Berechnungen rund um die Wasserrakete

1 Apoapsishöhe bei interner Beschleunnigung / Flugcharakteristika

Berechnung der verschiedenen wichtigen Werte der durch austretendes Wasser beschleunigten Rakete. Hierbei spielen Triebwerksdruck, Luftwiderrstand und Erdanziehung die größte Rolle.

1.1 Mathematischer Ansatz

Impuls des Beobachtersystems:

$$I_{Ges} = 0 = I_R + I_{Str}$$

Der Impuls der Rakete ist positiv, der Impuls des Strahls, durch die Geschwindigkeit entegegen der Rakete, bzw. nach unten, negativ.

Impulsänderung der Rakete:

$\Delta I_R = -\Delta I_{str}$
$\rightarrow m_R * \Delta v_R = -\Delta m_{Str} * w_{Str}$
$\Rightarrow (m_R(t) - \Delta m_{Str})*$
$I_{Str}(t) = m_{Str}(t) + v_{Str}$

Effektive Austrittsgeschwindigkeit, sozusagen, auf das System Rakete bezogen: $w_e(t) = v_{Str}(t) - v_R(t)$.

$dv_R = -w_e(t)\frac{dm_R}{m_R(t)}$

Name	Beschreibung	Einheit	Veränderung
$m_{Struktur}$	Masse der Tanks und Düse usw.	kg	konstant
m_{NL}	Masse der Nutzlast(in meinem Fall 0kg)	kg	konstant
m_W	Masse des Wassers	kg	variabel
A_D	Fläche der Düse, durch die das Wasser gelangt	m^2	konstant
p_0	Initialer absoluter Druck in der Flasche	Pa	konstant
m_0	Startmasse: $m_{Struktur} + m_W + m_{NL}$	kg	konstant
m_L	Masse der Luft: $V_L * \frac{p_0 * M}{R*T}$	kg	konstant
c_W	Austrittsgeschwindigkeit Wasser	m/s	variabel
V_T	Volumen des Drucktanks	m^3	konstant
V_W	Volumen Wasser: m_W/ρ_W	m^3	variabel
ρ_W	Dichte des Wassers: 0.998	kg/m^3	konstant
ρ_L	Dichte der Luft	kg/m^3	variabel
p_A	Umgebungsdruck 10ˆ5	Pa	konstant

Volumenstrom: $\frac{dV_W}{dt} = v_{Str}A_D$, wobei v_{Str} wiederum von dem Wasservolumen in der Rakete abhängt, da dieses den Luftinnendruck bestimmt. Ich gehe nämlich davon aus, dass die Menge Luft während das Wasser ausströmt gleich bleibt und sich somit der Raum für selbige erhöht.

Der Luftinnendruck in der Rakete ist:

$$p = \frac{\rho_L * R * T}{M} \tag{1.1.1}$$

Hierbei ist M die molare Masse mit 0.028949kg/mol für trockene Luft, R die Reynoldszahl mit 8.3145 J/(mol*K) und T die Temperatur mit 293.15K, was 20°C entspricht. Die Dichte der Luft ρ_L ergibt sich aus dem Quotienten der, wie schon erwähnt konstanten, Masse der Luft m_L und dem nicht (mehr) vom Wasser eingenommenen Volumen $V_L = V_T - V_W$. Setzt man dies für p in die umgestellte Bernoulli-Gleichung $v = \sqrt{\frac{2p}{\rho_W}}$ ein, erhält man:

$$v_{Str} = \sqrt{\frac{2(\frac{\frac{m_L}{V_T - V_W} * R * T}{M} - p_A)}{\rho_W}} \tag{1.1.2}$$

Vom Druck wird p_A subtrahiert, da für v_{Str} der relative Druck zur Umgebung benötigt wird. Der Geschwindigkeitsbeiwert wurde als 1 angenommen. In die Gleichung zum Volumenstrom eingesetzt und vereinfacht ergibt sich:

$$\frac{dV_W}{dt} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{m_L*R*T}{V_T M - V_W M} - p_A} A_D}{\sqrt{\rho_W}} \tag{1.1.3}$$

Nun werden die Veränderlichen m_W und t getrennt und es kann integriert werden.

$$\int_{V_s}^{V} \frac{1}{\sqrt{\frac{m_L*R*T}{V_T M - V_W M} - 1*10^5}} dV_W = \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho_W}} dt \tag{1.1.4}$$

2 Apoapsishöhe ohne interne Beschleunigung

Man könnte es auch als Berechnung der Freiflugphase bezeichnen. Hier wird die Düse also als ausgeschaltet betrachtet. Es werden nur Luftwiderstand und Erdanziehung betrachtet.
Wenn der Luftwiderstand, bzw. die Geschwindigkeit der Rakete Null ist, muss die Rakete an der Apoapsis sein. Die Beschleunigung ergibt sich zu:

$$v' = \frac{dv}{dt} = \frac{kv^2}{m} + g \tag{2.1.1}$$

Hier stellen m die Masse der Rakete, v die Geschwindigkeit und g die Erdbeschleunigung dar. In k wurden die Unveränderlichen des Luftwiderstands nach Newton der Einfachheit halber zu $\frac{1}{2}Ac_w\rho = k$ zusammengefasst. Es wird mit m und dt multipliziert und dann durch $(kv^2 + gm)$ bzw. m geteilt und man erhält die separierte Differentialgleichung:

$$\int \frac{1}{(kv^2 + gm)} dv = \int \frac{1}{m} dt \tag{2.1.2}$$

Durch Integrieren erhält man:

$$\frac{\arctan\left(\frac{kv}{\sqrt{gkm}}\right)}{\sqrt{gkm}} + C = \frac{t}{m} \tag{2.1.3}$$

Nun wird die Gleichung Null gesetzt, sodass sich die Zeit, nach der die Rakete ihren höchsten Punkt erreicht hat, zu

$$t = \frac{\arctan\left(\frac{kv}{\sqrt{gkm}}\right) * m}{\sqrt{gkm}} + C * m$$

ergibt.
Nach v umstellen und ein weiteres Mal integrieren führt zur Weg-Zeit-Gleichung, in die das eben ermittelte t eingesett werden kann, sodass man die Höhe erhält:

$$v = \frac{\tan\left(\frac{t\sqrt{gkm}}{m} - C\sqrt{gkm}\right) * \sqrt{gkm}}{k} \tag{2.1.4}$$