

作业四：Mandelbrot Set 的生成和探索

Janice_zh

July 4, 2022

目录

1	引言	1
2	问题的背景介绍	2
3	数学理论	2
4	算法	2
5	数值算例	3
6	结论	4

摘要

本文从 Mandelbrot set 的背景出发，解析 Mandelbrot set 的数学原理与算法，通过修改参数深入探索 Mandelbrot set，并通过代码和图片重现 Mandelbrot set。

1 引言

Mandelbrot set 的诞生是人们在数学计算领域的一大创新与突破。简洁的代码背后蕴含着重要数学定理与科学探索方法，给后人以无限启示，值得探究。

2 问题的背景介绍

曼德博集合 (Mandelbrot set, 或译为曼德布洛特复数集合) 是一种在复平面上组成分形的点的集合, 以数学家本华·曼德博的名字命名, 由复二次多项式迭代形成。

3 数学理论

Theorem: The orbit of 0 tends to infinity if and only if at some point it has modulus >2 . [1]

定义: 曼德博集合可以用复二次多项式来定义:

$$f(z) = z^2 + c, \quad c \quad (1)$$

从 $z=0$ 开始对 $f(z)$ 进行迭代:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$z_0 = 0.$$

$$z_1 = z_0^2 + c = c.$$

$$z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c.$$

...

不同的参数可能使迭代值的模逐渐发散到无限大, 也可能收敛在有限的区域内。曼德博集合就是使其不扩散的所有复数的集合。

4 算法

```
Choose a maximal iteration number N
For each pixel p of the image:
  Let c be the complex number represented by p
  Let z be a complex variable
  Set z to 0
  Do the following N times:
```

```
If  $|z| > 2$  then color the pixel white, end this loop prematurely, go to the next pixel  
Otherwise replace  $z$  by  $z*z+c$   
If the loop above reached its natural end: color the pixel  $p$  in black  
Go to the next pixel
```

5 数值算例

当 $N = 20$, 得到的图像如图所示:

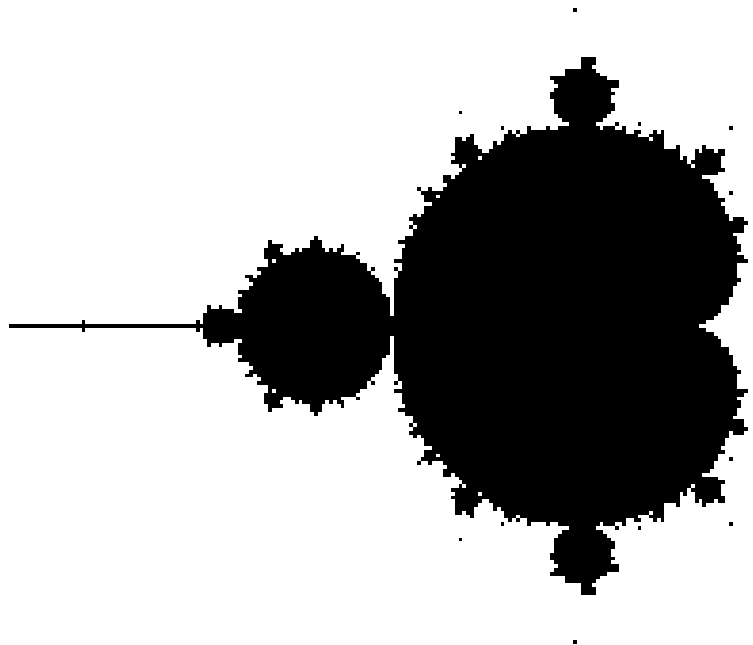


Figure 1: $N=20$

改变迭代次数 N , 会得到不同的图像。

6 结论

将曼德博集合无限放大都能够有精妙的细节在内，而这瑰丽的图案仅仅由一个简单的公式生成。因此有人认为曼德博集合是“人类有史以来做出的最奇异、最瑰丽的几何图形”，曾被称为“上帝的指纹”。

References

- [1] R. Kufrin, “Perfsuite: An accessible, open source performance analysis environment for linux,” in *6th International Conference on Linux Clusters: The HPC Revolution*, vol. 151. Citeseer, 2005, p. 05.