

Berechnungen rund um die Wasserrakete

Strecke s_{Rakete}

Die Strecke der Rakete hängt von folgenden Faktoren ab:

konstant:

- Dichte des Ausströmmediums, in unserem Fall Wasser ρ_{Wasser}
- entgegengerichtete Beschleunigung, wie zum Beispiel die Erde
- Düsendurchmesser

variabel:

- Füllanteil von Wasser bezogen auf die Gesamtmenge
- Masse m der Rakete bestehend aus
 - Leermasse (konstant)
 - Wassermasse (geteilt durch die Dichte ergibt das Volumen V_{Wasser}) abhängig vom Füllanteil
 - Luftmasse (erstmal vernachlässigt)
- Überdruck in der Rakete

Beschleunigung $a_{Rakete}(t)$

Die Beschleunigung $a_{Rakete}(t)$ ergibt sich aus dem 3. Newtonschen Gesetz: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$, da die Rakete mit dem Rückstoßprinzip arbeitet. Laut dem 2. Newtonschen Gesetz ist die Kraft gleich der Masse mal der Beschleunigung ($F = ma$). Daher kann man \vec{F} auch als $m \cdot a$ schreiben. Dies können wir nun leicht auf unsere Rakete anwenden: $a_{Rakete} \cdot m_{Rakete} = -a_{Wasser} \cdot m_{Wasser}$. Stellen wir dies nach a_{Rakete} um, so ergibt sich:

$$a_{Rakete} = -\frac{a_{Wasser} \cdot m_{Wasseraus}}{m_{Rakete}} \quad (1)$$

1. Um a_{Wasser} zu berechnen, benötigt man die Bernoulli Druckgleichung des ruhenden Systems ohne Berücksichtigung von Verlusten: $p + \rho \cdot g \cdot z + \frac{\rho}{2} \cdot c^2$. Lässt man den geodätischen Druck $\rho \cdot g \cdot z$ weg, und stellt nach der Geschwindigkeit c um, so erhält man:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}} = v_{Wasser} \quad (2)$$

wobei c die Strömungsgeschwindigkeit v_{Wasser} beschreibt.

2. Mithilfe dieser Strömungsgeschwindigkeit und den oben gegebenen Faktoren können wir auch noch die zweite zur Berechnung der Beschleunigung benötigte Variable $m_{Wasseraus}$ berechnen. Die Masse m eines Körpers ist gleich dem Produkt von Volumen und Dichte desselben ($m = \rho \cdot V$). Da ρ schon oben gegeben ist, benötigen wir noch das Volumen V . Dies kann man berechnen, in dem man sich das ausgestoßene Wasser als einen Zylinder vorstellt. Die Grundfläche des Zylinders entspricht der Fläche der Düse, also aus unseren gegebenen Faktoren berechenbar, und die Höhe der Entfernung, die das Wasser mit der Austrittsgeschwindigkeit a_{Wasser} in einer Zeit $\Delta t = t_{start} - t_{end}$ zurück gelegt hat. Also ergibt sich:

$$m_{Wasseraus} = \rho_{Wasser} \cdot (A_{Düse} \cdot a_{Wasser} \cdot \Delta t) \quad (3)$$

3. Die dritte Variable ist m_{Rakete} , sie besteht aus dem Volumen des Wassers mal seiner Dichte plus dem Leergewicht der Rakete. ($m_{Rakete} = V_{Wasser} \cdot \rho_{Wasser} + m_{Raketeleer}$)

Setzt man dies zusammen, so ergibt sich mit der Erdbeschleunigung $-g$:

$$a_{Rakete} = -\frac{\left(\sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}}\right) \cdot (\rho_{Wasser} \cdot A_{Düse} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}} \cdot \Delta t)}{V_{Wasser} \cdot \rho_{Wasser} + m_{Raketeleer}} - g \quad (4)$$

Nun kürzen wir ρ_{Wasser} weg, fassen $\sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}}$ zu $\left(\sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}}\right)^2 = \frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}}$ zusammen und erhalten:

$$a_{Rakete} = -\frac{\frac{2 \cdot p}{\rho_{Wasser}} \cdot (A_{Düse} \cdot \Delta t)}{V_{Wasser} + m_{Raketeleer}} - g \quad (5)$$

Leider sind p und V_{Wasser} nun variabel über die Zeit t , was bedeutet, dass wir für die Beschleunigung $a_{Rakete}(t)$ zur Zeit t die Parameter $p(t)$ und $V_{Wasser}(t)$ haben.

- $p(t)$ hängt vom Wasservolumen $V_{Wasser}(t)$ ab. Aus dem Gesetz von [Boyle-Mariotte](#) folgt, dass das Produkt aus einem Druck und seinem Volumen gleich dem Produkt aus einem zweiten Druck und seinem Volumen ist ($p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$). Dies können wir auf unsere Rakete wie folgt anwenden: $p(t) = \frac{p_{start} \cdot V_{start}}{V_{Wasser}(t)}$
- $V_{Wasser}(t) = \frac{p_{start} \cdot V_{start}}{p(t)}$ wie leicht ersichtlich ist. Dies ist eine Differentialgleichung, wenn man nämlich $p(t)$ in $V_{Wasser}(t)$ einsetzt:

$$V_{Wasser}(t) = \frac{p_{start} * V_{start}}{\frac{p_{start} * V_{start}}{V_{Wasser}(t)}} = \frac{p_{start} * V_{start} * V_{Wasser}(t)}{p_{start} * V_{start}} \quad (6)$$

Differenzieren:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{p_{start} * V_{start} * V}{p_{start} * V_{start}} = V \quad (7)$$

Die Gleichung ist separabel und man kann die Variablen trennen:

$$\int \frac{1}{V} dV = \int dt$$

$$\ln(|V|) + C = t + C$$

umgestellt:

$$V_{Wasser}(t) = e^{t+C} - C \quad (8)$$

Gedanke:

Wenn der Anteil des Luftvolumens 100% ist, muss der (über-) Druck null bar betragen.

Geschwindigkeit v_{Rakete}

So ergibt sich nun die Geschwindigkeit v_{Rakete} aus der gleichmäßig beschleunigten Bewegung als $v_{Rakete}(t) = a_{Rakete} * t + v_{0_{Rakete}}$ nach der Zeit t .

Allerdings haben wir bei der WasserRakete eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung vorliegen, da sich der innere Druck und die Masse der Rakete über die Zeit t ändern. \end{document}