1. Hausübung

Jan Rüßing

H1 (Tower of Hanoi)

a)

```
DEF HanoiRec(n, i, j)
        WHEN n == 0
                return EMPTY ARRAY
        STRING[] moves;
        IS n == 1 DO:
                return (i, j)
        IF NOT DO:
                k == 6 - (i, j)
                A = HanoidRec(n-1, i, k)
                moves||(i, j)
                B = HanoiRec(n-1, k, j)
        return A || moves || B
```

b)

$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$ für n>0, für n=0 sind es 0 Züge

c)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2 \cdot T(n-1) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot T(n-2) + 1) + 1 \\
&= 2^2 \cdot T(n-2) + 2 + 1 \\
&= 2^2 \cdot (2 \cdot T(n-3) + 1) + 2 + 1 \\
&= 2^3 \cdot T(n-3) + 2^2 + 2 + 1 \\
\dots \\
&= 2^{n-1} \cdot T(n-(n-1)) + 2^{(n-1)-1} + \dots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} \cdot T(1) + 2^{n-1} - 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

e)

$a = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$

$b = 18.800.000.000 \cdot 60 = 1.128.000.000.000$

$c = a - b = 18.446.742.945.709.551.615$

$c/60/60/24/265 \approx 599.730.250.784$

Wir müssen erstmal nichts befürchten, da die Mönche erst in ca 600.000.000.000 Jahren fertig sein werden.

H2

a) Eine Partielle Ordnung ist Refl, Antis, Trans

Reflexivität: $(x_1, x_2) \trianglelefteq (x_1, x_2)$ <u>erfüllt</u>, da $x_1 = x_1$ und $x_2 = x_2$

Antisymm: $(x_1, y_1) \trianglelefteq (x_2, y_2) \wedge (x_2, y) \trianglelefteq (x_1, y_1)$ erfüllt:
Wenn $x_1 \leq x_2$ ist kann nicht gleichzeitig $x_2 \leq x_1$ gelten
es sei denn $x_1 = x_2$. Analog zu y

Transitiv: $(x_1, y_1) \trianglelefteq (x_2, y_2) \wedge (y_1, z_1) \trianglelefteq (y_2, z_2) = (x_1, z_1) \trianglelefteq (x_2, z_2)$
erfüllt: Wenn $(x_1, y_1) \trianglelefteq (x_2, y_2)$ und $(y_1, z_1) \trianglelefteq (y_2, z_2)$ gilt,
dann gilt $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ und $z_1 \leq z_2$. Das heißt, dass
auch automatisch gilt: $(x_1 \leq x_2) \wedge (z_1 \leq z_2)$, was bedeutet,
dass $(x_1, z_1) \trianglelefteq (x_2, z_2)$ gilt.

b)

Totalität: $(x_1, y_1) \trianglelefteq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \trianglelefteq (x_1, y_1)$

Gegenbeispiel: $(5, 20) \ntrianglelefteq (10, 15) \Rightarrow 5 < 10,\ 20 < 15$ ↯
$(10, 15) \ntrianglelefteq (5, 20) \Rightarrow 10 < 5,\ 15 < 20$ ↯

$\Rightarrow \trianglelefteq$ ist keine totale Ordnung

c) Sei P ein kleinstes Element von M. Dann gilt, dass es keinen Punkt gibt, zu dem er nicht in Relation steht. Damit ein Punkt nicht in Relat. zu P steht, muss er kleiner als P sein. Da P aber kleinstes Element ist, gibt es keine kleineren Punkte. Was heißt, das P das einzige Element ist, was $\trianglelefteq$ P ist, was eben die definition des minimalen Elements ist.

d)

Es gibt keine anderen Elemente die in Relation zu $(0,0)$ stehen, da für jedes $x \in M_0$ entweder $x<0$ und $y>0$ oder $x>0$ und $y<0$ gelten muss. Deshalb steht $(0,0)$ nur in Relation zu sich selbst $\Rightarrow$ $(0,0)$ minimales Element von M_0. Für alle anderen Elemente $\in M_0$ findet man immer ein Element welches in Relation dazu steht $\Rightarrow$ $(0,0)$ einziges Minimales Element.

Da für alle $x \in M_0 : x \neq (0,0)$ gilt, dass $(0,0) \not\trianglelefteq x$ ist $(0,0)$ kein kleinstes Element.