

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 4

Kwadratury

8 kwietnia 2021

Literatura

Zadanie 1 Kwadratury elementarne

Napisz funkcję, która policzy prostą, zamkniętą kwadraturę Simpsona.

- Przetestuj jej działanie na jednomianach kolejnych stopni, nie większych niż 5 poprzez porównanie wyników z wartościami analitycznymi. Opisz wyniki.
- Przetestuj jej działanie na funkcji $f(x) = e^{-3x} * \sin(4x)$ na przedziale $x \in [0, 5]$ poprzez wyliczenie jej wartości na całym przedziale, a następnie porównanie z sumą metody na dwóch podprzedziałach $[0, 1]$ i $[1, 5]$. Czemu wyniki się różnią?
- Zaprezentuj na wykresie funkcję f oraz kwadratowy wielomian interpolujący ją w węzłach będących końcami przedziału i jego środkiem. Oblicz kwadraturę wyliczonego w ten sposób wielomianu i porównaj wyniki. W jaki sposób ten wielomian jest powiązany z metodą Simpsona?

Zadanie 2 Kwadratury adaptacyjne

Zaimplementuj adaptacyjną kwadraturę Simpsona. Dla kilku różnych dokładności ε wykonaj poniższe polecenia.

- Przetestuj ją na funkcji f z zadania 1.b i porównaj wyniki z elementarną metodą Simpsona
- Zaprezentuj na wykresie funkcję f oraz punkty podziału wyliczone przez metodę adaptacyjną. Opisz wyniki.

Zadanie 3 Wielomiany ortogonalne

Korzystając z modułu `numpy.poly1d` zaimplementuj wielomiany Legendre’a zdefiniowane w następujący sposób:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xP_k(x) - \frac{k}{k+1}P_{k-1}(x)$$

.

- Zaprezentuj je na wykresie na przedziale $x \in [-1, 1]$
- Sprawdź, że ich miejsca zerowe (wykorzystując pole `numpy.poly1d.r`) są odciętych punktów Gaussa (`scipy.special.roots_legendre`). Test wykonaj dla wielomianów od 2 do 4 stopnia.
- Podaj związek tego faktu z podstawowym twierdzeniem kwadratur Gaussa (z wykładu)

Zadanie 4 Kwadratury Gaussa

Na podstawie parametrów kwadratury Gaussa (`scipy.special.roots_legendre`) zaimplementuj funkcję, która dla określonej liczby punktów k oraz funkcji f policzy wartość $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Przetestuj jej działanie na jednomianach kolejnych stopni. Sprawdź kiedy przestaje być dokładna i podaj związek z twierdzeniem o stopniu dokładności kwadratury Gaussa.

Zadanie 5 Kwadratury Gaussa c.d.

Korzystając z rozwiązań z poprzedniego zadania napisz funkcję liczącą całkę w dowolnym przedziale $\int_a^b f(x) dx$ dokonując normalizacji do $\int_{-1}^1 F(z) dz$ podstawiając:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}z$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dz$$

Przetestuj działanie na kilku przykładach i sprawdź z wynikami otrzymanymi analitycznie.