

# Berechnungen rund um die Wasserrakete

## Mathematischer Ansatz

Impuls des Beobachtersystems:

$$I_{Ges} = 0 = I_R + I_{Str} \quad (1)$$

Der Impuls der Rakete ist positiv, der Impuls des Strahls, durch die Geschwindigkeit entgegen der Rakete, bzw. nach unten, negativ.

Impulsänderung der Rakete:

$$\begin{aligned} \Delta I_R &= -\Delta I_{str} \\ \rightarrow m_R * \Delta v_R &= -\Delta m_{Str} * v_{Str} \\ \Rightarrow (m_R(t) - \Delta m_{Str}) * \\ I_{Str}(t) &= m_{Str}(t) + v_{Str} \end{aligned}$$

Effektive Austrittsgeschwindigkeit, sozusagen, auf das System Rakete bezogen:  $w_e(t) = v_{Str}(t) - v_R(t)$ .

$$dv_R = -w_e(t) \frac{dm_R}{m_R(t)}$$

Name	Beschreibung	Einheit	Veränderung
$m_{Struktur}$	Masse der Tanks und Düse usw.	kg	konstant
$m_{NL}$	Masse der Nutzlast(in meinem Fall 0kg)	kg	konstant
$m_W$	Masse des Wassers	kg	variabel
$A_D$	Fläche der Düse, durch die das Wasser gelangt	m <sup>2</sup>	konstant
$p_0$	Initialer absoluter Druck in der Flasche	Pa	konstant
$m_0$	Startmasse: $m_{Struktur} + m_W + m_{NL}$	kg	konstant
$m_L$	Masse der Luft: $V_L * \frac{p_0 * M}{R * T}$	kg	konstant
$c_W$	Austrittsgeschwindigkeit Wasser	m/s	variabel
$V_T$	Volumen des Drucktanks	m <sup>3</sup>	konstant
$V_W$	Volumen Wasser: $m_W / \rho_W$	m <sup>3</sup>	variabel
$\rho_W$	Dichte des Wassers: 0.998	kg/m <sup>3</sup>	konstant
$\rho_L$	Dichte der Luft	kg/m <sup>3</sup>	variabel
$p_A$	Umgebungsdruck 10 <sup>-5</sup>	Pa	konstant

Volumenstrom:  $\frac{dV_W}{dt} = v_{Str} A_D$ , wobei  $v_{Str}$  wiederum von dem Wasservolumen in der Rakete abhängt, da dieses den Luftinnendruck bestimmt. Ich gehe nämlich davon aus, dass die Menge Luft während das Wasser ausströmt gleich bleibt und sich somit der Raum für selbige erhöht.

Der Luftinnendruck in der Rakete ist:

$$p = \frac{\rho_L * R * T}{M} \quad (1.2)$$

Hierbei ist  $M$  die molare Masse mit 0.028949kg/mol für trockene Luft,  $R$  die Reynoldszahl mit 8.3145 J/(mol\*K) und  $T$  die Temperatur mit 293.15K, was 20°C entspricht. Die Dichte der Luft  $\rho_L$  ergibt sich aus dem Quotienten der, wie schon erwähnt konstanten, Masse der Luft  $m_L$  und dem nicht (mehr) vom Wasser eingenommenen Volumen  $V_L = V_T - V_W$ . Setzt man dies für  $p$  in die umgestellte Bernoulli-Gleichung  $v = \sqrt{\frac{2p}{\rho_W}}$  ein, erhält man:

$$v_{Str} = \sqrt{\frac{2 \left( \frac{m_L * R * T}{(V_T - V_W) * M} - p_A \right)}{\rho_W}} \quad (2)$$

Vom Druck wird  $p_A$  subtrahiert, da für  $v_{Str}$  der relative Druck zur Umgebung benötigt wird. Der Geschwindigkeitsbeiwert wurde als 1 angenommen. In die Gleichung zum Volumenstrom eingesetzt und vereinfacht ergibt sich:

$$\frac{dV_W}{dt} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{m_L * R * T}{V_T * M - V_W * M} - p_A A_D}}{\sqrt{\rho_W}} \quad (3)$$

Nun werden die Veränderlichen  $m_W$  und  $t$  getrennt und es kann integriert werden.

$$\int_{V_s}^V \frac{1}{\sqrt{\frac{m_L * R * T}{V_T M - V_W M} - 1 * 10^5}} dV_W = \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho_W}} dt \quad (4.1)$$