一维非线性方程的求解

Janice_zh

浙江大学

July 4, 2022

目录

引言

一维非线性方程： $f(x) = 0$

· 对于一维低阶线性方程，由公式法或其他方法易得方程的根

· 阶数较高时，很难直接利用公式法求解，考虑迭代法

解法分类

下对求解一维非线性方程的迭代法进行分类：

$$\begin{cases} rootbraketing \begin{cases} bisection \\ falsepos \\ Brent \end{cases} \\ rootpolishing \begin{cases} Newton \\ secant \\ steffenson \end{cases} \end{cases}$$

算法实现

二分法：
给定可能解区间，每次取中点二分进行迭代。是最简单的一种迭代方式，线性收敛。同时要求给定区间端点的函数值异号，且不能处理偶数重根的情况。
牛顿法：
不断迭代近似解，切线与 x 轴的交点迭代成为新的近似解。单根二次收敛，复根线性收敛。求解效率与准确度比较依赖初始近似解的选取。
secant 法：
牛顿法的简化，从第二步开始用数值估计替代导数。多重根线性收敛。适合在根附近导数无明显变化的函数方程，依赖原方程的特点与初始近似解的选取。

收敛性比较

- 分别用二分法，牛顿法，secant 法求解 $x^2 - 5 = 0$。
- 一般来讲，牛顿法与 secant 法相对于二分法，收敛性更强，收敛速度更快，所得解精度更高

Examples

下用牛顿法实现不同式子的求解。求解时应选取合适的初始近似解。

Example1: 求解 $2x^2 + 4x - 3 = 0$

```
using newton method
iter            root          err    err(est)
   1       2.2083333 -0.0277346 -2.7916667
   2       0.9937771 -1.2422909 -1.2145563
   3       0.6238393 -1.6122287 -0.3699378
   4       0.5817003 -1.6543677 -0.0421390
Converged:
   5       0.5811389 -1.6549290 -0.0005613
```

Example2: 求解 $x^2 + 5 = 0$

(注：选取不当的初始估计解会造成无法求解)

总结

利用二分法、牛顿法、secant 法等我们可以实现对一维非线性方程的求解。在求解过程中需注意选取合适的解区间或初始近似解。同时，给定同一方程时，不同的方法对应不同的迭代速度，我们可以结合给定方程的性质，选取合适的方法进行求解，从而获得更高的效率与更精确的结果。

致谢

Thanks!