Топлотна једначина

Никола Јанкуловић

20. новембар 2024.

Сажетак

У овом раду увешћемо проблем топлотне једначине, навести нека њена својства, извести топлотну једначину и решити један општи облик.

Увод

Топлотна једначина је једна од фундаменталних једначина математичке физике, која описује расподелу температуре у времену и простору у различитим медијима. Она је кључни алат за анализу динамике топлотног преноса, пружајући увид у механизме којима се топлота шири кроз проводне материјале, као што су метали, тло, течности и гасови.

У основном облику, топлотна једначина повезује брзину промене температуре са просторно зависним градијентима температуре. У математичком смислу, ради се о парцијалној диференцијалној једначини другог реда:

где је:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha \Delta_x u(x,t) + Q(x,t) \qquad u \in C^{2,1}(D \times \mathbb{R}_0^+), \;\; x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \; t \geq 0 \tag{1}$$

где је:

- $u(x,t)$ - температура у тачки x у времену t
- α - позитивни коефицијент топлотне дифузије медијума
- Δ_x - Лапласијан по просторним променљивима
- Q - спољашњи извор топлоте
- D - скуп тачака у простору

Топлотна једначина је једноставна по форми, али изузетно моћна у примени. Одликује се тиме што тежи да "изглади"температурне разлике у систему, моделујући начин на који топлота тежи ка термалној равнотежи.

Извођење топлотне једначине у једној димензији

У овом одељку ћемо извести топлотну једначину у једној димензији, под претпоставком да важи закон одржања топлоте.

Посматраћемо промену топлоте у металној шипци (дужине L). Шипку моделујемо као интервал $[0, L]$. Топлоту у шипци у одређеном тренутку ћемо означавати са $u : [0, L] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, где је просторна променљива $x \in [0, L]$, а временска променљива $t \in [0, \infty]$. Претпостављамо да је шипка изолована свугде сем можда на крајевима. Такође имамо почетну температуру шипке и то је записано као $u(x, 0), x \in [0, L]$.

Закон одржања топлоте каже да је брзина промене топлотне енергије у неком телу у времену t једнака збиру топлотног протока кроз границу тог тела и топлотне енергије генерисане у том телу у времену t. Овај закон ће бити кључан при извођењу једначине топлоте. При извођењу, посматраћемо врло мали интервал $[x, x + \Delta x]$ и на њему применити закон одржања топлоте.

Простијим језиком, закон нам каже да је брзина промене топлоте у врло малом интервалу једнака збиру топлоте која долази и одлази и топлоти генерисаној у самом интервалу. Ово нам даје следећу формулу :

$$\frac{\partial}{\partial t}(c(x)\rho(x)u(x,t)) = -\frac{\partial q}{\partial x}(x,t) + Q(x,t) \tag{2}$$

где је:

- $c(x)$ - специфична топлота проводника у тачки x
- $\rho(x)$ - густина проводника у тачки x
- $q(x,t)$ - проток топлоте
- $Q(x,t)$ - топлота генерисана у тачки x у тренутку t

Топлотни проток означава усмерену количину топлотне енергије која се креће у позитивном правцу дуж x осе у тачки x у времену t. Ако је количина топлоте која се креће у десно у тачки x у времену t позитивана - позитиван је и флукс; ако је негативна - негативан је и флукс.

Сада ћемо навести други кључан закон - Фуријеов закон провођења топлоте који каже : "Проток топлоте у телу је негативно пропорционалан разлици топлоте у суседном телу и посматраног тела подељено са запремином тела."

Наиме, Фурије је приметио три ствари када је изучавао проток топлоте:

- Проток је нула када је температура константна у телу.
- Топлотна енергија се креће од топлијих делова ка хладнијим деловима тела.
- Већи је проток топлоте када је већа топлотна разлика у телу.

Ове идеје записане математички изгледају овако :

$$q(x,t) = -\kappa\frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} \tag{3}$$

Када пустимо да дужина интервала Δx тежи нули, тада добијамо ово :

$$q(x,t) = -\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \tag{4}$$

Сада, када убацимо формулу (4) у формулу (3), добијамо следећу једначину :

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + Q(x,t) \tag{5}$$

Ако бисмо додатно претпоставили да су густина $c(x)$ и специфична топлота $\rho(x)$ константне дуж читаве шипке, тада би се формула поједноставила и постала :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\kappa}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\kappa}{c\rho}Q(x,t) \tag{6}$$

Решавање топлотне једначине

Проблем топлотне једначине је проблем налажења функције $u = u(x,t)$ која задовољава :

- једначину $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t) + Q(x,t)$ где су $u \in C^{2,1}(D \times \mathbb{R}_0^+)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$
- почетне услове $u(x,0) = f(x)$
- граничне услове облика $u(0,t) = \mu_1(t) \quad \wedge \quad u(L,t) = \mu_2(t) \;\; t \geq 0$

Први корак у налажењу решења једначине је анулирање граничних услова, тако што уводимо смену $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, где је $w(x,t) = \dfrac{L-x}{L}\mu_1(t) + \dfrac{x}{L}\mu_2(t)$

Тиме добијамо нову једначину :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \frac{L-x}{L}\mu_1^{'}(t) + \frac{x}{L}\mu_2^{'}(t) = \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + Q(x,t) \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - \frac{L-x}{L}\mu_1^{'}(t) - \frac{x}{L}\mu_2^{'}(t) + Q(x,t) \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + Q_1(x,t) \tag{9}$$

Са почетним условом

$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - \dfrac{L-x}{L}\mu_1(0) - \dfrac{x}{L}\mu_2(0) = f(x) - \dfrac{L-x}{L}f(0) - \dfrac{x}{L}f(L) =: f_1(x)$

и граничним условима $v(0,t) = v(L,t) = 0$

Сада хеуристички тражимо решење проблема, па после доказујемо да решење задовољава услове једначине. За почетак, разбићемо решење наше једначине v на $v = \alpha + \beta$, где је α решење хомогене пдј, а β партикуларно решење нехомогене пдј (9).

Хомогена јна гласи овако :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x,t) \tag{10}$$

Под претпоставком да се решење може записати у овом облику : $\alpha(x,t) = X(x)T(t)$, убацујемо у јну (10).

$$X(x)T^{'}(t) = X^{''}T(t)$$
$$\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = \frac{X^{''}}{X(x)} =: \mu$$

Решавање дј $\dfrac{X^{''}}{X(x)} = \mu$

Из почетних услова $\alpha(0,t) = \alpha(L,t) = 0$ знамо да мора важити $X(0) = X(L) = 0$ јер у супротном би $T(t) \equiv 0 \implies \alpha(x,t) \equiv 0, \alpha(x,0) = f_1(x) \neq 0$

$$\frac{X^{''}}{X(x)} = \mu$$
$$X^{''} - \mu X(x) = 0$$
$$\lambda^2 - \mu = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\mu}$$

- $\mu < 0$

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm i\sqrt{-\mu} \\ X(x) &= c1\cos(\sqrt{-\mu}x) + c2\sin(\sqrt{-\mu}x) \\ X(0) &= c1 = 0 \\ X(L) &= c2\sin(\sqrt{-\mu}L) = 0 \\ \implies \sqrt{-\mu}L &= k\pi, k \in \mathbb{N} \\ \implies \mu = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}, X_k(x) &= c_k \sin(k\pi x) \end{aligned}$$

- $\mu = 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= ax + b \\ X(0) = X(L) = 0 \implies X(x) \equiv 0 &\implies x21af \end{aligned}$$

- $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm\sqrt{\mu} \\ X(x) &= c1e^{-\mu x} + c2e^{\mu x} \\ X(0) = c1 + c2 = 0 &\implies c2 = -c1 \\ X(L) &= c1(e^{-\mu L} - e^{\mu L}) = 0 \\ \implies c1 = 0 = c2 &\implies x21af \end{aligned}$$

Решавање дј $\dfrac{T(t)^{'}}{T(t)} = \mu = -\dfrac{k^2\pi^2}{L^2}$

$$\begin{aligned} T(t)^{'} &= -\frac{k^2\pi^2}{L^2}T(t) \\ T(t)^{'} + \frac{k^2\pi^2}{L^2}T(t) &= 0 \\ \implies T_k(t) &= c_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \end{aligned}$$

Сада закључујемо, пошто наша решења морају да граде векторски простор, да решење има облик :

$$\alpha(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin(k\pi x) \tag{11}$$

α мора да задовољава почетни услов : $\alpha(x,0) = f_1(x)$

$$\alpha(x,0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \sin(k\pi x) = f_1(x) \tag{12}$$

То значи да морамо функцију f да развијемо у Фуријеов ред, да бисмо одредили коефицијенте $c_k = \dfrac{< f_1, \sin(k\pi x) >}{< \sin(k\pi x), \sin(k\pi x) >}$

Након што смо одредили α, сада одређујемо β које задовољава услове нехомогене јне са почетним условом једнаким нула. То радимо тако што претпоставимо да важи :

$$\beta(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} T_k(t) \sin(k\pi x) \tag{13}$$

и сада убацујемо у пдј $\frac{\partial \beta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(x,t) + Q_1(x,t)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} T_k^{'}(t)\sin(k\pi x) + \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\pi^2 T_k(t)\sin(k\pi x) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{< Q_1, \sin(k\pi x) >}{< \sin(k\pi x), \sin(k\pi x) >}\sin(k\pi x) = 0$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} [T_k^{'}(t) + k^2\pi^2 T_k(t) + \frac{< Q_1, \sin(k\pi x) >}{< \sin(k\pi x), \sin(k\pi x) >}]\sin(k\pi x) = 0$$

$$\implies T_k^{'}(t) + k^2\pi^2 T_k(t) + \frac{< Q_1, \sin(k\pi x) >}{< \sin(k\pi x), \sin(k\pi x) >} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Решавањем последње једначине се добијају T_k - ови, а самим тим и β. Враћањем уназад, добијамо наше v, а враћањем још једном уназад и наше u које смо и од почетка тражили.

Јединственост решења

Једнистевеност код оваквог облика топлотне једначине се доказује применом принципа максимума, који каже да се и максимум и минимум функције u достижу на ободу области.

Примене

Топлотна једначина је једна од фундаменталних парцијалних диференцијалних једначина и има широку примену у различитим научним и техничким областима. Њена употреба превазилази класичну термодинамику, укључујући анализу слика, финансије па чак и биологију. У наставку су истакнуте главне области примене:

1. Термодинамика и пренос топлоте

- **Пројектовање термичких система**: Користи се за анализу топлотног преноса у инжењерским системима, као што су расхладни уређаји, грејачи и изолациони материјали.
- **Геотермална енергија**: Моделовање топлотних токова у Земљиној кори за процену енергетског потенцијала.
- **Анализа пожара**: Проучавање ширења топлоте током пожара ради дизајнирања система за заштиту од пожара.

2. Финансијска математика

- **Блек-Шоулсов модел**: Диференцијална једначина Блек-Шоулсовог модела за одређивање цене опција трансформише се у топлотну једначину, што омогућава једноставна решења.
- **Модели ризика**: Аналогија између дифузије топлоте и преноса ризика користи се за симулирање тржишних кретања.

3. Анализа слика и обрада сигнала

- **Филтрирање и сегментација**: Топлотна једначина је основа Перона-Маликовог модела за дифузију у обради слика, што омогућава уклањање шума уз задржавање ивица.
- **Скала-простор**: Користи се у машинском учењу и рачунарској визији за креирање хијерархије детаља у слици.

4. Биологија и медицина

- **Физиолошки модели**: Моделовање преноса топлоте у људском телу, нпр. током хипертермичких терапија или у анализи циркулације крви.
- **Епидемиологија**: Анализа ширења болести у популацији коришћењем аналогије са топлотном дифузијом.

5. Геофизика и климатологија

- **Климатске промене**: Моделовање преноса топлоте између океана, атмосфере и Земљине површине.
- **Геолошке студије**: Проучавање ширења топлоте у Земљиној кори и вулканским регионима.

6. Математичка теорија графова

- **Графичка анализа**: Топлотна једначина се користи у анализи мрежа кроз методе графичког Лапласијана за кластеризацију и предикцију.
- **Машинско учење**: У теорији скале-простора за анализу података у облику графова или мрежа.

7. Хемијски процеси

- **Кинетика реакција**: Моделирање ширења топлоте у реакторима где хемијске реакције генеришу или апсорбују топлоту.
- **Процеси сушења**: Анализа топлотног преноса током испаравања течности из материјала.

8. Астрономија и астрофизика

- **Унутрашњост звезда**: Моделовање преноса топлоте унутар звезда и планета.
- **Термална еволуција**: Анализа хлађења небеских тела током времена.

Историја

Историјски развој топлотне једначине представља значајан део еволуције математике и физике, посебно у области термодинамике и преноса топлоте. Кључни доприноси у овом развоју потичу од неколико истакнутих научника.

Француски математичар и физичар Жозеф Фурије је 1822. године објавио дело "Théorie analytique de la chaleur"(Аналитичка теорија топлоте), у којем је формулисао основне принципе преноса топлоте и увео топлотну једначину. Фурије је развио методе за анализу топлотних процеса, укључујући Фуријерове редове, које омогућавају представљање функција као збир тригонометријских функција. Овај приступ је био револуционаран и поставио је темеље за даљи развој математичке физике.

Немачки математичар Карл Густав Јакоб Јакоби је 1836. године допринео развоју теорије парцијалних диференцијалних једначина, укључујући и топлотну једначину. Његови радови су помогли у разумевању решења ових једначина и њиховој примени у физици.

Шкотски физичар Вилијам Томсон, познат као Лорд Келвин, је средином 19. века радио на термодинамици и преносу топлоте. Његови радови су укључивали анализу топлотних процеса и допринели бољем разумевању топлотне једначине у контексту термодинамичких система.

Немачки физичар Рудолф Клаузијус је 1850-их година формулисао концепт ентропије и допринео развоју другог закона термодинамике. Његови радови су били кључни за разумевање преноса топлоте и примену топлотне једначине у термодинамичким анализама.

Аустријски физичар Лудвиг Болцман је крајем 19. века развио статистичку механику и повезао микроскопске особине честица са макроскопским својствима система. Његови радови су омогућили дубље разумевање топлотне једначине на атомском нивоу и њену примену у различитим областима физике.

Ови научници су, сваки на свој начин, допринели развоју и примени топлотне једначине, која је данас основни алат у анализи преноса топлоте и термодинамичких процеса.

Литература

[1] Partial Diffrential Equations - An Introduction by Walter A. Strauss

[2] Partial Differential Equations by Lawrence C. Evans

[3] https://www.youtube.com/watch?v=9d8PwnKVA-U

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation