Berechnungen rund um die Wasserrakete

Strecke s_{Rakete}

Die Strecke der Rakete hängt von folgenden Faktoren ab:

konstant:

- Dichte des Ausströmmediums, in unserem Fall Wasser ρ_{Wasser}
- entgegengerichtete Beschleunigung, wie zum Beispiel die Erde
- Düsendurchmesser

variabel:

- Füllanteil von Wasser bezogen auf die Gesamtmenge
- Masse m der Rakete bestehend aus
  - Leermasse (konstant)
  - Wassermasse
  - Luftmasse (erstmal vernachlässigt)
- Überdruck in der Rakete

Beschleunigung $a_{Rakete}(t)$

Die Beschleunigung $a_{Rakete}(t)$ ergibt sich aus dem 3. Newtonschen Gesetz: $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$, da die Rakete mit dem Rückstoßprinzip arbeitet. Laut dem 2. Newtonschen Gesetz ist die Kraft gleich der Masse mal der Beschleunigung ($F = ma$). Daher kann man $\vec{F}$ auch als $m * a$ schreiben. Dies können wir nun leicht auf unsere Rakete anwenden: $a_{Rakete} * m_{Rakete} = -a_{Wasser} * m_{Wasser}$. Stellen wir dies nach a_{Rakete} um, so ergibt sich:

$$a_{Rakete} = -\frac{a_{Wasser} * m_{Wasseraus}}{m_{Rakete}}$$

1. Um a_{Wasser} zu berechnen, benötigt man die Bernoulli Gleichung zur Strömung aus einem Loch:

   $$c = \sqrt{\frac{2 * p}{\rho_{Wasser}}} = a_{Wasser}$$

   wobei c die Strömungsgeschwindigkeit, also a_{Wasser} beschreibt.

2. Mithilfe dieser Strömungsgeschwindigkeit und den oben gegebenen Faktoren können wir auch noch die zweite zur Berechnung der Beschleunigung benötigte Variable $m_{Wasserausx}$ berechnen. Die Masse m eines Körpers ist gleich dem Produkt von Volumen und Dichte desselben ($m = \rho * V$). Da ρ schon oben gegeben ist, benötigen wir noch das Volumen V. Dies kann man berechnen, in dem man sich das ausgestoßene Wasser als einen Zylinder vorstellt. Die Grundfläche des Zylinders entspricht der Fläche der Düse, also aus unseren gegebenen Faktoren berechenbar, und die Höhe der

Entfernung, die das Wasser mit der Austrittsgeschwindigkeit a_{Wasser} in einem Interval t zurück gelegt hat. Also ergibt sich:

$$m_{Wasseraus} = \rho_{Wasser} * (A_{\text{Düse}} * a_{Wasser} * t)$$

3. Die dritte Variable ist m_{Rakete}, sie besteht aus dem Volumen des Wassers mal seiner Dichte plus dem Leergewicht der Rakete. ($m_{Rakete} = V_{Wasser} * \rho_{Wasser} + m_{Raketeleer}$)

Setzt man dies zusammen, so ergibt sich mit der Erdbeschleunigung $-g$:

$$a_{Rakete} = -\frac{(\sqrt{\frac{2*p}{\rho_{Wasser}}}) * (\rho_{Wasser} * A_{\text{Düse}} * \sqrt{\frac{2*p}{\rho_{Wasser}}} * t)}{V_{Wasser} * \rho_{Wasser} + m_{Raketeleer}} - g$$

Wenn der Anteil des Luftvolumens 100% ist muss der (über-) Druck null bar sein.

Geschwindigkeit v_{Rakete}

So ergibt sich nun die Geschwindigkeit v_{Rakete} aus der gleichmäßig beschleunigten Bewegung als $v_{Rakete} = a_{Rakete} * t + v_{0_{Rakete}}$ nach der Zeit t.

Allerdings haben wir bei der WasserRakete eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung vorliegen, da sich der innere Druck und die Masse der Rakete über die Zeit t ändern.