

# Wycena oraz analiza opcji amerykańskich i europejskich w modelu dwumianowym

Wstęp do Inżynierii Finansowej - Projekt

Tomasz Kąkol, Jan Kozłowski, Aleksander Walis

## Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	<b>2</b>
<b>Założenia dotyczące modelu</b>	<b>2</b>
<b>Przykładowe zastosowania modelu</b>	<b>2</b>
Wycena opcji europejskich call i put . . . . .	3
Wycena opcji amerykańskich call i put . . . . .	3
<b>Analiza wrażliwości modelu</b>	<b>4</b>
Wpływ zmiany parametrów $S_0, K, \sigma$ i $r$ . . . . .	4
Wpływ zmiany parametrów $T$ i $\Delta t$ . . . . .	5
Wpływ równoczesnej zmiany różnych par parametrów . . . . .	6
Podsumowanie . . . . .	7
<b>Analiza składu portfela zabezpieczającego</b>	<b>8</b>
<b>Dodatek: Implementacja modelu</b>	<b>8</b>

# Wprowadzenie

Głównym celem raportu jest analiza modelu dwumianowego wyceny opcji waniliowych typu put i call na aktywa nie wypłacające dywidend. Rozpocznijmy od przedstawienia ogólnych założeń dotyczących modelu wraz z jego przykładowym zastosowaniem przy pewnych ustalonych parametrach. Następnie, zajmiemy się zbadaniem wrażliwości wyceny wynikającej z modelu ze względu na zmianę parametrów modelu oraz porównamy różnicę w wynikach między opcjami europejskimi i amerykańskimi. Przyjrzymy się również składowi portfela zabezpieczającego wyceniane opcje oraz jego zmianom przy rozwoju ceny aktywa bazowego.

## Założenia dotyczące modelu

Zakładamy dwumianowy model rynku, w którym aktywo bazowe (nie wypłacające dywidend) warte w chwili  $t$  kwotę  $S_t$  może w kolejnym kroku (tj. po upływie pewnej ustalonej ilości czasu, oznaczanej przez  $\Delta t$ ) być warte  $S_t \cdot u$  lub  $S_t \cdot d$ , gdzie  $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  i  $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$  są współczynnikami odpowiednio wzrostu i spadku ceny, kontrolowanymi przez parametr zmienności  $\sigma$ . Poza aktywem bazowym dysponujemy również możliwością inwestycji lub pożyczki ze stałą stopą wolną od ryzyka  $r$  (w każdym okresie, zakładamy oprocentowanie ciągłe).

Przy takich założeniach wyznaczamy wartość opcji (o zapadalności  $T$  lat i cenie wykonania  $K$ ) na chwilę zero. Rozpoczynamy od wyznaczenia możliwych wartości opcji w chwili  $T$ , czyli po prostu wartości wewnętrznych (dla opcji typu call  $\max(S_T - K, 0)$ , a dla opcji typu put  $\max(K - S_T, 0)$ ); następnie, cofając się o kolejne kroki w czasie wyznaczamy wartość opcji w oparciu o metodę  $\Delta$ -hedgingu (lub równoważnie, korzystając z założenia o mierze obojętnej na ryzyko, tj. wartość opcji jest zdyskontowaną wartością oczekiwaną jej przyszłego *payoffu*), przy czym, w przypadku opcji amerykańskich porównujemy uzyskaną wartość z wartością wewnętrzną opcji i bierzemy większą z nich (ze względu na możliwość wcześniejszego wykonania opcji). Kontynuując ten proces, finalnie otrzymujemy wartość opcji w chwili początkowej.

## Przykładowe zastosowania modelu

W tym rozdziale przedstawimy przykładowe zastosowanie modelu do wyceny opcji. Jak już wspomnieliśmy, będziemy rozważać następujące cztery przypadki:

- opcje europejskie typu call i put,
- opcje amerykańskie typu call i put.

Przyjmujemy następujące parametry, na podstawie których dokonamy przykładowej wyceny:

$$S_0 = 50, \quad K = 48, \quad T = 2, \quad \Delta t = 1/12, \quad \sigma = 0.3, \quad r = 0.02$$

W następnych dwóch podrozdziałach zaprezentujemy uzyskane wyniki dla każdego z przypadków, porównamy je między sobą i wyciągniemy wnioski. Zanim jednak do tego przejdziemy, krótko opiszemy strukturę uzyskanego modelu dla takich parametrów. Zauważmy, że ze względu na przyjęte wartości parametrów  $T$  oraz  $\Delta t$  model zawiera aż 325 wierzchołków (tj. rozważanych momentów w czasie z różną ceną aktywa bazowego) z czego 25 z nich dotyczy chwili wygaśnięcia opcji. Wynika z tego, że dokonujemy wyceny w oparciu o 25 możliwych przyszłych wartości aktywa bazowego w owej chwili wygaśnięcia. Dla takiej liczby wierzchołków wraz z przyjętą wysokością parametru zmienności  $\sigma$  największą osiągalną wartością aktywa bazowego jest 399.61, co daje przyrost rzędu  $(399.61 - 50)/50 \approx 6.99$  (czyli o prawie 700%), a najmniejszą jest 6.26, co daje spadek rzędu  $(6.26 - 50)/50 \approx -0.87$  (czyli o blisko 87%).

## Wycena opcji europejskich call i put

Rozpocznijmy od przykładowej wyceny opcji europejskich. Po dokonaniu wyceny omawianym modelem dla ustalonych parametrów, wartość opcji w chwili zero wynosi (w zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku):

- w przypadku opcji call: 10.19,
- w przypadku opcji put: 6.31.

Jak widzimy, wartość opcji call jest istotnie wyższa od wartości opcji put dla tych parametrów. Nie jest to zaskoczeniem, bowiem zgadza się z parytetem put-call - zauważmy, że przy przyjętych parametrach zachodzi relacja  $S_0 \geq K > 0$ , a z parytetu put-call mamy:

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT} \geq K - Ke^{-rT} = K(1 - e^{-rT}) > 0$$

gdzie  $C_0$  i  $P_0$  są cenami odpowiednio opcji call i put w chwili zero (zakładamy też, że  $r > 0$ ). Analogicznymi przekształceniami możemy uzyskać wartość parametru  $K$  tak, aby (przy pozostałych parametrach niezmiennych) relacja uzyskanych wartości opcji call i put się odwróciła.

## Wycena opcji amerykańskich call i put

Przejdziemy teraz do przykładowej wyceny opcji amerykańskich. Przypomnijmy na początku, że różnicą między tym rodzajem opcji, a opcjami rodzaju europejskiego jest możliwość wykonania opcji w dowolnym momencie - ma to oczywiście znaczący wpływ na jej wartość. Po dokonaniu wyceny omawianym modelem dla ustalonych parametrów, wartość opcji w chwili zero wynosi (w zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku):

- w przypadku opcji call: 10.19,
- w przypadku opcji put: 6.47.

Jak widzimy, relacja między uzyskanymi wartościami jest taka sama jak w przypadku opcji europejskich. Tym razem jednak, nie jesteśmy w stanie powiedzieć że jest to rezultat zgodny z parytetem put-call, bowiem nie obowiązuje on w przypadku opcji amerykańskich. Ze względu na możliwość wcześniejszego wykonania opcji relacja między cenami opcjami obu typów jest znacznie bardziej skomplikowana.

Zwróćmy jednak uwagę na pewną ciekawą prawidłowość - wartość opcji europejskiej typu call jest równa wartości opcji amerykańskiej typu call. Początkowo może się wydawać, że jest to zwykły przypadek wynikający z akurat takiej konfiguracji parametrów; zauważmy jednak, że jedynym czynnikiem mogącym wywołać zmianę w wycenie obu tych opcji jest możliwość przedwczesnego wykonania opcji amerykańskiej. Jednakże, po zbadaniu potencjalnej opłacalności takiego działania dochodzimy do wniosku, że przedwczesne wykonanie opcji (przypomnijmy, zakładamy brak wypłacanych dywidend dla aktywa bazowego) call nigdy nie jest opłacalne, co poprawnie odzwierciedla wykorzystany przez nas model wyceny. Rozważmy bowiem następujący scenariusz:<sup>1</sup> założmy, że w danej chwili przed upływem ważności opcji aktywo bazowe warte jest 50 PLN, a cena wykonania wynosi 40 PLN. Jeśli zależy nam na posiadaniu owego aktywa, lepiej zapłacić cenę wykonania później, ponieważ: (1) 40 PLN, które zapłacimy w przyszłości warte jest mniej niż te, które zapłacilibyśmy teraz oraz (2) istnieje szansa, że cena aktywa spadnie nawet poniżej ceny wykonania. Jeśli natomiast nie interesuje nas posiadanie aktywa, a jedynie zarobek, to bardziej opłacalnym działaniem jest sprzedanie całej opcji (której cena musi być większa niż wartość wewnętrzna, tj. przychód z natychmiastowego wykonania), lub sprzedanie krótko aktywa bazowego i dostarczenie go w momencie wykonania opcji, kiedy to cena aktywa może spaść nawet poniżej ceny wykonania.

Równości cen opcji europejskich i amerykańskich typu put oczywiście nie zachodzi. W tym przypadku możliwość przedwczesnego wykonania opcji w wielu momentach jest jak najbardziej działaniem optymalnym,

<sup>1</sup>argumentacja zainspirowana rozdziałem 11.5 książki *Options, futures and other derivatives* autorstwa Johna C. Hulla.

a argumentacja analogiczna do tej z powyższego akapitu oczywiście nie znajduje zastosowania. Bierze się to między innymi z faktu, że spadek (oraz jego tempo) ceny aktywa bazowego jest znacznie mniejszy (oraz ograniczony!) od jego wzrostu w rozważanym przez nas modelu.

Przyjrzyjmy się teraz optymalnym momentom wykonania opcji put oraz różnicy między wartościami amerykańskich i europejskich opcji put dla rozważanych parametrów. Obie rzeczy przedstawiają poniższe ilustracje.

*Rysunek 1. Drzewa wyceny opcji amerykańskich typu put. Rysunek po lewej zawiera drzewo z momentami optymalnego wykonania opcji, gdzie kolor niebieski odpowiada wierzchołkowi, który odpowiada momentowi w czasie, kiedy wykonanie opcji jest optymalnym działaniem; w przeciwnym wypadku wierzchołek oznaczony jest kolorem szarym. Rysunek po prawej zawiera drzewo wyceny z różnicami wartości opcji w danym wierzchołku między amerykańską i europejską opcją put.*

Rozpocznijmy od analizy momentów optymalnego wykonania. Jak widzimy na drzewie wyceny, wykonanie opcji staje się optymalnym wyborem w dolnej części drzewa, kiedy cena aktywa bazowego osiąga pewną niską wartość (konkretnie 27.27). Dla każdego następnego wierzchołka, w którym cena aktywa jest owej niskiej wartości równa bądź mniejsza wykonanie również jest opcją optymalną. Co do różnic cen między opcją amerykańską a europejską, dokonajmy na początku pewnej trywialnej obserwacji - wartość opcji amerykańskiej jest w każdym wierzchołku wyższa lub równa od wartości opcji europejskiej (wynika to oczywiście z możliwości przedwczesnego wykonania). Największą różnicę w wartościach widzimy dla wierzchołków znajdujących się nisko i w połowie drzewa, tj. dla tych, dla których cena aktywa bazowego jest już dosyć niska, po upływie około połowy czasu do wygaśnięcia opcji. Brak różnicy widzimy natomiast w każdym z ostatnich wierzchołków (gdzie wartości są równe z oczywistych względów) oraz w górnej części drzewa wyceny.

## Analiza wrażliwości modelu

W tym rozdziale zajmiemy się analizą wrażliwości wyceny modelu dwumianowego. Jest to jedna z najważniejszych kwestii efektywności modeli wyceny aktywów finansowych, bowiem ich parametryzacja często opiera się na realizacjach pewnych zjawisk, które nie są znane osobom wyceniającym dane aktywa. Prawdopodobnie najbardziej istotnym z tych zjawisk jest zmienność rynku - w naszym przypadku jest to *de facto* pytanie o dobór wartości parametrów dotyczących zmienności ceny aktywa bazowego, czyli parametr  $\sigma$  oraz wysokości stopy procentowej  $r$ . Problem odpowiedniej parametryzacji nie kończy się jednak wyłącznie na dokładnej estymacji wartości dotyczących zmienności rynku; równie ważna jest strona parametryzacji technicznej, tj. tej dotyczącej wyłącznie struktury modelu, nie odnoszącej się bezpośrednio do faktycznej rzeczywistości związanej z modelowanymi instrumentami finansowymi - w naszym przypadku jest to przede wszystkim parametr  $\Delta t$  kontrolujący liczbę 'kroków' w modelu, którego zmiana może mieć znaczący wpływ na finalną wycenę danej opcji.

W następnych dwóch podrozdziałach przeanalizujemy wpływ zmiany pojedynczego parametru na zmianę wyceny opcji - rozpoczniemy od zbadania zmian parametrów  $S_0, K, T, \sigma$  i  $r$ , tj. tych bezpośrednio odnoszących się do ogólnie pojętej sytuacji rynkowej, po czym przyjrzymy się jakie zmiany wywołuje wykorzystanie innych wartości parametru  $\Delta t$ . W ostatnim, trzecim podrozdziale zbadamy wspólny wpływ zmian w różnych parach parametrów.

### Wpływ zmiany parametrów $S_0, K, \sigma$ i $r$

Analizę wrażliwości wyceny na zmiany pojedynczych parametrów rozpoczniemy od zbadania wpływu parametru  $S_0$  i  $K$ , czyli początkowej wartości aktywa bazowego i ceny wykonania opcji odpowiednio. Za zakres zmienności obu parametrów przyjmujemy przedział  $[30, 80]$  (w przykładowej wycenie przyjmowaliśmy  $S_0 = 50$  i  $K = 48$ ). Pozostałe parametry pozostają niezmiennione, równe wcześniej zaprezentowanym wartościom. Na poniższych wykresach przedstawiamy uzyskane wyceny opcji call i put na chwilę zero

(podzielone ze względu na rodzaj opcji: a - amerykański, e - europejski), w zależności od wartości wspomnianych parametrów.

*Rysunek 2. Wykres wartości opcji call i put w chwili zero w zależności od wartości parametrów  $S_0$  i  $K$ .*

Zanim rozpoczniemy dokładną analizę uzyskanych wyników zwróćmy uwagę na fakt (który widoczny będzie również w następnych przypadkach), że wycena opcji call dla opcji amerykańskich i europejskich jest równa - zjawisko te opisaliśmy w poprzednim rozdziale. Wracając do badania wpływu parametrów, zaczniemy od parametru  $S_0$ . Jak widzimy na powyższym wykresie, jego wzrost ma wyraźnie silny wpływ na wzrost wartości opcji call i spadek wartości opcji put. W przypadku opcji call owy wzrost jest zdaje się być bardzo szybki, natomiast spadek dla opcji call zdaje się powoli stabilizować już przy  $S_0$  równym 80. Zauważmy jeszcze, że różnice między wycenami opcji put rodzaju amerykańskiego i europejskiego są minimalne.

Przejdźmy teraz do wpływu parametru  $K$ . W tym przypadku również widzimy silną zależność między jego wartością a uzyskaną wyceną - jednak tym razem, wzrost parametru ma znaczący wpływ na spadek wartości opcji call i wzrost wartości opcji put; również tutaj spadek zdaje się stabilizować już przy  $K$  równym 80. Analogicznie jak w przypadku parametru  $S_0$ , różnice między wycenami opcji put rodzaju amerykańskiego i europejskiego są niewielkie.

Następnymi parametrami, których wpływ na wycenę zbadamy, są  $\sigma$  i  $r$ , czyli czyli tzw. zmienność ceny aktywa bazowego (kontrolująca to jak bardzo owa cena rośnie/maleje między sąsiadującymi wierzchołkami) i stopa procentowa bez ryzyka odpowiednio. Za zakres zmienności parametru  $\sigma$  przyjmujemy przedział  $[0.05, 0.3]$  (w przykładowej wycenie przyjmowaliśmy  $\sigma = 0.3$ ), a dla parametru  $r$  przedział  $[-0.03, 0.2]$ . Pozostałe parametry pozostają niezmiennione, równe wcześniej zaprezentowanym wartościom. Na poniższych wykresach przedstawiamy uzyskane wyceny opcji call i put na chwilę zero (podzielone ze względu na rodzaj opcji: a - amerykański, e - europejski), w zależności od wartości wspomnianych parametrów.

*Rysunek 3. Wykres wartości opcji call i put w chwili zero w zależności od wartości parametrów  $\sigma$  i  $r$ .*

Zaczniemy od badania wpływu parametru  $\sigma$ . Jak widzimy na powyższych wykresach, jego wzrost ma pozytywny wpływ na wzrost wartości zarówno opcji call jak i put. Porównując jednak poziom tego przyrostu z tym uzyskanym dla poprzednich dwóch przypadków (tj. dla parametrów  $S_0$  i  $K$ ) widzimy, że jest on znacznie mniejszy, wynoszący jedynie PLN; zauważmy również, że poziom tego przyrostu zdaje się być równy dla obu typów opcji. Co do różnic między wartościami opcji put rodzaju amerykańskiego i europejskiego, ponownie owe różnice są minimalne.

Przejdźmy teraz do wpływu parametru  $r$ . Jak widzimy na wykresach, mamy do czynienia z tą samą zależnością jak w przypadku parametru  $S_0$ , tj. wraz ze wzrostem parametru  $r$  obserwujemy wzrost wartości opcji call oraz spadek wartości opcji put. Zwróćmy jednak szczególną uwagę na zakres dopuszczalnych wartości parametru - dopuszczamy również ujemne wartości stopy procentowej bez ryzyka. Jest to oczywiście wartość odpowiadająca dość niepowszechnym sytuacjom rynkowym. Zauważmy, że w tym przypadku ceny opcji call rodzaju europejskiego i amerykańskiego różnią się, na podstawie czego możemy wywnioskować, że istnieją momenty optymalnego przedterminowego wykonania opcji. Co do poziomu wzrostu jak i spadku wartości opcji obu typów, warto odnotować że nie jest on zbyt duży - szczególnie, jeśli skupimy się na najczęściej występujących wartościach stopy procentowej, tj. takim w przedziale  $[0.01, 0.1]$ , wtedy ów poziom jest niewielki, wynoszący  $\pm 1$  PLN.

## Wpływ zmiany parametrów $T$ i $\Delta t$

Ostatnimi parametrami, których wpływ na wycenę zbadamy, jest  $\Delta t$  i  $T$ , czyli czas mijający w trakcie jednego kroku w drzewie wyceny oraz czas do wygaśnięcia opcji (podawany w latach) odpowiednio. Oba parametry dotyczą czasu w rozważanym modelu, przy czym wartość parametru  $\Delta t$  ma wpływ nie tylko na uzyskaną wartość opcji, ale również na czas wykonania algorytmu dokonującego wyceny, bowiem bezpośrednio determinuje on liczbę wierzchołków w drzewie. W związku z tym, przeanalizujemy nie tylko uzyskane wartości opcji w zależności od wartości tych parametrów, ale również wpływ wartości parametru  $\Delta t$  na czas dokonania tej wyceny. Za zakres zmienności parametru  $T$  przyjmujemy przedział  $(0, 100]$  (w przykładowej

wycenie przyjmowaliśmy  $T = 2$ ), a dla parametru  $\Delta t$  przedział  $(0, 0.5]$  (w przykładowej wycenie przyjmowaliśmy  $\Delta t = 1/12$ ). Pozostałe parametry pozostają niezmiennione, równe wcześniej zaprezentowanym wartościom. Rozpocznijmy od analizy różnic w wycenie opcji - na poniższych wykresach przedstawiamy uzyskane wyceny opcji call i put na chwilę zero (podzielone ze względu na rodzaj opcji: a - amerykański, e - europejski), w zależności od wartości wspomnianych parametrów.

*Rysunek 4. Wykres wartości opcji call i put w chwili zero w zależności od wartości parametrów  $T$  i  $\Delta t$ .*

Rozpocznijmy od zbadania wpływu parametru  $T$ . Dla opcji call jak i dla opcji put typu amerykańskiego obserwujemy wzrost wartości opcji przy wzroście parametru  $T$ . W obu przypadkach zauważamy stabilizację uzyskanej wyceny dla parametru  $T$  bliskiego 100, przy czym wzrost wartości opcji call jest znacznie wyższy od wzrostu opcji put rodzaju amerykańskiego. Zwróćmy również uwagę na znaczną różnicę w wartościach między opcjami put rodzaju amerykańskiego i europejskiego - tak duża różnica nie występowała w przypadku zmian innych parametrów. Interesująca jest również dokładna zmienność wartości wyceny opcji europejskiej typu put - początkowo wzrasta wraz ze wzrostem parametru  $T$ , a następnie maleje; zauważmy jednak, że rozważamy naprawdę duże wartości parametru  $T$ , raczej nie spotykane w praktyce.

Przeanalizujmy teraz wpływ parametru  $\Delta t$ . Jak widzimy na obu wykresach, zmienność w uzyskanej wycenie jest bardzo niewielka, zdecydowanie najmniejsza ze wszystkich rozważanych przypadków. Jest to również, obok wpływu parametru  $\sigma$ , jeden z dwóch przypadków kiedy wpływ parametru jest taki sam dla obu typów opcji.

Przyjrzyjmy się teraz różnicom w czasach wykonania algorytmu dokonującego wyceny w zależności od wartości parametru  $\Delta t$ . Poniższy wykres przedstawia uzyskane średnie (obliczone na podstawie 100 powtórzeń) czasy wykonania algorytmu dokonującego wyceny opcji obu typów i obu rodzajów.

*Rysunek 5. Wykres średniego (obliczonego na podstawie 100 powtórzeń) czasu wykonania algorytmu dokonującego wyceny modelem dla opcji danego typu i rodzaju w zależności od wartości parametru  $\Delta t$  (oś pozioma przedstawiająca parametr  $\Delta t$  zawiera jego odwrotności, posortowana rosnąco względem tych odwrotności).*

Pomimo pewnych odchyśleń dostrzegamy wyraźny kwadratowy wzrost, wraz ze wzrostem odwrotności parametru  $\Delta t$  (dla każdego typu i rodzaju opcji). Oczywiście, uzyskane średnie czasy nawet dla  $\Delta t = 1/300$  nie są wysokie, jednak w sytuacji dynamicznej wyceny nawet kilkuset opcji czas wykonania takiego algorytmu byłby już znaczący.

## Wpływ równoczesnej zmiany różnych par parametrów

W poprzednich dwóch podrozdziałach analizowaliśmy wpływ zmian pojedynczych parametrów na uzyskane wyceny opcji na chwilę zero. W tym podrozdziale przyjrzymy się równoczesnym zmianom różnych par parametrów w celu dokładniejszej oceny wrażliwości rozważanego modelu. Ze względów praktycznych (możliwych par jest aż 15, co przy dwóch typach opcji daje łącznie 30 przypadków), analizie poddamy jedynie te przypadki, w których widoczne są pewne interesujące prawidłowości oraz te, które mogą reprezentować pewne ważne scenariusze rynkowe (np. różne zmienności ceny aktywa bazowego (parametr  $\sigma$ ) wraz ze zmianami stopy procentowej).

Rozpocznijmy od zbadania wpływu równoczesnych zmian parametrów  $S_0$  i  $K$ . Ponownie, za zakres możliwej zmienności przyjmujemy dla obu parametrów przedział  $[30, 80]$ . Pozostałe parametry pozostają niezmiennione, równe wcześniej zaprezentowanym wartościom. Na poniższych wykresach przedstawiamy uzyskane wyceny opcji call i put na chwilę zero (podzielone ze względu na rodzaj opcji: a - amerykański, e - europejski) w formie heatmapy, w zależności od wartości wspomnianych parametrów.

*Rysunek 6. Wykres wartości opcji call i put w chwili zero w zależności od równoczesnej zmiany wartości parametrów  $S_0$  i  $K$ .*

Na początku zajmijmy się przypadkami opcji call - zarówno dla amerykańskiej, jak i europejskiej, widzimy ten przebieg - wartość opcji rośnie wraz ze wzrostem wartości aktywa bazowego ( $S_0$ ) i spadkiem ceny wykonania ( $K$ ). Jest to zgodne z oczekiwaniami, bowiem im wyższa bieżąca cena aktywa w stosunku do ceny wykonania, tym bardziej opcja znajduje się „in-the-money” i tym samym ma wyższą wartość. W przypadku opcji put,

sytuacja wygląda inaczej. Tutaj obserwujemy wzrost wartości opcji wraz ze wzrostem ceny wykonania i spadkiem wartości aktywa bazowego, co oznacza (podobnie jak dla opcji call), że opcja staje się bardziej „in-the-money”. Jednak w przeciwieństwie do opcji call, wycena opcji put różni się dla rodzaju amerykańskiego i europejskiego - nie jest ona znacząca, ale można dostrzec, że wersja amerykańska przy osiąga wyższe wartości przy tych samych zmianach obu parametrów.

Przejdźmy teraz do zbadania wpływu równoczesnych zmian parametrów  $r$  i  $\sigma$ . Za zakres możliwej zmienności parametrów przyjmujemy te same przedziały jak w poprzednim podrozdziale, tj. dla parametru  $r$  przedział  $[-0.03, 0.2]$ , a dla parametru  $\sigma$  przedział  $[0.05, 0.3]$ . Pozostałe parametry pozostają niezmiennione, równe wcześniej zaprezentowanym wartościom. Na poniższych wykresach przedstawiamy uzyskane wyceny opcji call i put na chwilę zero (podzielone ze względu na rodzaj opcji: a - amerykański, e - europejski) w formie heatmapy, w zależności od wartości wspomnianych parametrów.

*Rysunek 7. Wykres wartości opcji call i put w chwili zero w zależności od równoczesnej zmiany wartości parametrów  $\sigma$  i  $r$ .*

Rozpocznijmy od opcji typu call - dla obu rodzajów opcji (amerykańskich i europejskich) wartość opcji rośnie wraz ze wzrostem zarówno stopy procentowej ( $r$ ) jak i zmiennością ceny aktywa bazowego ( $\sigma$ ). Wzrost stopy procentowej obniża wartość bieżącą ceny wykonania, co zwiększa atrakcyjność opcji call. Z kolei wzrost zmienności zwiększa potencjał skrajnych ruchów ceny aktywa bazowego, co wpływa pozytywnie na wartość opcji - dotyczy to w szczególności opcji call, dla których silne wzrosty ceny aktywa bazowego są korzystne. W przypadku opcji put również obserwujemy wzrost ceny wraz ze wzrostem zmienności ceny aktywa bazowego, co jest naturalne - większa zmienność zwiększa prawdopodobieństwo, że cena aktywa spadnie znacząco poniżej ceny wykonania. Jednak w odniesieniu do stopy procentowej, tendencja jest odwrotna niż dla opcji call - wzrost stopy procentowej powoduje spadek wartości opcji put. Dzieje się tak, ponieważ wyższe stopy procentowe zmniejszają bieżącą wartość przyszłych wypłat, które są podstawą wyceny opcji put. Analogicznie jak w przypadku wpływu parametrów  $S_0$  i  $K$ , warto również zwrócić uwagę na nieco większą wartość opcji put amerykańskich względem opcji europejskich - jest to oczywiście konsekwencja możliwości wcześniejszego wykonania, która w przypadku opcji put może być korzystna, w szczególności przy niskim poziomie stóp procentowych i wysokiej zmienności.

## Podsumowanie

Podsumowanie dokonanych obserwacji rozpoczniemy od tych parametrów, dla których zmiany w obrębie rozważanych zakresów wywoływały największe zmiany w uzyskanych wartościach opcji - są to przede wszystkim parametry  $S_0$ ,  $K$  oraz  $T$ . Zauważmy jednak, że zarówno cena wykonania jak i czas do wygaśnięcia opcji są dokładnie znane dla każdego zainteresowanego zawarciem kontraktu opcji, natomiast wartość  $S_0$  jest nieco inna, bowiem nie jest ona jasno określona. Stosując rozważany przez nas model wyceny opcji trzeba mieć dużą pewność co do przyjętej wartości  $S_0$ , ponieważ duże odchylenie od jej faktycznej wartości może doprowadzić do nieprawidłowej wyceny, co w konsekwencji może skutkować znaczącą stratą pieniężną. Widzimy zatem, że decyzja dotycząca przyjęcia pewnych wartości parametrów  $K$  i  $T$ , pomimo dużej wpływowości na wycenę, obarczona jest mniejszym ryzykiem niż w przypadku parametru  $S_0$ , ponieważ znacznie ciężiej jest tu popełnić błąd - przyjmuje się po prostu wartości opisane w kontrakcie opcji. Podobny pod względem możliwości poznania faktycznej wartości jest parametr  $r$ , czyli stopa procentowa od ryzyka; tu również, jak w przypadku parametru  $S_0$  opierać się trzeba głównie na wartościach krążących na rynku - w tym przypadku jednak, ewentualny błąd nie jest związany z aż tak dużym kosztem jak w przypadku parametru  $S_0$ . Jeszcze mniejszym wpływem, czyli tym samym mniejszym potencjalnym kosztem, charakteryzuje się parametr dotyczący zmienności ceny aktywa bazowego, czyli  $\sigma$ . Tutaj jednak znacznie ciężiej o bardzo dokładną estymację parametru; każde aktywo bazowe jest inne, co oznacza zupełnie inne możliwości ewolucji ceny, nie wspominając o nagłych, nieprzewidywalnych zdarzeniach, które mogą drastycznie ową cenę zmienić - na szczęście, jak już nadmieniliśmy, wpływ tego parametru nie jest aż tak wielki jak pozostałych. Na koniec wspomnijmy jeszcze, że parametr  $\Delta t$ , kontrolujący czas mijający w trakcie jednego kroku w drzewie wyceny (oraz liczbę wierzchołków w owym drzewie) ma bardzo niewielki, wręcz znikomy wpływ na uzyskaną wartość opcji.

## Analiza składu portfela zabezpieczającego

Na poniższym rysunku przedstawiono porównanie map ciepła wartości delty w czasie i pozycjach drzewa binarnego dla opcji typu call oraz put. Każdy z węzłów drzewa odpowiada konkretnej liczbie wzrostów ceny instrumentu bazowego oraz momentowi w czasie (na osi X). Kolor w danym punkcie odzwierciedla wartość delty, czyli liczby akcji potrzebnej w portfelu zabezpieczającym, aby replikować wartość opcji.

W przypadku opcji call obserwujemy, że delta rośnie wraz ze wzrostem ceny instrumentu bazowego i zbliża się do wartości 1 w górnych węzłach drzewa. Oznacza to, że gdy cena aktywa znacznie przewyższa cenę wykonania, portfel powinien zawierać prawie jedną akcję, aby skutecznie odwzorować zachowanie opcji. Z kolei w przypadku opcji put wartość delty maleje i przyjmuje wartości ujemne, szczególnie w dolnych gałęziach drzewa, gdzie cena aktywa jest niska. Jednak ze względu na to, że cena wykonania  $K$  w analizowanym przypadku nie jest znacznie wyższa od ceny początkowej  $S_{\{0\}}$ , opcja nie jest głęboko “in-the-money”, dlatego delta nie osiąga pełnej wartości  $-1$ . Mimo to, zauważalna jest silna zależność: im niższa cena aktywa bazowego, tym większe (bardziej ujemne) wartości delty. Porównanie wykresów pozwala dostrzec symetrię między opcją call a put w kontekście ich wrażliwości na zmianę ceny instrumentu bazowego, co jest zgodne z teorią finansową. Wartości delty pozostają w oczekiwanych przedziałach:  $[0,1]$  dla call i  $[-1,0]$  dla put, co potwierdza poprawność implementacji modelu.

*Rysunek 8. Drzewo wyceny dla opcji put wraz z wartościami delty w odpowiednich wierzchołkach.*

W przypadku opcji typu put, jak w analizowanym przykładzie, wartości delty są zazwyczaj ujemne — oznacza to, że dla zreplikowania opcji inwestor powinien przyjąć pozycję krótką na akcjach. Można również zaobserwować, że delta maleje (czyli staje się bardziej ujemna) w sytuacjach spadków cen instrumentu bazowego. To zgodne z intuicją: im niższa cena akcji, tym większa wartość opcji put, co wymusza większe zabezpieczenie przez pozycję przeciwną. Wraz z upływem czasu, czyli w miarę zbliżania się do terminu wygaśnięcia opcji, wartości delty stają się bardziej ekstremalne — to znaczy bardziej zbliżają się do  $-1$  lub  $0$ . Jest to efektem rosnącej wrażliwości wartości opcji na zmiany ceny aktywa w ostatnich momentach życia opcji. Taka dynamika wymusza częstsze i bardziej znaczące dostosowania pozycji w portfelu, co pokazuje rosnące wyzwania związane z praktycznym stosowaniem strategii delta-hedgingu w końcowych etapach życia opcji.

## Dodatek: Implementacja modelu

W tym dodatkowym podrozdziale zawieramy informacje techniczne dotyczące implementacji modelu wyceny dwumianowej. Uzyskane wyniki oparte były o funkcje napisane w języku *Python*. Dokładne szczegóły owych funkcji, jak i przypadki ich użycia zawieramy w poniższej tabeli. Dane do rysunków od 2 do 7 włącznie były generowane przez funkcje w pliku *main.py* oraz rysowane w pakiecie *R* w pliku *do\_wykresow.R*. W tabeli podajemy nazwy funkcji generujących dane, bez nazw plików *.csv* ponieważ są one długie ale czytelne (np. *dane\_odwr\_t\_12\_sigma\_0.3\_S\_0\_50\_r\_0.02\_K\_od\_30\_do\_79\_T\_2.scv*). Dodatkowo niepodane parametry dla tych rysunków są “standerowe dla tego zadania”, tj.  $O_t = \text{np.array}([12])$ ,  $\text{Sigmas} = \text{np.array}([0.3])$ ,  $S_0 = \text{np.array}([50])$ ,  $R_s = \text{np.array}([0.02])$ ,  $K_s = \text{np.array}([48])$ ,  $T_s = \text{np.array}([2])$ .

	nazwa pliku	nazwa funkcji	parametry
Rysunek 1	wyniki_zad1.csv	policz_i_zapisz_wyniki_zad1	$n=1000, k=1000$
Rysunek 2 l	-	policz_dane_i_zapisz	$S_{0s} = \text{np.arange}(30, 80, 1)$
Rysunek 2 p	-	policz_dane_i_zapisz	$K_s = \text{np.arange}(30, 80, 1)$
Rysunek 3 l	-	policz_dane_i_zapisz	$\text{Sigmas} = \text{np.arange}(0.1, 0.66, 0.05)$
Rysunek 3 p	-	policz_dane_i_zapisz	$R_s = \text{np.arange}(-0.03, 0.2, 0.01)$
Rysunek 4 l	-	policz_dane_i_zapisz	$\text{np.arange}(1, 100, 1)$
Rysunek 4 p	-	policz_dane_i_zapisz	$\text{np.arange}(2, 100, 2)$
Rysunek 5	-	zbada_j_ile_liczy_srednio_wszystkie_mozliwosci	$N = 1000, O_t = (\text{np.arange}(1, 100, 2), \text{np.arange}(100, 500, 10), \text{np.arange}(500, 1000, 50))$



*(continued)*

	nazwa pliku	nazwa funkcji	parametry
Rysunek 6	-	policz_dane_i_zapisz	S_0s = np.arange(30, 80, 1), Ks = np.arange(30, 80, 1)
Rysunek 7	-	policz_dane_i_zapisz	Sigmas = np.arange(0.1, 0.66, 0.05), Rs = np.arange(-0.03, 0.2, 0.01)
Rysunek 8	-	read_numbers_and_save_p_values	n=5000
*			