

Методе Математичког Програмирања

Проблем одређивања р-хабова са појединачном алокацијом и рутирањем

5. Задатак

Студент:

Никола Јанкуловић, 76/19

Професор:

Др Зорица Станимировић



Математички факултет

Београд

Децембар 2024.

1 Опис проблема

Проблем "Single allocation p-hub median location and routing problem with simultaneous pick-up and delivery" ћемо означавати скраћено са pHMLRP-SPD. Циљ pHMLRP-SPD је да се одреде локације предодређеног броја хабова, тако да остали чворови буду центри потражње и дизајнирање рута возила која ће посетити све центре потражње уз истовремено преузимање и доставу обима потражње на такав начин да се минимизује укупни транспортни трошак.

Проблеми локације хабова и рутирања решавају се на неусмереном графу са скупом чворова потражње и хабовима N . Сваки пар чворова повезан је путем $i - j$ са ценом транспорта (удаљеност, време или слична мера). Рута означава пут којим путује возило које почиње и завршава пут у једном од хабова, а у овом путовању, свако возило посећује најмање један чвор који није хаб. Предпостављамо да је дата ограничена флота возила V која ће путовати по рутама. Ова возила су такође способна да посете више станица на свакој рути. Свака рута почиње од хаба где се празно возило иницијално пуни и наставља кроз не-хаб чворове док не достигне почетни хаб након формирања обиласка. Претпостављамо да је цена транспорта између хабова мања него међу осталим чворовима. Ово може бити реализовано камионом који нема ограничења у капацитету. Ова бржа возила нису дозвољена да праве било каква додатна заустављања на својим рутама. Такође, нема ограничења капацитета за хабове и возила.

2 Математичка формулација проблема

Параметри модела су дефинисани као :

- w_{ij} - Вредност потражње која треба бити достављена из чвора i у чвор j .
- d_{ij} - Цена транспорта по јединици из чвора i у чвор j .
- O_i - Укупна количина протока која потиче из чвора i .
- p - број хабова
- q - број возила додељен сваком хабу
- α - Коефицијент смањења цене транспорта између два хаба.
- N - скуп свих чворова, укључујући и хабове
- V - скуп возила

Променљиве модела су дефинисане као :

- f_{jk}^i - количина протока који потиче из чвора i , пролазећи кроз хабове j и k
- y_{jk}^i - количина протока који потиче из чвора i и путује од чвора j до чвора k , где барем један од чворова мора потраживати проток а други може бити хаб

- h_i - бинарна променљива која узима вредност 1 ако је чвор i хаб, а ако није онда узима 0
- z_i^v : бинарна променљива која узима вредност 1 ако је возило v додељено хабу i
- x_{ij}^v : бинарна променљива која узима вредност 1 ако возило v пролази кроз чворове i и j

Математичка формулација проблема гласи :

$$\min \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} d_{jk} y_{jk}^i + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \alpha d_{jk} f_{jk}^i \right]$$

При ограничењима :

$$O_i = \sum_j W_{ij} \quad , \forall i \in N \quad (1)$$

$$\sum_{k \neq i \in N} (y_{ik}^i + f_{ik}^i) = O_i \quad , \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} (y_{kj}^i + f_{kj}^i) = \sum_{k \in N} (y_{jk}^i + f_{jk}^i) + W_{ij} \quad , \forall i, j \neq i \in N \quad (3)$$

$$y_{kj}^i \leq O_i \sum_{v \in V} x_{kj}^v \quad , \forall i, k \neq j, j \in N \quad (4)$$

$$\sum_{j \neq i \in N} x_{ij}^v - \sum_{j \neq i \in N} x_{ji}^v = 0 \quad , \forall i \in N, v \in V \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} h_i = p \quad (6)$$

$$\sum_{j \in N} (f_{kj}^i + f_{jk}^i) = O_i h_k \quad , \forall i, k \in N \quad (7)$$

$$z_i^v \leq \sum_{j \neq i \in N} x_{ji}^v \quad , \forall i \in N, v \in V \quad (8)$$

$$\sum_{v \in V} z_i^v = q h_i \quad , \forall i \in N \quad (9)$$

$$\sum_{i \in N} z_i^v = 1 \quad , \forall v \in V \quad (10)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{j \neq i \in N} x_{ij}^v = 1 + (q - 1) h_i \quad , \forall i \in N \quad (11)$$

$$z_i^v \in \{0, 1\} \quad , \forall i \in N, v \in V \quad (12)$$

$$h_i \in \{0, 1\} \quad , \forall i \in N \quad (13)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad , \forall i, j \in N, v \in V \quad (14)$$

$$y_{kj}^i, f_{kj}^i \geq 0 \quad , \forall i, j, k \in N \quad (15)$$

Функција циља минимизује укупне транспортне трошкове на мрежи. Ови трошкови укључују збир два дела: први део рачуна транспортне трошкове за руте возила, а други део рачуна трошкове транспорта између хабова.

Ограничење (2) осигурава да је укупан проток из било ког чвора i једнак снабдевању тог чвора i . Ограничење (3) обезбеђује очување протока који потиче из i -ог чвора ка било ком другом чвору j са потражњом W_{ij} . Према ограничењу (4), проток i између чворова k и j може се десити само ако постоји возило које путује између ова два чвора. Ограничење (5) гарантује да сваки чвор има исто толико возила која долазе као и оних која одлазе. Ограничење (6) захтева да буде изабрано тачно p хабова. Ограничење (7) спречава проток између хабова да пролази кроз чворове који нису хабови. Ако је чвор i додељен возилу v , онда се возило v креће између чвора i и било ког другог чвора j . Овај услов намеће ограничење (8). Ако је чвор i хаб, укупан број додељених возила за овај хаб је q , што је обезбеђено ограничењем (9). Ограничење (10) осигурава да је сваки чвор додељен само једном возилу. Ограничење (11) каже да, ако је чвор i хаб, број рута које напуштају чвор i је једнак броју додељених возила том хабу. Ограничења (12)–(14) форсирају променљиве z_i^v, h_i, x_{ij}^v да буду бинарне. Ограничење (15) ограничава y_{kj}^i и f_{kj}^i протоке да буду ненегативни.

3 Инстанце

Инстанце за овај модел су укључивале параметре $\alpha, p, q, W_{ij}, d_{i,j}$. Параметре p и q сам ручно варирао, параметар α сам ставио да буде 0.8, а параметре W_{ij} и $d_{i,j}$ сам читао из фајлова D_10.txt, D_15.txt, W_10.txt и W_15.txt. Подаци у овим фајловима су извучени из оригиналног фајла са инстанцама, тако што је узето првих 100 или 225 података.

W_15.txt :

0. 6469. 7629. 20036. 4690. 6194. 11688. 2243. 8857. 7248. 3559. 9221. 10099. 22866. 3388. 9986. 46618. 11639. 1380. 5261. 5985. 6731. 2704. 12250. 16132. 6469. 0. 12999. 13692. 3322. 5576. 3878. 3202. 6699. 4198. 2454. 7975. 1186. 7443. 1162. 5105. 24817. 6532. 806. 8184. 3896. 7333. 3719. 2015. 565. 7629. 12999. 0. 35135. 5956. 14121. 5951. 5768. 16578. 4242. 3365. 22254. 1841. 23665. 6517. 3541. 205088. 37669. 2885. 13200. 7116. 17165. 4284. 8085. 51895. 20036. 13692. 35135. 0. 19094. 35119. 21423. 27342. 51341. 15826. 28537. 65387. 12980. 44097. 51525. 14354. 172895. 37305. 15418. 26221. 42303. 35303. 13618. 17580. 40708. 4690. 3322. 5956. 19094. 0. 7284. 3102. 1562. 7180. 1917. 2253. 5951. 1890. 7097. 2009. 1340. 25303. 6031. 1041. 4128. 5452. 3344. 1067. 4608. 7050. 6194. 5576. 14121. 35119. 7284. 0. 5023. 3512. 10419. 3543. 2752. 14412. 2043. 15642. 5014. 2016. 62034. 15385. 2957. 5035. 7482. 6758. 2191. 6599. 14181. 11688. 3878. 5951. 21423. 3102. 5023. 0. 11557. 6479. 34261. 10134. 27350. 6929. 7961. 4678. 13511. 29801. 7549. 5550. 3089. 9958. 14110. 4911. 2722. 10802. 2243. 3202. 5768. 27342. 1562. 3512. 11557. 0. 5615. 7095. 10753. 30362. 1783. 3437. 8897. 2509. 23273. 5160. 8750. 2583. 7288. 17481. 7930. 1278. 8447. 8857. 6699. 16578. 51341. 7180. 10419. 6479. 5615. 0. 4448. 5076. 22463. 4783. 24609. 9969. 4224. 79945. 20001. 4291. 10604. 11925. 13091. 4172. 12891. 19500.

D_15.txt :

0 576.9631 946.4954 597.5972 373.8127 559.7673 709.0215 1208.328 603.6477 695.208
680.709 1936.572 332.4644 592.5679 908.7715 426.1877 756.1987 672.5906 1590.224 527.3008
483.4673 2140.978 2184.402 408.1648 540.7388 576.9631 0 369.5327 613.0386 429.1079
312.8831 1196.489 1502.14 405.8975 1241.961 960.3459 2318.076 786.5959 949.5669 938.7461
999.5005 179.2426 96.2744 1999.584 210.7656 736.3755 2456.263 2339.509 844.1663 36.4947
946.4954 369.5327 0 858.3308 749.6018 556.0706 1541.273 1764.791 621.3306 1603.165
1250.962 2600.078 1137.335 1266.851 1124.778 1368.267 190.3157 274.3105 2299.429 494.2224
1043.484 2703.402 2503.828 1188.549 405.7886 597.5972 613.0386 858.3308 0 255.0303
311.3071 790.1213 907.4331 237.0703 932.2173 406.3386 1741.873 485.5564 1186.858 345.8738
830.3635 720.4687 675.3437 1447.104 403.8657 255.8823 1853.617 1733.132 1005.761 592.0278
373.8127 429.1079 749.6018 255.0303 0 225.8954 794.1726 1080.374 238.944 879.5647
533.156 1889.528 402.3291 947.3188 598.541 700.4368 578.3286 512.3965 1570.725 255.6551
307.3289 2036.128 1967.256 775.239 399.2253 559.7673 312.8831 556.0706 311.3071 225.8954
0 1009.689 1216.868 94.2588 1104.574 694.9153 2047.122 627.115 1084.5 626.1548 922.3181
409.3542 365.6853 1743.432 104.6478 491.1125 2164.855 2027.319 933.196 298.8486 709.0215
1196.489 1541.273 790.1213 794.1726 1009.689 0 663.8762 982.7378 221.422 447.8044
1249.763 411.1133 1097.608 851.8228 423.7053 1362.874 1288.966 895.0908 1049.266 537.6206
1493.843 1686.675 912.2104 1161.676 1208.328 1502.14 1764.791 907.4331 1080.374 1216.868
663.8762 0 1143.791 874.5181 551.6299 841.624 880.0728 1714.651 694.0088 1066.563
1625.87 1574.822 593.4216 1301.511 780.9512 955.802 1024.566 1519.174 1475.479 603.6477
405.8975 621.3306 237.0703 238.944 94.2588 982.7378 1143.791 0 1094.906 636.9045 1978.943
620.488 1151.868 535.0244 936.2502 489.5645 453.2583 1682.489 198.9058 450.2585 2086.845
1936.304 992.3379 392.9045

4 Резултати

Модел, операције учитавања истанци и исписивање резултата су написани у програмском језику Линго. Истанце су решавање помоћу LINGO 21.0.33 решавача. Резултати приказани у табели су добијени на компјутеру са Intel Core i5-8250U 1.6 GHz и 8 GB RAM меморије. Време извршавања је у већини случајева ограничено на 2 сата и у табелама је време приказано у секундама.

| Бр. | n | p | q | Опт. реш. | Време (с) | Горња гр. | Доња гр. | Пр. Рел. Гр. |
|-----|----|---|---|---------------|-----------|----------------------|---------------|--------------|
| 1. | 10 | 1 | 1 | 0.2209915E+10 | 489 | | | |
| 2. | 10 | 1 | 2 | 0.1803639E+10 | 8140 | | | |
| 3. | 10 | 1 | 3 | 0.1697393E+10 | 112 | | | |
| 4. | 10 | 1 | 4 | | 7200 | 0.1732211E+10 | 0.1646065E+10 | 4.97 % |
| 5. | 10 | 1 | 5 | | 7200 | 0.1911565E+10 | 0.1437149E+10 | 24.81 % |
| 6. | 10 | 2 | 1 | 0.1572020E+10 | 871 | | | |
| 7. | 10 | 2 | 2 | 0.1566373E+10 | 2034 | | | |
| 8. | 10 | 2 | 3 | 0.1623230E+10 | 439 | | | |
| 9. | 10 | 2 | 4 | | 7200 | 0.2148692E+10 | 0.1841539E+10 | 14.29 % |
| 10. | 10 | 2 | 5 | — | 7200 | | | |
| 11. | 10 | 3 | 1 | 0.1539298E+10 | 476 | | | |
| 12. | 10 | 3 | 2 | 0.1873053E+10 | 33588 | | | |
| 13. | 10 | 3 | 3 | — | 7200 | | 0.183982E+10 | |
| 14. | 10 | 4 | 1 | 0.1737921E+10 | 11150 | | | |
| 15. | 10 | 4 | 2 | — | 7200 | | 0.144825E+10 | |
| 16. | 10 | 5 | 1 | | 7200 | 0.1718456E+10 | 0.1576409E+10 | 8.26 % |
| 17. | 10 | 5 | 2 | — | 57600 | | 0.146081E+10 | |
| 18. | 15 | 1 | 1 | 0.6814134E+10 | 292 | | | |
| 19. | 15 | 2 | 1 | | 7200 | 0.7100402E+10 | 0.1809698E+10 | 74.51 % |
| 20. | 15 | 2 | 2 | | 7200 | 0.4897015E+10 | 0.1592425E+10 | 67.48 % |
| 21. | 15 | 3 | 1 | | 7200 | 0.6321283E+10 | 0.1773207E+10 | 71.94 % |
| 22. | 15 | 4 | 1 | | 53335 | 0.4564157E+10 | 0.1791448E+10 | 60.74 % |

5 Анализа резултата

Како се из резултата може приметити, са порастом броја возила, тако је расло и време потребно Линго решавачу да нађе минимум, а било је и случајева када га уопште није ни нашао. Из табеле се такође да приметити, да је са порастом возила порасла вредност минимума циљне функције.

Литература

- [1] Lindo Systems inc., *LINGO-Manual*, 2024.
- [2] Single allocation p-hub median location and routing problem with simultaneous pick-up and delivery, Zuhail Kartal, Servet Hasgul, Andreas T. Ernst, 2017
- [3] <https://www.lindo.com/index.php/ls-downloads/try-lingo>