1.3 ВЕКТОРИ ГЛЕДАНИ ИЗ УГЛА МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

$G \neq \emptyset$

$*: G \times G \to G$

$\Rightarrow (G,*)$ - групоид

$*$ - асоцијативна $\Rightarrow (G,*)$ - полугрупа

$(\exists e \in G)(\forall a \in G)(e*a = a*e = a)$

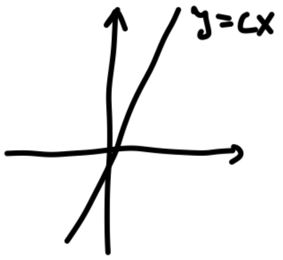
$(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)(a*a^{-1} = a^{-1}*a = e)$

$\Rightarrow (G,*)$ - група

$*$ - комут. $\Rightarrow (G,*)$ - Абелова група

ЗАДАТАК 1.3.1

За произвољно $c \in \mathbb{R}$, испитати алгебарску структуру $(G_c, +)$:



$$G_c = \{ (x, cx) : x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$$

$+$ - стандардно сабирање у $\mathbb{R}^2$

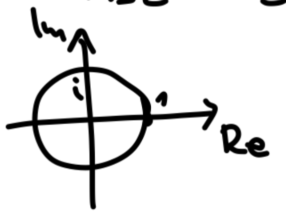
- $(0,0) \in G_c \Rightarrow G_c \neq \emptyset$
- $(x, cx) + (y, cy) = (x+y, c(x+y)) \in G_c$
- $+$ асоцијативна, комутативна
- $e = (0, c0) \in G_c$
- $(x, cx)^{-1} = (-x, c(-x)) \in G_c$

$\Rightarrow G_c$ је Абелова група

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.2

Испитати алгебарску структуру $(G, \cdot)$, где је:



$$G = \{a+bi : a^2+b^2=1\} \subset \mathbb{C}$$

$\cdot$ — стандардно множење у $\mathbb{C}$

- $1+0i \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$
- $(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$
  $= (ac-bd) + (ad+bc)i$

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 =$$
$$= \underline{a^2c^2} - \cancel{2abcd} + b^2d^2 + \underline{a^2d^2} + \cancel{2abcd} + b^2c^2$$
$$= a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2) = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1$$

- $\cdot$ асоцијативна, комутативна
- $e = 1+0i \in G$
- $(a+bi)^{-1} = \dfrac{1}{a+bi} \cdot \dfrac{a-bi}{a-bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$
  $= a-bi \in G$

$\Rightarrow G$ је Абелова група

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.3

Показати да ако у групи важи да је сваки елемент сам себи инверз, онда је група Абелова.

$(G, \cdot)$ – група

$x, y \in G, \quad x \cdot y \overset{?}{=} y \cdot x$

$$x \cdot y \overset{\text{п.пз}}{=} (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} \overset{\text{п.пз}}{=} y \cdot x .$$

$$// \quad y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x \cdot y = y^{-1} \cdot e \cdot y = y^{-1} \cdot y = e$$

$$x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x \cdot e \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = e \quad //$$

ЗАДАТАК 1.3.4

Ако у групи важи $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$ $\forall a, b \in G$, показати да је она Абелова.

$(G, \cdot)$ – група

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b \quad \Big/ \; a^{-1} \;\; b^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^{-1} \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b^{-1} = a^{-1} \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad e \cdot b \cdot a \cdot e = e \cdot a \cdot b \cdot e$$

$$\Leftrightarrow \quad b \cdot a = a \cdot b \quad \Rightarrow (G, \cdot) \text{ Абелова}$$

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.5

Дате су функције $f(x)=x$, $g(x)=-x$, $h(x)=\frac{1}{x}$ и $u(x)=-\frac{1}{x}$. Испитати алгебарску структуру $(S,\circ)$, где је $S=\{f,g,h,u\}$ и $\circ$ операција композиције функција.

$\circ$	f	g	h	u
f	f	g	h	u
g	g	f	u	h
h	h	u	f	g
u	u	h	g	f

$$h(h(x))=\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$g(f(x))=g(x)=-x$$

$$h(g(x))=h(-x)=\frac{1}{-x}=u(x)$$

$$u(g(x))=u(-x)=\frac{1}{-(-x)}=\frac{1}{x}$$

$$u(h(x))=\frac{1}{-h(x)}=-x$$

- $S\neq\emptyset$
- $\circ: S\times S\to S$

  $\Rightarrow (S,\circ)$ групоид
- $\circ$ – иначе асоцијативна

  $\Rightarrow (S,\circ)$ полугрупа
- $e=f\in S$ неутрални елемент
- $f^{-1}=f$, $g^{-1}=g$, $h^{-1}=h$, $u^{-1}=u$

  $\Rightarrow (S,\circ)$ група

$\circ$ - комут. $\Rightarrow (S,\circ)$ Абелова гр.

ЛС

$(R, +, \cdot)$ – прстен

1) $(R, +)$ Абелова гр. $\nearrow e \equiv 0$

2) $(R, \cdot)$ полугрупа

3) $\forall (x, y, z) \in R$

$$z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$$
$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$(F, +, \cdot)$ – поље

1) $(F, +, \cdot)$ – прстен

2) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ Абелова гр. $e \equiv 1$

Задатак 1.3.6

Показати да је $R = \{0, 2, 4, 6\}$ у односу на операције $+_8$ и $\cdot_8$ прстен.

ЛС

$+_8$	0	2	4	6
0	0	2	4	6
2	2	4	6	0
4	4	6	0	2
6	6	0	2	4

$\cdot_8$	0	2	4	6
0	0	0	0	0
2	0	4	0	4
4	0	0	0	0
6	0	4	0	4

$(R, +, \cdot)$

1) $(R, +_8)$

* $R \neq \emptyset$
* $+_8 : R \times R \to R$
* $+_8$ АСОЦИЈАТИВНА ЗАТО ШТО ЈЕ $+$ АСОЦИЈАТИВНА
* НУЛА ПРСТЕНА ЈЕ $0 \in R$
* $-0 = 0$, $-2 = 6$, $-4 = 4$, $-6 = 2$
* $+_8$ КОМУТАТИВНА ЗАТО ШТО ЈЕ $+$ КОМУТАТИВНА

$\Rightarrow (R, +_8)$ АБЕЛОВА ГРУПА

$(R \setminus \{0\}, \cdot)$

$\cdot_8$	2	4	6
2	4	0	4
4	0	0	0
6	4	0	4

2) $(R, \cdot_8)$

* $R \neq \emptyset$
* $\cdot_8 : R \times R \to R$
* $\cdot_8$ АСОЦИЈАТИВНА ЗАТО ШТО ЈЕ $\cdot$ АСОЦИЈАТИВНА

ЛС

$\Rightarrow (R, \cdot_8)$ полугрупа (комутативна)

3) $\cdot_8$ је дистрибутивна у односу на $+_8$, јер је $\cdot$ дистрибутивна у односу $+$.

$\overset{1,2,3)}{\Longrightarrow} (R, +_8, \cdot_8)$ прстен

$(R \setminus \{0\}, \cdot_8)$ нема јединицу

$\Rightarrow$ није Абелова група

$\Rightarrow (R, +_8, \cdot_8)$ није поље.

ЗАДАТАК 1.3.7

Испитати алгебарску структуру $(F, +_{10}, \cdot_{10})$, где је $F = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

ЗАДАТАК 1.3.8

Испитати алгебарску структуру $(F, +, \cdot)$ где је $F = \{0, I\}$ и

+	0	I
0	0	I
I	I	0

$\cdot$	0	I
0	0	0
I	0	I

.

---

1) $(F, +)$

$*$ $F \neq \emptyset$

$*$ $+ : F \times F \to F$

ΛC

* $\underline{a} + (b+c) = (a+b)+c$

$0+(0+0) = 0+0 = (0+0)+0$

$0+(0+\underline{I}) = 0+\underline{I} = (0+0)+\underline{I}$

$0+(\underline{I}+0) = 0+\underline{I} = \underline{I} = \underline{I}+0 = (0+\underline{I})+0$

$0+(\underline{I}+\underline{I}) = 0+0 = 0 = \underline{I}+\underline{I} = (0+\underline{I})+\underline{I}$

$\underline{I}+(0+0) = \underline{I}+0 = (\underline{I}+0)+0$

$\underline{I}+(0+\underline{I}) =$

$\underline{I}+(\underline{I}+0) =$

$\underline{I}+(\underline{I}+\underline{I}) =$

$\vdots$

$\Rightarrow$ + АСОЦИЈАТИВНА

* НУЛА ЈЕ $0 \in F$

* $-0=0$, $-\underline{I}=\underline{I}$

* $0+0=0+0$
  $0+\underline{I}=\underline{I}+0$
  $\underline{I}+\underline{I}=\underline{I}+\underline{I}$
  + ЈЕ КОМУТАТИВНА

$\Rightarrow$ $(F,+)$ АБЕЛОВА ГРУПА

2) $(F,\cdot)$

* $F \neq \emptyset$
* $\cdot : F \times F \to F$
* $\cdot$ АСОЦИЈАТИВНА (САМОСТАЛНО)

$\Rightarrow$ $(F,\cdot)$ ПОЛУГРУПА

ЛС

3) • КОМУТАТИВНА ОПЕРАЦИЈА $\Rightarrow$

ДОВОЉНО ИСПИТАТИ $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$$0\cdot(0+0) = 0\cdot 0 = 0 = 0+0 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0$$
$$0\cdot(0+I) = 0\cdot I = 0 = 0+0 = 0\cdot 0 + 0\cdot I$$
$$0\cdot(I+0) = 0\cdot I = 0 = 0+0 = 0\cdot I + 0\cdot 0$$
$$0\cdot(I+I) = 0\cdot 0 = 0 = 0+0 = 0\cdot I + 0\cdot I$$
$$I\cdot(0+0) = I\cdot 0 = 0 = 0+0 = I\cdot 0 + I\cdot 0$$
$$I\cdot(0+I) = I\cdot I = I = 0+I = I\cdot 0 + I\cdot I$$
$$\vdots$$

$\Rightarrow$ ДИСТРИБУТИВНОСТ ВАЖИ

$\overset{1,2,3)}{\Longrightarrow}$ $(F,+,\cdot)$ ПРСТЕН (КОМУТАТИВНИ)

$(F\setminus\{0\},\cdot)$

$\cdot$	I
I	I

* $F\setminus\{0\} \neq 0$
* $\cdot : F\setminus\{0\} \times F\setminus\{0\} \to F\setminus\{0\}$
* $\cdot$ АСОЦИЈАТИВНА (ПОКАЗАЛИ)
* ЈЕДИНИЦА ЈЕ $I \in F\setminus\{0\}$
* $I^{-1} = I$
* $\cdot$ КОМУТАТИВНА (ПОКАЗАЛИ)

$\Rightarrow$ $(F\setminus\{0\},\cdot)$ АБЕЛОВА ГР.

$\Rightarrow$ $(F,+,\cdot)$ ПОЉЕ.

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.9

Нека је $(R,+,\cdot)$ прстен и $a,b,c\in R$. Показати да важи:

1) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$

2) $a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -(a\cdot b)$

3) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

4) $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c$

$(b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a$

Ако прстен има јединицу:

5) $(-1)\cdot a = -a$

6) $(-1)\cdot(-1) = 1$

---

1) $x = a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0$

$= x + x \quad / -x$

$\Rightarrow 0 = x = a\cdot 0.$

$0\cdot a = 0$ аналогно

2) $a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$

$a\cdot b + a\cdot(-b) = a\cdot(b+(-b)) = a\cdot 0 = 0$

$+$ комутативна $\Rightarrow a\cdot(-b) = -(ab)$

3) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

$(-a)\cdot(-b) \overset{2)}{=} -((-a)\cdot b) \overset{2)}{=} -(-(a\cdot b))$

$= a\cdot b$

$(x^{-1})^{-1} = x$

AC

4) САМОСТАЛНО

5) $(-1)\cdot a \overset{2)}{=} -(1\cdot a) = -a$

6) $(-1)\cdot(-1) \overset{3)}{=} 1\cdot 1 = 1$

ЗАДАТАК 1.3.10

Ако је $(R,+,\cdot)$ прстен, и $a,b\in R$ израчунати $(a+b)^2$.

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$
$$= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$$
$$= a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b$$
$$= a^2 + b\cdot a + a\cdot b + b^2.$$

ЗАДАТАК 1.3.11

Ако у прстену $(R,+,\cdot)$ за свако $x\in R$ важи $x^2=x$, доказати да је прстен комутативан.

НС

$$(\forall x, y \in R) \quad x \cdot y \overset{?}{=} y \cdot x$$

$$(x+y)^2 = x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2$$

$$\overset{\text{п.п.3}}{\iff} \quad x + y = x + x \cdot y + y \cdot x + y \quad / -x, -y$$

$$0 = x \cdot y + y \cdot x \quad / -yx$$

$$-y \cdot x = x \cdot y$$

$$(\forall z \in R) \quad -z \overset{?}{=} z$$

$$-z \overset{\text{п.п.3}}{=} (-z)^2 = (-z) \cdot (-z) \overset{\text{зад 13.9}}{=} z \cdot z = z^2 \overset{\text{п.п.3}}{=} z$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot x = x \cdot y \Rightarrow \cdot \text{ КОМУТАТИВНА}$$

ЛС

ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

СКАЛАРИ

ДЕФ:

ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР НАД ПОЉЕМ F ЈЕ ТРОЈКА $(V, +, \cdot)$, ГДЕ ЈЕ $+ : V \times V \to V$ ОПЕРАЦИЈА САБИРАЊА ВЕКТОРА И $\cdot : F \times V \to V$ ОПЕРАЦИЈА СКАЛИРАЊА ВЕКТОРА, И ПРИТОМ ВАЖИ:

1) $(V, +)$ ЈЕ АБЕЛОВА ГРУПА
2) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
3) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta x$
4) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
5) $1 \cdot x = x$

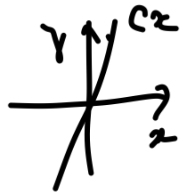
ЗА СВЕ СКАЛАРЕ $\alpha, \beta \in F$ И ВЕКТОРЕ $x, y \in V$ И ЈЕДИНИЦУ $1 \in F$.

ДЕФ:

АКО ЈЕ V ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР И $W \subseteq V$ ТАКОЂЕ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР ОНДА W ЗОВЕМО ВЕКТОРСКИМ ПОДПРОСТОРОМ ОД V.

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.12



Показати да је за $\forall c \in \mathbb{R}$ $\left(G_c = \{(x, cx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, +, \cdot\right)$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$.

1) $(G_c, +)$ Абелова група, зад 1.3.1

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $(x, cx), (y, cy) \in G_c$

2) $\alpha \cdot ((x, cx) + (y, cy)) =$
$$= \alpha \cdot (x+y, cx+cy)$$
$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha c x + \alpha c y)$$
$$= (\alpha x, \alpha c x) + (\alpha y, \alpha c y)$$
$$= \alpha \cdot (x, cx) + \alpha \cdot (y, cy).$$

3) $(\alpha + \beta) \cdot (x, cx) = ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)cx)$
$$= (\alpha x + \beta x, \alpha c x + \beta c x)$$
$$= (\alpha x, \alpha c x) + (\beta x, \beta c x)$$
$$= \alpha \cdot (x, cx) + \beta \cdot (x, cx)$$

4) $(\alpha\beta) \cdot (x, cx) = (\alpha\beta x, \alpha\beta c x)$
$$= \alpha \cdot (\beta x, \beta c x)$$
$$= \alpha \cdot (\beta \cdot (x, cx))$$

5) $1 \cdot (x, cx) = (1 \cdot x, 1 \cdot cx) = (x, cx)$

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.13

Да ли је $(V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\geq 0\}, +, \cdot)$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$?

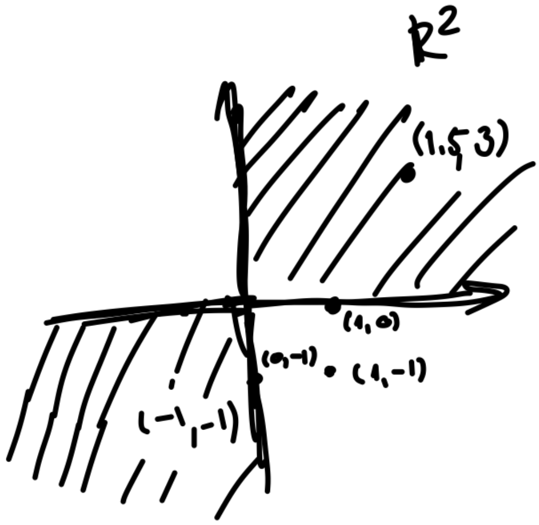
$(+;+) \to +$

$(-;-) \to +$

$(0,\pm) \to 0$

$(\pm,0) \to 0$

$(0,0) \to 0$



// Т: $W \subseteq V$ ($\to$ вект. пр) је векторски потпростор **акко** $(\forall \alpha,\beta\in F)(\forall x,y\in W)\ \alpha x+\beta y\in W$ //

$(1,0)\in W$ јер $1\cdot 0=0\geq 0$

$(0,-1)\in W$ јер $0\cdot(-1)=0\geq 0$

$(1,0)+(0,-1)=(1,-1)$, а $1\cdot(-1)=-1<0$

$\Rightarrow W$ није затворен за $+$

$\Rightarrow$ није векторски простор

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.14

Да ли је за дато парно $n \in \mathbb{N}$ скуп свих полиномских функција

$P_n^{пар}[x] := \{ a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_0 \mid a_n, a_{n-2}, \dots, a_2, a_0 \in \mathbb{R} \}$

векторски подпростор од $P_n[x]$?

$P_n^{пар}[x] \subset P_n[x]$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $a_n, a_{n-2}, \dots, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$

$b_n, b_{n-2}, \dots, b_2, b_0 \in \mathbb{R}$

$$\alpha(a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_0) + \beta(b_n x^n + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_0) =$$

$$(\alpha a_n + \beta b_n) x^n + (\alpha a_{n-2} + \beta b_{n-2}) x^{n-2} + \dots + (\alpha a_2 + \beta b_2) x^2 + (\alpha a_0 + \beta b_0) \in P_n^{пар}[x]$$

$\overset{T}{\Longrightarrow}$ $P_n^{пар}[x]$ је векторски подпростор од $P_n[x]$.

АС

ЗАДАТАК 1.3.15

Показати да је $W=\{p\in P_n[x] \mid p(1)=0\}$ векторски подпростор од $P_n[x]$.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$p_1, p_2 \in W$

$\alpha p_1 + \beta p_2 \overset{?}{\in} W$

$\alpha p_1 + \beta p_2 \in P_n[x]$

$p \equiv p(x)$

$W \subset P_n[x] \quad \ldots (*)$

$(\alpha p_1 + \beta p_2)(1) =$

$\alpha p_1(1) + \beta p_2(1) =$

$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \quad \ldots (**)$

$(*) \wedge (**) \Rightarrow \alpha p_1 + \beta p_2 \in W$

$\overset{T}{\Longrightarrow}$ W је векторски подпростор од $P_n[x]$.

NC