Programación Dinámica Dual Estocástica aplicado a modelos de despacho hidrotérmico

Janice Escobedo
Asesor: Ernesto Oré Albornoz

Universidad Nacional de Ingeniería

Agosto 25, 2023

Tabla de contenidos

Motivación

La disponibilidad de recursos y combustibles fósiles combinado con las consecuencias ambientales resultan en la producción de energía barata y la explotación de reservas disponibles.

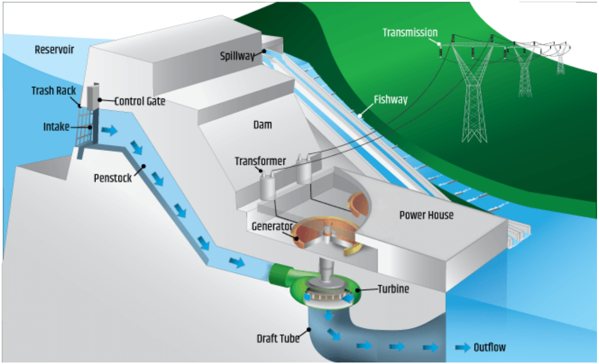


Figura: Planta Hidrotérmica

Tabla de contenidos

Despacho térmico

Primer modelo de Despacho Térmico

$$z = \min_{g_1,\dots,g_I} \sum_{i=1}^{I} c_i g_i \tag{1}$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{I} g_i \geq d$$

$$0 \leq g_i \leq \overline{g}_i \quad i = 1, ..., I$$

donde

Parámetros:

I	cantidad de generadores
c_i	costo unitario de operación del $i-$ésimo generador
$\overline{g}_i$	capacidad del $i-$ésimo generador
d	demanda del sistema

Variables:

g_i	energía producida por el $i-$ésimo generador

Observación:

El problema es factible si y solo si $0 \leq \sum_{i=1}^{I} \overline{g}_i - d$

Método de Baleriaux

1. Ordenar los costos de manera ascendente, además ordenar las generadoras por los índices ascendentes.
2. Calcular la energía no suplida considerando las primeras i generadoras

$$w_i = max\{0, d - \sum_{n=1}^{i} \overline{g}_n\} \quad , i = 1, ..., I$$

3. Calcular la energía producida por cada generador

$$g_i^* = w_{i-1} - w_i \quad , i = 1, ..., I$$

4. Calcular el costo operativo

$$z = \sum_{i=1}^{I} c_i g_i^*$$

Observación Si $w_i = 0$ para algún $i \in \{1, ..., I\}$ entonces $w_j = 0 \ , \forall \ j > i$.

Proposición

El Método de Baleriaux es equivalente a aplicar el Algoritmo Simplex del Dual para el Modelo 1

Proposición

Si el modelo 1 tiene solución, será única sí y solo sí existen al menos dos costos c_i y c_j iguales con $i \neq j$

Para evitar infactibilidad al primer modelo se añade una perturbación δ a la ecuación de demanda.

$$
\begin{aligned}
z = \min \sum_{i=1}^{I} c_i g_i + M \cdot \delta \\
s.a. \sum_{i=1}^{I} g_i + \delta = d \\
0 \leq g_i \leq \overline{g}_i \quad i = 1, ..., I \\
\delta \geq 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Proposición

Si el modelo 1 es factible y $\max\{c_i, i = 1, ..., I\} < M$ los problemas 1 y 2 tienen mismo valor optimal.

Tabla de contenidos

Programacion Dinámica

El modelo dinámico a optimizar tiene la estructura siguiente

$$
\begin{aligned}
\min_{d_1,\ldots,d_{T-1}} \ & \sum_{i=1}^{T-1} f_i(s_i, d_i) + f_T(s_T) \\
s.a.\ & s_{i+1} = t_i(s_i, d_i) \ \ \forall i \in \{1, \ldots, T-1\} \\
& d_i \in D_i(s_i), s_{i+1} \in S_{i+1} \ \ \forall i \in \{1, \ldots, T-1\}
\end{aligned}
$$

Principio de Optimalidad

Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión.

Funciones de Bellman

Entonces se pueden definir las funciones de Bellman.

$$v_T(s_T) = \min f_T(d_T, s_T)$$
$$s.a.\ d_T \in D_T$$

Para $k_0 \in \{1, ..., T-1\}$

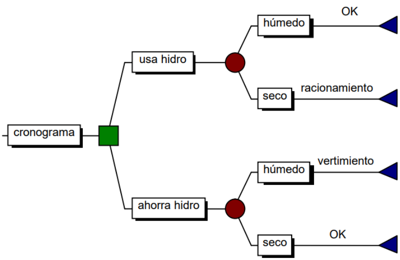
$$v_{k_0}(s) = \underset{(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \ldots, u_{T-1})}{min} \sum_{k=k_0}^{T-1} f_n(d_n, s_n) + f_T(s_T)$$
$$s_{k_0} = s,\ s_{k+1} = t_k(x_k, d_k),\ \ \forall k \in \{k_0, ..., T-1\}$$
$$d_k \in D_k(s_k),\ \ \forall k \in \{k_0, ..., T-1\}$$

Se desprende una técnica inductiva hacia atrás (también llamado "backward induction").

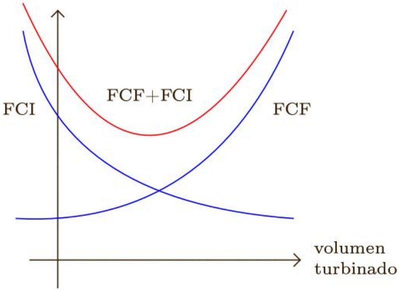
$$v_n(s_n) = \underset{d_n}{min} \ \{f_n(d_n, s_n) + v_{n+1}(s_{n+1})\} \tag{3}$$
$$s.a.\ s_{n+1} = t_n(s_n, d_n)$$
$$d_n \in D_n(s_n),\ s_{n+1} \in S_{n+1}$$

Aplicación al Despacho Hidrotérmico

Planeamiento y arquitectura



(a) Toma de decisiones para el despacho hidrotérmico



(b) Función de Costo Inmediato y Futuro

Aplicación al despacho hidrotérmico

El modelo hidrotérmico se formula como sigue

$$
\begin{aligned}
z^* = \; & \min_{u_t, s_t} \sum_{t=1}^{T} c_t(u_t) \qquad (4)\\
\text{s.t.} \; & v_{t+1} = v_t - u_t - s_t + a_t, \; t \in \{1, 2, ..., T-1\} \\
& 0 \leq v_{t+1} \leq \overline{v}, \; t \in \{1, 2, ..., T-1\} \\
& 0 \leq u_t \leq \overline{u}, 0 \leq s_t \quad \forall t \in \{1, 2, ..., T\}
\end{aligned}
$$

con $c_t(u_t)$ siendo el costo de complementación térmica y definido por

$$
\begin{aligned}
c_t(u_t) = & \min_{g_t(1),\ldots,g_t(J),\delta} \sum_{j=1}^{J} c_t(j) \cdot g_t(j) + c_\delta \cdot \delta \\
& s.a. \; \sum_{j=1}^{J} g_t(j) + \delta + \rho u_t = d_t, \;\; t = 1, ..., T \\
& 0 \leq g_t(j) \leq \overline{g}(j), \;\; j = 1, ..., J, \;\; t = 1, ..., T \\
& 0 \leq \delta
\end{aligned}
$$

Considerando a $\{v_t^1, v_t^2, ..., v_t^M\}$ los almacenamientos para la etapa t, la ecuación de recursión de Bellman es

$$\begin{aligned} \alpha_t(v_t^m) = \min_{u_t, s_t} \quad & c_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \\ s.a. \quad & v_{t+1} = v_t^m - u_t - s_t + a_t \\ & 0 \leq v_{t+1} \leq \overline{v} \\ & 0 \leq u_t \leq \overline{u} \\ & s_t \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

La función $\alpha_t(v_t)$ se halla interpolando los valores $\{\alpha_t(v_t^m), m = 1, ..., M\}$

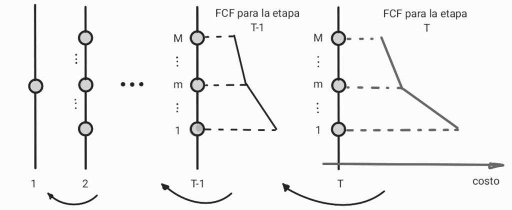


Figura: Formación de Funciones de Costo Futuro

Ejemplo

Consideremos un sistema de un planeamiento de 4 meses compuesto por una planta hidráulica y dos plantas térmicas cuyas características se muestran en las tablas.

Almacenamiento máximo (hm^3)	Almacenamiento mínimo (hm^3)	Turninado máximo $\overline{u}$ (hm^3)	Coeficiente de producción (MW−mes$/hm^3$)
120	20	50	0.9

Tabla: Características de la planta hidraulica

Térmica	Máxima generación (MW)	Costo de operación ($\$/MW - mes$)
T_1	20	10
T_2	25	20

Tabla: Características de las plantas térmicas

La demanda es de $45MW$−mes para todas las etapas y la penalidad por fallo al suplir la demanda, que es representada por una planta térmica artificial, es de $1000\$/MW$−mes. Además, los caudales para cada etapa son $15, 18, 17, 14$ $hm3/mes$. En el embalse se considerarán 5 niveles los cuales son $0\%, 25\%, 50\%, 75\%, 100\%$.

Resultados

Reemplazando los parámetros y usando la implementación en el Lenguaje Gams, se obtiene la función de costo para la primera etapa.

Almacenamiento (%)	v_1	0	25	50	75	100
Caudal (hm^3)	a_1	15	15	15	15	15
Decisión Optimal	v_2	0	12.2	37.2	62.2	75
	u_2	15	27.8	27.8	27.8	40
	s_1	0	0	0	0	0
	$g_1(1)$	20	20	20	20	9
	$g_1(2)$	11.5	0	0	0	0
	δ	0	0	0	0	0
Costo inmediato ($)		430.0	200.0	200.0	200.0	90.0
Costo futuro ($)		1218.0	1015.104	645.036	359.686	234.0
Costo optimal ($)		1648.0	1215.104	845.036	559.686	324.0

Figura: Resultados etapa 1

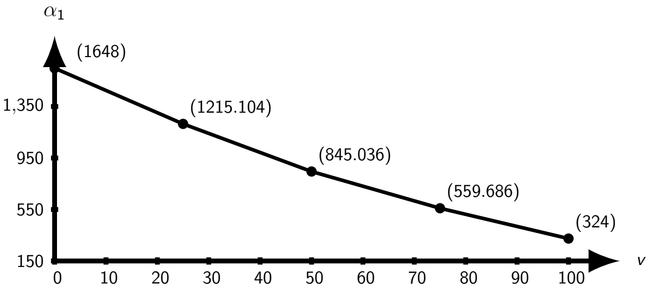


Figura: Función de costo futuro en la etapa 1

Tabla de contenidos

Descomposición de Benders

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \underset{x,y}{\text{minimize}} \quad & f(x) + d^t y \\ s.a. \quad & F(x) + By \geq e \qquad\qquad (P) \\ & x \in \mathcal{X} \\ & x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Sea $\alpha : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, conocida como la función valor, definida como

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \min_{y} \quad & d^t y \\ s.a. \quad & By \geq e - F(x) \qquad (Sub) \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\operatorname{dom}(\alpha) = \{x : \exists\, y, F(x) + By \geq e, y \geq 0\}$.

Proposición

El problema (P) es equivalente a

$$\begin{aligned} \min \ & f(x)+\alpha(x) \\ s.a. \ & x \in \mathcal{X} \qquad (\overline{P}) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

En particular $(x^*, y^*) \in sol(P)$ si y solo si $x^* \in sol(\overline{P})$ y $y^* \in sol(Sub)$

Proposición

Cuando $F(x)$ sea convexa y $dom(\alpha)$ es no vacío entonces la función α es convexa.

Consideremos el dual del Subproblema

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x) = \max_{\lambda} \ & (e - F(x))^t \lambda \\ s.a. \ & B^t \lambda \leq d \qquad (D) \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Denotemos al conjunto factible de (D) por $S = \{\lambda, B^t \lambda \leq d, \lambda \geq 0\}$

Asumiremos a partir de ahora que $S \neq \varnothing$. Además podemos ver que S es un poliedro, entonces

$$S = conv\{\lambda_1, ..., \lambda_r\} + cone\{d_1, ..., d_s\}$$

Proposición

Se cumple que $\alpha(x) = \sigma_S(e - F(x))$, siendo

$$\sigma_S(\overline{v}) = \begin{cases} \max\{\lambda^t \, \overline{v} \ / \ i = 1, ..., r\} & , \text{si} \quad \overline{v} \in K \\ +\infty & , \text{si} \quad \overline{v} \notin K \end{cases} \tag{8}$$

con $K = \{\overline{v} \ / \ d^t \, \overline{v} \geq 0 \ \forall i = 1, ..., s\}$

Así se puede concluir que si $F(x)$ es lineal entonces $\alpha(x)$ es lineal por partes y convexa.

El problema maestro se reescribe como

$$\begin{aligned}\min_{x,\alpha}\ & c^t x + \alpha \\ s.a.\ & x \in \mathcal{X} \\ & \alpha \geq (e - F(x))^t \lambda^i \quad i = 1, ..., r \\ & 0 \geq (e - F(x))^t d^j \quad j = 1, ..., s \\ & x \geq 0\end{aligned} \tag{9}$$

Considerando $U' \subset \{\lambda^1, ..., \lambda^r\}$ y $V' \subset \{d^1, ..., d^s\}$.

$$\begin{aligned}\min_{x,\alpha}\ & c^t x + \alpha \\ s.a.\ & x \in \mathcal{X}, x \geq 0 \\ & \alpha \geq (e - F(x))^t \lambda^i \quad \lambda^i \in U' \\ & 0 \geq (e - F(x))^t d^j \quad d^j \in V'\end{aligned} \tag{10}$$

Teorema

Sea $(\overline{x}, \overline{\alpha})$ una solución optimal del Problema Maestro restricto. Si λ^* es el vértice optimal de la solución y z^* el valor optimal del Dual $\alpha(x)$ entonces

(*i*) Si $\overline{\alpha} > z^*$ entonces λ^* es un nuevo vértice generado

(*ii*) Si $\overline{\alpha} = z^*$, entonces $(\overline{x}, \overline{\alpha})$ es una solución optimal del Problema Maestro.

Si $\alpha(\overline{x})$ es no acotado entonces una nueva dirección extrema es dada.

Convergencia

El Subproblema dual tiene finitos puntos extremos y direcciones extremas por lo que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones. Además la cota inferior es monótomamente creciente.

Algorithm .

Paso 1: Hacemos $k = 1$, fijamos $z_l = 0$ y $z_u = \infty$.

Paso 2: Resolver el Problema Maestro fijando $y = 0$. Si la solución es infactible, **PARAR**; caso contrario, almacenamos $x = x^k$

Paso 3: Resolvemos el Subproblema

Paso 3.1: Si tiene solución infactible entonces el problema principal es infactible o no acotado, **PARAR.**

Paso 3.2: Si la solución del subproblema en la iteración k con la variable dual λ^* y con valor optimal z^*.

Paso 3.2.1: Si $\overline{\alpha} > z^*$. Actualizar Problema Maestro añadiendo una restricción, asociado a un corte optimal, correspondiente al vertice λ^*

$$\alpha \geq (e - Ax)^t \lambda^i$$

e ir al **Paso 5**

Paso 3.2.2: Si $\overline{\alpha} = z^*$, **PARAR**

Paso 3.3: Si el problema es no acotado, actualizamos Problema Maestro introduciendo el corte factible asociado a una dirección extrema

$$(e - Ax)^t \lambda^q \leq 0, \quad q \in V$$

e ir al Paso 5.

Paso 4: Convergencia (brecha entre Problema Maestro y Subproblema)

Si $\overline{\alpha} - z^* \leq \varepsilon$, **PARAR**, en otro caso continuar con **Paso 5**.

Paso 5: Actualizar iteración $k \leftarrow k + 1$ y resolver el Problema Maestro Restricto. Si la solución es infactible el algoritmo se detiene; caso contrario, almacenamos el valor optimo es $(x^k, \overline{\alpha})$ y volvemos al **Paso 3**

Tabla de contenidos

Programación Estocástica

Un problema estocástico de una etapa viene dado como sigue:

$$\min_{x \in X} \{ f(x) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}} F(x, \xi) \}$$

Y su modelo determinístico asociado es como sigue

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{S} p_{\xi_s} \cdot F(x, \xi_s)$$
$$s.a.\ x \in \mathcal{X}(\xi_s)\ \forall s = 1, ..., S$$

donde $p_{\xi_s} = \mathbb{P}(\xi = \xi_s)$

Aplicación al despacho Térmico

$$z = \min \sum_{k=1}^{K} p_k \sum_{i=1}^{J} q_j \left(\sum_{i=1}^{I} c_i g_{ijk} + c_\delta \cdot \delta_{jk} \right) \tag{11}$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{I} g_{ijk} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, ..., J, \quad k = 1, ..., K \tag{12}$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \overline{g}_{ik} \quad i = 1, ..., I \quad j = 1, ..., J, \quad k = 1, ..., K \tag{13}$$

$$\delta_{jk} \geq 0$$

donde

Variables:

g_{ijk} energía producida por el $i-$ésimo generador en el nivel de demanda j, escenario k

δ_{jk} energía no satisfechan del nivel j, escenario k debido a la insuficiencia de generación

Aplicación al despacho Hidrotérmico

$$z = \min \sum_{k=1}^{K} p_k \sum_{j=1}^{J} q_j \left(\sum_{i=1}^{I} c_i g_{ijk} + c_\delta \cdot \delta_{jk} \right) \tag{14}$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{I} g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j \;\; j = 1, ..., J, \;\; k = 1, ..., K$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \overline{g}_{ik} \;\; i = 1, ..., I \;\; j = 1, ..., J, \;\; k = 1, ..., K$$

$$0 \leq h_{jk} \leq \overline{h}, \;\; j = 1, ..., J, \;\; k = 1, ..., K$$

$$\sum_{j=1}^{J} q_j h_{jk} \leq E, \;\; k = 1, ..., K$$

$$\delta_{jk} \geq 0 \;\; j = 1, ..., J, \;\; k = 1, ..., K$$

donde

g_{ijk} energía producida por el $i-$ésimo generador en el nivel de demanda j, escenario k

δ_{jk} energía no satisfechan del nivel j, escenario k debido a la insuficiencia de generación

h_{jk} generación de la hidroeléctrica en el nivel de demanda j, escenario k

Problemas de multietapa

Un problema de programación estocástica con T etapas puede ser escrita como sigue.

$$\min_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \mathbb{E}_{\xi_2|\xi_{[1]}} \Big[\min_{x_2 \in X_2(x_1,\xi_2)} f_2(x_2,\xi_2) + \mathbb{E}_{\xi_3|\xi_{[2]}} \Big[\min_{x_3 \in X_3(x_2,\xi_3)} f_3(x_3,\xi_3) + \ldots \tag{15}$$

$$+ \mathbb{E}_{\xi_T|\xi_{[T-1]}} \Big[\min_{x_T \in X_T(x_{T-1},\xi_T)} f_T(x_T,\xi_T) \Big]\Big]\Big]$$

donde $\mathbb{E}_{X|Y}$ representa la esperanza condicional de X dado Y. Además, el proceso de decisiones

$$x_1 \longrightarrow \xi_2 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \xi_3 \longrightarrow \quad \ldots \quad \longrightarrow \xi_T \longrightarrow x_T \tag{16}$$

Programación Estocástica Multietapa

El problema lineal de un programa estocástico con T etapas se puede escribir como sigue

$$
\begin{aligned}
v^* = \min_{x_1} \; & c_1^T x_1 + \mathbb{E}_{\xi_2|\xi_{[1]}} \Bigg[\min_{x_2} c_2(\xi_2)^T x_2(\xi_2) + \dots \\
& \qquad + \mathbb{E}_{\xi_T|\xi_{[T-1]}} \Big[\min_{x_T} c_T(\xi_T)^T x_T(\xi_T) \Big] \Bigg] \\
s.a. \; & W_1 x_1 = h_1 \\
& A_1(\xi_2)x_1 + W_2(\xi_2)x_2(\xi_2) = h_2(\xi_2) \\
& A_2(\xi_3)x_2(\xi_2) + W_3(\xi_3)x_3(\xi_3) = h_3(\xi_3) \qquad (P) \\
& \quad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots \\
& A_{T-1}(\xi_T)x_{T-1}(\xi_{T-1}) + W_T(\xi_T)x_T(\xi_T) = h_T(\xi_T) \\
& x_1, x_2(\xi_2), \dots, x_T(\xi) \geq 0
\end{aligned}
$$

los datos son $\xi_t = (c_t, T_1, W_t, h_t)$

Las decisiones de recurso $x_t(\xi_{[t]})$ puede ser tomada con conocimiento de la historia del proceso de datos de la etapa 1 hasta la t, que se denota por $\xi_{[t]} = (\xi_1, ..., \xi_t)$. Usando las ecuaciones de Bellman el problema se reformula como

$$Q_t(x_{t-1}, \xi_{[t-1]}, \xi_t) = \begin{cases} \min\limits_{x_t} & c_t^T(\xi_t)x_t + \mathcal{Q}_{t+1}(x_t, \xi_{[t]}) \\ \text{s.a.} & W_t(\xi_t)x_t = h_t(\xi_t) - A_{t-1}(\xi_t)x_{t-1} \\ & x_t \geq 0 \end{cases} \tag{17}$$

donde

$$\mathcal{Q}_{t+1}(x_t, \xi_{[t]}) := \mathbb{E}_{\xi_{t+1}|\xi_{[t]}}\left[Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t]}, \xi_{t+1})\right] \tag{18}$$

con $\mathcal{Q}_{T+1}(x_T, \xi_{[T]}) \equiv 0$. A $Q_t(\cdot, \cdot)$ se le llama función valor y a $\mathcal{Q}_t(\cdot, \cdot)$ se le llama función valor esperada, función de costo futuro o función de recurso. Para la primera etapa obtenemos el valor óptimo

$$v^* = \begin{cases} \min\limits_{x_1} & c_1^T x_1 + \mathcal{Q}_1(x_1, \xi_{[1]}) \\ \text{s.a.} & W_1 x_1 = h_1 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

Para asegurar la existencia de soluciones factibles en el problema de optimización

Suposición 1

El problema (P) tiene recurso relativamente completo; es decir, para cualquier x_{t-1} factible para la etapa $t-1$, el subproblema de la etapa t es factible para cada realización de ξ_t de forma casi segura.

Suposición 2

Existe un número finito de realizaciones de ξ_t para cada $t = 2, ..., T$

Suposición 3

Las distribuciones de probabilidad F_ξ del proceso $(\xi)_{t=1}^{T}$ es conocida.

Suposición 4

Las distribuciones de probabilidad F_ξ del proceso $(\xi)_{t=1}^{T}$ no es dependiente de la politica escogida.

Aplicación al despacho Hidrotérmico

El modelo hidrotérmico se formula como sigue

$$z^* = \min_{u_t, s_t} \mathbb{E}\left[c_1(u_1) + \mathbb{E}\left[c_2(u_2) + \ldots + \mathbb{E}\left[c_T(u_T)\right]\right]\right] \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & v_{t+1} = v_t - u_t - s_t + a_t, \;\; t \in \{1, 2, \ldots, T\} \\ & 0 \leq v_{t+1} \leq \overline{v} \;\; \forall t \in \{1, 2, \ldots, T\} \\ & 0 \leq u_t \leq \overline{u}, \;\; 0 \leq s_t \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, T\} \end{aligned} \tag{21}$$

con $c_t(u_t)$ el costo de complementación térmica definido como

$$c_t(u_t) = \min_{g_t(1),\ldots,g_t(J),\delta} \sum_{j=1}^{J} c_t(j) \cdot g_t(j) + c_\delta \cdot \delta$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{J} g_t(j) + \delta + \rho u_t = d_t, \;\; t = 1, \ldots, T$$

$$g_t(j) \leq \overline{g}(j), \;\; j = 1, \ldots, J, \;\; t = 1, \ldots, T$$

Entonces el problema se puede representar como

$$
\begin{aligned}
\alpha_t^k(v_t^m) = \min_{u_{t,s}} \quad & c_t(u_{t,s}) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \\
s.a. \quad & v_{t+1} = v_t^m - u_{t,s} - s_t + a_t^m \\
& 0 \leq v_{t+1} \leq \overline{v} \\
& 0 \leq u_{t,s} \leq \overline{u} \\
& s_{t,s} \geq 0
\end{aligned}
$$

Luego calculamos los costos operativos considerando todos los escenarios de caudales

$$
\alpha_t(v_t^m) = \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot \alpha_t^k(v_t^m)
$$

Para finalmente construir la función de costo futuro, $\alpha_t(v_t)$, interpolamos los valores de $\{\alpha_t(v_t^m); m = 1, ..., M\}$

Ejemplo

Si se tienen los datos de las tablas 1 y 2, donde los caudales son ahora en relación a la siguiente tabla

Etapa	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
1	15	20	17
2	25	18	19
3	17	13	15
4	14	12	16

Reemplazando los parámetros y usando la implementación en el Lenguaje Gams, se obtiene la función de costo para la primera etapa.

Almac. v_2 (%)		0			25			50			100		
Caudal (hm^3)		15	20	17	15	20	17	15	20	17	15	20	17
Decisión Optimal	v_2	0	0	47.2	0	0	47.2	40.2	75	68	40.2	75	68
	u_2	15	20	17	27.8	27.8	27.8	27.8	27.8	27.8	40	45	42
	s_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$g_1(1)$	20	20	20	20	20	20	20	20	20	9	4.5	7.2
	$g_1(2)$	11.5	7	9.7	11.5	0	0	0	0	0	0	0	0
	δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CI		430.0	340	394	430.0	200	200.0	200.0	200.0	200.0	90	45	72
CF+CI		1636.0	1546.0	1600	1203.2737	1120.3402	1170.1003	834.7389	770.6779	809.1145	318.0	273.0	300
COP ($)		1594.0			1164.571			804.844			297.0		

Figura: Resultados etapa 1

Resutltados

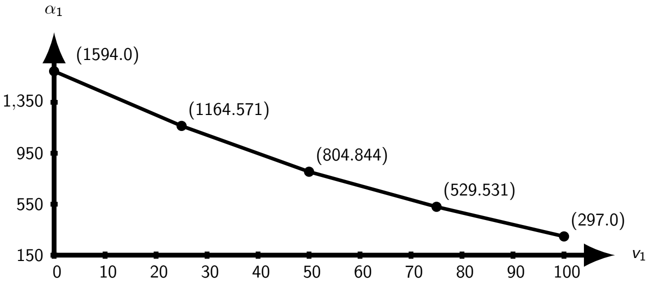


Figura: Función de costo futuro en la etapa 1

Tabla de contenidos

Suposición 1

La incertidumbre de resolver el problema (P) es independiente por etapas; es decir, es independiente de la historia $\xi_{[t-1]}$ del proceso

Pase hacia adelante

Los índices de $k \in K$ denotan los escenarios muestreados con $K \subset S$ y $K \ll S$ Los subproblemas a resolver para la iteración i, etapa $t = 2, ..., T$ y muestreo k se denotan

$$\underline{Q}_t^i(x_{t-1}^{ik}, \xi_t^k) = \begin{cases} \min\limits_{x_t} & c_t^T(\xi_t^k)x_t + \mathfrak{Q}_{t+1}^i(x_t) \\ \text{s.a.} & W_t(\xi_t^k)x_t = h_t(\xi_t^k) - A_{t-1}(\xi_t^k)x_{t-1}^{ik} \\ & x_t \geq 0 \end{cases} \tag{22}$$

Pase hacia adelante

Intervalo de confianza

La cota inferior es

$$\overline{v}^i_K = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \underbrace{\sum_{t=1}^{T} c_t^T(\xi_t^k) x_t^{ik}}_{=:v^i(\xi^k)} \tag{23}$$

Así un intervalo de confianza es

$$\left[\overline{v}^i_K - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma^i_{\overline{v},K}}{\sqrt{|K|}}, \overline{v}^i_K + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma^i_{\overline{v},K}}{\sqrt{|K|}} \right]$$

donde $z_{(1-\alpha/2)}$ representa el cuantil de la distribución Normal estandar, y $(\sigma^i_{\overline{v},K})^2 := \frac{1}{|K|-1} \sum_{k \in K} (v^i(\xi^k) - \overline{v}^i_K)^2$

Pase hacia atrás

Para todas las soluciones prueba $x_{t-1}^{ik}, k \in K$ los siguientes subproblemas son resueltos para todas posibles realizaciones de la etapa t (aperturas hacia atrás) $\xi_{tj}^{k} \equiv \xi_{tj}, j = 1, ..., q_t$:

$$\underline{Q}_t^{i+1}(x_{t-1}^{ik}, \xi_{tj}) = \begin{cases} \min\limits_{x_t} & c_t^T(\xi_{tj})x_t + \mathfrak{Q}_{t+1}^{i+1}(x_t) \\ \text{s.a.} & W_t(\xi_{tj})x_t = h_t(\xi_{tj}) - A_{t-1}(\xi_{tj})x_{t-1}^{ik} \\ & x_t \geq 0 \end{cases} \tag{24}$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{x_t, \theta_{t+1}} & c_t^T(\xi_{tj})x_t + \theta_{t+1} \\ \text{s.a.} & W_t(\xi_{tj})x_t = h_t(\xi_{tj}) - A_{t-1}(\xi_{tj})x_{t-1}^{ik} \\ & \theta_{t+1} \geq (\beta_{t+1}^r)^T x_t + \alpha_{t+1}^r, \quad r \in R_{t+1} \\ & x_t \geq 0 \end{cases} \tag{25}$$

Considerando $\mathfrak{Q}_{T+1}(\cdot) \equiv 0$

Sea π_t^{ij} y $\rho_t^{ijr}, r \in R_{t+1}$ denota los vectores optimales duales de los problemas anteriores si tuviesen.

$$\beta_t := -\sum_{j=1}^{q_t} p_{tj} (\pi_t^{ij})^T A_{t-1}(\xi_{tj})$$

y

$$\alpha_t := \sum_{j=1}^{q_t} p_{tj} \left((\pi_t^{ij})^T h_t(\xi_{tj}) + \sum_{r \in R_{t+1}} \rho_t^{ijr} \alpha_{t+1}^r \right)$$

Así, el corte es dado por

$$\mathcal{Q}_t x_{t-1} \geq \alpha_t + \beta_t^T x_{t-1}$$

para todo x_{t-1}.

Ejemplo

Considerando los datos del problema de Programación Estocástica Dinámica con un volumen inicial de 25, nuestro problema queda

```julia
# Building the subproblem for each node
function subproblem_builder(subproblem::Model, node::Int)
    # State variables: volume
    @variable(subproblem, 0 <= volume <= 100, SDDP.State, initial_value = 25)
    # Decition variables:
    @variables(subproblem, begin
        thermal_generation1 >= 0
        thermal_generation2 >= 0
        hydro_generation >= 0
        hydro_spill >= 0
    end)
    # Inflow as a random variable
    @variable(subproblem, inflow)
    P = [1 / 3, 1 / 3, 1 / 3] # probability wich case occur
    Inflows = [[15.0,20.0,17.0],[25.0,18.0,19],
                  [17.0,13.0,15.0],[14.0,12.0,16.0]]
    # omega is a vector of realizations
    SDDP.parameterize(subproblem, Inflows[node], P) do ω
        return JuMP.fix(inflow, ω)
    end
```

Figura: Construcción 1

```
    # Transition function and constraints
    @constraints(
        subproblem,
        begin
            # hydric balance
            volume.out == volume.in - hydro_generation - hydro_spill + inflow
            # nodal balance
            demand_constraint, 0.9 * hydro_generation + thermal_generation1 + thermal_generation2 == 45
            thermal_generation1 <= 20
            thermal_generation2 <= 25
            hydro_generation <= 50
        end
    )
    # Stage-objective
    @stageobjective(subproblem, 10 * thermal_generation1 + 20 * thermal_generation2)
    return subproblem
end  subproblem_builder (generic function with 1 method)

# Construct the model
model = SDDP.LinearPolicyGraph(
    subproblem_builder,
    stages = 4,
    sense = :Min,
    lower_bound = 0.0, # we cannot incur in negative cost
    optimizer = HiGHS.Optimizer, # solver
)  A policy graph with 4 nodes.
```

Figura: Construcción 2

```
# Training our policy
SDDP.train(model; iteration_limit = 20)  ✓

# Get a decision rule
rule = SDDP.DecisionRule(model; node = 1)  A decision rule for node 1
# rule
# Evaluating a decision rule
solution = SDDP.evaluate(
    rule;
    incoming_state = Dict(:volume => 25.0),
    noise = 50.0,
    controls_to_record = [:hydro_generation, :thermal_generation1, :thermal_generation2],
)  (stage_objective = 200.0, outgoing_state = Dict(:volume => 47.22222222222222), controls = Dict(:the…
```

Figura: Entrenamiento

	$c(u_1)$	$g_1(1)$	$g_1(2)$	u_1
Valores	200	20	0	27.8

```julia
# Get the outgoing volume
outgoing_volume = map(simulations[1]) do node
    return node[:volume].out
end | 4-element Vector{Float64}:

thermal_generation = map(simulations[1]) do node
    return node[:thermal_generation1], node[:thermal_generation2]
end | 4-element Vector{Tuple{Float64, Float64}}:
```

Figura: Resultados de la simulación

Etapa	$vol.out$	$g_t(1)$	$g_t(2)$
1	25.3	20	11.8
2	22.5	20	6.3
3	11.7	20	3.6
4	0	20	0

Con un intervalo de confianza de

$$(1124.74 - 16.617954730734084, 1124.74 + 16.617954730734084)$$

y una cota inferior de 1144.0

Conclusiones

1. Para un despacho Térmico el método de Baleriaux y el algoritmo Simplex Dual son equivalentes.
2. El algoritmo de Bender resulta un algoritmo de descomposición en la cual aproxima por medio de cartas a la función valor y con información de su dual.
3. El algoritmo SDDP toma en cuenta independencia de la incertidumbre por etapa, aprovecha la aproximación a la media muestral y toma muestras por etapa en lugar de considerar todos los escenarios con lo cual logra reducir la dimensionalidad. Además se aproxima, con cierta confianza, a la solución para un planeamiento de T etapas mediante los cortes hallados por información de un subproblema Dual.