{x\top} + D_j W_j D_j^\top. \end{aligned}$$

Фильтр для систематической ошибки.

Этап предсказания:

$$\begin{aligned} \bar{\varsigma}(t_k) &= A^s \hat{\varsigma}(t_{k-1}), \\ \bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) &= A^s \hat{P}_{\varsigma\varsigma}(t_{k-1}) A^{s\top} + B^s V^s B^{s\top}. \end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} \hat{\varsigma}(t_k) &= \bar{\varsigma}(t_k) + K_\varsigma (z(t_k) - C_i^x \bar{\chi}_i(t_k) - C_j^s \bar{\varsigma}_j(t_k)), \\ \hat{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) &= \bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) - K_\varsigma \Lambda_\varsigma K_\varsigma^\top. \end{aligned}$$

В вычислении матриц K_ς и Λ_ς используются аппроксимация члена $C^x \bar{P}_{\chi\varsigma}(t_k)$:

$$\begin{aligned} K_\varsigma &= (\bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k) C^{s\top} + H^\top) \Lambda_\varsigma^{-1}, \\ \Lambda_\varsigma &= m' C^x \bar{P}_{\chi\chi}(t_k) C^{x\top} + \sum_{j_1, j_2=1}^{m'} C_{j_1}^s \bar{P}_{\varsigma_{j_1} \varsigma_{j_2}}(t_k) C_{j_2}^{s\top} + \sum_{j=1}^{m'} (H C_j^{s\top} + C_j^s H^\top + D_j W_j D_j^\top), \end{aligned}$$

где H строится следующим образом:

$$\begin{aligned} F_\chi &= \sum_{j=1}^{m'} (D_j W_j D_j^\top)^{-1}, \\ F_\varsigma &= \sum_{j=1}^{m'} (D_j W_j D_j^\top)^{-1} C_j^\varsigma, \\ H &= -(F_\chi^\top F_\chi)^{-1} F_\chi^\top F_\varsigma \bar{P}_{\varsigma\varsigma}(t_k). \end{aligned}$$

1.5 Алгоритм оценивания на основе СИ

Ключевое отличие алгоритмов, предложенных Henk Blom в статье [2], от алгоритма фильтрации Калмана состоит в том, что матричный коэффициент фильтра K отличен от нуля только для тех переменных, которые непосредственно участвуют в уравнении наблюдения для текущего измерения. Это приводит к идее, что следует находить оптимальный фильтр, заранее удовлетворяющий такому свойству, которое в таком случае выступает как некоторое ограничение в задаче оптимизации.

Пусть в рассматриваемый момент времени t_k движение с номером i измеряется радиолокатором с номером j . Уравнение наблюдения имеет вид

$$z(t_k) = C_i^\chi \chi_i(t_k) + C_j^\varsigma \varsigma_j(t_k) + D_j w_j.$$

Перегруппируем и переобозначим переменные, входящие в фазовый вектор ξ

$$\xi(t_k) = \begin{bmatrix} \chi_i \\ \varsigma_j \\ y \end{bmatrix}.$$

В переменную y входят параметры всех остальных движений, кроме i -го, и параметры всех остальных радиолокаторов, кроме j -го. Несмотря на замену, оставим прежние обозначения для матриц, присутствующих в уравнении динамики и уравнении наблюдения. Новые матрицы могут быть получены из старых путём перестановок строк и столбцов. Прогнозная и скорректированная матрицы ковариаций ошибок оценивания разделяются на следующие блоки:

$$\bar{P}(t_k) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{\chi_i \chi_i} & \bar{P}_{\chi_i \varsigma_j} & \bar{P}_{\chi_i y} \\ \bar{P}_{\varsigma_j \chi_i} & \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} & \bar{P}_{\varsigma_j y} \\ \bar{P}_{y \chi_i} & \bar{P}_{y \varsigma_j} & \bar{P}_{yy} \end{bmatrix}, \quad \hat{P}(t_k) = \begin{bmatrix} \hat{P}_{\chi_i \chi_i} & \hat{P}_{\chi_i \varsigma_j} & \hat{P}_{\chi_i y} \\ \hat{P}_{\varsigma_j \chi_i} & \hat{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} & \hat{P}_{\varsigma_j y} \\ \hat{P}_{y \chi_i} & \hat{P}_{y \varsigma_j} & \hat{P}_{yy} \end{bmatrix}.$$

Рассматриваем коэффициенты фильтра K следующего вида

$$K = \begin{bmatrix} K_{\chi_i} \\ K_{\varsigma_j} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

т. е. не воздействующие в ходе коррекции на часть переменных y . Подставляя такой вид K в формулу Йозефа (1.26), получаем следующие выражения для диагональных

блоков скорректированной матрицы ковариации \hat{P} :

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\chi_i \chi_i} &= (I - K_{\chi_i} C_i^\chi) \bar{P}_{\chi_i \chi_i} (I - K_{\chi_i} C_i^\chi)^\top + \\ &+ (I - K_{\chi_i} C_i^\chi) \bar{P}_{\chi_i \varsigma_j} C_j^\varsigma^\top K_{\chi_i}^\top + K_{\chi_i} C_j^\varsigma \bar{P}_{\varsigma_j \chi_i} (I - K_{\chi_i} C_i^\chi)^\top + \\ &+ K_{\chi_i} C_j^\varsigma \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} C_j^\varsigma^\top K_{\chi_i}^\top + K_{\chi_i} D_j W_j D_j^\top K_{\chi_i}^\top, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} &= (I - K_{\varsigma_j} C_j^\varsigma) \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} (I - K_{\varsigma_j} C_j^\varsigma)^\top + \\ &- (I - K_{\varsigma_j} C_j^\varsigma) \bar{P}_{\varsigma_j \chi_i} C_i^\chi^\top K_{\varsigma_j}^\top - K_{\varsigma_j} C_i^\chi \bar{P}_{\chi_i \varsigma_j} (I - K_{\chi_i} C_i^\chi)^\top + \\ &+ K_{\varsigma_j} C_i^\chi \bar{P}_{\chi_i \chi_i} C_i^\chi^\top K_{\varsigma_j}^\top + K_{\varsigma_j} D_j W_j D_j^\top K_{\varsigma_j}^\top, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\hat{P}_{yy} = \bar{P}_{yy}, \quad (1.42)$$

Диагональные блоки рассмотрены по следующей причине. Для многих систем с «разделённой» динамикой имеют смысл критерии вида (1.27), в которых каждая строка h^\top выделяет лишь те переменные, которые относятся к какому-нибудь одному набору параметров — либо χ_i , либо ς_j . Легко показать, что в таких случаях значение критерия зависит только от диагональных блоков. Отметим, что каждый блок зависит от своего коэффициента: блок для χ_i от K_{χ_i} , а блок для ς_j — от K_{ς_j} . Это позволяет оптимизировать значения K_{χ_i} и K_{ς_j} независимо. Так, для $h^\top = I$:

$$\min_{K_{\chi_i}, K_{\varsigma_j}} \text{tr} \left\{ \hat{P} \right\} = \min_{K_{\chi_i}} \text{tr} \left\{ \hat{P}_{\chi_i \chi_i} \right\} + \min_{K_{\varsigma_j}} \text{tr} \left\{ \hat{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} \right\}.$$

Соотношение (1.42) вместе с (1.39) подтверждает, что алгоритм фильтрации рассматриваемого типа не затрагивает остальные переменные, кроме χ_i и ς_j . Однако это само по себе не приводит к возможности распараллеливания вычислений. Рассмотрим блок ковариаций (1.40). Из вида формулы легко можно понять, что для корректного вычисления оптимального K_{χ_i} необходимо держать в памяти и всё время пересчитывать кросс-ковариации $\bar{P}_{\chi_i \varsigma_j}$, а значит и вычислять не только диагональные блоки, но и все $\hat{P}_{\chi_i \varsigma_j}$, что приводит к тем же самым трудностям, что и оптимальная фильтрация при помощи фильтра Калмана. Следовательно, требуется устранить влияние кросс-ковариаций $\bar{P}_{\chi_i \varsigma_j}$ на вычисления K_{χ_i} и при этом обеспечить не очень большое «загружение».

Рассмотрим блоки матрицы \bar{P} , участвующие в соотношении для блока $\hat{P}_{\chi_i \chi_i}$. Легко проверить, что

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{\chi_i \chi_i} & \bar{P}_{\chi_i \varsigma_j} \\ \bar{P}_{\varsigma_j \chi_i} & \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} (1 + \gamma) \bar{P}_{\chi_i \chi_i} & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} \end{bmatrix}$$

при любом выборе $\gamma > 0$. Знак \preceq означает порядок для симметричных матриц в смысле положительной определённости. Это матричное неравенство приводит к следующему матричному неравенству для $\hat{P}_{\chi_i \chi_i}$:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\chi_i \chi_i} &\preceq (1 + \gamma) (I - K_{\chi_i} C_i^\chi) \bar{P}_{\chi_i \chi_i} (I - K_{\chi_i} C_i^\chi)^\top + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) K_{\chi_i} C_j^\varsigma \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j} C_j^\varsigma^\top K_{\chi_i}^\top + K_{\chi_i} D_j W_j D_j^\top K_{\chi_i}^\top. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В работе [3] показано, что неравенство является существенно нестрогим, т. е. равенство достигается «на некоторых направлениях» в пространстве матриц, и неравенство не может быть равномерно улучшено.

Опираясь на оценку (1.43), легко предложить следующий алгоритм фильтрации. Пусть для момента времени t_{k-1} выполнено

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_{k-1}) &\preceq \hat{R}_{\chi_i \chi_i}(t_{k-1}), \\ \hat{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_{k-1}) &\preceq \hat{R}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_{k-1}).\end{aligned}$$

Тогда, основываясь на следующем свойстве

$$A \preceq B \implies CAC^T \preceq CBC^T$$

для произвольных неотрицательно определённых матриц A , B и произвольной матрицы C , а также на виде прогнозной матрицы ковариации (1.25), можно утверждать, что и

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &\preceq A_i \hat{R}_{\chi_i \chi_i}(t_{k-1}) A_i^T + B_i V_i^X B_i^T \triangleq \bar{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k), \\ \bar{P}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) &\preceq A_j^{\varsigma} \hat{R}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_{k-1}) A_j^{\varsigma T} + B_j^{\varsigma} V_j^{\varsigma} B_j^{\varsigma T} \triangleq \bar{R}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k).\end{aligned}$$

Следовательно, после воздействия коэффициента K_{χ_i} для блока $\hat{P}_{\chi_i \chi_i}$ будет справедливо:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &\preceq (1 + \gamma) (I - K_{\chi_i} C_i^X) \bar{R}_{\chi_i \chi_i} (I - K_{\chi_i} C_i^X)^T + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) K_{\chi_i} C_j^{\varsigma} \bar{R}_{\varsigma_j \varsigma_j} C_j^{\varsigma T} K_{\chi_i}^T + K_{\chi_i} D_j W_j D_j^T K_{\chi_i}^T.\end{aligned}\quad (1.44)$$

Далее, матрицу в правой части (1.44) можно выбрать исходя из минимума некоторого критерия, например следа, при этом получив новую оценку $\hat{R}_{\chi_i \chi_i}$. При минимизации следа путём варьирования K_{χ_i} получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}S^* &= (1 + \gamma) C_i^X \bar{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k) C_i^{X T} + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) C_j^{\varsigma} \bar{R}_{\varsigma_j \varsigma_j}(t_k) C_j^{\varsigma T} + D_j W_j D_j^T, \\ K_{\chi_i}^* &= (1 + \gamma) \bar{R}_{\chi_i \chi_i} C_i^{X T} S^{*-1}, \\ \hat{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k) &= (1 + \gamma) \left(\bar{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k) - (1 + \gamma) \bar{R}_{\chi_i \chi_i} C_i^{X T} S^{*-1} C_i^X \bar{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k) \right) = \\ &= (1 + \gamma) \bar{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k) - K_{\chi_i}^* S^* K_{\chi_i}^{* T}\end{aligned}\quad (1.45)$$

с условием

$$\hat{P}_{\chi_i \chi_i}(t_k) \preceq \hat{R}_{\chi_i \chi_i}(t_k).$$

Соотношения (1.45) справедливы для произвольного $\gamma > 0$. С помощью выбора γ также можно улучшить качество аппроксимации, минимизируя след $\hat{R}_{\chi_i \chi_i}$.

Аналогично можно вывести соотношения на оценку и коэффициент фильтра K_{ς_j} для ς_j . При этом можно пользоваться новой, независимо выбранной константой γ . В итоге получается алгоритм оценивания, который работает гарантированно, для произвольных матриц кросс-ковариаций $\bar{P}_{\chi \varsigma}$. В качестве дополнительных параметров, по которым производится вычисление (1.18) матричных коэффициентов фильтра, выступают матрицы $\bar{R}_{\chi_i \chi_i}$, $\hat{R}_{\chi_i \chi_i}$, $\bar{R}_{\varsigma_j \varsigma_j}$, $\hat{R}_{\varsigma_j \varsigma_j}$ для всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

По видимому, впервые алгоритмы, основанные на соотношениях, близких к (1.44), (1.45), были предложены в [4] и были названы CI — Covariance Intersection. Однако полное обоснование было получено лишь недавно, например, в работе [3].

1.6 Моделирование работы алгоритмов параллельной фильтрации

Литература

- [1] Бедин Д. А., Денисов А. П., Иванов А. Г., Федотов А. А., Черетаев И. В., Ганебный С. А., Васильев А. В. Одновременное определение координат движущегося ВС и коррекция систематических ошибок РЛС при помощи фильтра Калмана. 2015. Отчёт по Договору 610-15У. 33 с.
- [2] Blom, H. A. P., Van Doorn, B. A. Systematic Error Estimation in Multisensor Fusion Systems / Proceedings of SPIE — The International Society for Optical Engineering. Vol. 1954, Oct. 1993, pp. 450–461.
- [3] Reinhardt, M., Noack, B., Arambel, P. O., Hanebeck, U. D. Minimum Covariance Bounds for the Fusion under Unknown Correlations // Signal Processing Letters, IEEE. Vol. 22, Iss. 9, Sept. 2015, pp. 1210–1214.
- [4] Julier, S. J., Uhlmann, J. K. A Non-divergent Estimation Algorithm in the Presence of Unknown Correlations / Proceedings of Amer. Control Conf., vol. 4, 1997, pp. 2369–2373.
- [5] ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. Издание официальное. Москва, Госкомстандарт, 1980.
- [6] Пятко С.Г., Красов А.И. и др. Автоматизированные системы управления воздушным движением. Санкт-Петербург, Изд. Политехника, 2004.
- [7] Бедин Д.А., Беляков А.В., Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Строков К.В., Федотов А.А. Отчёт по договору №61/2007. Разработка алгоритмов и программ обработки и анализа информации в системе УВД (Этап 4). Том 2. Пакет алгоритмов для задачи восстановления траектории самолёта. 2008. 51 с.
- [8] Бедин Д.А., Беляков А.В., Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Методы и алгоритмы анализа, выделения и отсеивания недостоверных замеров радиолокационной информации. Восстановление траектории самолета по зашумленным замерам в движущемся окне. 2006, Отчёт по Договору 53/2005. 27 с.
- [9] Бедин Д.А., Беляков А.В., Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Строков К.В., Федотов А.А. Методы и алгоритмы анализа, выделения и отсеивания недостоверных замеров радиолокационной информации. Программный пакет алгоритмов восстановления траектории самолета по замерам с ошибкой. 2007, Отчёт по Договору 53/2005. 41 с.
- [10] Банди Б. Методы оптимизации (вводный курс). – М.: Радио и связь, 1988.