

BERECHNUNG DER FLUGHÖHE EINER WASSERRAKETE

EIN AUSFLUG IN DIE PHYSIK

EINLEITUNG

Auch wenn Wasserraketen auf der Basis des sehr einfachen **Rückstoßprinzips** arbeiten, ist es eine große Herausforderung die Flughöhe einer Wasserrakete möglichst exakt vorherzusagen. Denn dafür ist die Anwendung zahlreicher physikalischer Gesetze notwendig. Hier wollen wir euch möglichst einfach zeigen, wie man die Flughöhe annähernd bestimmen kann. Dabei verwenden wir Erklärungsmodelle, die für **Oberstufenschüler** geeignet sind. Solltest du noch Fragen oder Anregungen haben, kannst du uns jederzeit eine E-Mail schreiben.

WELCHE PHYSIKALISCHEN GESETZE WERDEN MIT EINBEZOGEN?

- Raketengrundgleichung (Impulserhaltungssatz)
- Bernoulli-Gleichung (Energieerhaltungssatz für reibungsfreie Strömungen)
- Gesetze der klassischen Bewegungslehre

WELCHE EINFLÜSSE SIND IN DEN RECHNUNGEN BEINHALTET?

- Austrittsgeschwindigkeit des Wassers
- Einfluss der Austrittsgeschwindigkeit auf die Fortbewegungsgeschwindigkeit
- Gravitation / Erdanziehung

WAS WIRD NICHT BERÜCKSICHTIGT?

- Luftwiderstand
- Das Wasser in der Rakete besitzt in Wirklichkeit keine konstante Austrittsgeschwindigkeit
- Die nach dem Wasser ausgestoßene Luft bewirkt eine weitere, unberücksichtigte Beschleunigungsphase

INHALT:

- Erläuterung der Theorie
 - Herleitung der Raketengrundgleichung
 - Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit des Wassers
 - Raketengrundgleichung mit Austrittsgeschwindigkeit und Gravitation
- Rechenbeispiel anhand der Wasserrakete Arrow 1
- Formelsammlung zum Berechnen von Flughöhen

HERLEITUNG DER RAKETENGRUNDGLEICHUNG

Eine Wasserrakete startet. Die Masse der Rakete m_{rakete} nimmt innerhalb eines bestimmten, sehr kurzen Zeit um dm ab, weil das Wasser ausgestoßen wird. Dies geschieht (vereinfacht gesehen) mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit $-v_{Wasser}$. Die **Impulsänderung des Wassers** beträgt somit aus Sicht eines außenstehenden Betrachters:

$$dp_{wasser} = -dm * (v_{rakete} - v_{Wasser})$$

Gleichzeitig beschleunigt die Rakete, ihre Geschwindigkeit nimmt innerhalb kurzer Zeit um v_{rakete} zu. Somit besitzt auch die **Rakete eine Impulsänderung**:

$$dp_{rakete} = d(m * v_{rakete}) = dm * v_{rakete} + dv_{rakete} * m$$

Da es sich um ein geschlossenes System handelt, kann der **Impulserhaltungssatz** ($p = konst.$) angewendet werden. Wenn sich der Gesamtimpuls des Systems nicht verändern kann, so muss die Impulsänderung $dp = 0$ sein.

$$dp = 0 = \text{Impulsänderung Rakete} + \text{Impulsänderung Wasser}$$

$$0 = dm * v_{rakete} + dv_{rakete} * m - dm * (v_{rakete} - v_{Wasser})$$

$$0 = \cancel{dm * v_{rakete}} + dv_{rakete} * m - \cancel{dm * v_{rakete}} + dm * v_{Wasser}$$

$$0 = dv_{rakete} * m + dm * v_{Wasser}$$

$$dv_{rakete} * m = - dm * v_{Wasser}$$

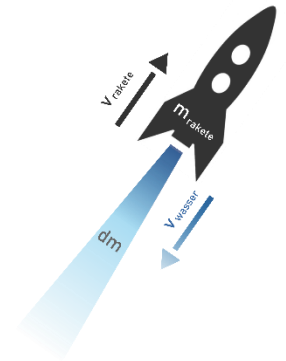
$$dv_{rakete} = - \frac{dm}{m} * v_{Wasser}$$

Die erhaltene Gleichung ist eine **Differentialgleichung**. Diese muss von m_{start} (Startmasse) nach m_{end} (Endmasse bzw. „Leergewicht“) integriert werden, um die Raketengrundgleichung zu erhalten. Dabei kann $-v_{Wasser}$, da als konstant angenommen, vor das Integral gezogen werden.

$$v_{rakete} = -v_{Wasser} * \int_{m_{start}}^{m_{end}} \frac{dm}{m} = -v_{Wasser} * (\ln(m_{end}) - \ln(m_{start})) = v_{Wasser} * (\ln(m_{start}) - \ln(m_{end}))$$

$$v_{rakete} = v_{Wasser} * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right)$$

➔ Die maximale Geschwindigkeit der Rakete ist von der Restmasse bzw. dem Leergewicht der Rakete m_{end} sowie der Austrittsgeschwindigkeit des Wassers abhängig.



AUSTRITTSGESCHWINDIGKEIT DES WASSERS

Zur Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit des Wassers benötigt man die **Bernoulli-Gleichung**, welche sich als der *Energieerhaltungssatz für reibungsfreie Strömungen und Gase* bezeichnen lässt. Die Bewegungsenergie des strömenden Wassers wird als konstant angenommen, da es sich um ein geschlossenes System handelt. Für die **Bewegungsenergie des Wassers** gilt:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} * m * v^2$$

Weiterhin gilt allgemein der Zusammenhang zwischen Kraft, Druck in der Rakete und Fläche der Düsenöffnung:

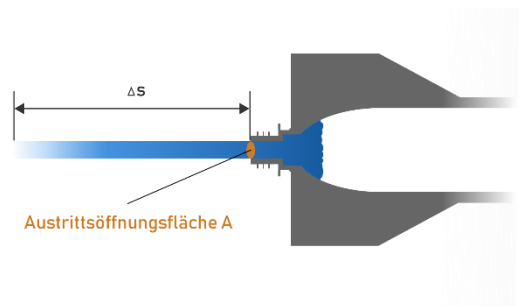
$$F = p * A$$

Über diese Kraft können wir eine weitere Gleichung für die Energie aufstellen:

$$W = F * \Delta s = p * A * \Delta s$$

Der Ausdruck $A * \Delta s$ (Fläche mal Strecke) ergibt ein Volumen ΔV . Dies ist im Grunde die Wassersäule, welche aus der Düse der Rakete herausgedrückt wird.

$$W = p * \Delta V$$



Die beiden Ausdrücke für die Energie des Wassers können nun gleichgesetzt werden.

$$p * \Delta V = \frac{1}{2} * m * v^2$$

Unser Ziel ist es nun, den Ausdruck Δm aus der Gleichung zu entfernen. Die Dichte ρ (Achtung: Kein p!) ist definiert durch: $\rho = \frac{m}{\Delta V}$ beziehungsweise umgeformt $m = \rho * \Delta V$

$$p * \cancel{\Delta V} = \frac{1}{2} * \rho * \cancel{\Delta V} * v^2$$

$$\rightarrow p + \frac{1}{2} * \rho * v^2 = konst.$$

Bernoulli-Gleichung

Bezogen auf die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers:

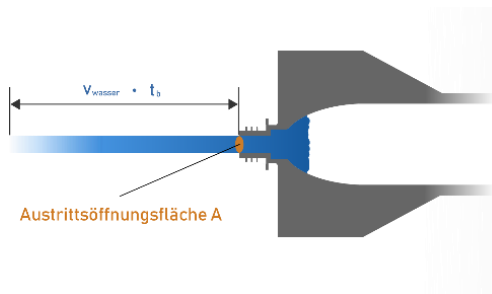
$$v_{Wasser} = \sqrt{\frac{2 * p}{\rho}}$$

EINFLUSS DER GRAVITATION

Kombiniert man die Formel zur Endgeschwindigkeit einer Rakete mit der als konstant angenommenen Gravitationskraft, so erhält man:

$$v_{rakete} = v_{Wasser} * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right) - g * t_B$$

Wie wir bei der Herleitung der Austrittsgeschwindigkeit bemerkt haben, kann das ausgetretene Wasser als eine Säule mit dem Volumen V_{Wasser} beschrieben werden:



$$V_{Wasser} = A * v_{Wasser} * t_b \quad \text{oder umgeformt} \quad t_b = \frac{V_{Wasser}}{A * v_{Wasser}}$$

Einsetzen ergibt:

$$v_{rakete} = v_{Wasser} * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right) - g * \frac{V_{Wasser}}{A * v_{Wasser}}$$

Wir können jetzt mit der Dichte ρ erweitern, und dadurch im Bruch ganz rechts das Volumen des Wassers durch dessen Masse ersetzen.

$$v_{rakete} * \rho = v_{Wasser} * \rho * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right) - g * \frac{m_{Wasser}}{A * v_{Wasser}}$$

Jetzt teilen wir wieder durch die Dichte, und übrig bleibt die folgende Gleichung:

$$v_{rakete} = v_{Wasser} * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right) - g * \frac{m_{start} - m_{end}}{\rho * A * v_{Wasser}}$$

Zusammen mit der berechneten Austrittsgeschwindigkeit des Wassers ergibt sich die maximale Geschwindigkeit der Rakete v_{rakete} in Abhängigkeit vom Start- und Leergewicht sowie dem Startdruck.

BESTIMMUNG DER FLUGHÖHE

AM BEISPIEL DER ARROW 1

Die Wasserrakete [Arrow 1](#) hat ein Volumen von 4,6 Litern, ein Leergewicht von 445g und wird mit 1,3L Wasser sowie 15 bar (1.500.000 Pa) Luftdruck betankt. Die Austrittsöffnung der Rakete ist rund und hat einen Durchmesser von 22mm.

$$\text{Austrittsquerschnitt: } A = \pi * \left(\frac{0,022m}{2}\right)^2 = 3,8 * 10^{-4}m^2$$



Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit des Wassers:

$$v_{Wasser} = \sqrt{\frac{2 * \Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 * 15 * 10^5 Pa}{1000 kg/m^2}} = 54,7 m/s$$

Berechnung der maximalen Geschwindigkeit der Rakete:

$$v_{rakete} = v_{Wasser} * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right) - g * \frac{m_{Wasser}}{\rho * A * v_{Wasser}}$$

$$v_{rakete} = 54,7 m/s * \ln\left(\frac{1,745 Kg}{0,445 Kg}\right) - 9,81 m/s^2 * \frac{1,3 Kg}{1000 kg/m^2 * (3,8 * 10^{-4} m^2) * 54,7 m/s}$$

$$v_{rakete} = 71,74 m/s$$

Weg, welchen die Rakete während der Beschleunigungsphase zurücklegt:

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_b^2 = \frac{1}{2} v_{end} t_b \quad \text{mit} \quad t_b = \frac{V_{Wasser}}{A * v_{Wasser}} \quad (\text{Herleitung siehe vorherige Seite})$$

$$s_1 = \frac{1}{2} * v_{end} * \frac{V_{Wasser}}{A * v_{Wasser}} = \frac{1}{2} * \frac{71,74 m}{s} * \frac{1,3 * 10^{-3} m^3}{3,8 * 10^{-4} m^2 * \frac{54,7 m}{s}} = 2,24 m$$

Weg nach der Beschleunigungsphase (Freiflugphase, die Rakete wird mit -g beschleunigt):

$$s_2 = \frac{1}{2} * v_{end} * t \quad \text{mit} \quad t = \frac{v_{end}}{g}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} * v_{end} * \frac{v_{end}}{g} = \frac{v_{end}^2}{2 * g} = \frac{\left(\frac{71,74 m}{s}\right)^2}{2 * \frac{9,81 m}{s^2}} = 262,3 m$$

Flughöhe (Luftwiderstand nicht berücksichtigt):

$$h = s_1 + s_2 = 2,24 m + 262,3 m$$

$$\boxed{h = 264,54 m}$$

FORMELSAMMLUNG ZUR BERECHNUNG DER FLUGHÖHE

Austrittsquerschnitt:

$$A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit:

$$v_{Wasser} = \sqrt{\frac{2 * \Delta p}{\rho}}$$

! p : Luftdruck
 ρ : Dichte

Berechnung der maximalen Geschwindigkeit:

$$v_{rakete} = v_{Wasser} * \ln\left(\frac{m_{start}}{m_{end}}\right) - g * \frac{m_{Wasser}}{\rho * A * v_{Wasser}}$$

Weg während der Beschleunigungsphase:

$$s_1(t) = \frac{1}{2} * v_{end} * \frac{V_{Wasser}}{A * v_{Wasser}}$$

Weg nach der Beschleunigungsphase:

$$s_2(t) = \frac{v_{end}^2}{2 * g}$$

Flughöhe:

$$h = s_1 + s_2$$

WEITERE INFORMATIONEN ZU WASSERRAKETEN:

Raketfued Education ist ein Angebot von Raketfued Rockets, einem jungen Team welches sich seit 2011 mit dem Bau von Wasserraketen beschäftigt und aus einer Gruppe von Schülern hervor ging. Im Rahmen von Raketfued Education bieten wir Workshops sowie zahlreiche Anleitungen für Schüler zum selbständigen Bau von Wasserraketen an. Im Jahr 2016 gelang es uns, mit 290m Flughöhe den neuen deutschen Höhenrekord einer Wasserrakete aufzustellen. Weitere Informationen über uns, unsere Raketen sowie zahlreiche Anleitungen zum Bau von größeren und kleineren Wasserraketen finden sich hier:

www.raketfuedrockets.com

YouTube: www.youtube.com/raketfued

Instagram & Twitter: @raketfuedrockets

E-Mail: Raketfued@gmx.de



QUELLEN:

Physik für Kids – Wasserrakete:

www.physikfuerkids.de/wiewas/wrakete/h2orak.pdf

Wikipedia – Raketengrundgleichung:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Raketengrundgleichung>

Lernhelfer.de – Bernoullisches Gesetz

<https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/bernoullisches-gesetz>