ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ, ЛИНЕАЛ, БАЗА

V – ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР НАД ПОЉЕМ F

$S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subseteq V$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ – ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА ВЕКТОРА ИЗ S

S – ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСАН АКО

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$$

ЛИНЕАЛ $\mathcal{L}(S) = \{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \mid \alpha_i \in F \}$

$\left.\begin{array}{l} S \text{ – ЛИН. НЕЗ.} \\ \mathcal{L}(S) = V \end{array}\right\} \Rightarrow$ ВЕКТОРИ СКУПА S ЧИНЕ БАЗУ В.П. V И ДИМЕНЗИЈА В.П. V ЈЕ $|S|$

$\dim(V) = |S|$

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.16

Испитати линеарну независност скупа $S=\{(-3,6),(\frac{1}{2},-1)\}$ и одредити његов линеарни омотач.

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Л.К. $\alpha_1(-3,6)+\alpha_2(\frac{1}{2},-1)=\mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{1}{2}\alpha_2-3\alpha_1, 6\alpha_1-\alpha_2)=\mathbf{0}=(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2}\alpha_2-3\alpha_1=0 \ /\cdot(-2) \\ 6\alpha_1-\alpha_2=0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\alpha_1-\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_2=6\alpha_1, \ \alpha_1\in\mathbb{R}$$

$\|\exists\alpha\neq 0\ldots\| \overset{\text{деф}}{\Longrightarrow}$ S је линеарно зависан

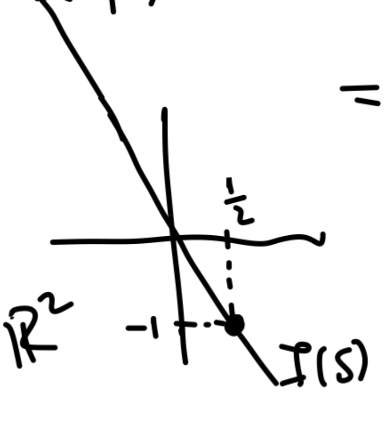
$$\mathcal{L}(S)=\{\alpha_1\overset{/:(-6)}{(-3,6)}+\alpha_2(\tfrac{1}{2},-1) \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{-6\alpha_1(-\tfrac{3}{-6},\tfrac{6}{-6})+\alpha_2(\tfrac{1}{2},-1) \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{-6\alpha_1(\tfrac{1}{2},-1)+\alpha_2(\tfrac{1}{2},-1) \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{\underbrace{(\alpha_2-6\alpha_1)}_{c}\cdot(\tfrac{1}{2},-1) \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{c\cdot(\tfrac{1}{2},-1) \mid c\in\mathbb{R}\}$$



АС

ЗАДАТАК 1.3.17

Испитати линеарну независност скупа полиномских функција $S=\{1, x, x^2\}$ и одредити његов линеал.

$\underset{f(x)}{1}$, $\underset{g(x)}{x}$, $\underset{h(x)}{x^2}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} = F$

$\alpha_1 f + \alpha_2 \cdot g + \alpha_3 \cdot h = \mathbf{0}$ → нула полином

$z(x)=0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ - домен полинома

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2 = 0$

$x=0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0$

$x(\alpha_2 + \alpha_3 x) = 0$

$x=1 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_2$

$x=-1 \Rightarrow -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_2$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_3 = \alpha_2 = 0}$

$\Rightarrow S$ је линеарно независан

$\mathcal{L}(S) = \{\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

$= P_2[x]$

$\Rightarrow S$ је база простора $P_2[x]$

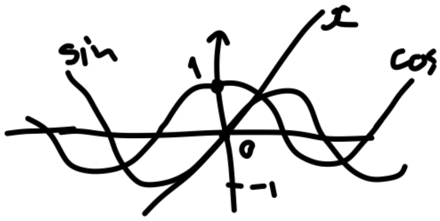
$\Rightarrow \dim(P_2[x]) = 3$

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.18

У простору $C[0,\pi]$ испитати линеарну независност скупа $S=\{x, \cos x, \sin x\}$.

↗ непрекидне функције на $[0,\pi]$



$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\forall x \in [0,\pi]$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x = 0$$

$$x=0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 1 + \alpha_3 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$$

$$\alpha_1 x + \alpha_3 \sin x = 0$$

$$x=\pi \Rightarrow \alpha_1 \cdot \pi + \alpha_3 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$\alpha_3 \sin x = 0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_3 \cdot 1 = 0}$$

$\Rightarrow$ S је линеарно независан

ЗАДАТАК 1.3.19

У простору $C^1[0,1]$ испитати линеарну независност скупа $S=\{1, e^x, e^{-x}\}$.

↗ функције са непрекидним првим изводом

Пробајте сами

посматрати изводе

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.20

Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ различити бројеви. Испитати линеарну независност скупа $S = \{(1,1,1), (a,b,c), (a^2, b^2, c^2)\}$ у простору $\mathbb{R}^3$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(a,b,c) + \alpha_3(a^2, b^2, c^2) = \underset{(0,0,0)}{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} 1)\ & \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 a^2 = 0 \\ 2)\ & \alpha_1 + \alpha_2 b + \alpha_3 b^2 = 0 \\ 3)\ & \alpha_1 + \alpha_2 c + \alpha_3 c^2 = 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} 1-2 \\ 1-3 \end{matrix}$$

$$\overset{\text{"1-2"}}{\Longrightarrow} \alpha_2(a-b) + \alpha_3(a^2-b^2) = 0$$

$$\overset{\text{"1-3"}}{\Longleftrightarrow} \alpha_2(a-c) + \alpha_3(a^2-c^2) = 0$$

$$(a-b)(\alpha_2 + \alpha_3(a+b)) = 0$$

$$(a-c)(\alpha_2 + \alpha_3(a+c)) = 0$$

$$\overset{a \neq b}{\underset{a \neq c}{\Longleftrightarrow}} \begin{aligned} 1)\ & \alpha_2 + \alpha_3(a+b) = 0 \\ 2)\ & \alpha_2 + \alpha_3(a+c) = 0 \end{aligned} \quad 1-2$$

$$\alpha_3(a+b-a-c) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_3(b-c) = 0$$

$$\overset{b \neq c}{\Longleftrightarrow} \boxed{\alpha_3 = 0} \quad \boxed{\alpha_2 = 0} \quad \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$\Longrightarrow S$ је линеарно независан.

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.21

Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. Показати да је за произвољне векторе $u, v, w \in V$ скуп $S = \{u-v, v-w, w-u\}$ линеарно зависан.

$$\left.\begin{array}{l} x := u-v \\ y := v-w \\ z := w-u \end{array}\right\} \quad x+y+z = \cancel{u}-\cancel{v}+\cancel{v}-\cancel{w}+\cancel{w}-\cancel{u} = 0$$

$S = \{x, y, z\}$

за $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ важи

$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow S$ је лин. зависан

ЗАДАТАК 1.3.22

Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. Показати да је за линеарно независне векторе $u, v, w \in V$, скуп $S = \{u+v, v+w, w+u\}$ лин. независан

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(u+v) + \alpha_2(v+w) + \alpha_3(w+u) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha_1+\alpha_3)}_{0} u + \underbrace{(\alpha_2+\alpha_1)}_{0} v + \underbrace{(\alpha_3+\alpha_2)}_{0} w = 0$

$\xRightarrow[u, v, w]{\text{лин. нез}}$

$\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_3 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

$\alpha_2 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$

$\alpha_3 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 0}$

$\Rightarrow S$ је линеарно независан ЛС

ЗАДАТАК 1.3.24

Одредити стандардну базу простора $\mathbb{R}^2$, као и још једну, произвољну.

$E = \{ \overset{e_1}{(1,0)}, \overset{e_2}{(0,1)} \} \subset V$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow$ E је линеарно независан скуп (1)

$E \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{L}(E) \subseteq \mathbb{R}^2$ ... (2.1)

$\mathbb{R}^2 \overset{?}{\subseteq} \mathcal{L}(E)$ ... (2.2)

$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ произвољан вектор

$(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{L}(E)$

$(2.1) \wedge (2.2) \Rightarrow \mathcal{L}(E) = \mathbb{R}^2$ ... (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow$ E је база простора $\mathbb{R}^2$

„Стандардна" зато што скалари из линеарне комбинације директно описују вектор

Да ли је $S = \{ (2,1), (\frac{1}{2}, 0) \}$ база?

ЛС

ЗАДАТАК 1.3.25

Нека се $V \subset \mathbb{R}^4$ састоји од свих вектора из $\mathbb{R}^4$ који су нормални на векторе u, v, w који су дати са $u=(1,0,1,0)$, $v=(1,1,0,0)$ и $w=(0,1,-1,0)$.
Доказати да је V подпростор од $\mathbb{R}^4$ и одредити базу овог простора.

Опишимо скуп V

$x=(a,b,c,d) \in V$, произвољан вектор

$$0 = x \cdot u = a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 1 + d\cdot 0 = a+c$$
$$0 = x \cdot v = a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 0 + d\cdot 0 = a+b$$
$$0 = x \cdot w = a\cdot 0 + b\cdot 1 - c\cdot 1 + d\cdot 0 = b-c$$

$$\Rightarrow b=c, \quad c=-a, \quad b=-a$$

$$\Rightarrow x = (a,-a,-a,d); \quad a,d \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \{(a,-a,-a,d) \mid a,d \in \mathbb{R}\}}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x_1, x_2 \in V$; $\quad x_1 = (a_1,-a_1,-a_1,d_1)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x_2 = (a_2,-a_2,-a_2,d_2)$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \ldots \overset{?}{\in} V$$

или на овај начин:

ЛС

$$V \overset{?}{=} \mathcal{L}(\{(1,-1,-1,0),\ (0,0,0,1)\}) \ldots (1)$$

$$x \in V \iff (\exists a, d \in \mathbb{R})\ x = (a,-a,-a,d)$$
$$= a(1,-1,-1,0) + d(0,0,0,1)$$
$$\iff x \in \mathcal{L}(\{(1,-1,-1,0),\ (0,0,0,1)\})$$

$\overset{T}{\Longrightarrow}$ V ЈЕ КАО ЛИНЕАЛ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР (ПОДПРОСТОР ОД $\mathbb{R}^4$)

ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ

$a, d \in \mathbb{R}$

$$a(1,-1,-1,0) + d(0,0,0,1) = 0$$
$$\iff (a,-a,-a,d) = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow a = d = 0 \Rightarrow$ ВЕКТОРИ СУ ЛИН. НЕЗ ....(2)

(1) И (2) $\Rightarrow \{(1,-1,-1,0),\ (0,0,0,1)\}$ ЈЕ БАЗА ПРОСТОРА V

$$\Rightarrow \dim(V) = 2$$

ЛС