Kockázatok mikro és makro szinten: beandadó feladatok

Jankovits András, Szilárd Pálma

2023. június 17.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. Bevezetés

A beadandó feladathoz két ETF eszközt választottunk, amelyeket az 1. táblázat mutat be. A Vanguard S&P 500 ETF az S&P500 indexet követi, míg az IEI a 3-tól 7 éves lejáratra kibocsátott amerikai államkötvények hozamát követi le. A két eszközből készített portfóliót 2011 január és 2021 decemeber között vizsgáltuk.

Eszközosztály	ETF neve	Ticker	Átlagos hozam (éves)	Szórás (éves)
fixed income	iShares 3-7 Year Treasury Bond	IEI	2,42%	3,02%
equity	Vanguard S&P 500	VOO	15,45%	17,03%

1. feladat: Historikus Value at Risk (VaR) modell két ETF-re

Az első feladatban két kiválasztott ETF historikus adataiból kellett napi hozamokat kiszámítani, majd ezeket különböző súlyokkal egy portfólióba rendezni a diverzifikálás szemléltetésének érdekében. Ezután a historikus adatok alapján historikus VaR értékeket kellett számítani a különböző súlyokra.

1.1. A VaR modellről

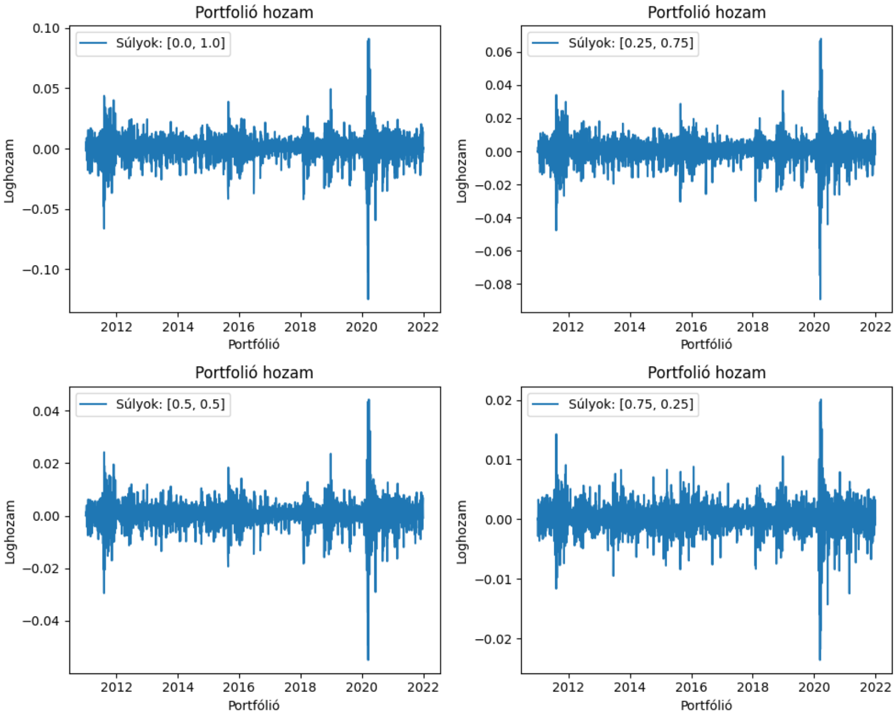
A historikus VaR modell célja, hogy meghatározzuk, egy adott konfidencia-szint mellett várhatóan legfeljebb mennyit csökkenhet a befektetésünk értéke a múltbeli adatok alapján. A modellben így az általunk választott portfólió múltbeli hozamai alapján becsüljük meg a várható legkisebb napi hozamot, egy megadott α által meghatározott valószínűség szerint:

$$Var_\alpha = \inf(l \in \mathbb{R}) : \mathbb{P}(L > l) \leq (1 - \alpha) \iff \inf(l \in \mathbb{R} : F_l(l) \geq \alpha \tag{1}$$

A VaR érték meghatározásához a megadott eszközök hozamát alapul véve, a megfelelő súlyokkal kiszámítjuk a portfólió hozamát. Ezután a hozam szerinti növekvő sorrendbe rendezve választjuk ki a VaR értéket a megadott α alapján (a feladatban adott $\alpha = 5\%$ esetén a felső 95%-nyi napi hozamn értékek minimumát fogjuk kapni).

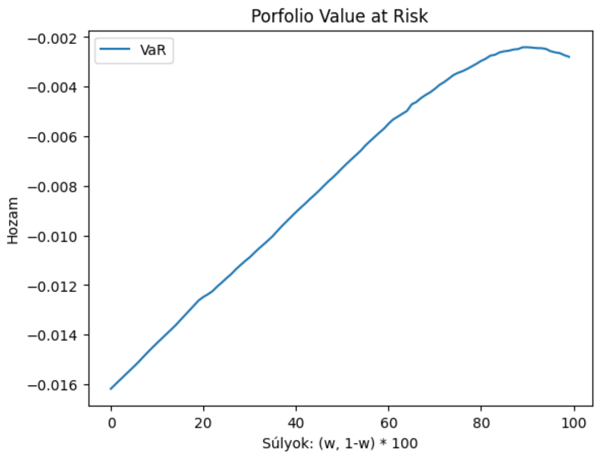
1.2. Kapott eredmények

A modell alapjául a fent ismertetett *Vanguard S&P 500* (VOO) és az *iShares 3-7 Year Treasury Bond* (IEI) ETF-eket választottuk. A portfólió értékeléséhez a loghozamokat beolvasó és az effektív hozamokat adott súllyal súlozó függvényt adtuk meg. Az 1 ábrán látható a portfólió loghozama különböző súlyok mellett:



1. ábra. Különböző súlyok melletti portfólió-hozamok.
Az első komponens az IEI, míg a második a VOO ETF súlya.

A fenti ábrán is látható, hogy a VOO-nak adott nagyobb súly mellett erősebb a portfólió volatilitása, hiszen ez az S&P 500 indexet követi, míg az IEI államkötvényeket. A historikus VaR értékek meghatározásához készített *calc_historical_var* függvény bemeneti paramétere az α valószínűség és a már kiszámított portfólió napi hozamai voltak. Különböző súlyokra futtatva a függvényt látható, hogy a VOO nagyobb súlya mellett nagyobb lesz a VaR, hiszen a nagyobb volatilitás mellett a VOO vesztesége is jobban megjelenik a portfólióban.



2. ábra. Különböző súlyok melletti VaR értékek.
A görbe bal végpontja egy tisztán VOO, míg a jobb egy tisztán IEI ETF-et tartalmazó portfólió VaR értéke, $\alpha = 0,95$ mellett.

A lehetséges súlyozásokat figyelembe véve azonban látható (2 ábra), hogy érdemes diverzifikálni:

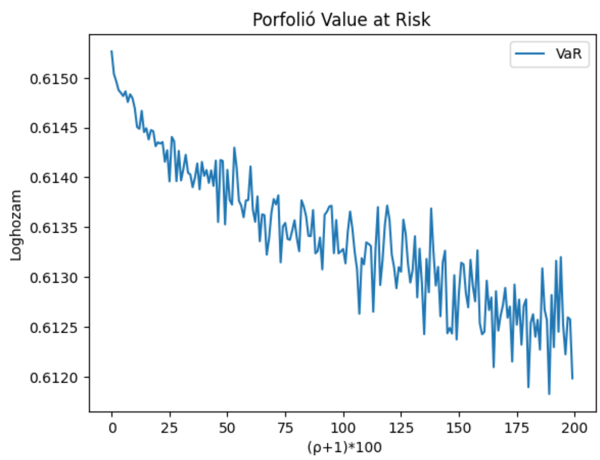
kisebb VaR értéket érhetünk el egy 90% IEI és 10% VOO tartalmú portfólióval, mintha csak az egyik ETF-be fektetnénk.

2. feladat: Jövőbeli árfolyamokra becsült VaR modell, különböző korrelációs értékek mellett

A feladatban az előzőhöz hasonlóan a VOO és az IEI ETF-eket használtuk fel. A portfóliónak egy fix, a két eszköz volatilitásával fordítottan arányos súlyt kellett meghatározni. Ehhez először az IEI és a VOO loghozamainak szórását határoztuk meg, majd ezeknek a segítségével a $w = \sigma(VOO)/(\sigma(IEI) + \sigma(IEI))$ képlettel adtuk meg a VOO, és az $1 - w$ segítségével az IEI súlyát. A jövőbeli hozamok szimulálásához emellett felhasználtunk egy, a kovarianciamátrixot előálllító *calculate_covariance_matrix* [1], illetve az eszközök hozamát szimuláló *calc_asset_returns* [2] függvényeket.

2.1. Eredmények

A különböző korrelációs értékek mellett ábrázolt VaR értékek alapján egy egyre volatilisebb, azonban csökkenő görbe rajzolódik ki:



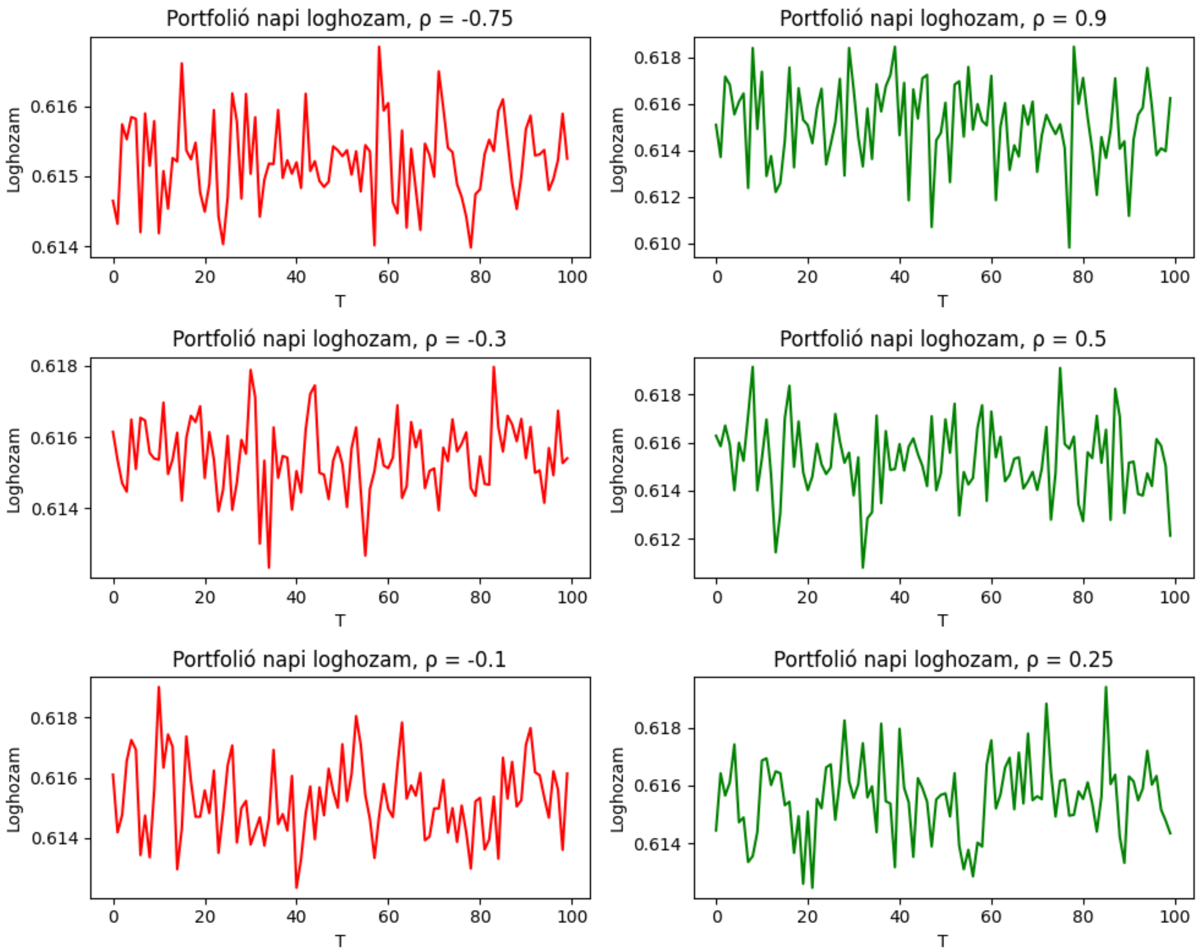
3. ábra. Különböző korreláció melletti VaR értékek.
A görbe bal végpontja egy -1-es, míg a jobb egy 1-es ρ érték melletti VaR érték a szimulált jövőbeli hozamokra.

A két eszközből álló portfólió különböző korreláció melletti VaR értékének szimulálása mellett ábrázoltuk a historikus adatok alapján 100 napra szimulált jövőbeli hozamokat is, hat különböző korrelációt kiemelve (a 4 ábra illusztrálja a kapott eredményeket). A szimulált portfólióhozamok alapján próbáltunk oksági kapcsolatot keresni a korreláció és a kapott hozamok között, azonban a

[1] A függvény paraméterei a szórások és a historikus hozamok közötti korrelációs együttható voltak.

[2] A függvény bemeneti bemeneti adatai a kovariancia mátrix, a historikus középértékek és a szimulált hozampontok számát megadó paraméter voltak.

korreláció mértéke és előjele sem változtatta jelentősen a szimulált hozamokat. [3]



4. ábra. Különböző korreláció mellett szimulált jövőbeli hozamok.

3. feladat: Volatilitás becslése exponentially weighted moving average módszerrel

A harmadik feladatban az exponentially weighted moving average módszerrel kellett egy eszköz volatilitását előrejelezni. Mivel az IEI volatilitása a vizsgált időszakban alacsony volt, így a Vanguard S&P500 ETF volatilitását próbáltuk előrejelezni a feladatban.

3.1. Volatilitás becslése

A volatilitás előrejelzése a pénzügyi piacokon egy kulcsfonotsságú kérdés. Az előrejelzéseket általában a hozamok előrejelzéséhez vagy a hozamok eloszlásának becsléséhez is alkalmazzák. A kockázatkezelés szempontjából tudni akarjuk mi a valószínűsége, hogy a portfólió értéke csökken. Opciós trader-ek szempontjából az opció futamidejére számolt volatilitás kulcsfontosságú a termék áraház. Egy árjegyzőként pedig a bid-ask spread változtatása miatt fontos előrejelezni a volatilitást.

[3] Az empirikus korreláció a vizsgált időszakban -0,3 volt a két ETF hozamai között.

A volatilitás legfontosabb (megfigyelt) stilizált tényei: volatilitás klasztereződés, átlaghoz visszahúzás és a leverage hatás.

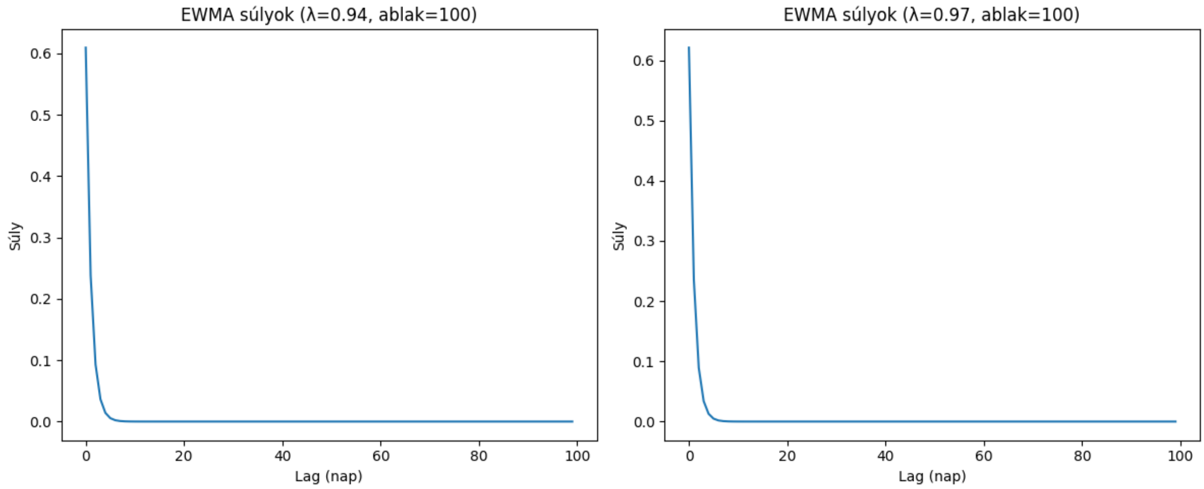
A volatilitás modellezését két modellcsalád segítsével szokták elvégezni. Az egyik a feltételes volatilitás (conditional volatility) modellek, amely csoportba tartoznak az ARCH/GARCH modellek. A másik csoport a sztochasztikus volatilitás modellek. Minazonáltal, az egyszerűbb modellek segítségével is gyakran jó előrejelzést lehet elérni. Ebben a feladatban az exponentially weighted moving average segítségévl próbáljuk meg a volatilitást előrejelzni.

3.2. Kapott eredmények

A modellnek két paramétere van: az előrejelzéshez használt historikus ablak (m) és az exponenciális faktor súlya (λ). Az ablak definiálja, a korábbi megfigyelések számát, amit az előrejelzéshez használunk: $(r_{t-m+1}, r_{t-m}, \ldots, r_t)$. Mindegyik korábbi adat súlya:

$$\lambda^{m-\tau} \cdot \frac{1-\lambda}{1-\lambda^m}, \tag{2}$$

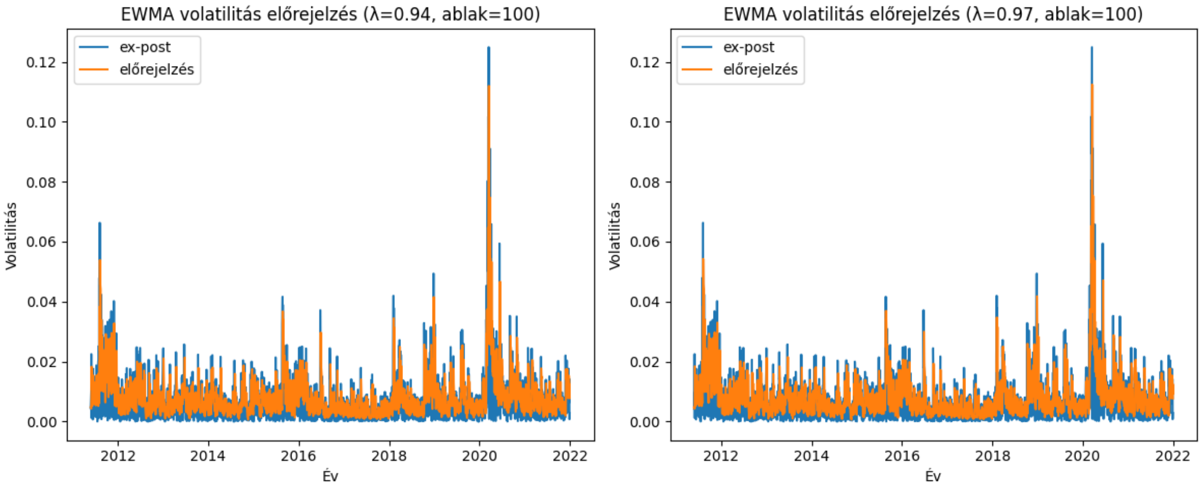
ahol $\tau = 1, 2, 3, \ldots, m$. Jól látható a képlet alapján, hogy a távolabbi megfigyelések (volatilitások) súlyai exponenciálisan csökkenek. A 5. ábrán is ugyanez figyelhető meg $\lambda = 0,94$ és $0,97$. Súlyok esetén.



5. ábra. Az exponential weighted moving average decay factor súlyai.

A feladat során a Vanguard S&P500 ETF volatilitását jeleztük előre $\lambda = 0,94$ és $0,97$ értékekkel $m = 100$ ablakmérettel. A 6. ábra mutatja az előrejelzéseket és a valós, aznapi volatilitását az ETF-nek.

Első ránézésre a két előrejelzés nagyon hasonlónak tűnik. A $\lambda = 0.97$-es decay factor-ral azonban pontosabban előrejelezhetőek a kiugró volatilitás értékek.



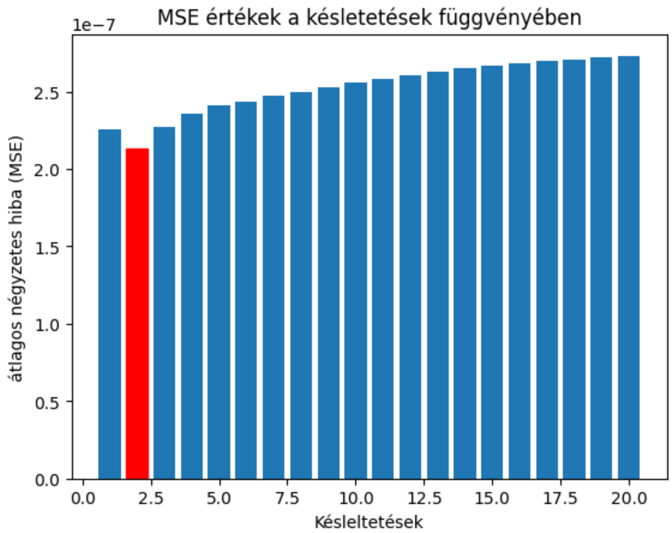
6. ábra. Előrejelzett és ex-post volatilitás $\lambda = 0,94$ és $0,97$ értékek mellett.

4. feladat: Kockázat becslése machine learning módszerrel

A feladat során a Vanguard S&P500 eszköz loghozamainak varianciáját próbáltuk előrejelezni AR(p) modell segítségével, ahol $p = 1, 2, 3, \ldots 20$. A megfelelő p, késletetett tagok számának kiválasztásához keresztvalidásciót alkalmaztunk és a legjobb modellt az átlagos négyzetes hiba (MSE) alapján értékeltük.

4.1. Kapott eredmények

A keresztvalidációhoz az idősorunkat öt egyenlő részre osztottuk a *TimeSeriesSplit* függvény segítségével, így az egymást követő megfigyelések mindenképpen egy csoportba kerülnek. A legjobb késleltetés meghatározásához az MSE értéket végtelenre állítottuk, majd 1-től 20-ig terjedő késleltetésekre illesztettük a lineáris regressziós modellt. A 7 illusztrálja, hogy a $p = 2$ késletetett variancia értéket felhasználva kaptuk a legjobb becslést.



7. ábra. A hozam variancia előrejelzésének átlagos négyzetes hibái a késleltetés függvényében.

5. Konklúzió

A feladatok során a Vanguard S&P500 és az iShares 3-7 Year Treasury Bond ETF-ból létrehozott portfóliót vizsgáltuk. Az első feladat során láttuk, hogy a portfólió diverzifikálásával csökkenthető a Value at Risk érték, és a Vanguard S&P500 ETF-et felülsúlyozva növekszik a portfólió VaR értéke. A VaR értékre készített előrejelzéseink alapján a részvényeikből álló ETF növeli a VaR előrejelzések varianciáját.

A harmadik és negyedik feladatrészben a Vanguard S&P500 volailitását jeleztük előre, mivel a portfólióban az eszköz varianciája meghatározó. A exponentiall weighted moving average módszert $\lambda = 0,97$ és $\lambda = 0,94$ decay fator-ral alkalmazva hasonló eredményeket kaptunk. A negyedik feladatban egy AR(p) modell segítségével jeleztük előre a varianciát. A p késleltetések számának értékét az átalgos négyzetes hiba alapján kettőnek határoztuk meg. A kapott eredmény is jól személélteti, hogy egy EWMA modellben is a magasabb (0.9 feletti) decay factor jobb előrejelzést biztosíthat a Vanguard S&P500 esetén.

6. Github replikáló kód

A feladatok elkészítéséhez használt replikáló megtalálható az alábbi Github repository-n: `https://github.com/JankovitsA/hitelek_beadando`