РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА

$u, v \in \mathbb{R}^n$

$d(u,v) = \|u-v\|$

1) $d(u,v) \geq 0$

2) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

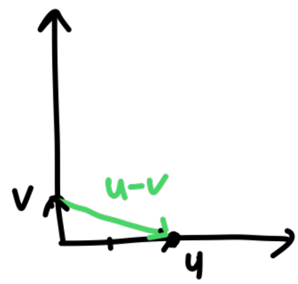
3) $d(u,v) = d(v,u)$

ЗАД 1.2.9

Одредити растојање између вектора $u = (2,0)$ и $v = (0,1)$.

—

$$d((2,0)-(0,1)) = \|(2,0)-(0,1)\|$$
$$= \|(2,-1)\|$$
$$= \sqrt{2^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{5}$$



УГАО ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА

$$\underset{\text{угао}}{\cos\theta} = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

ΛC

ЗАД 1.2.10

Одредити угао између вектора

а) $(1,1)$ и $(1,2)$

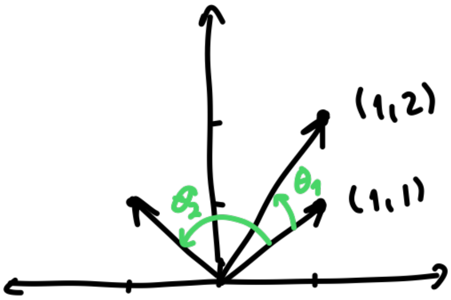
б) $(1,1)$ и $(-1,1)$.

а) $\underline{\theta_1} = \arccos\left(\frac{(1,1)\cdot(1,2)}{\|(1,1)\| \ \|(1,2)\|}\right)$

$= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}\right)$

$= \arccos(0.94868)$

$= \underbrace{0.32}_{\text{РАДИЈАНА}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 18.33^\circ$



б) $\theta_2 = \arccos\left(\frac{(1,1)\cdot(-1,1)}{\|(1,1)\| \ \|(-1,1)\|}\right)$

$= \dots$

$= \arccos(0) = 90^\circ$

АС

ПРОЈЕКЦИЈЕ

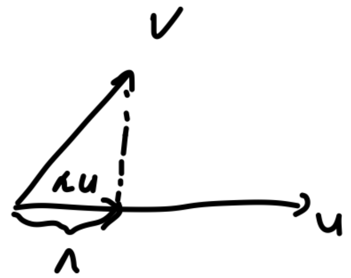
$u, v \in \mathbb{R}^n$

СКАЛАРНА ПРОЈЕКЦИЈА v НА u

$$\mathbb{R} \ni \lambda = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} \to \|u\|^2$$

ВЕКТОРСКА ПРОЈЕКЦИЈА v НА u

$$\mathbb{R}^n \ni \lambda u$$



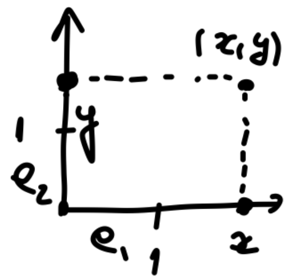
ЗАД 1.2.11

Одредити скаларне пројекције вектора $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ на векторе e_1 и e_2.
$(1,0)$ $(0,1)$

—

$$\lambda_1 = \frac{(x,y)\cdot(1,0)}{\|e_1\|^2} = \frac{x}{1} = x$$

$$\lambda_2 = \frac{(x,y)\cdot(0,1)}{\|e_2\|^2} = \frac{y}{1} = y$$



ЛС

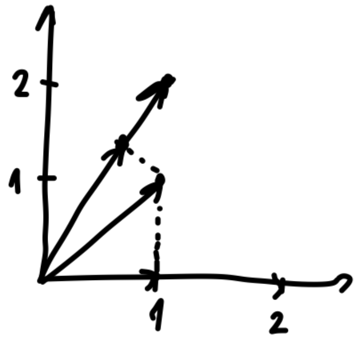
ЗАД 1.2.12

Одредити скаларне пројекције вектора $(1,1)$ на векторе $(2,0)$ и $(1,2)$.

—

$$\lambda_1 = \frac{(1,1)\cdot(2,0)}{\|(2,0)\|^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1,1)\cdot(1,2)}{\|(1,2)\|^2} = \frac{3}{5}$$



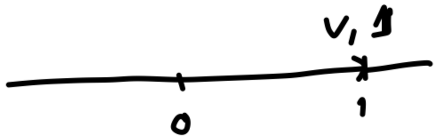
ЗАД 1.2.13.

За непаран број $n \in \mathbb{N}$ одредити скаларну пројекцију вектора $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^n$ на вектор $v = (1,-1,1,-1,\dots,1)$. Анализирати однос ових вектора када $n \to \infty$.

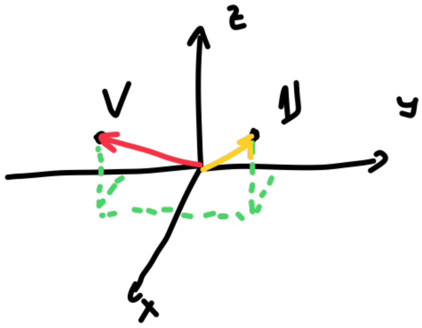
—

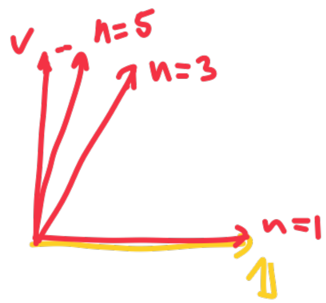
$$\lambda = \frac{\mathbb{1}\cdot v}{\|v\|^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$n=1$



$n=3$



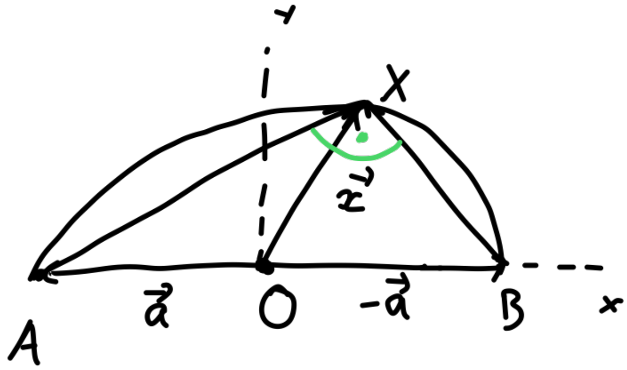


АС

РАЗНИ ЗАДАЦИ

ЗАД 1.2.14

Представити векторе $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{BX}$ преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{x}$, и испитати њихову ортогоналност.



$$\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BX} = \vec{x} - (-\vec{a})$$
$$= \vec{x} + a$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BX} = (\vec{x} - \vec{a}) \cdot (x + a)$$
$$= \vec{x} \cdot \vec{x} + \cancel{\vec{x} \cdot \vec{a}} - \cancel{\vec{a} \cdot \vec{x}} - \vec{a} \cdot \vec{a}$$
$$= \underbrace{\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{a}\|^2}_{\text{полупречници}} = 0$$

ЛС

ЗАД 1.2.15

За које вредности $k \in \mathbb{R}$ су вектори $u = (-2, k, k)$ и $v = (k, 5, k)$ ортогонални?

$$0 = u \cdot v = -2k + 5k + kk = k^2 + 3k = k(k+3)$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 0 \quad \vee \quad k = -3$$

ЗАД 1.2.16

Пронаћи све јединичне векторе који су ортогонални вектору $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$u \in (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \wedge \quad \|u\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \ldots (*)$

$0 = (u_1, u_2) \cdot (a, b) = u_1 a + u_2 b \ldots (**)$

$\Leftrightarrow \quad u_1 = -\dfrac{u_2 b}{a}$ за $a \neq 0 \ldots (***)$

$(*) \Rightarrow \sqrt{\dfrac{u_2^2 b^2}{a^2} + u_2^2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_2^2 b^2}{a^2} + u_2^2 = 1$

$\Leftrightarrow u_2^2 (b^2 + a^2) = a^2$

$a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow (a, b) \neq (0,0)$

$\Leftrightarrow u_2^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$

$\Leftrightarrow u_2 = \dfrac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$(***) \Rightarrow u_1 = \dfrac{\mp a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{\mp b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

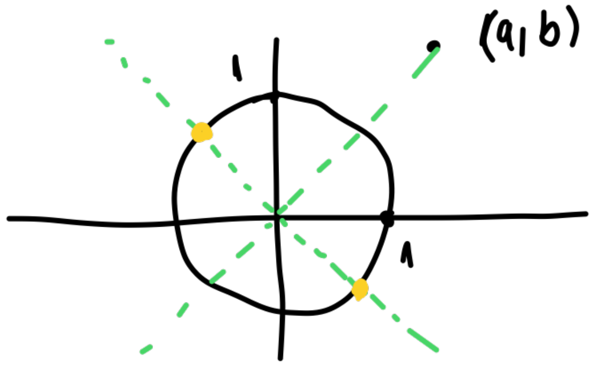
$a = 0 \xRightarrow{\text{текст}} b \neq 0$ $(**) \Rightarrow u_2 b = 0$ $\Rightarrow u_2 = 0$ $(*) \Rightarrow \sqrt{u_1^2} = 1$ $\Leftrightarrow \|u_1\| = 1$ $\Leftrightarrow u_1 = \pm 1$	2 реш. $(1, 0)$ $(-1, 0)$

ЛС

2 РЕШЕЊА

$$\left(\frac{b}{\|(a,b)\|}, \frac{-a}{\|(a,b)\|} \right)$$

$$\left(\frac{-b}{\|(a,b)\|}, \frac{a}{\|(a,b)\|} \right)$$



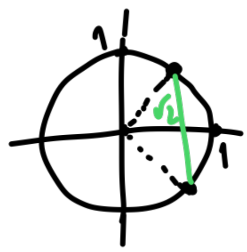
ЗАД 1.2.17

Ако су u и v ортогонални јединични вектори из $\mathbb{R}^n$, одредити $d(u,v)$.

$$d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v)\cdot(u-v)}$$

$$= \sqrt{u\cdot u - \cancel{u\cdot v}^{0} - \cancel{v\cdot u}^{0} + v\cdot v}$$

$$= \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



ЗАД 1.2.18

Нека је $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ скуп ортогоналних вектора. Показати да за $\forall m \in \mathbb{N}$ важи

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_m\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_m\|^2$$

доказ математичком индукцијом

✓ и.б $k=2$, $\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ (питагорина теорема

✓ и.х $k=m$ → п.п. да важи

ЛС

И.К $k=m+1$ $\{u_1,u_2,\dots,u_m,u_{m+1}\}$ – ОРТОГОНАЛАН

$$\|\underbrace{u_1+u_2+\dots+u_m}_{a}+u_{m+1}\|^2 =$$

$$\Big/ \; a\cdot u_{m+1} = (u_1+u_2+\dots+u_m)\cdot u_{m+1}$$

$$= u_1\cdot u_{m+1} + u_2\cdot u_{m+1}+\dots+u_m\cdot u_{m+1} = 0 \;\Big/$$

$$\underset{a,\,u_{m+1}}{\overset{\text{П.Т}}{=}} \|a\|^2+\|u_{m+1}\|^2 = \|u_1+u_2+\dots+u_m\|^2+\|u_{m+1}\|^2$$

$$\overset{\text{И.Х}}{=} \|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\dots+\|u_m\|^2+\|u_{m+1}\|^2.$$

ЗАД 1.2.19

Доказати једнакост $u\cdot v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

—

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2 = \frac{1}{4}\big((u+v)\cdot(u+v)-(u-v)\cdot(u-v)\big)$$

$$= \frac{1}{4}\big(\cancel{u\cdot u}+2u\cdot v+\cancel{v\cdot v}-\cancel{u\cdot u}+2u\cdot v-\cancel{v\cdot v}\big)$$

$$= \frac{1}{4}4\,u\cdot v = u\cdot v$$

ЗАД 1.2.20

Нека су u, v и $u-v$ вектори норме $2\sqrt{2}$.

Одредити норму вектора $u+v$.

—

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

једнакост паралелограма

ЛС

$$\|u+v\| = \sqrt{2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u-v\|^2}$$
$$= \sqrt{2\cdot 8 + 2\cdot 8 - 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

ЗАД 1.2.21

Нека су $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Доказати да важи неједнакост

$$|ad + be + cf| \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{d^2+e^2+f^2}$$

Неједнакост К.Ш. $|u\cdot v| \le \|u\|\|v\|$

$u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$v = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow$ тражена неједнакост

ЗАД 1.2.22

Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Доказати да важи $n \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

$u = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \in \mathbb{R}^n$

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$

К.Ш. $\underbrace{\left|\sqrt{a_1}\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \dots + a_n\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right|}_{n} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

АС

ΛC