

Symulacja ruchu drogowego

Michał Żelasko

Jakub Janicki

9 kwietnia 2023

Spis treści

1	Wstęp i przegląd aktualnego stanu badań	3
2	Sformułowanie problemu i proponowane rozwiązanie	4
2.1	Rozwiązanie	5
2.2	Testy	7
2.3	Wizualizacja	10
3	Wyniki badań eksperymentalnych	11
3.1	Analiza symetrycznego obciążenia skrzyżowań	11
3.1.1	Skrzyżowanie równorzędne	12
3.1.2	Skrzyżowanie z pierwszeństwem	13
3.1.3	Skrzyżowanie z sygnalizacją	14
3.1.4	Rondo	15
3.2	Analiza niesymetrycznego obciążenia skrzyżowań	16
3.2.1	Skrzyżowanie równorzędne	17
3.2.2	Skrzyżowanie z pierwszeństwem	18
3.2.3	Skrzyżowanie z sygnalizacją	19
3.2.4	Skrzyżowanie z sygnalizacją - niesymetryczna długość świateł	20
3.2.5	Rondo	25
3.3	Analiza procentowego udziału pojazdów zatrzymanych	26
4	Symulacja ruchu w modelu organizmu miejskiego	33
5	Podsumowanie i wnioski	36
5.1	Podsumowanie wyników	36
5.2	Wnioski	38
5.3	Ogólna ocena jakości symulacji	39

1 Wstęp i przegląd aktualnego stanu badań

Sieć drogowa jest kluczowym elementem sprawnego funkcjonowania aglomeracji. Zmniejszona wydajność systemu transportowego może powodować opóźnienia w ruchu, utrudnione funkcjonowanie całego organizmu miejskiego jak i zagrożenia w sytuacjach kryzysowych. System drogowy jest niewydajny wtedy gdy powstają w nim zatory, czyli kiedy liczba pojazdów chcących przejechać daną trasę jest większa niż jej przepustowość. Przepustowość pozostaje stała, natomiast natężenie ruchu może być zmienne w czasie. Zależy ono od godziny (w godzinach nocnych ruch jest mały), dnia tygodnia, a czasem może być zmienny w cyklu miesięcznym lub rocznym (wydarzenia, święta, dni wolne od pracy, ferie szkolne, wakacje). Przepustowość może być regulowana przez odpowiednie zaplanowanie trasy, organizację ruchu na skrzyżowaniach oraz poprzez rozmieszczenie i właściwą synchronizację świateł drogowych.

Dlatego problem symulacji ruchu drogowego jest popularny. Daje nam możliwość przewidywania rozwoju oraz skutków powstawania zatorów drogowych. Możliwe jest także testowanie nowych rozwiązań w ramach istniejącej infrastruktury miejskiej.

Szeroki zakres problemu wynika z różnorodności przepisów drogowych w różnych częściach świata oraz potencjalnie odmiennych charakterystyk sieci drogowej w różnych miastach. Skutkuje to faktem, że symulacje muszą być odpowiednio dostosowania do konkretnego przypadku. Możemy podzielić symulacje ze względu na szczegółowość odwzorowanej rzeczywistości na:

1. Modele makroskopowe - opisują ruch na niskim poziomie szczegółowości. Wykorzystujemy ciągłe modele matematyczne często wzorowane na porównaniu do strumienia wody płynącej przez rurę.
2. Modele mikroskopowe - opisują pojazdy oraz szczegółowe interakcje między nimi i innymi elementami środowiska. Często wykorzystujemy w nich model jazdy za liderem.
3. Modele mezoskopowe - model pośredni w stosunku do powyższych modeli.

Symulacje możemy także rozróżniać ze względu na symulowane środowisko:

1. Ruch po autostradzie - sytuacja w której nie mamy skrzyżowań, auta poruszają się w jednym kierunku na równoległych pasach ruchu. Do tego problemu nadaje się model makroskopowy.
2. Ruch w aglomeracji - symulacja z występującymi skrzyżowaniami różnego typu, światłami drogowymi, rondami. Ze względu na duży poziom skomplikowania zalecane są modele mikroskopowe

Ze względu na wysoką popularność modelu spotykamy się z szeroką gamą firm proponujących tworzenie symulacji dla danego miejsca [7, 6]. Możemy także znaleźć projekty, które pozwalają na tworzenie infrastruktury poprzez budowanie z elementów oraz modulacje parametrów [8]. Szeroko rozwinięte modele mogą symulować nawet komunikację miejską uwzględniać parkingi.

2 Sformułowanie problemu i proponowane rozwiązanie

Model symulatora dotyczy opisu stanu i zachowania pojazdów w określonej przestrzeni (sieć dróg w aglomeracji miejskiej), uwzględniając uczestników ruchu oraz elementy infrastruktury drogowej. Model składa się z obiektów:

1. Model sieci drogowej aglomeracji:
 - (a) model sieci połączeń drogowych,
 - (b) model organizacji ruchu
2. Model ruchu pojedynczego pojazdu:
 - (a) model stanu
 - (b) funkcja zmiany stanu

Model organizacji ruchu możemy przedstawić jako uporządkowaną trójkę, gdzie:

$$OR = \langle G, D, W \rangle \quad (1)$$

- G - graf który określa strukturę połączeń drogowych, krawędzie to drogi, a węzły to skrzyżowania
- W - funkcja określająca rodzaj połączenia w węźle
- D - zbiór danych odcinków drogowych, takich jak maksymalna prędkość

Model sieci połączeń drogowych możemy przedstawić jako uporządkowaną trójkę, gdzie:

$$SPD = \langle G, R, S \rangle \quad (2)$$

- G - graf określający oraz kierunki ruchu
- R - relacja definiująca możliwość zmiany pasa ruchu
- S - funkcja zmiany sygnalizacji świetlnej

Model stanu dla pojedynczego pojazdu określa jego położenie przez zdefiniowanie następującej czwórki, gdzie:

$$SPD = \langle X, R, V, D \rangle \quad (3)$$

- X - przebyta droga po danej drodze
- R - droga na której znajduje się pojazd
- S - prędkości pojazdu
- S - planowanej trasy pojazdu

Model przejścia do kolejnego stanu dla danego pojazdu musi uwzględniać relacje między obiektami oraz zasady drogowe. Uwzględnia unikanie kolizji, modulowanie prędkości, zmianę pasa ruchu oraz zachowanie bezpiecznej odległości między pojazdami.

2.1 Rozwiązanie

Zaproponowane przez nas rozwiązanie składa się z:

1. Uczestników ruchu - pojazdy są generowane w dowolnym miejscu na drodze, co stanowi przybliżenie włączenia się do ruchu z miejsca parkingowego. Częstotliwość generacji jest opisana funkcją, którą możemy modulować natężenie ruchu w zależności od czasu. Położenie danego obiektu jest definiowane jednoznacznie przez drogę na której się znajduje oraz odległość od jej początku. Obiekt ma zdefiniowaną określoną trasę którą będzie się przemieszczał.
2. Obiektów aglomeracji
 - (a) Drogi - określane są początkiem i końcem oraz kątem względem okna symulacji. Droga posiada także określone przepisy: maksymalną prędkość oraz rozróżnienie między drogą z pierwszeństwem a drogą podporządkowaną. Zakręt jest przedstawiony analogicznie do drogi z dodatkowym punktem, który definiuje kształt zakrętu jako odpowiednią krzywą Béziera [2].
 - (b) Skrzyżowania - będące zbiorem dróg z określonym pierwszeństwem.
 - (c) Ronda - będące zbiorem czterech zakrętów.
 - (d) Sygnalizacja świetlna - przy każdym sygnalizatorze świetlnym można wybrać sposób jego pracy (długość poszczególnych faz oraz przesunięcie fazowe, w którym sygnalizator znajduje się na początku swojego działania) oraz sposób zmiany świateł (czy występuje światło żółte).
 - (e) Pasy ruchu - Planowane jest wprowadzenie dróg posiadających wiele pasów ruchu wraz z modyfikacją kodu sterującego ruchem pojazdów tak aby w zależności od obłożenia i prędkości poruszania się na każdym pasie oraz planowanej akcji, pojazdy wybierały odpowiedni pas ruchu.

Z punktu widzenia programistycznego w skład modelu wchodzi:

1. Model kierowcy - zaimplementowany agentowo, zarządzający poruszaniem się pojazdu i reagujący na zmiany otoczenia (hamowanie innych pojazdów, dojazd do skrzyżowania, uwzględnienie pierwszeństwa przejazdu). Umożliwia wybór trasy, zmianę pasa ruchu, zarządzanie przyspieszaniem i hamowaniem pojazdu - plik `\src\trafficSimulator\car.py`.
2. Model sieci ulic - w postaci grafu, gdzie wierzchołkami są skrzyżowania, a krawędziami są drogi. Graf reprezentowany jest przez listy adiacencji. Jego głównym zadaniem jest przechowywanie informacji o najkrótszych drogach pomiędzy poszczególnymi punktami (pełni w przybliżeniu rolę nawigacji, choć trasy przejazdów mogą być definiowane również jako listy indeksów dróg) - plik `\src\trafficSimulator\graph.py`.
3. Generator pojazdów - moduł odpowiedzialny za generowanie określonej liczby pojazdów w jednostce czasu (pojazdy generowane są na podstawie zadaniem listy parametrów). Generator odpowiada również za wybór punktu, w którym pojazd ma włączyć się do ruchu. Jeśli nie jest to możliwe bezkolizyjnie, wygenerowany obiekt jest kolejgowany i dodawany wtedy, kiedy jest to możliwe (tak jakby ktoś włączał się do ruchu z miejsca parkingowego) - plik `\src\trafficSimulator\generator.py`.

4. Reprezentacja dróg - przechowuje informacje o jej parametrach takich jak położenie drogi i liczba pasów. Dodatkowo każda droga odpowiada za przechowywanie informacji o znajdujących się na niej pojazdach i przekazywaniu informacji o zbliżającym się skrzyżowaniu i ryzyku kolizji. W szczególności drogę można wizualizować przez dowolną krzywą Beziera definiowaną za pomocą trzech punktów (początek, koniec, punkt kontrolny). Każda z dróg monitoruje również czas przejazdów samochodów poruszających się po niej. - plik `\src\trafficSimulator\road.py` oraz `\src\trafficSimulator\curve.py`.
5. Wizualizacja - moduł odpowiedzialny za wizualizację dróg (w tym wielopasmowych), sygnalizacji świetlnej oraz pojazdów (z uwzględnieniem wymiarów) wchodzących w skład symulacji. Dodatkowo symulacja może podświetlać na odmienny kolor niektóre drogi w zależności od ich obciążenia ruchem.
- plik `\src\trafficSimulator\window.py`.
6. Sygnalizacja świetlna - odpowiedzialna za zarządzanie stanem sygnalizacji świetlnej na każdym skrzyżowaniu. Cykl świateł można definiować poprzez przekazanie odpowiedniego parametru w postaci listy progów czasowych, po upływie których następuje okresowa zmiana świateł w cyklu *czerwone* - *żółte* - *zielone* - *żółte* - *czerwone* dla dróg przyjętych jako pierwszy parametr i w cyklu komplementarnym dla dróg zadanych jako drugi parametr - plik `\src\trafficSimulator\traffic_lights.py`.
7. Zarządzanie symulacją - moduł odpowiedzialny za zarządzanie całą symulacją, wielkość kroków czasowych. W każdej iteracji przekierowuje zadania do wykonania dla każdego z pozostałych modułów - plik `\src\trafficSimulator\simulation.py`.
8. Moduł pomiarów - moduł odpowiedzialny za wykonywanie pomiarów stanu symulacji w danym momencie (liczba aktywnych pojazdów, liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie, średnia prędkość pojazdów) oraz za wizualizację zależności tych parametrów od czasu na wykresach tworzonych po zakończeniu pojedynczej symulacji - plik `\src\measurements\measurement.py`.

Przyjęto, że kierowcy poruszający się po drogach zachowują się zgodnie z założeniami IDM (Intelligent Driver Model) [9]. Dodatkowo w momencie zbliżania się do skrzyżowania następuje ocena stanu i zachowania samochodów w otoczeniu danego pojazdu, a następnie w zależności od zaplanowanego ruchu podjęcie odpowiedniej akcji (co do zasady pojazdy powinny przestrzegać zasad obowiązujących zgodnie z polskimi przepisami - Ustawa Prawo o Ruchu Drogowym [10]). Do modelowania zachowania poszczególnych kierowców zastosowano podejście agentowe (każdy samochód jest zarządzany oddzielnie, choć decyzje podejmowane są w oparciu o aktualne i mierzalne parametry stanu całego systemu).

W celu usprawnienia symulacji wprowadzono również reprezentację mapy miasta jako graf, pozwala to w połączeniu z monitorowaniem aktualnego ruchu na poszczególnych ulicach na przewidywania optymalnych (najszybszych tras) dotarcia każdego z pojazdów do celu. W tym celu dla wszystkich dróg określa się oczekiwany czas przejazdu (jako średnią ruchomą z $n = 3$ - wartość domyślna - ostatnich przejazdów, jeśli daną drogę nie przejechało wystarczająco wiele pojazdów, brany jest pod uwagę iloraz długości drogi i maksymalnej dozwolonej prędkości na danym odcinku). Na podstawie tych czasów przed rozpoczęciem symulacji określana jest z wykorzystaniem algorytmu Floyda-Warshalla [4], [11] najkrótsza możliwa droga pomiędzy każdymi dwoma punktami na mapie (implementację algorytmu zaprezentowano w listingu 1). Umożliwia to przechowywanie w wierzchołkach grafu (utożsamianych ze skrzyżowaniami)

informacji o długości najkrótszej ścieżki łączącej go z pozostałymi wierzchołkami oraz o indeksie sąsiada (skrzyżowania do którego prowadzi jedna z istniejących dróg). Następnie w każdym kroku symulacji tablice najkrótszych ścieżek są aktualizowane za pomocą jednej iteracji (w celu przyspieszenia symulacji dla dużych map) algorytmu Bellmana-Forda [1], [5] (implementacje takiego kroku zaprezentowano w listingu 2). Korzystając z zebranych w ten sposób informacji każdy kierowca wykonując skręt na nową drogę jest w stanie określić indeks sąsiada kolejnego wierzchołka na swojej trasie przez którego przebiega najkrótsza ścieżka do punktu docelowego (precyzyjny opis sposobu uzyskiwania najkrótszych ścieżek w grafie [3]).

```

1 def floyd_warshall(self, debug = debug_graph) :
2     """Floyd Warshall algorithm"""
3     for vertex_1 in self.vertex_map.values():
4         for vertex_2 in self.vertex_map.values():
5             if vertex_1 == vertex_2:
6                 vertex_1.update_vertex_distance(vertex_2, 0, vertex_1)
7             elif vertex_1.is_neighbor(vertex_2):
8                 distance = \
9                     vertex_1.out_road_map[vertex_2].expected_time
10                vertex_1.update_vertex_distance(vertex_2, distance, \
11                    vertex_2)
12             else:
13                 vertex_1.update_vertex_distance(vertex_2, inf, None)
14
15     for u in self.vertex_map.values():
16         for vertex_1 in self.vertex_map.values():
17             for vertex_2 in self.vertex_map.values():
18                 distance_1 = self.get_distance(vertex_1, u)
19                 distance_2 = self.get_distance(u, vertex_2)
20                 predecesor = self.get_predecesor(vertex_1, u)
21                 vertex_1.update_vertex_distance(vertex_2, distance_1 \
22                     + distance_2, predecesor)

```

Listing 1: Intensywność ruchu do centrum miasta

2.2 Testy

Zdecydowano się na przeprowadzenie trzech rodzajów testów:

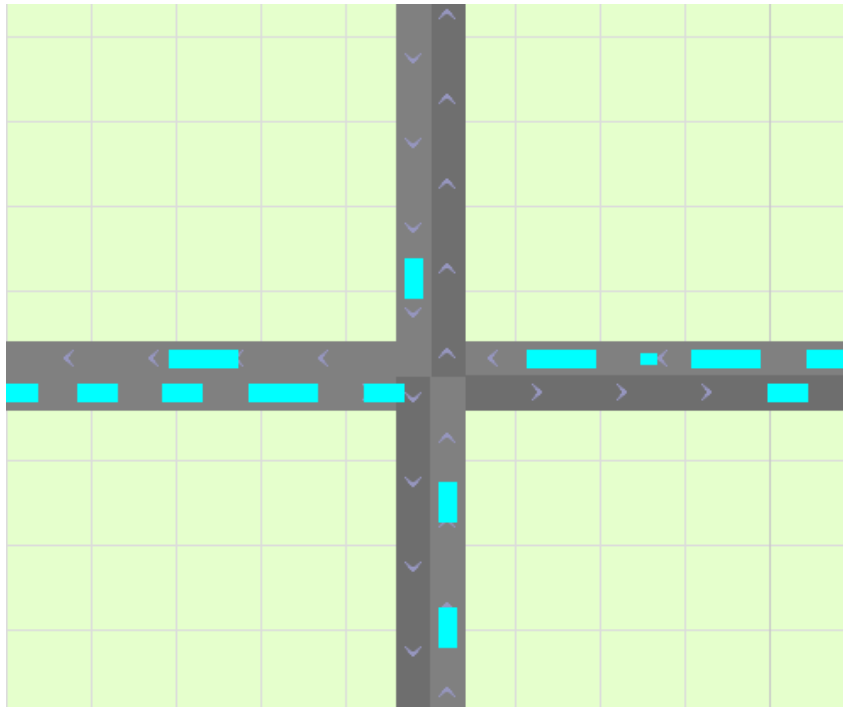
1. Testy poprawności działania oprogramowania - testy mające na celu sprawdzenie jakości stworzonego oprogramowania i weryfikację zapewnienia wszystkich założonych funkcjonalności systemu.
2. Testy rozwiązań infrastrukturalnych - przykładowe testy symulujące ruch na szczególnych typach skrzyżowań: Przeprowadzono badania na następujących scenariuszach testowych
 - Skrzyżowanie równorzędne - Rys. 1.
 - Skrzyżowanie z określonym pierwszeństwem przejazdu - Rys. 2.
 - Skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną - Rys. 3.
 - Rondo - Rys. 4.

```

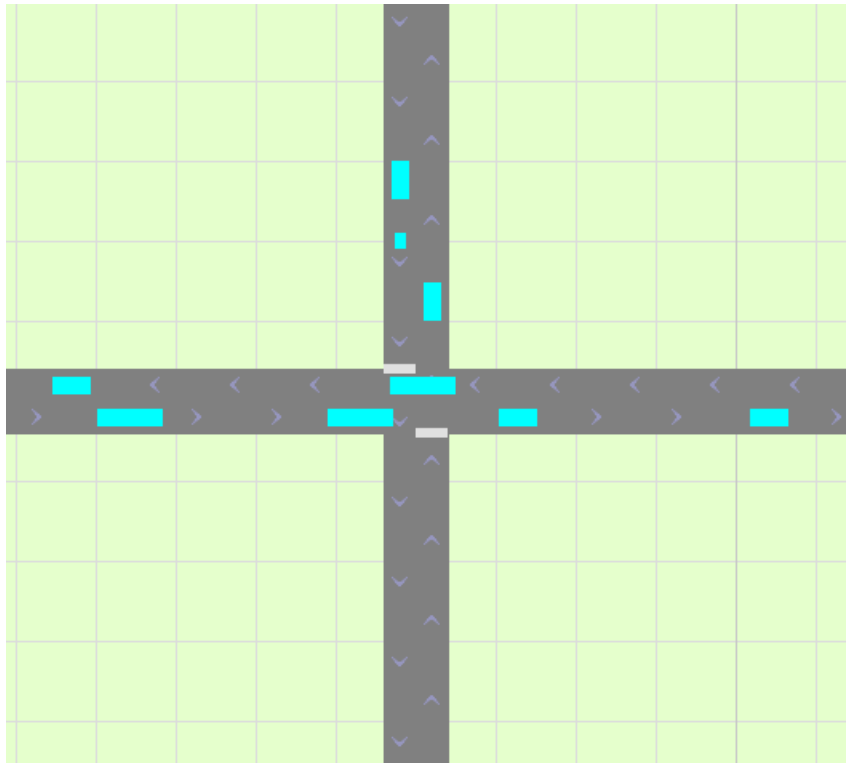
1  """Metoda klasy Graph"""
2  def update(self):
3      """Update distance vectors"""
4      for vertex in self.vertex_map.values():
5          vertex.update()
6
7  """Metody klasy Vertex"""
8  def update_vertex_distance(self, vertex, distance, direction = None):
9      """Update distance vector and path map"""
10     """relaxation for Bellman-Ford and Floyd-Warshall algorithms"""
11     if (vertex.x, vertex.y) not in self.distance_map.keys():
12         self.distance_map[(vertex.x, vertex.y)] = distance
13         self.path_map[(vertex.x, vertex.y)] = direction
14     elif self.distance_map[(vertex.x, vertex.y)] > distance:
15         self.distance_map[(vertex.x, vertex.y)] = distance
16         self.path_map[(vertex.x, vertex.y)] = direction
17
18     def update(self):
19         """Update distance vectors basing on current situation"""
20         for vertex in self.neighbor_list:
21             for v in self.distance_map.keys():
22                 distance1 = vertex.distance_map[(v[0], v[1])]
23                 distance2 = self.out_road_map[vertex].expected_time
24                 self.update_vertex_distance(Vertex(v), distance1 \
25                     + distance2, vertex)

```

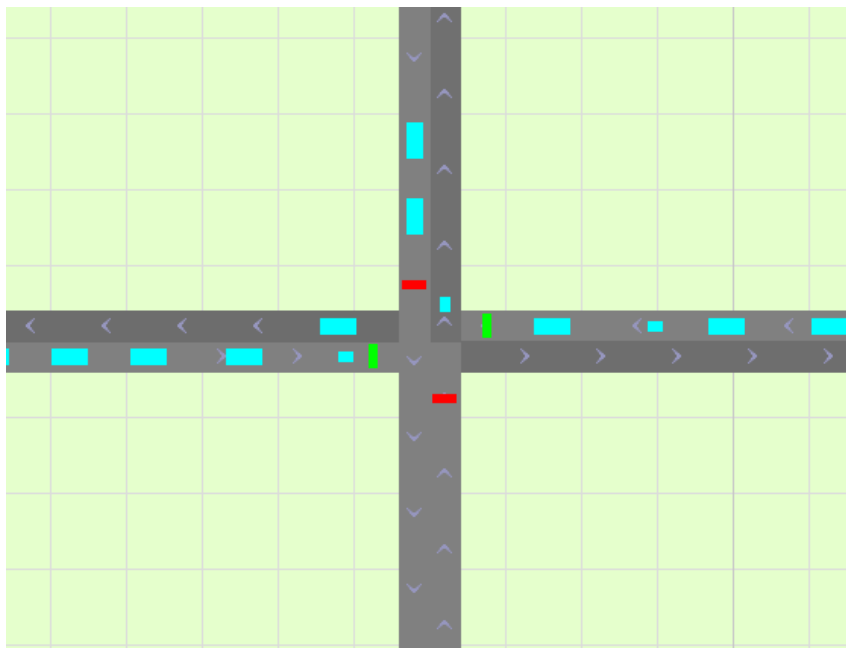
Listing 2: Intensywność ruchu do centrum miasta



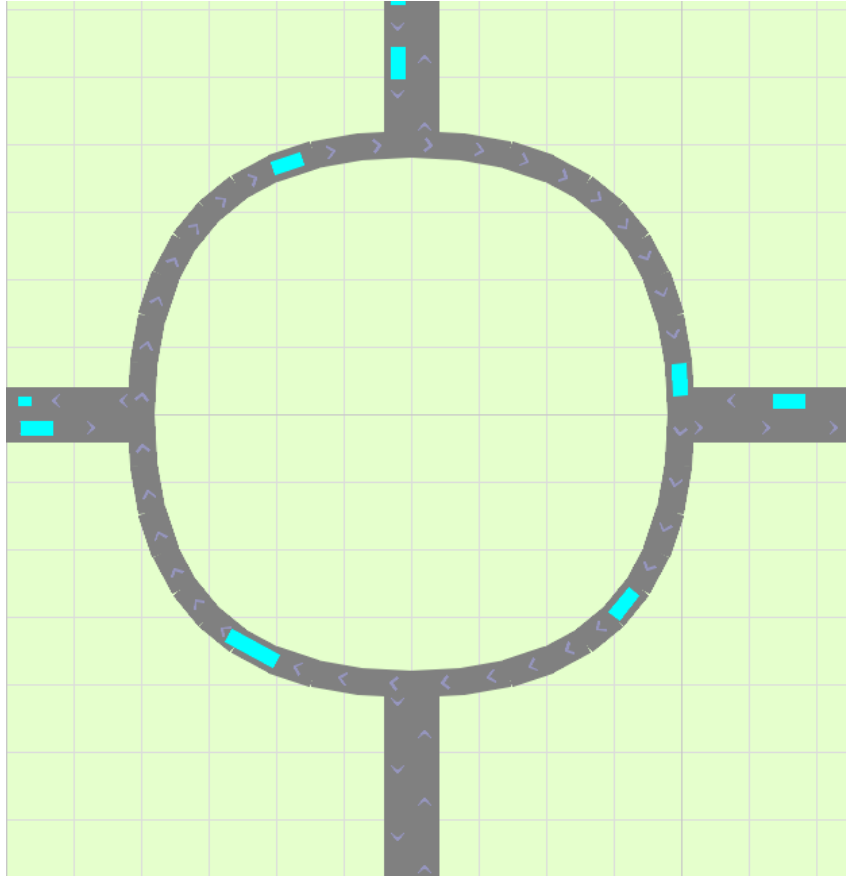
Rysunek 1: Symulacja skrzyżowania równorzędnego.



Rysunek 2: Symulacja skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu.



Rysunek 3: Symulacja skrzyżowania z sygnalizacją świetlną.



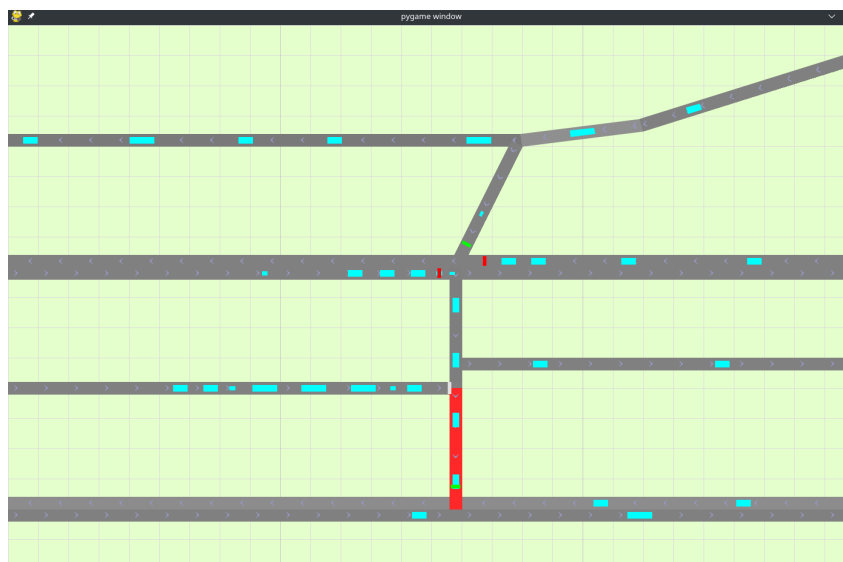
Rysunek 4: Symulacja ronda.

3. Symulacja w realistycznym modelu miasta (stworzenie przybliżonego modelu sieci drogowej w dużym mieście - np.: uproszczona mapa Krakowa) z uwzględnieniem różnych typów skrzyżowań, zastosowania sygnalizacji świetlnej i pierwszeństwa przejazdu.

2.3 Wizualizacja

Wizualizacja testów z wykorzystaniem biblioteki pygame przedstawia:

- Drogi - jako linie ciągłe z zaznaczonym kierunkiem ruchu. Droga zmienia swój kolor na odcień czerwonego wprost proporcjonalnie do natężenia ruchu.
- Uczestników ruchu - w celu uproszczenia zostali przedstawieni jako prostokąty o różniących się wymiarach. Położenie obiektów jest aktualizowane na bieżąco.
- Sygnalizację świetlną - prostokąt koloru takiego, jest aktualny kolor sygnalizacji



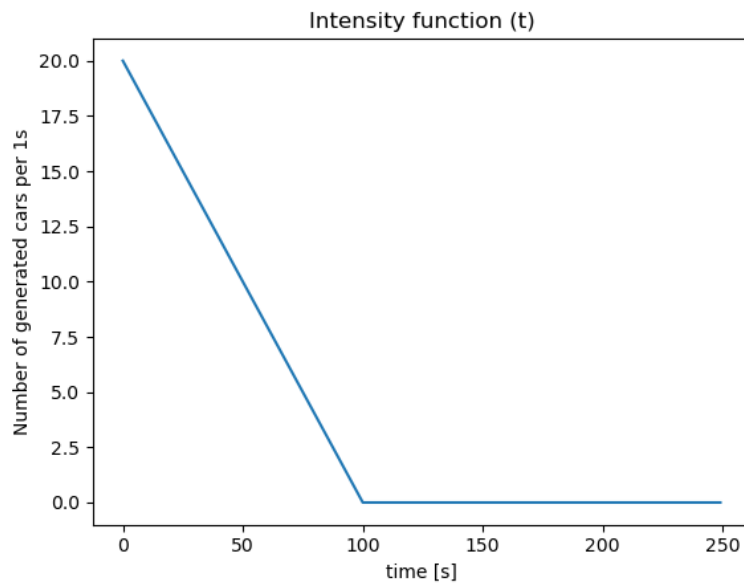
Rysunek 5: Przykładowa wizualizacja

3 Wyniki badań eksperymentalnych

Model pozwala z wykorzystaniem parametrów dostosować symulację do konkretnych wymagań. W celu porównywania skrzyżowań użyto domyślnych parametrów symulacji, aby ujednolicić porównanie. Zebrane statystyki pozwoliły na wygenerowanie wykresów przedstawiających zależność średniej prędkości oraz liczby aktywnych pojazdów od czasu symulacji. Liczba samochodów jest ściśle powiązana z natężeniem ruchu i wpływa na wydajność ruchu w obrębie skrzyżowania. Średnia prędkość nie może być jedynym parametrem reprezentującym efektywność modelowanego skrzyżowania. Aby uwzględnić możliwość powstawania zatorów, mierzone jest również odchylenie standardowe pomiaru średniej prędkości (im wyższe odchylenie od średniej tym rośnie prawdopodobieństwo, że samochody jadące z jednego z kierunków oczekują na przejazd przez skrzyżowanie). Każda z symulacji jest uzależniona od czynników losowych (powolne opuszczanie przez pojazdy okolic skrzyżowania skutkuje również w wolniejszym dodawaniem nowych pojazdów do symulacji). Jeśli w danej próbie będzie dużo aut skręcających w lewo, może to całkowicie zablokować ruch. Mając na uwadze losowość symulacji wybraliśmy scenariusze, które wizualizują pewne prawidłowości.

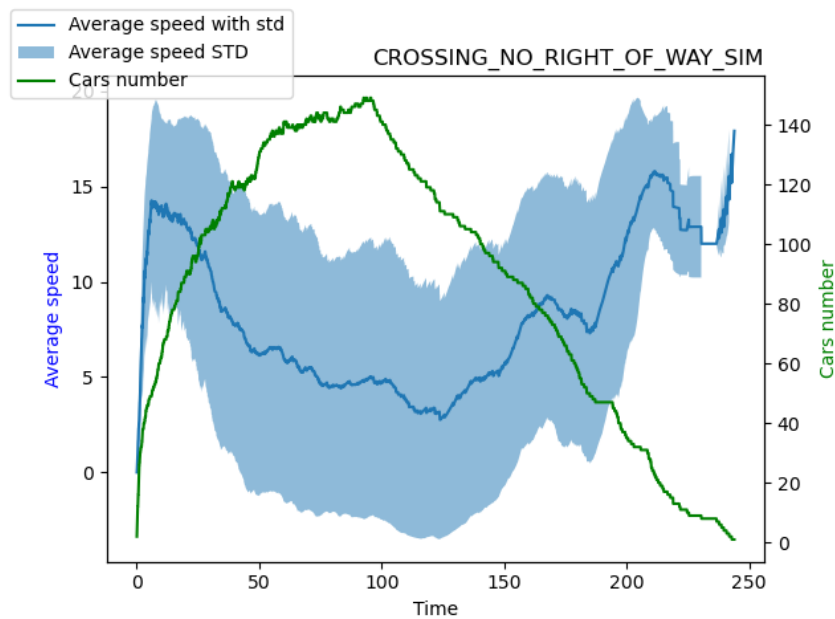
3.1 Analiza symetrycznego obciążenia skrzyżowań

Przeprowadzono symulacje dla czterech typów skrzyżowań (skrzyżowanie równorzędne, skrzyżowanie z ustalonym pierwszeństwem przejazdu, skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną i rondo). Układ skrzyżowań został zaprezentowany na Rys. 1-4. Dla każdego z tych typów skrzyżowań przeprowadzono pomiary średniej prędkości przemieszczania się pojazdów, liczby aktywnych pojazdów oraz liczby pojazdów statycznych (oczekujących na wjazd na skrzyżowanie) w zależności od czasu. Wykres przyjętej funkcji intensywności generowania pojazdów zaprezentowano na Rys. 6. Wyniki przeprowadzonych analiz przedstawiono na Rys. 7-14.

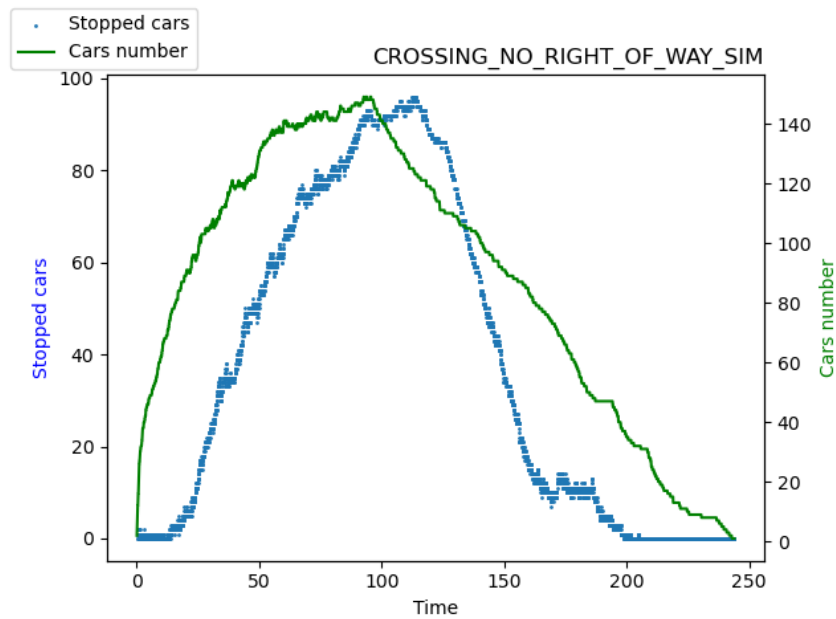


Rysunek 6: Założona maksymalna intensywność generowania pojazdów (w ciągu 1s) w zależności od czasu.

3.1.1 Skrzyżowanie równorzędne

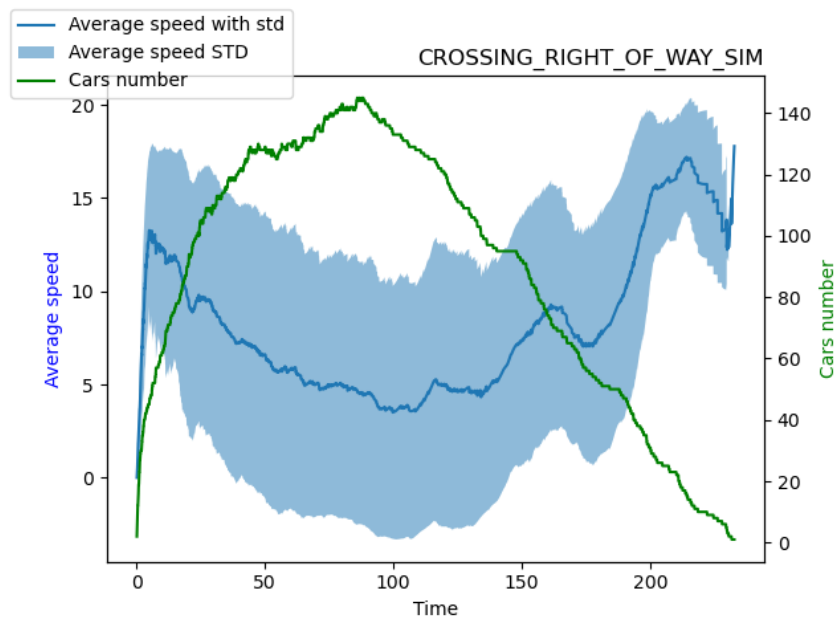


Rysunek 7: Statystyki dla symulacji skrzyżowania równorzędnego - prędkość średnia.

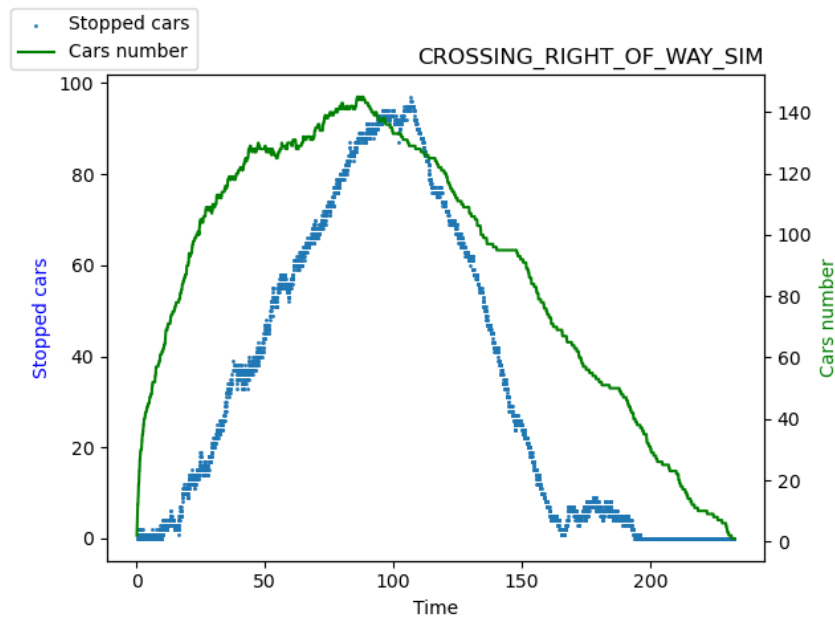


Rysunek 8: Statystyki dla symulacji skrzyżowania równorzędnego - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.1.2 Skrzyżowanie z pierwszeństwem

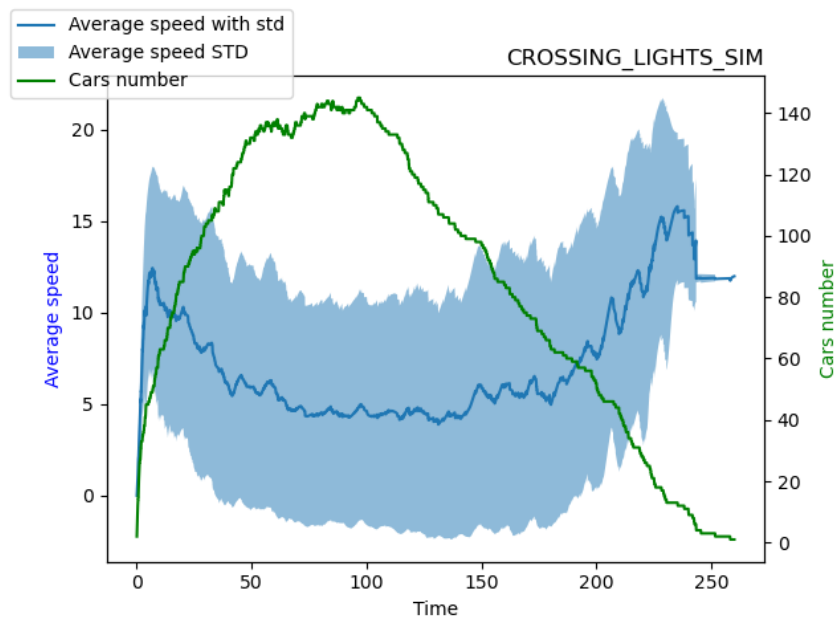


Rysunek 9: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu - prędkość średnia.

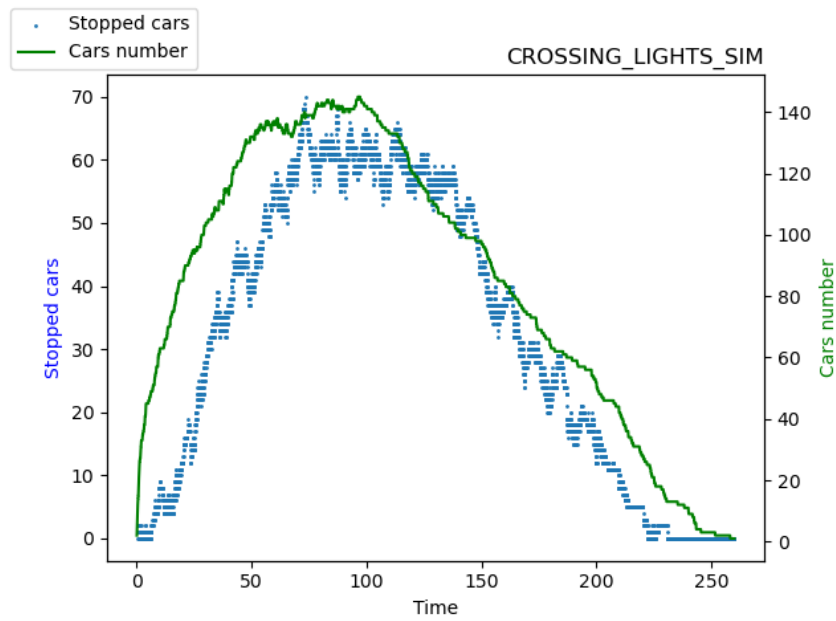


Rysunek 10: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.1.3 Skrzyżowanie z sygnalizacją

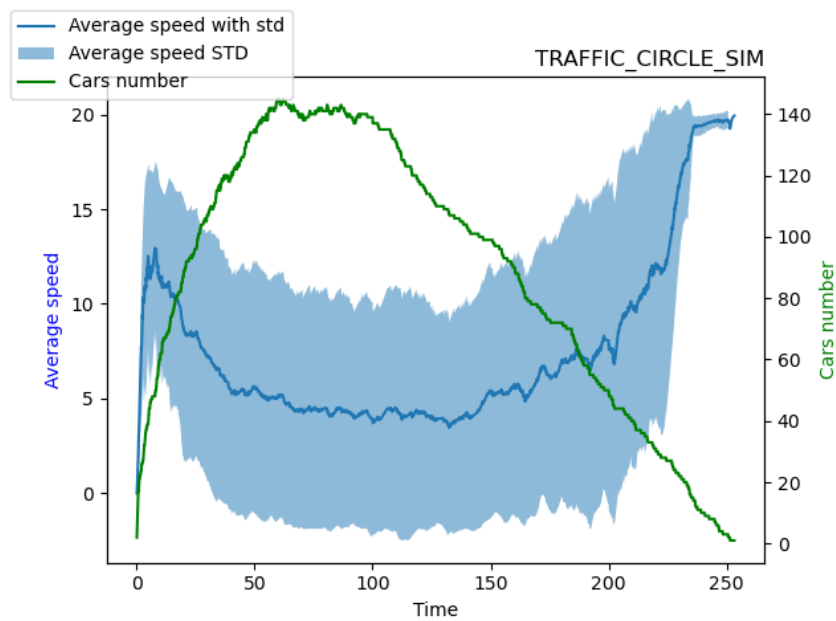


Rysunek 11: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną - prędkość średnia.

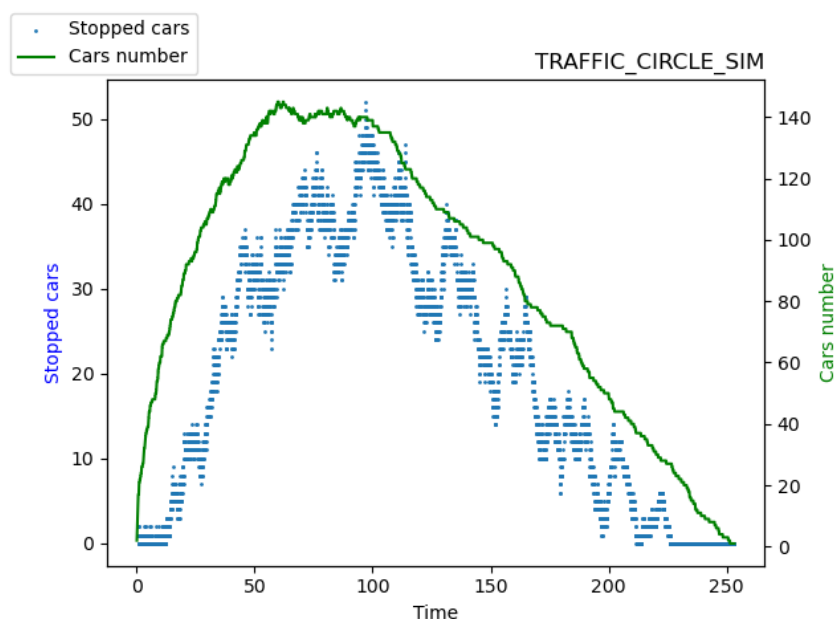


Rysunek 12: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.1.4 Rondo



Rysunek 13: Statystyki dla symulacji ronda - prędkość średnia.

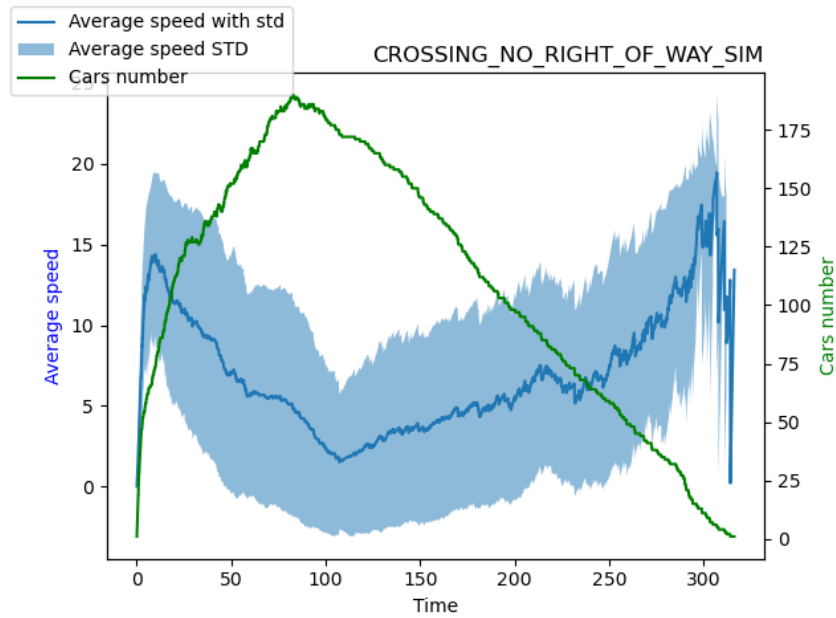


Rysunek 14: Statystyki dla symulacji ronda - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

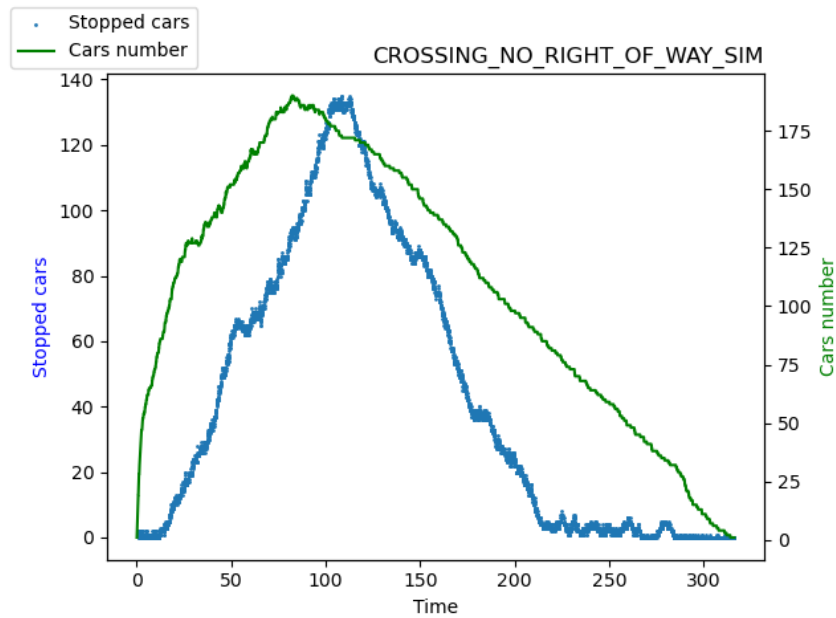
3.2 Analiza niesymetrycznego obciążenia skrzyżowań

Przeprowadzono symulacje dla czterech typów skrzyżowań (skrzyżowanie równorzędne, skrzyżowanie z ustalonym pierwszeństwem przejazdu, skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną i rondo). Układ skrzyżowań został zaprezentowany na Rys. 1-4. Dla każdego z tych typów skrzyżowań przeprowadzono pomiary średniej prędkości przemieszczania się pojazdów, liczby aktywnych pojazdów oraz liczby pojazdów statycznych (oczekujących na wjazd na skrzyżowanie) w zależności od czasu dla niesymetrycznego obciążenia ruchem (liczba samochodów wjeżdżających na skrzyżowanie z dróg poziomych jest dwukrotnie większą od liczby samochodów wjeżdżających na skrzyżowanie z dróg poziomych). Wyniki tych analiz przedstawiono na Rys. 15-32.

3.2.1 Skrzyżowanie równorzędne



Rysunek 15: Statystyki dla symulacji skrzyżowania równorzędnego - prędkość średnia.

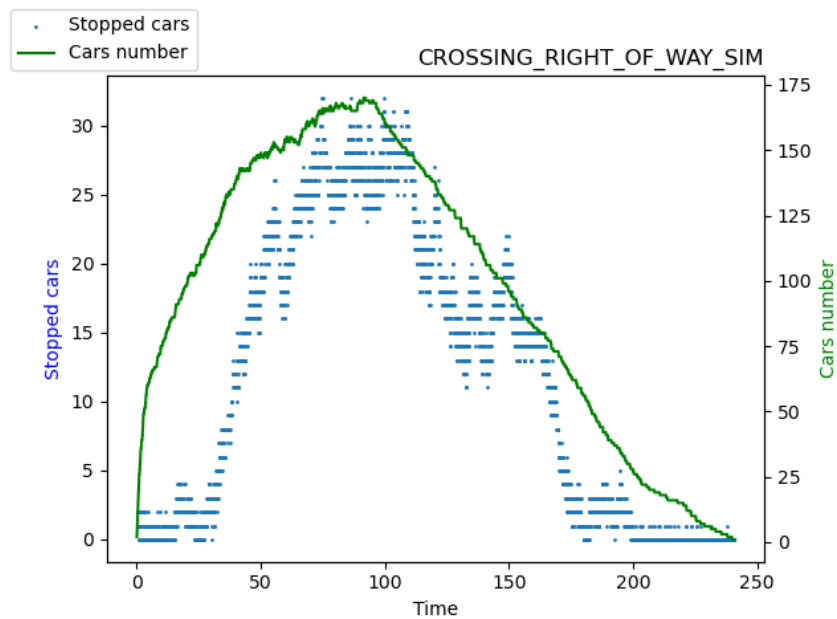


Rysunek 16: Statystyki dla symulacji skrzyżowania równorzędnego - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.2.2 Skrzyżowanie z pierwszeństwem

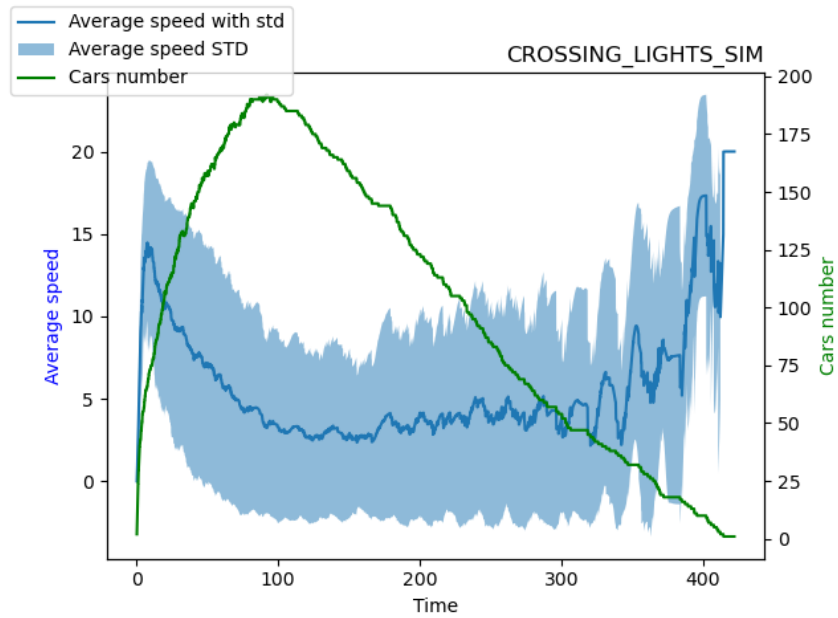


Rysunek 17: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu - prędkość średnia.

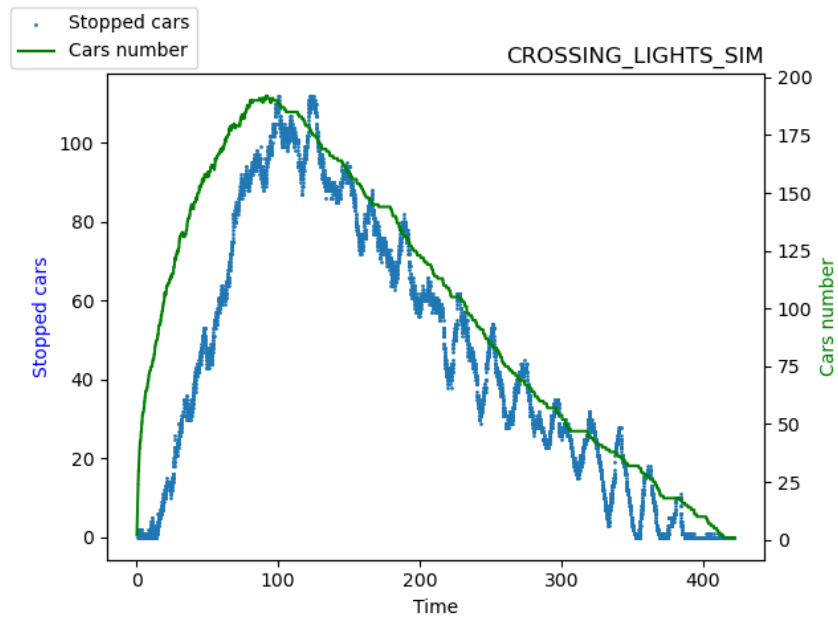


Rysunek 18: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.2.3 Skrzyżowanie z sygnalizacją



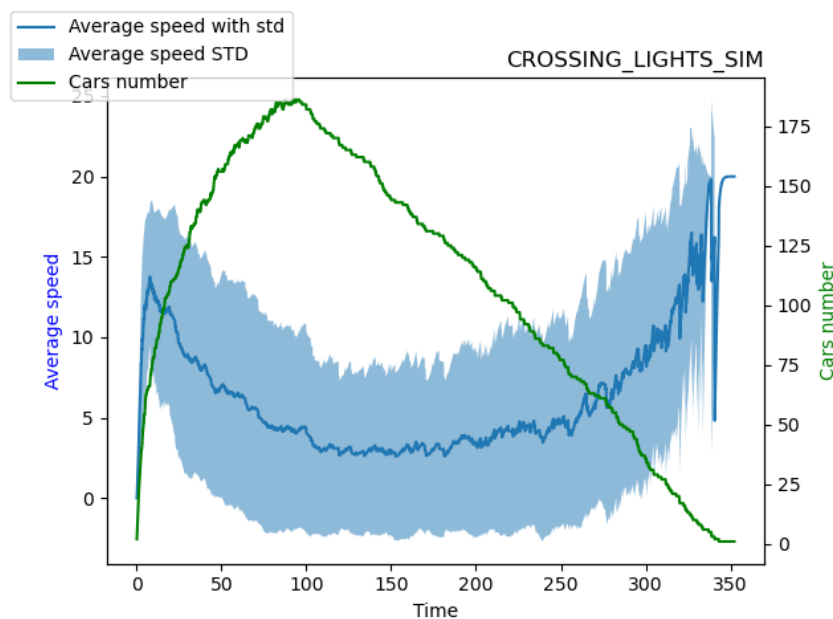
Rysunek 19: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną - prędkość średnia.



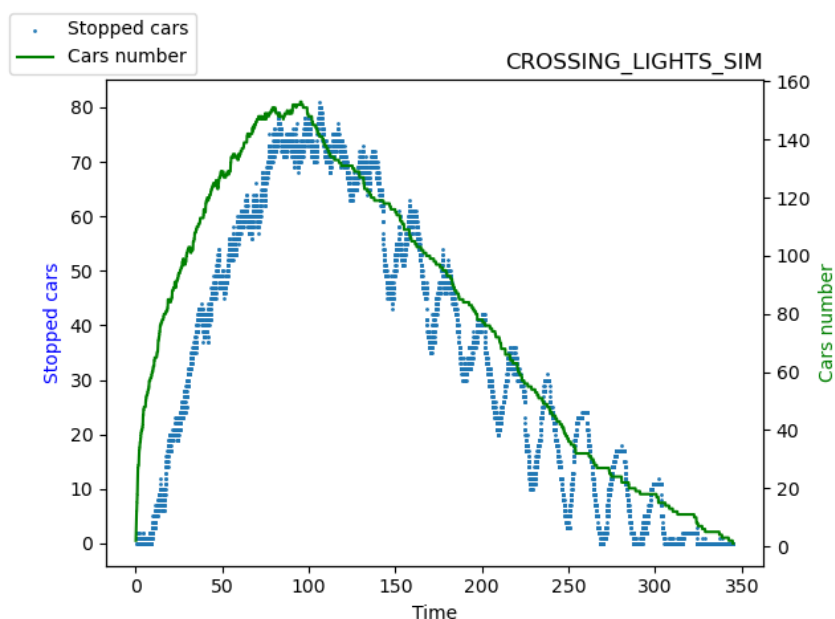
Rysunek 20: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.2.4 Skrzyżowanie z sygnalizacją - niesymetryczna długość świateł

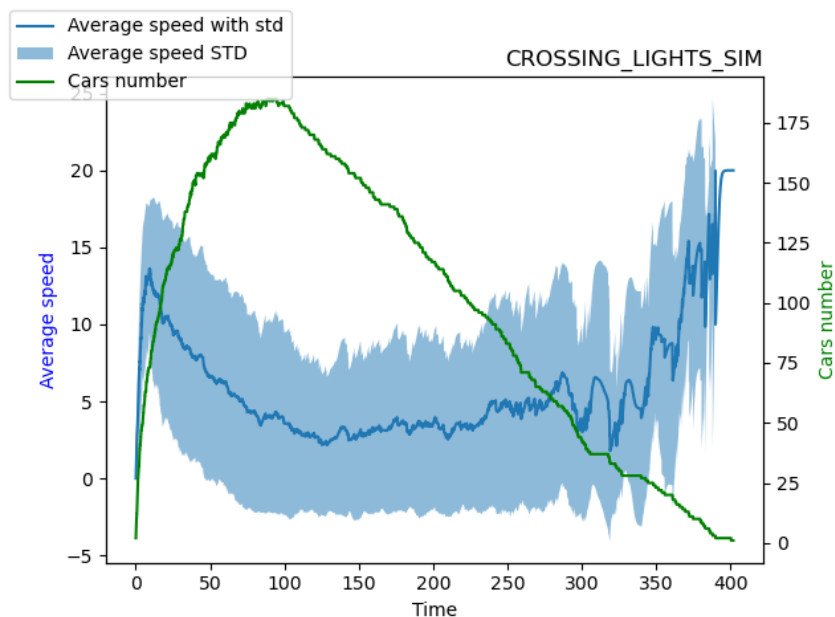
Dla ruchu o niesymetrycznym obciążeniu wykorzystanie sygnalizacji umożliwiającej przejazd przez skrzyżowanie w równych odstępach czasu z każdego kierunku jest nieefektywny (powstaje zator na bardziej obciążonych drogach). W celu uniknięcia takiego zjawiska można zastosować sygnalizację świetlną, która umożliwia przejazd pojazdom z kierunków bardziej obciążonych przez dłuższy okres czasu. Aby zweryfikować tę hipotezę przeprowadzono testy natężenia ruchu na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną dla różnych wartości stosunku długości świateł dla kierunków bardziej i mniej obciążonych. Przeanalizowano również czy zastosowanie dłuższego cyklu zmiany świateł wpłynie na efektywność funkcjonowania takiego skrzyżowania.



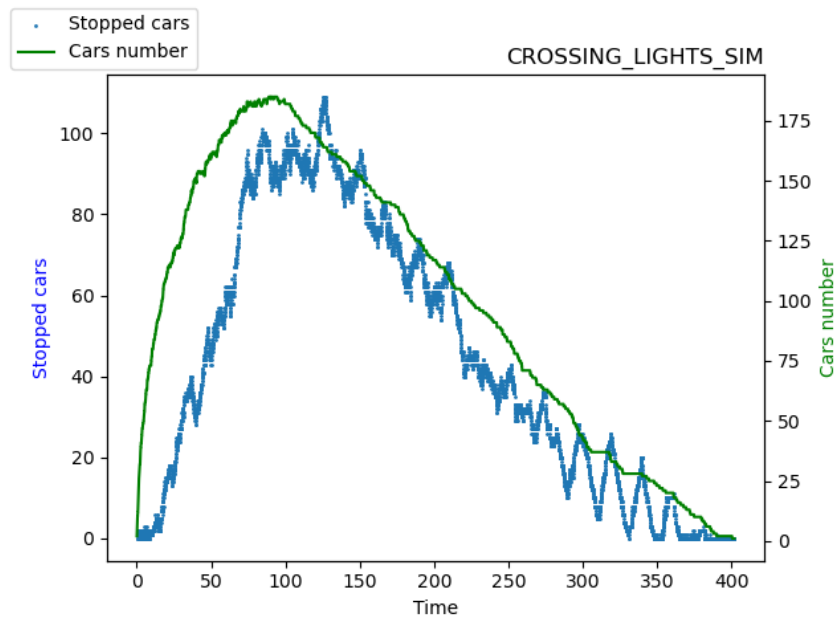
Rysunek 21: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość świateł; stosunek = 21:11) - prędkość średnia.



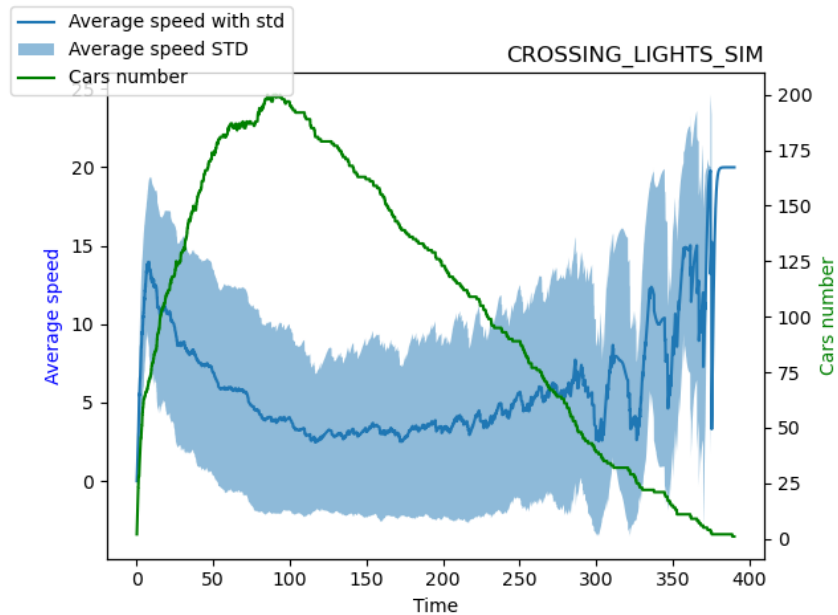
Rysunek 22: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 21:11) - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.



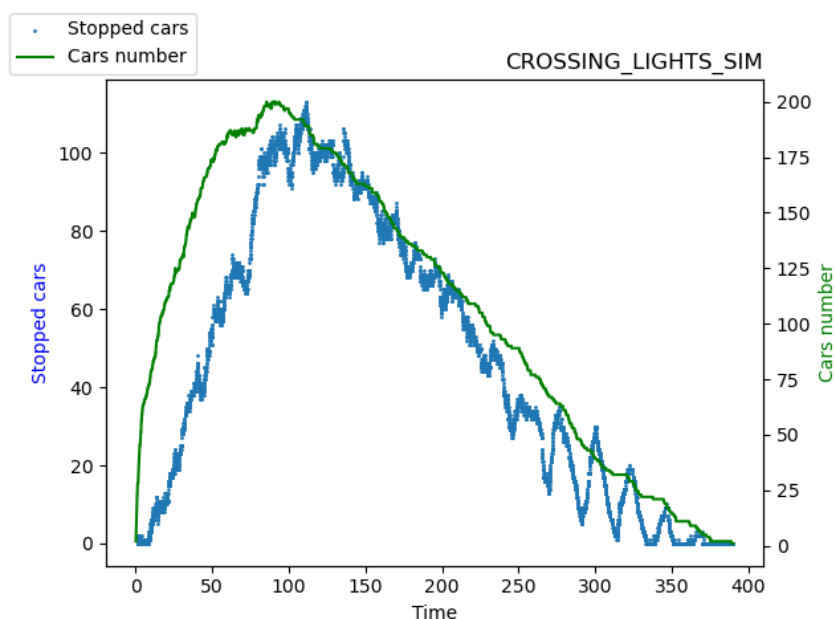
Rysunek 23: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 18:14) - prędkość średnia.



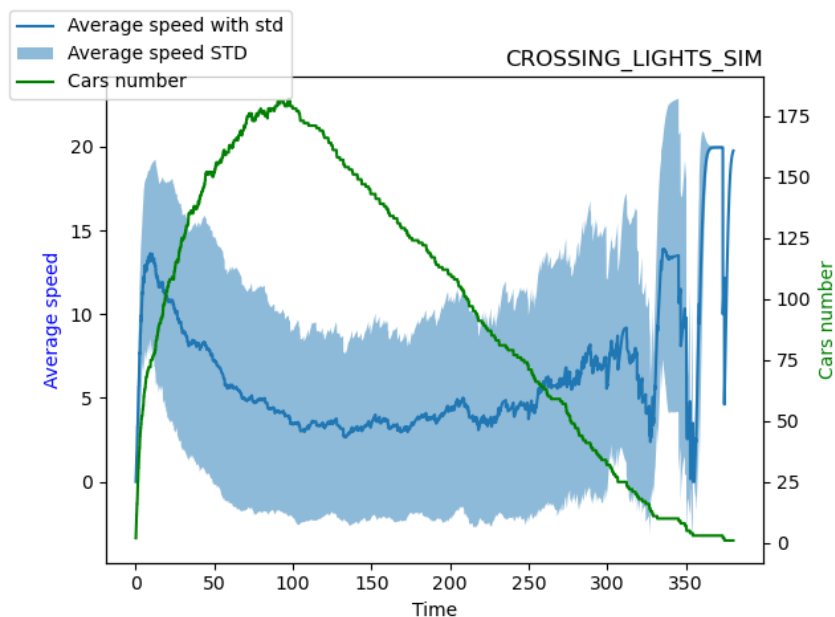
Rysunek 24: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 18:14) - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.



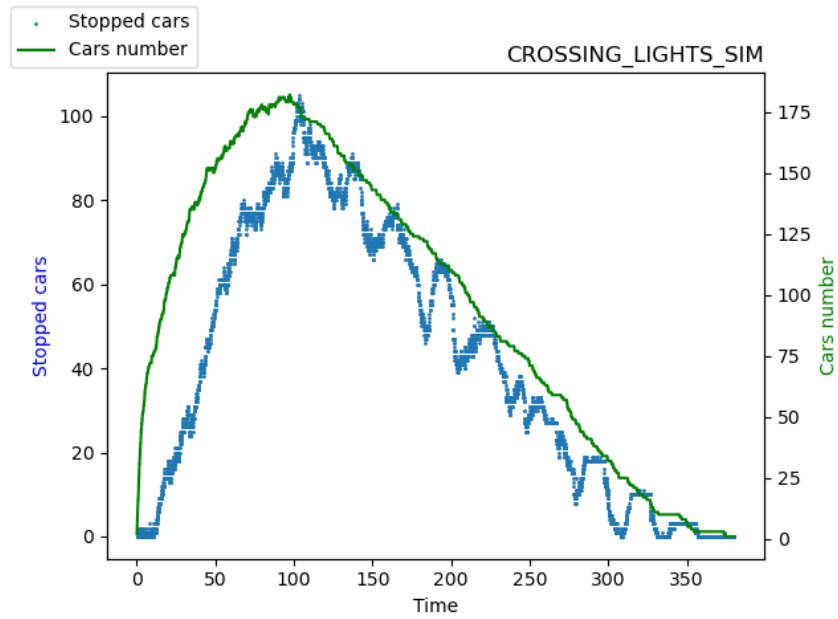
Rysunek 25: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 21:16) - prędkość średnia.



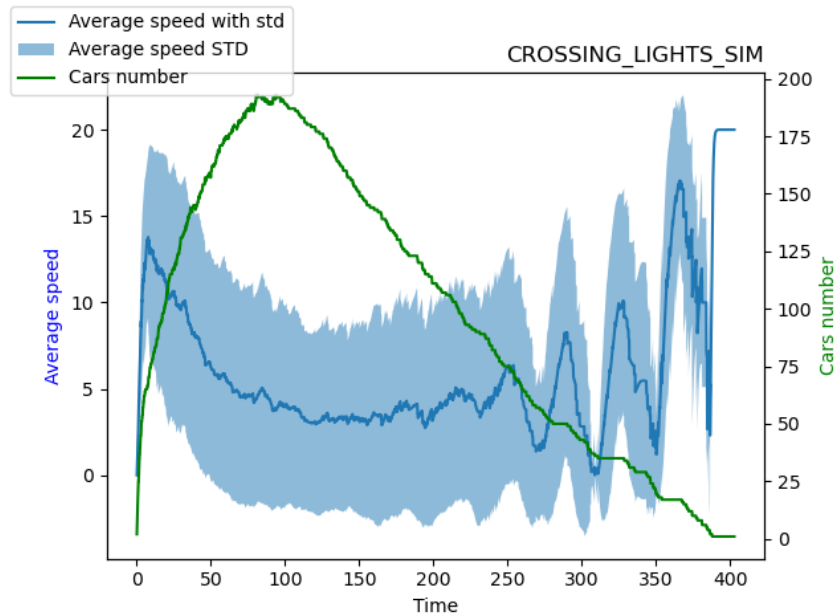
Rysunek 26: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 21:16) - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.



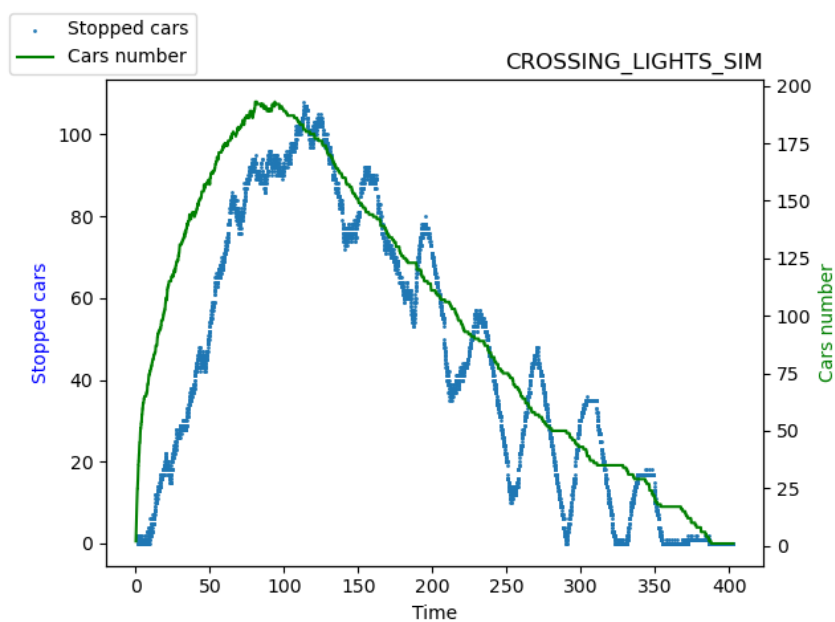
Rysunek 27: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 32:16) - prędkość średnia.



Rysunek 28: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 32:16) - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

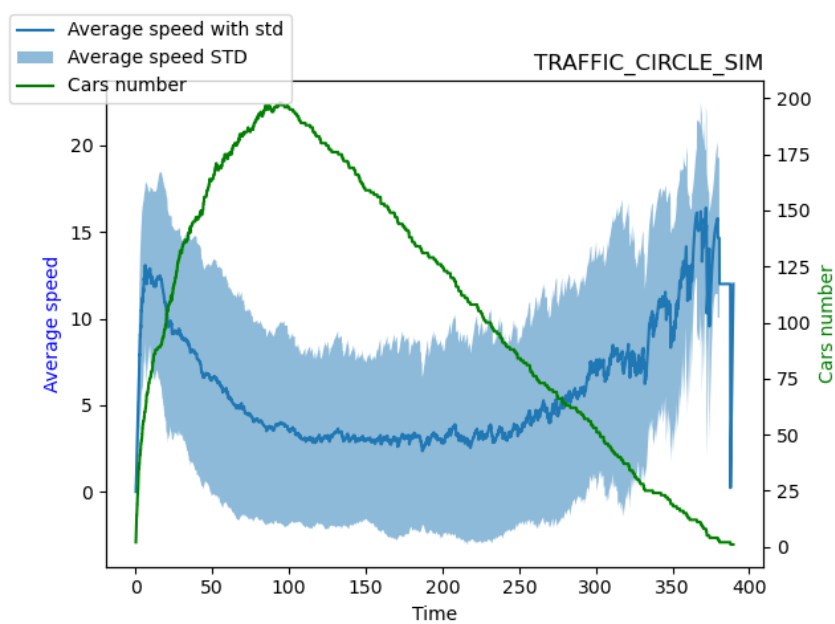


Rysunek 29: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 32:32) - prędkość średnia.

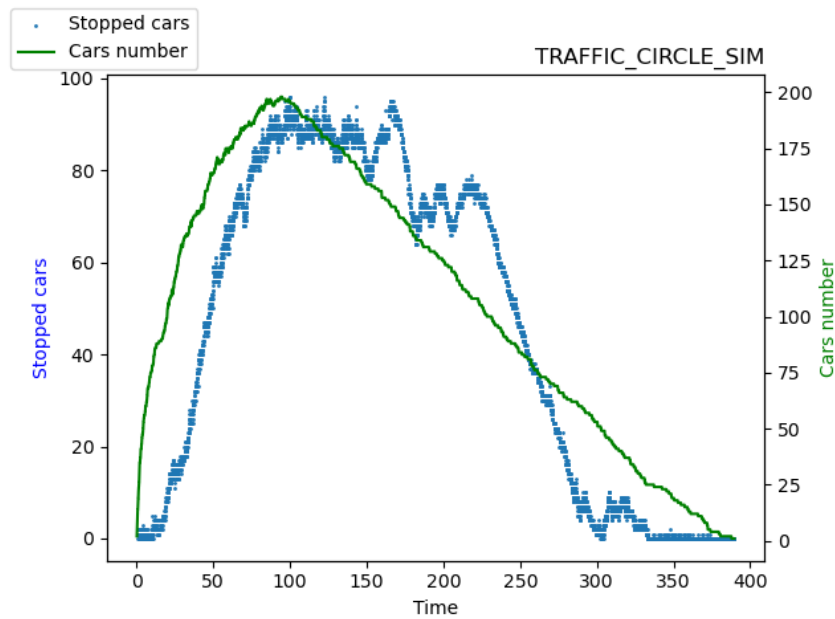


Rysunek 30: Statystyki dla symulacji skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (niesymetryczna długość światła; stosunek = 32:32) - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.2.5 Rondo



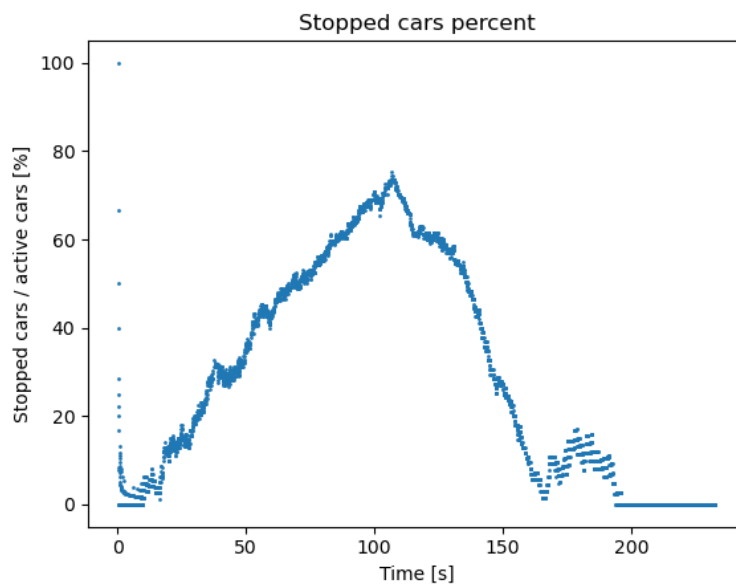
Rysunek 31: Statystyki dla symulacji ronda - prędkość średnia.



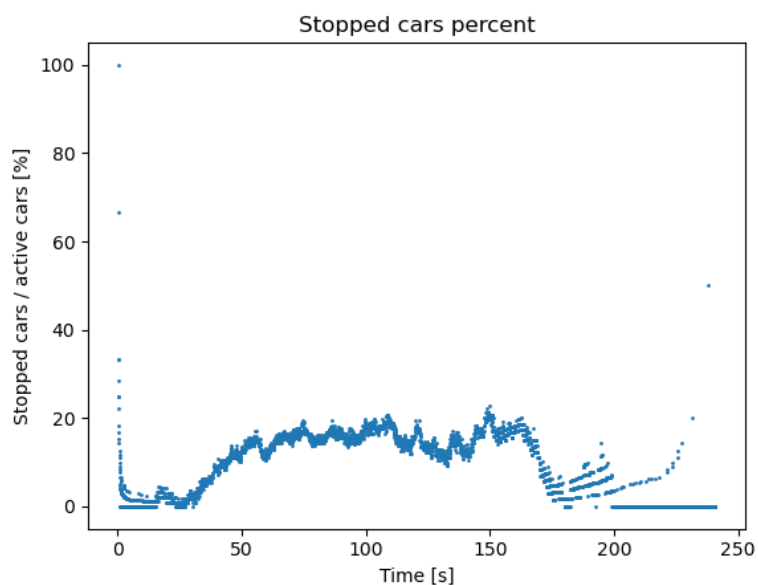
Rysunek 32: Statystyki dla symulacji ronda - liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie.

3.3 Analiza procentowego udziału pojazdów zatrzymanych

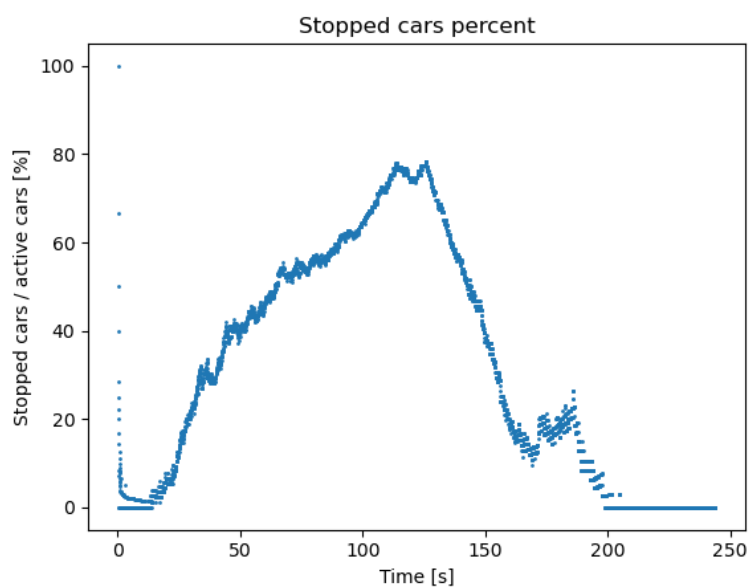
W celu porównania efektywności zaproponowanych rozwiązań stworzono wykresy (Rys. 33-45) zależności procentowej liczby pojazdów zatrzymanych od liczby wszystkich pojazdów aktywnych w zależności od czasu.



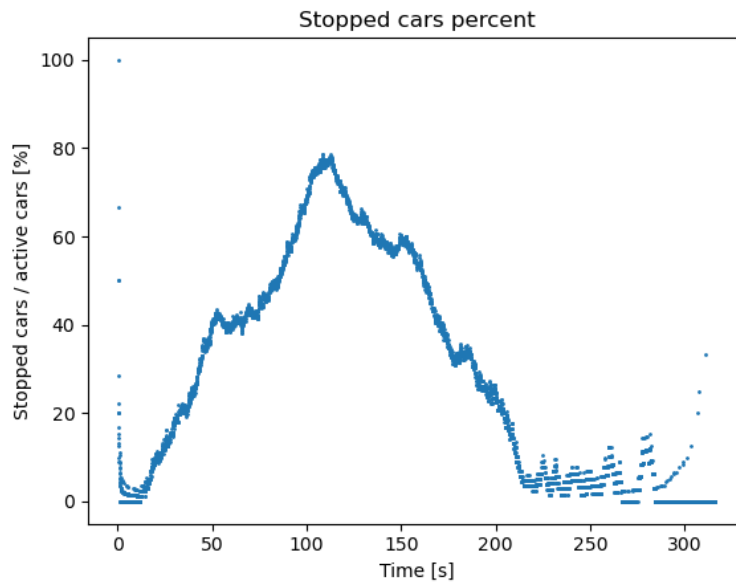
Rysunek 33: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie równorzędne, ruch symetryczny



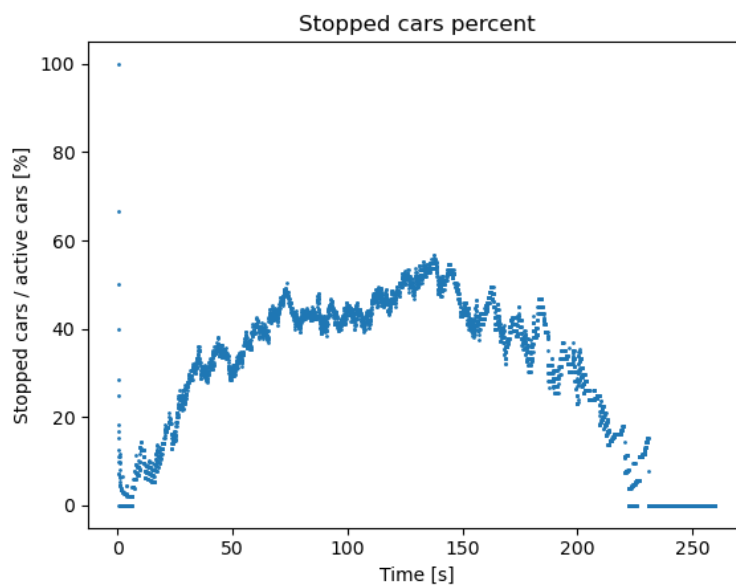
Rysunek 34: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie równorzędne, ruch niesymetryczny



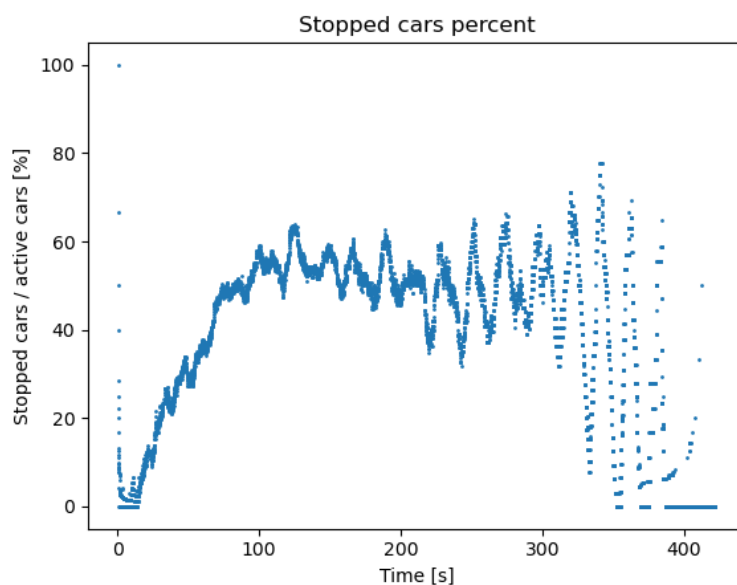
Rysunek 35: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z pierwszeństwem, ruch symetryczny



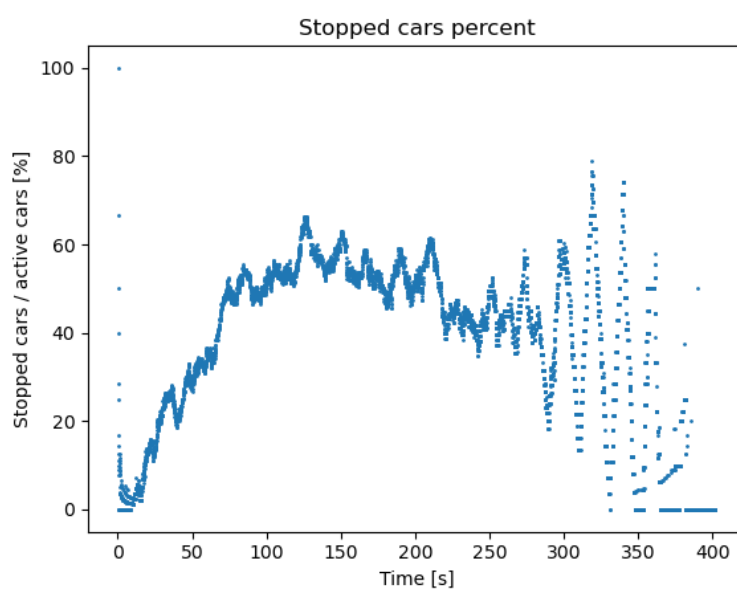
Rysunek 36: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z pierwszeństwem, ruch niesymetryczny



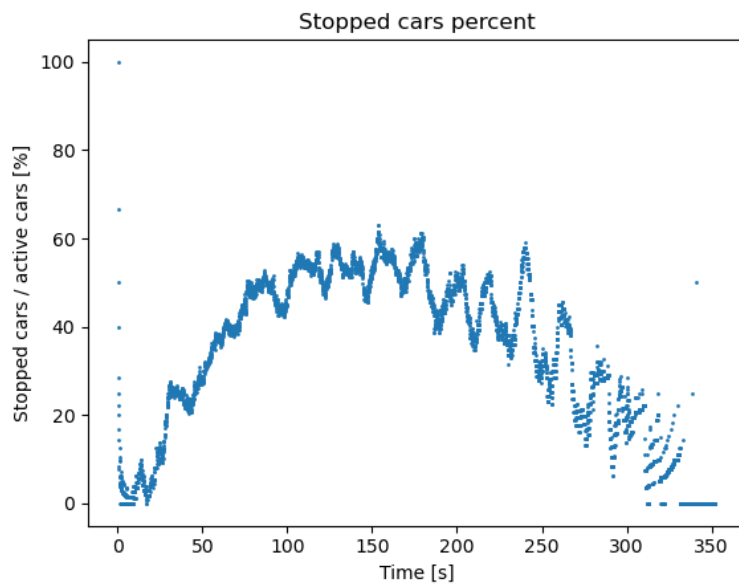
Rysunek 37: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną, ruch symetryczny



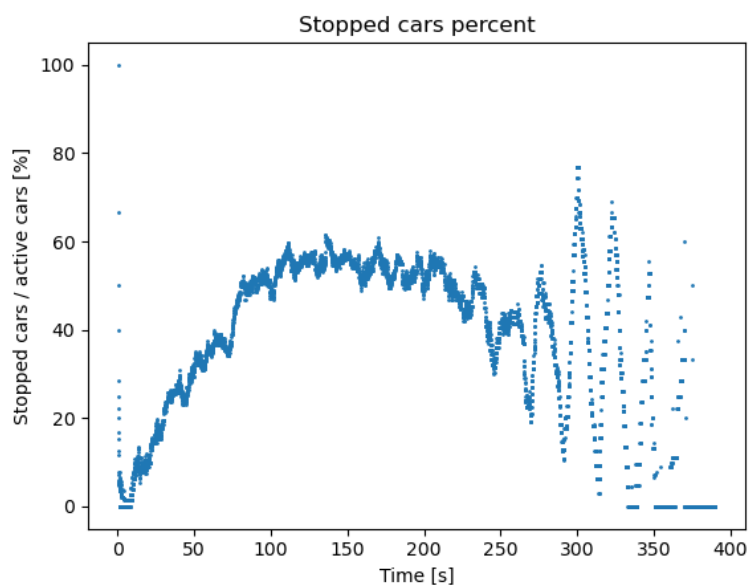
Rysunek 38: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną, ruch niesymetryczny



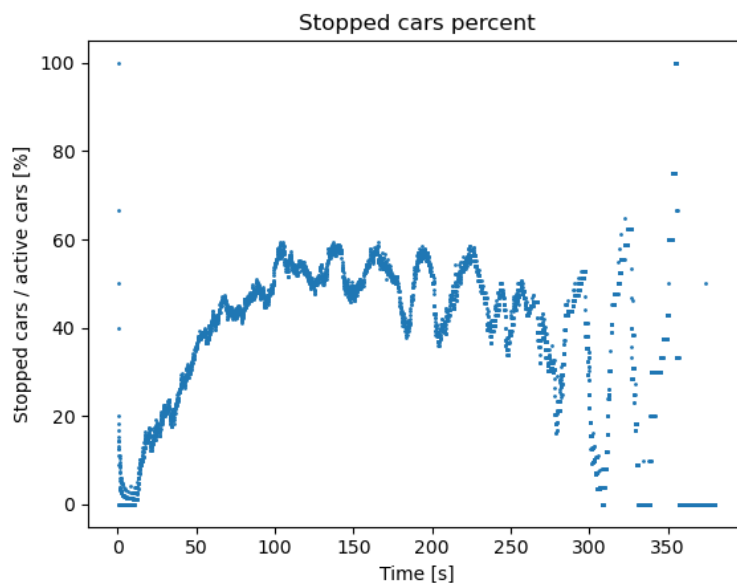
Rysunek 39: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną stosunek długości faz 18:14, ruch symetryczny



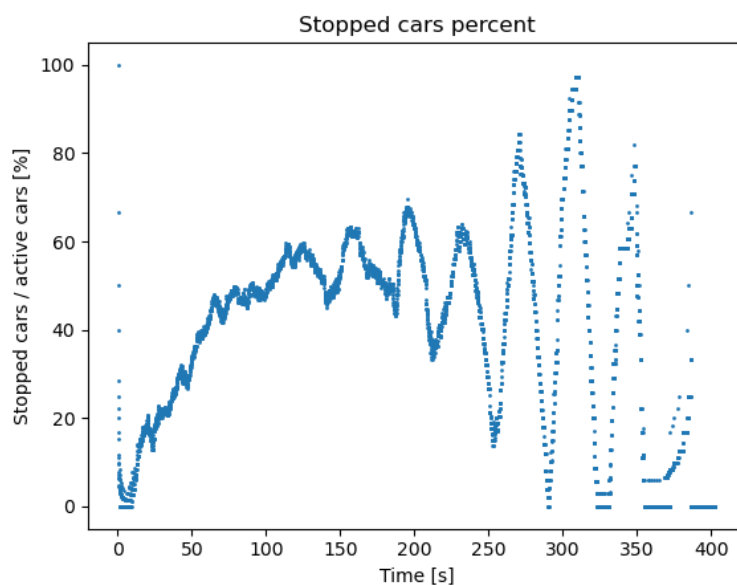
Rysunek 40: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną stosunek długości faz 21:11, ruch niesymetryczny



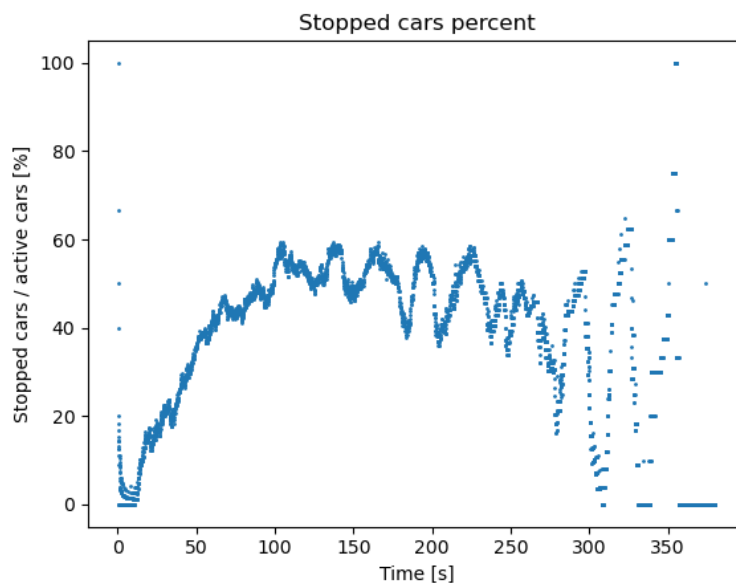
Rysunek 41: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną stosunek długości faz 21:16, ruch symetryczny



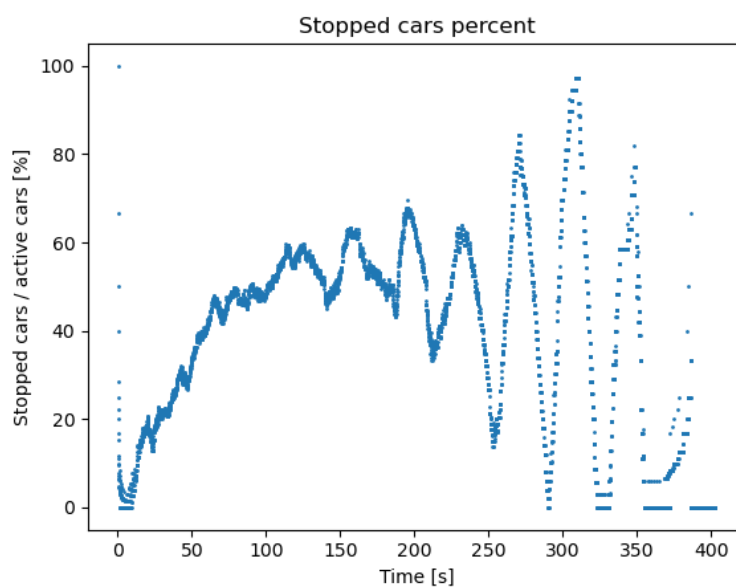
Rysunek 42: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną stosunek długości faz 32:16, ruch niesymetryczny



Rysunek 43: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną stosunek długości faz 32:32, ruch niesymetryczny



Rysunek 44: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - rondo, ruch symetryczny



Rysunek 45: Stosunek liczby zatrzymanych samochodów w zależności od liczby aktywnych pojazdów - rondo, ruch niesymetryczny

4 Symulacja ruchu w modelu organizmu miejskiego

Przeprowadzono również symulację ruchu pojazdów w organizmie miejskim. W tym celu stworzono uproszczony model systemu drogowego na obszarze miasta Kraków. Model zawiera wszystkie podstawowe typy krzyżowań oraz typowe elementy takie jak sygnalizacja świetlna, rondo, drogi wielopasmowe, itp. W oparciu o to przeprowadzono symulację zależności średniej prędkości poruszania się samochodów w mieście w zależności od natężania ruchu (w cyklu dobowym). Ścieżki pokonywane przez pojazdy były definiowane za pomocą wskazania drogi startowej oraz punktu docelowego na mapie i były wyznaczane dynamicznie w trakcie symulacji na podstawie informacji przechowywanych w każdym wierzchołku (skrzyżowaniu) grafu reprezentującego sieć drogową. Wizualizację opisanego modelu przedstawiono na Rys. 48. Krótki film przedstawiający działanie modelu zamieszczony jest również w repozytorium projektu w serwisie Github [12]. Statystyki natężenia ruchu w takim modelu przedstawiono na Rys. 49-50. W celu zasymulowania realistycznego ruchu miejskiego zdecydowano się na zastosowanie dwóch współdziałających generatorów pojazdów o przebiegu sinusoidalnym:

- dla symulacji ruchu porannego do środka organizmu miejskiego,
- oraz dla symulacji ruchu po południowego w kierunku przeciwnym.

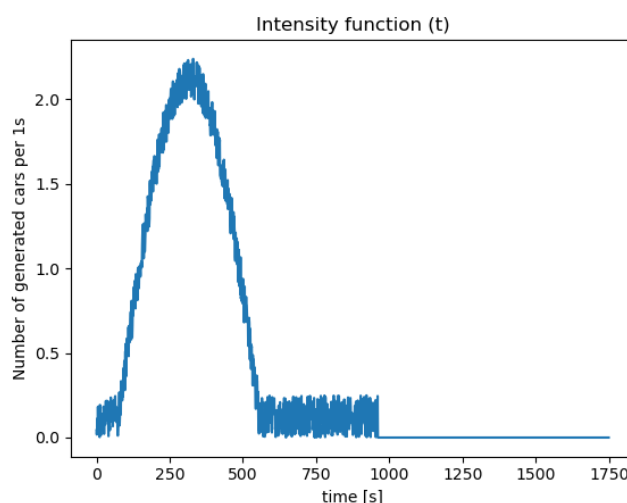
Zależności liczby generowanych pojazdów w jednostce czasu definiują zaprezentowane w listingach 3-4. Wykresy zakładanej szybkości generacji pojazdów przedstawiono na Rys. 46-47.

```

1 def intensity_function_in(t):
2     if t > 960: return 0
3     return max(0, 2.0 * np.sin(-0.5 + np.pi * t / 480)) \
4         + np.random.uniform(0, 0.25)

```

Listing 3: Intensywność ruchu do centrum miasta



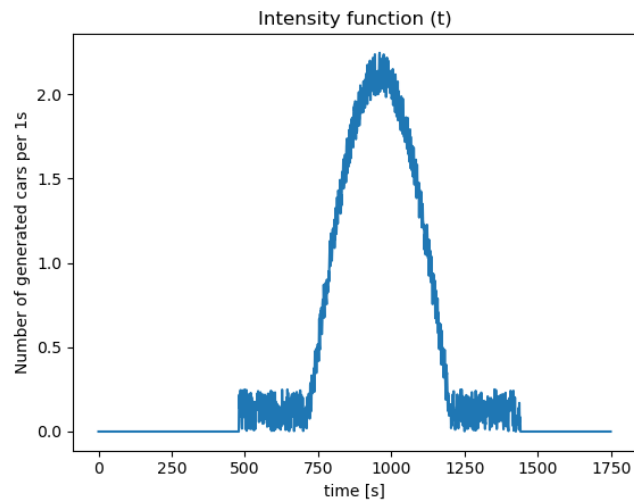
Rysunek 46: Założona maksymalna intensywność generowania pojazdów (w ciągu 1s) w zależności od czasu - ruch do centrum.

```

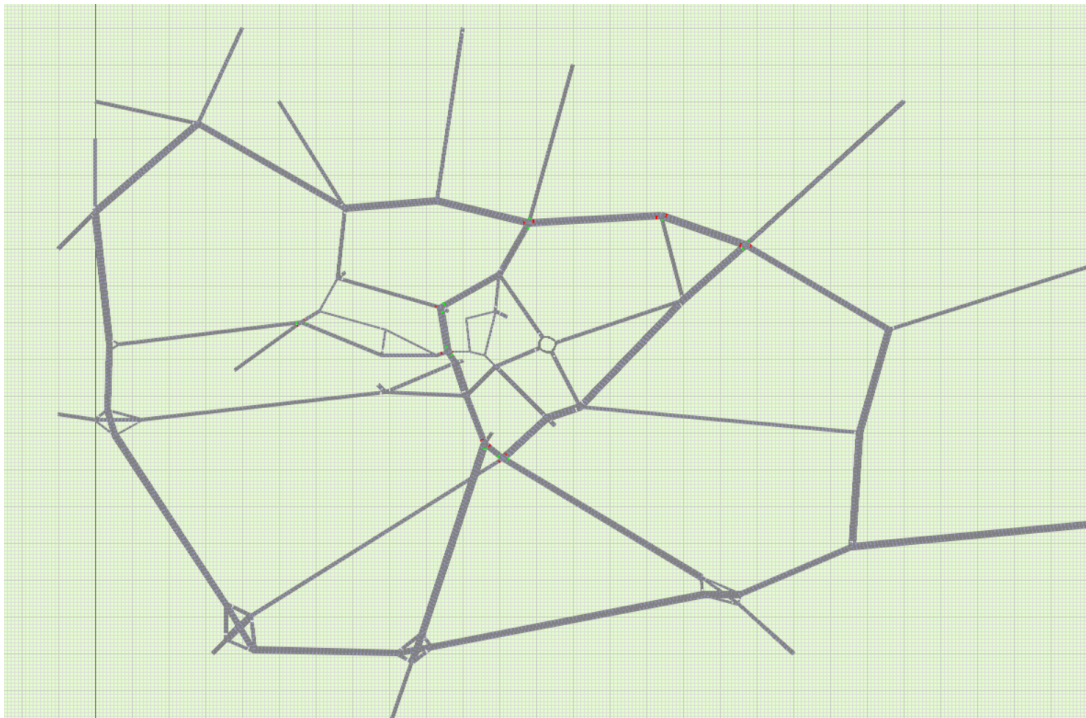
1 def intensity_function_out(t):
2     if t < 480 or t > 1440: return 0
3     return max(0, 2.0 * np.sin(np.pi * (-1.5 + t / 480))) \
4         + np.random.uniform(0, 0.25)

```

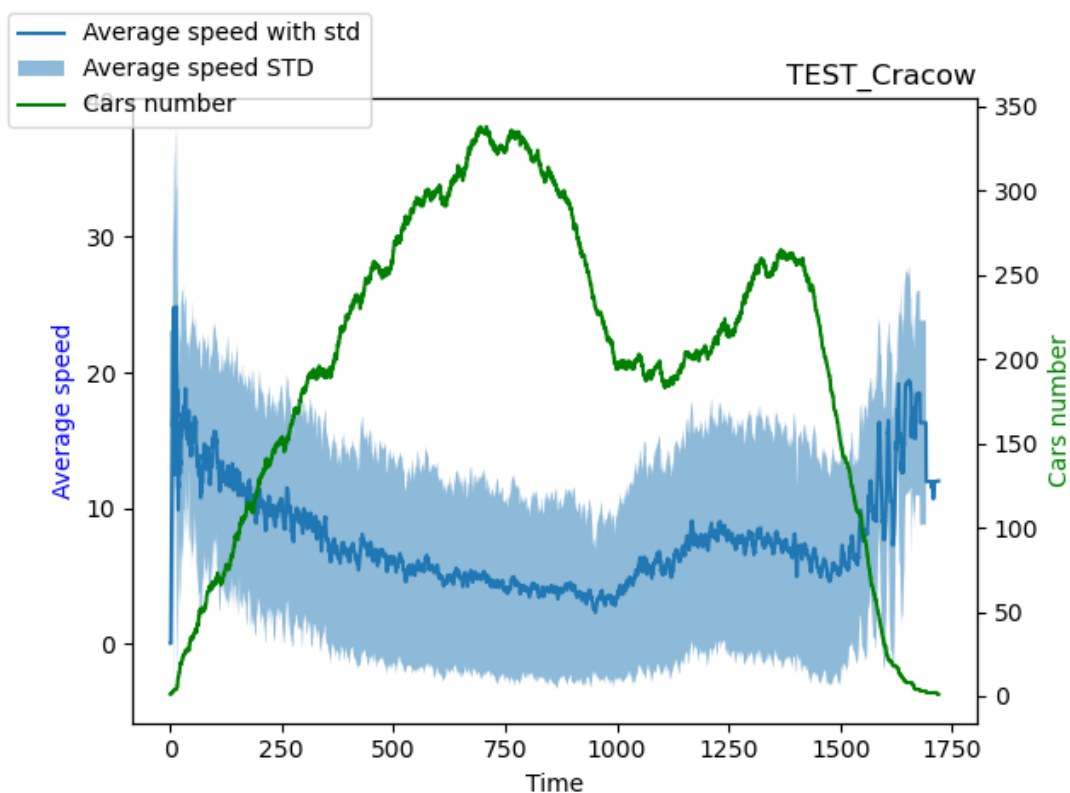
Listing 4: Intensywność ruchu z centrum miasta na zewnątrz



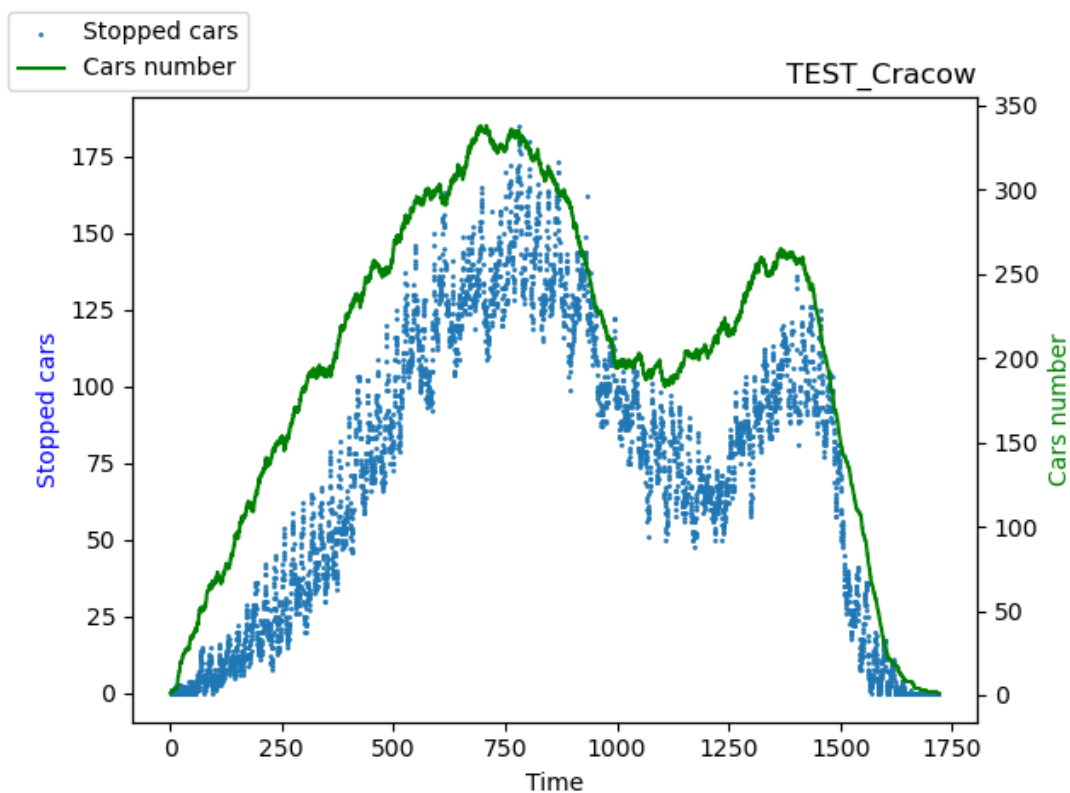
Rysunek 47: Założona maksymalna intensywność generowania pojazdów (w ciągu 1s) w zależności od czasu - ruch z centrum.



Rysunek 48: Wizualizacja modelu miasta (w oparciu o mapę Krakowa).



Rysunek 49: Statystyka dla modelu miasta - prędkość średnia.



Rysunek 50: Statystyka dla modelu miasta - liczba nieprzemieszczających się pojazdów.

5 Podsumowanie i wnioski

5.1 Podsumowanie wyników

Przeprowadzone eksperymenty pozwalają na lepsze zrozumienie podstawowych zależności opisujących ruch pojazdów przez różne typy skrzyżowań i w obrębie bardziej złożonej sieci dróg. W przypadku skrzyżowań zauważane jest duże podobieństwo ogólnych charakterystyk wykresów, choć istnieją pewne szczególne różnice, a wydajność niektórych rozwiązań wydaje się być (w określonych warunkach) wyższa w stosunku do pozostałych. Mimo to wskazanie pojedynczego modelu skrzyżowania zapewniającego optymalne modelowanie natężenia ruchu jest niemożliwe. Wynika to z faktu, że wydajność poszczególnych rozwiązań determinuje charakterystyka ruchu na danym obszarze.

We wszystkich przypadkach - Rys. 7-14 widać podobieństwa widać podobną zależność liczby aktywnych pojazdów od czasu. Liczba ta szybko rośnie w początkowej części symulacji. Następnie po osiągnięciu wartości zbliżonej do maksymalnych (po około 50 jednostkach czasu) liczba ta pozostaje w przybliżeniu stała i zbliżona do wartości maksymalnej, wyraźny spadek następuje po około 100 jednostkach (i utrzymuje się do końca symulacji). W przypadku ruchu symetrycznego wartość liczby aktywnych pojazdów osiąga wartość największą tuż przed upływem 100 jednostek czasu (wyjątkiem jest przypadek ronda, gdzie wartość ta występuje niedługo po upływie 50 epok).

We wszystkich przypadkach - Rys. 7, 9, 11, 13 średnia prędkość pojazdów początkowo gwałtownie rośnie (intensywne dodawanie nowych pojazdów, które się rozpędzają i nie zatrzymują się na skrzyżowaniu) do wartości wyznaczonej przez 75% ograniczenia prędkości na drogach dojazdowych (w przypadku przedstawionych symulacji wartość ta jest ustalona na 20 jednostek). Po upływie niespełna 10 epok średnia prędkość zaczyna powoli spadać (można czas ten utożsamiać z czasem potrzebnym na dojechanie pierwszych samochodów do skrzyżowania). Następnie następuje stabilizacja prędkości na poziomie około 5-7 jednostek. Stabilizacja najbardziej wyraźna jest dla rozwiązań typu rondo i skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną. Wartości prędkości średniej ponownie zaczynają rosnąć po około 150-200 jednostkach czasu (z opóźnieniem w stosunku do spadku liczby aktywnych pojazdów, wzrost najszybciej zachodzi dla skrzyżowania bez pierwszeństwa jazdy, potem dla skrzyżowania z ustalonym pierwszeństwem, a najpóźniej dla rozwiązań takich jak rondo i skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną). W przypadku dwóch pierwszych rozwiązań następuje również spadek odchylenia standardowego średniej prędkości, choć z dodatkowym opóźnieniem w stosunku do wzrostu wartości średniej. Oznacza to, że prędkości średniej ruchu wszystkich pojazdów nie następuje w wyniku uprzywilejowania jednej grupy, ale wszystkich pojazdów. Najwyższe średnie prędkości otrzymujemy na koniec symulacji (dla bardzo niskiej liczby aktywnych pojazdów). W tym przypadku wartości zbliżone do wartości ograniczeń prędkości otrzymujemy dla rozwiązań takich jak rondo i skrzyżowanie z ustalonym pierwszeństwem przejazdu. Całkowity zanik ruchu najszybciej następuje dla prostych typów skrzyżowań (niezależnie od tego czy ustalone jest pierwszeństwo ruchu). W końcowej fazie ruchu pojazdów przez skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną następuje wyraźna oscylacja wartości prędkości średniej o okresie zbliżonym do ustalonego okresu zmiany świateł ulicznych (najprawdopodobniej występuje to, gdy na jednej z dróg pozostają jeszcze samochody oczekujące na przejazd, a na drugiej poruszają się one już płynnie - są za skrzyżowaniem).

Liczba samochodów mających zerową prędkość (czekających na wjazd na skrzyżowanie) zachowuje się w sposób zbliżony do liczby aktywnych pojazdów. Występuje jednak wyraźne przesunięcie - Rys. 8, 10, 12, 14 fazowe (największe dla prostych typów skrzyżowań, zdecydo-

wanie najmniejsze dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną). W przypadku skrzyżowań prostych spadek liczby samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie spada gwałtownie po około 100-150 jednostkach czasu, dla ronda i skrzyżowania z sygnalizacją świetlną zjawisko to występuje w podobnym czasie, jednak trwa dużo dłużej. Maksymalna wartość liczby zatrzymanych samochodów jest najwyższa dla skrzyżowań prostych (blisko 100 pojazdów), pod tym względem lepiej prezentuje się skrzyżowanie z sygnalizacją świetlną (wartość opisywanego parametru nie przekracza 50). Najlepiej pod tym względem można ocenić jednak rondo, w tym przypadku liczba pojazdów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie nieznacznie przekracza 50 oczekujące na przejazd, a na drugiej poruszają się one już płynnie - są za skrzyżowaniem).

Dla przypadku ruchu niesymetrycznego - Rys. 15 32 (ruch przez skrzyżowanie z dwóch wybranych kierunków jest większy niż z pozostałych) otrzymane wyniki ulegają znaczącej zmianie. Dla skrzyżowań prostych charakterka zależności liczby aktywnych pojazdów pozostaje zbliżona do przypadku bazowego, podobnie dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną (bez uprzywilejowania jednego z kierunków). W przypadku ronda i skrzyżowań z sygnalizacją świetlną preferujących kierunek, z którego nadjeżdża więcej pojazdów maksimum zależności liczby aktywnych pojazdów od czasu jest bardziej wyraźne. Dla wszystkich przeanalizowanych typów skrzyżowań i sposobów synchronizacji świateł następuje wydłużenie czasu symulacji (ostatni samochód musi czekać dłużej na przejazd przez skrzyżowanie). Czas ten najmniejszy dla skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu (niecałe 250 jednostek), dla skrzyżowania równorzędnego jest to około 300 jednostek. W przypadku skrzyżowań z sygnalizacją świetlną również następuje wzrost całkowitego czasu symulacji o około 60%. Jest on nieco mniejszy dla skrzyżowań z wydłużonym światłem zielonym dla kierunków o większym natężeniu ruchu (350 jednostek czasu). Nie stwierdzono, żeby wydłużenie całego cyklu przyniosło znaczącą poprawę tego parametru.

Dla wykresów zaprezentowanych na Rys. 15, 17, 19, 31, 21, 23, 25, 27, 29 ogólne zależność prędkości średnich w zależności od czasu pozostaje podobna jak wcześniej, jednak relacje pomiędzy poszczególnymi typami skrzyżowań ulegają pewnym zmianom. Dla rozwiązań niesymetrycznym (skrzyżowania z pierwszeństwem i niesymetryczną sygnalizacją świetlną) oraz dla ronda obserwowany jest nieznaczny spadek odchylenia standardowego średniej prędkości (może to oznaczać, że relatywnie rzadziej występuje sytuacja, gdy część pojazdów przemieszcza się w sposób płynny podczas gdy pozostałe oczekują na przejazd przez dłuższy czas). Minimum wartości prędkości średniej pojazdów dla wszystkich typów skrzyżowań następuje po około 100 jednostkach czasu, dla skrzyżowania z niesymetryczną sygnalizacją świetlną i dla ronda nieco wcześniej niż dla pozostałych typów skrzyżowań. Dla skrzyżowań z sygnalizacją świetlną występują charakterystyczne oscylacje wartości prędkości średniej, obserwowane szczególnie dla małej liczby samochodów na skrzyżowaniu. Dla skrzyżowań z sygnalizacją świetlną nie preferującą (lub słabo preferującą) bardziej obciążony kierunek ruchu występują również oscylacje wartości odchylenia standardowego dla tego parametru, co wskazuje na fakt, iż pojazdy na bardziej obciążonych ulicach czekają na światło zielone podczas gdy prawo przejazdu przez skrzyżowanie przyznane jest pojazdom na drogach, które zostały już przez nie opuszczone. Wskazuje to na nieefektywne zarządzanie ruchem. Najstabilniejsze i nieco wyższe w stosunku do pozostałych przypadków wartości prędkości średniej obserwujemy dla skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu. Nieco niższą średnią prędkość otrzymujemy dla ronda i skrzyżowań z sygnalizacją świetlną (o ile nie następuje sytuacja, że pojazdy pozostają tylko na kierunkach o tej samej fazie świateł - co skutkuje tym, że w pewnych okresach żaden samochód nie korzysta z możliwości przejazdu).

Analizując liczbę samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie - Rys. 16, 18, 20, 32, 22, 24, 26, 28, 30, można zaobserwować podobne tendencje jak dla symetrycznego obciąże-

nia ruchem, jednocześnie wartość ta rośnie dla prawie wszystkich typów skrzyżowań. Największy wzrost występuje dla ronda (do blisko 100 pojazdów). Oznacza to, że na przejazd czeka w tym przypadku nawet 80% aktywnych pojazdów - Rys. 44, a nie jak w przypadku ruchu symetrycznego około 50% - Rys. 45). Dla skrzyżowań z sygnalizacją świetlną procent samochodów oczekujących na przejazd przez skrzyżowanie oscyluje na poziomie 40-60% - Rys. 37-43. Największe różnice w stosunku do wcześniej rozważanego przypadku występują jednak dla skrzyżowań:

- równorzędnego - oczekuje nawet około 80% pojazdów (wzrasta liczba zatrzymanych samochodów, nie udział procentowy) - Rys. 33, 34,
- z pierwszeństwem przejazdu - oczekuje poniżej 50% pojazdów (jedyne przypadki wyraźnego spadku tego wskaźnika) - Rys. 35, 36.

Dla skrzyżowań z sygnalizacją świetlną można zauważyć, że liczba oczekujących na przejazd przez skrzyżowanie pojazdów jest zbliżona we wszystkich analizowanych przypadkach, jednak dla skrzyżowań o dłuższym cyklu zmiany świateł wyższa jest liczba aktywnych pojazdów przemieszczających się przez skrzyżowanie. Dla świateł o mniejszej dysproporcji w długości poszczególnych faz pod koniec symulacji występują wyraźne oscylacje liczby pojazdów oczekujących na przejazd się przez skrzyżowanie

Dla modelu sieci miejskiej - Rys. 48 charakterystyka wykresów prędkości średniej, liczby pojazdów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie i liczby aktywnych pojazdów od czasu jest zbliżona do wykresów z podrozdziałów 3.1 oraz 3.2 - Rys. 49-50. W szczególności można zaobserwować duże podobieństwo do wykresów dla skrzyżowań z sygnalizacją świetlną. Przypuszczalnie jest to spowodowane faktem, iż sygnalizatory rozmieszczone są w kluczowych punktach mapy i przez to wpływają na natężenie ruchu w całej symulowanej sieci drogowej. Wprowadzenie modułu wyboru optymalnej trasy bardzo upraszcza definiowanie tras poszczególnych pojazdów, lecz ze względu na spowolnioną propagację informacji o powstawaniu zatorów (średnia z ostatnich kilku przejazdów, jeden krok algorytmu bellmana-forda na jedną iterację symulacji) nie zawsze spełnia on swoje zadanie w zapobieganiu zjawiskom takim jak korki czy zatory drogowe.

5.2 Wnioski

Na podstawie opisanych w poprzednim podrozdziale charakterystyk poszczególnych rozwiązań można stwierdzić, że dla symetrycznego natężenia ruchu na drogach dojazdowych relatywnie najlepsze rezultaty wykazują takie rozwiązania jak skrzyżowanie bez pierwszeństwa przejazdu i skrzyżowanie z pierwszeństwem przejazdu. Rozwiązanie te jednak wykazują niską wydajność w przypadku maksymalnego obciążenia (bardzo wysoka liczba samochodów oczekujących na wjazd na skrzyżowanie), pod tym względem lepsze rezultaty otrzymać można dla ronda. Pewnie połączenie tych cech otrzymujemy dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną.

W przypadku skrzyżowań o niesymetrycznym obciążeniu występuje zauważalna różnica pomiędzy różnymi typami skrzyżowań. Najlepsze rezultaty (wysoka średnia prędkość pojazdów, niska liczba zatrzymanych pojazdów, najkrótszy czas potrzebny na przejazd wszystkich pojazdów) otrzymano dla skrzyżowania z ustalonym pierwszeństwem przejazdu. Zaobserwowano również, że ustawienia sygnalizacji świetlnej w tym przypadku może podnieść wydajność na skrzyżowaniu (wydłużenie cyklu zmiany świateł i priorytetyzacja kierunków o większym natężeniu ruchu pozytywnie wpływa na efektywność skrzyżowania). Rozwiązanie nie jest jednak lepsze niż wykorzystanie skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu. Dla skrzyżowań z sygnalizacją świetlną wyraźne oscylacje liczby samochodów oczekujących na przejazd

przez skrzyżowanie są spowodowane sytuacją, w której samochody z kierunków bardziej obciążonych czekają na wjazd na skrzyżowanie na świetle czerwonym pomimo iż z pozostałych kierunków nie ma już żadnego ruchu (zaobserwowano w oparciu o animację).

5.3 Ogólna ocena jakości symulacji

Stworzone narzędzie do tworzenia symulacji ruchu drogowego umożliwia opracowywanie modeli skrzyżowań o realistycznej charakterystyce. Zachowanie modeli dla różnych rodzajów skrzyżowań nie przeczy logice i intuicyjnej ocenie tego typu rozwiązań. Jednak ze względu na stworzenie modelu kierowcy w oparciu o założenia IDM można zaobserwować tendencję do faworyzowania prostszych rozwiązań takich jak skrzyżowania równorzędne czy skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu w stosunku do systemów bardziej złożonych jak skrzyżowania z sygnalizacją świetlną czy ronda (agentowy model kierowcy zawsze podejmuje poprawne i optymalne decyzje). Dodatkowo dla większych modeli następuje spadek dokładności symulacji. Wykonanie każdego kroku wymaga relatywnie długiego okresu czasu na typowych komputerach domowych (dla modelu z około 200 ulicami i kilkuset samochodami jeden krok zajmuje blisko 1s). Dla tak dużych modeli następuje także problem z renderowaniem wizualizacji. W ogólności jednak narzędzie umożliwia symulację ruchu samochodowego i ocenę określonych struktur sieci drogowej. Dodatkowo możliwa jest parametryzacja wielu elementów modelu za równo w zakresie samej symulacji, jak i w zakresie wizualizacji.

Całość kodu, proces inicjalizacji oraz wizualizacja symulacji dostępne są w projekcie GitHub: <https://github.com/JanickiJ/TrafficSimulator>

Bibliografia

- [1] R. Bellman. „On a routing problem”. W: *Quarterly of Applied Mathematics* 16 (1958), s. 87–90.
- [2] *Bézier curve*. 2023. URL: https://pl.wikipedia.org/wiki/Krzywa_B%C3%5C%A9ziera (term. wiz. 28.03.2023).
- [3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest i R. L. Stein. *Wprowadzenie do algorytmów*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
- [4] R. W. Floyd. „Algorithm 97: Shortest Path”. W: *Communications of the ACM* 5(6) (1962), s. 344.
- [5] L. R. J. Ford i D. R. Fulkerson. „A shortest chain algorithm”. W: *Flows in Networks* (1962), s. 130–134.
- [6] PTV Planung Transport Verkehr AG. *PTV Vissim 2023*. 2023. URL: <https://www.ptvgroup.com/pl/rozwiazania/produkty/ptv-vissim/dlaczego-ptv-vissim/> (term. wiz. 28.03.2023).
- [7] The AnyLogic Company. *Road Traffic Simulation Software*. 2022. URL: <https://www.anylogic.com/road-traffic/> (term. wiz. 28.03.2023).
- [8] *Traffic Simulation*. URL: <https://traffic-simulation.de/> (term. wiz. 28.03.2023).
- [9] M. Treiber, A. Hennecke i D. Helbing. „Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations”. W: *Physical Review E* 62.2 (2000), s. 1805–1824.
- [10] *Ustawa z dnia 20 czerwca 1997 r. Prawo o ruchu drogowym*. Dz.U.2022.988 t.j. Wersja od: 1 stycznia 2023 r. do: 30 września 2023 r. Czer. 1997.
- [11] S. Warshall. „A theorem on Boolean matrices”. W: *Journal of the ACM* 9(1) (1962), s. 11–12.
- [12] M. Żelasko i J. Janicki. *TrafficSimulator*. 2023. URL: <https://github.com/JanickiJ/TrafficSimulator> (term. wiz. 06.04.2023).