

Краткорочна Фуријева Трансформација: Теорија и Примене

Никола Јанкуловић

17. decembar 2023.

Sažetak

Краткорочна Фуријева Трансформација (КФТ) представља моћан алат за анализу временски променљивих сигнала. Овај есеј истражује теоријске основе КФТ-а, његове примене и значај у различитим областима обраде сигнала.

1 Увод

Са свакодневним напретком у технологији и различитим областима науке, анализа сигнала игра кључну улогу. Фуријева Трансформација (ФТ) представља ефикасан начин за претварање сигнала из временског у фреквенцијски домен. Међутим, за нестационарне сигнале, где се фреквенција сигнала мења током времена, ФТ посустаје. Управо због тога је настала Краткорочна Фуријева Трансформација.

2 Позадина

Фуријева Трансформација је математички концепт који се користи за претварање сигнала из временског у фреквенцијски домен. Она представља интеграл од производа сигнала и комплексних експонената. Међутим, ФТ није погодна за анализу сигнала чија фреквенција менја током времена. КФТ је развијена како би се суочила са овим ограничењем.

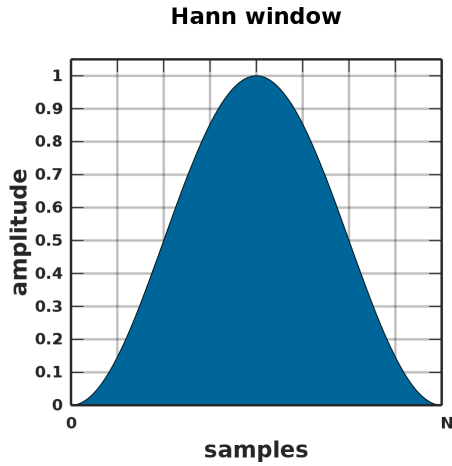
3 Теорија Краткорочне Фуријеве Трансформације

КФТ представља допуну ФТ-а тако што уводи прозорске функције. За разлику од ФТ-а која анализира цео сигнал, КФТ ради анализу малих делова сигнала, користећи прозорске функције за локализацију у времену. Математички, КФТ за сигнал $x(t)$ у односу на време t и фреквенцију f је дефинисана као:

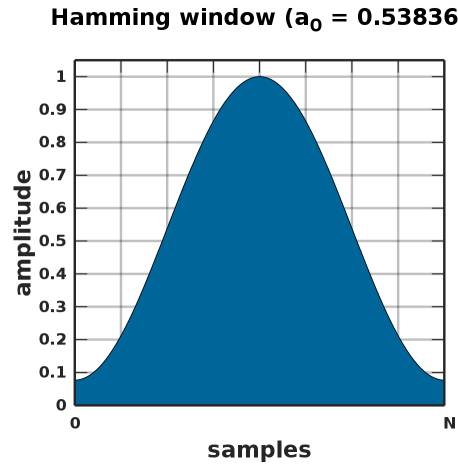
$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

где је $w(\tau - t)$ прозорска функција центрирана у времену t .

Избор прозорске функције је од кључног значаја у примени КФТ-а. Различите прозорске функције имају различите ефекте на резултате трансформације. Хамингов, Ханов, и Гаусов прозор су само неки од примера прозорских функција које се користе.



(a) Ханов прозор.



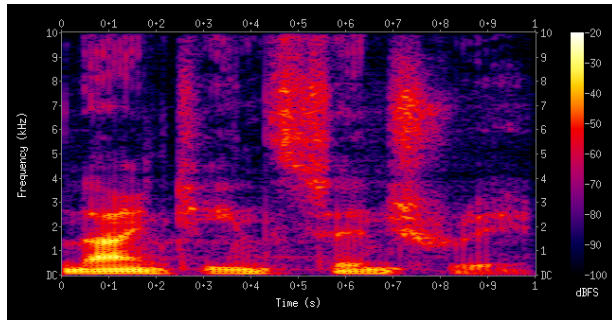
(b) Хамингов прозор.

У применама се не користи непрекидна, већ дискретна варијанта КФТ-а :

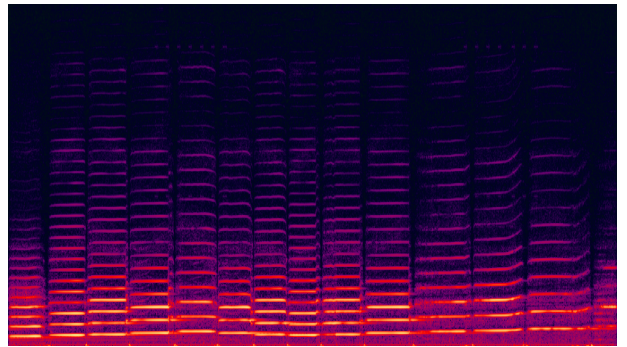
$$\text{STFT}\{x[n]\}(m, \omega) \equiv X(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n-m]e^{-i\omega n}$$

4 Спектрограм

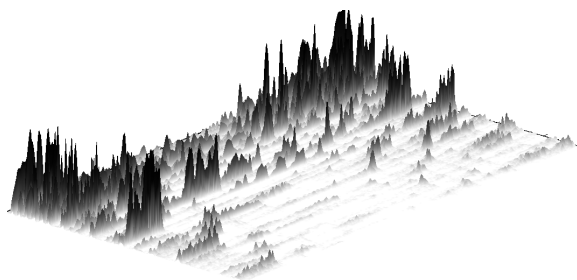
Спектрограм КФТ-а нам нам олакшава да визуелно видимо шта се дешава у нашем сигналу. Свака колона у спектрограму одговара одређеном временском прозору, док сваки ред представља различиту фреквенцијску компоненту. Јачина боје на спектрограму представља величину фреквенцијских компоненти. Светлије области указују на веће величине, откривајући доминантне фреквенције присутне у сигналу у одређеним тренуцима времена.



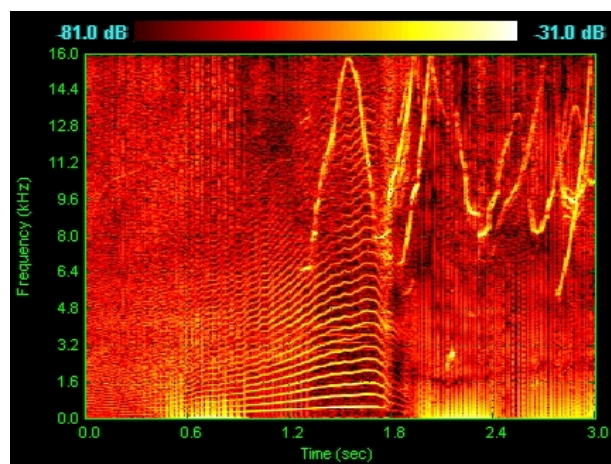
(a) Спектрограм изговорених речи.



(b) Спектрограм виолине.



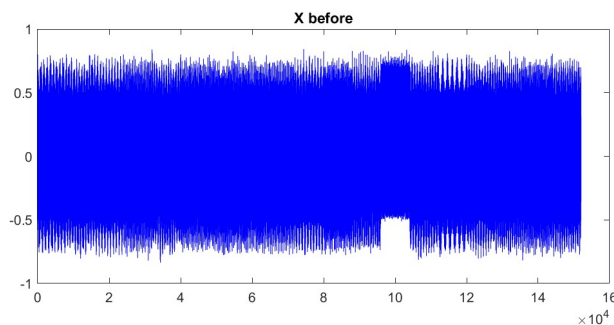
(a) Спектрограм исечка песме.



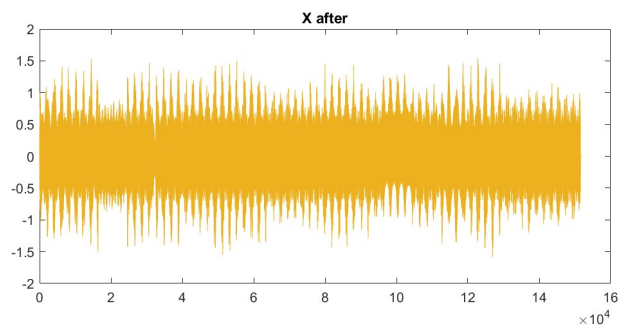
(b) Спектрограм звукова делфина.

5 Брисање шума из сигнала

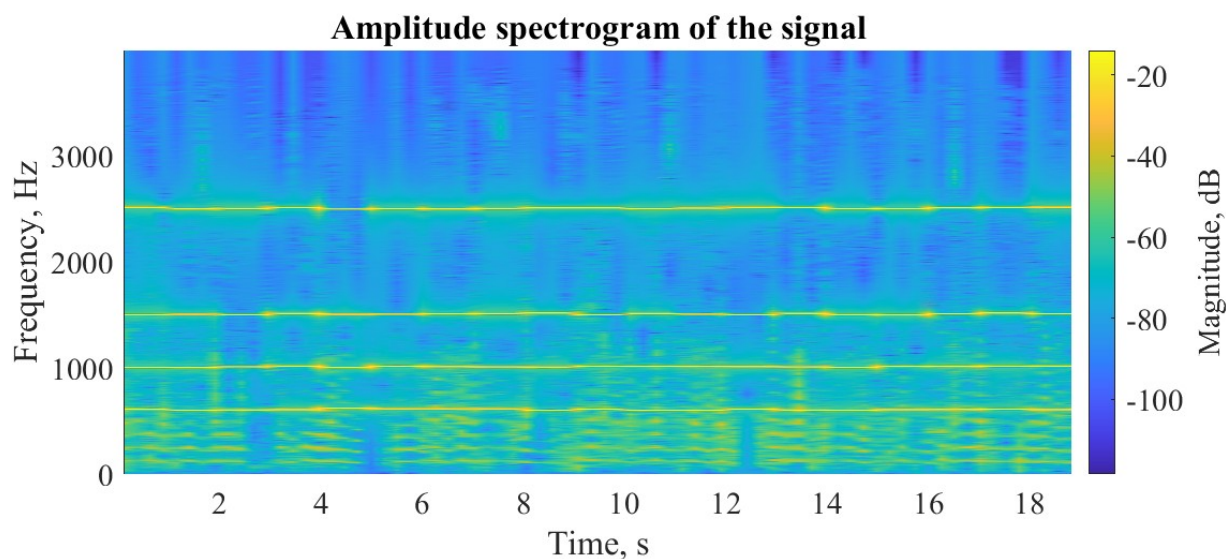
Примењујући дискретну верзију Краткотрајне Фуријеове Трансформације, добијамо матрицу спектра сигнала са оптималном ширином прозора. Изабцивајући из матрице све фреквенције које су испод неке већ задате амплитуде (30 децибела) ми добијамо нову матрицу спектра сигнала. Реконструкцијом сигнала из новодобијене матрице, ми добијамо нов сигнал без почетног шума. Пошто оригиналан сигнал није имао фреквенције у себи које су трајале краће него сам сигнал, поставља се питање неопходности коришћења КФТ-а уместо обичне Фуријеове трансформације.



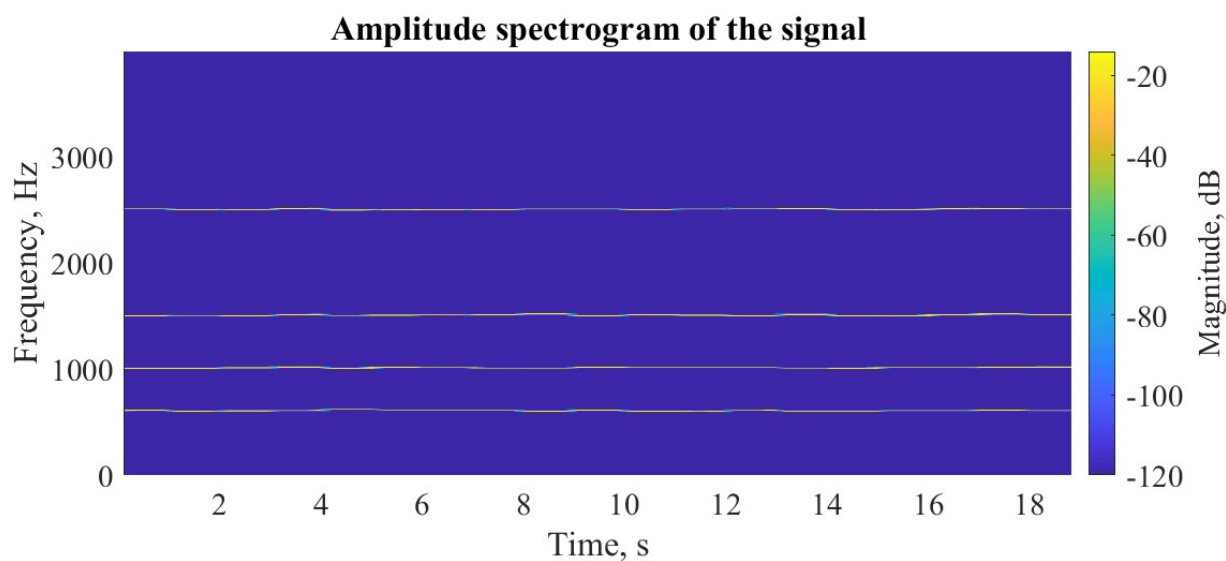
(a) Оригиналан сигнал са шумом.



(b) Сигнал после избацивања шума.



Slika 5: Спектрограм оригиналног сигнала.



Slika 6: Спектрограм сигнала без шума.

6 Практичне Примене КФТ-а

КФТ има бројне примене у различитим областима.

У области обраде аудио сигнала, КФТ налази широку примену у задацима као што су аудио компресија, анализа музике и обрада говора. Омогућава карактеризацију фреквенцијског садржаја аудио сигнала током времена, што је битно у задацима као што су класификација жанра музике, препознавање инструмената и препознавање говора.

КФТ има кључну улогу у областима обраде говора, где је разумевање фреквенционих варијација током кратких временских интервала суштина. Користи се у задацима као што су идентификација говорника, препознавање емоција из говора и унапређење технологије говора и телекомуникација.

Сонар и радарски системи користе КФТ за анализу еха и анализирање сигнала током времена. Ово омогућава откривање и идентификацију објеката или препрека, чинећи КФТ кључним компонентама у задацима откривања, локализације и праћења циљева у морским и аерокосмичким окружењима.

У механичком и структуралном инжењерству, КФТ се користи за анализу вибрација у машинама и структурама. Посматрањем временско-фреквентних карактеристика вибрационих сигнала, инжењери могу да дијагностикују дефекте, прате исправност опреме и предвиђају потенцијално отказивање, што доприноси стратегијама превентивног одржавања.

Биомедицинске примене користе КФТ за анализу физиолошких сигнала као што су електрокардиограми (ЕКГ) и електроенцефалограми (ЕЕГ). Помаже у идентификацији релевантних фреквенцијских компоненти у тим сигнаlima, помажући у дијагностици срчаних аномалија, неуролошких поремећаја и образаца спавања.

У области обраде слика, КФТ се примењује за анализу текстура и препознавање узорака. Применом КФТ на податке о сликама могуће је захватити и анализирати фреквенцијски садржај различитих текстура у слици, олакшавајући задатке као што су класификација и сегментација слика.

Сигнали из околине, као што су сеизмички подаци или акустички сигнали у еколошким истраживањима, могу бити ефикасно анализирани коришћењем КФТ. Омогућава научницима да прате временске варијације у фреквенцијском садржају, помажући у откривању специфичних догађаја као што су земљотреси.

7 Изазови и Ограничења

Иако је КФТ моћан алат, постоје изазови и ограничења. Један од изазова је равнотежа између временске и фреквенцијске резолуције. Као последицу Хајзенберговог принципа неодређености имамо проблем да сигнал локализован у времену има широки спектар фреквенција у себи и обрнуто, уски спектар фреквенција има слабу лакоализацију у времену. Просто речено, уски прозор обезбеђује високу фреквенцијску резолуцију, али лошу временску резолуцију, и обрнуто. Овај проблем захтева да тражимо оптималну ширину прозора за наше потребе, а чак и тада можда нећемо имати задовољавајућу слику о краткотрајним и дуготрајним фреквенцијама нашег сигнала. Тада бисмо

прешли на Таласну Трансформацију.

8 Поређење с Другим Техникама Анализе Времена и Фреквенције

У поређењу с другим техникама анализе времена и фреквенције као што су Таласна Трансформација, КФТ има предности у једноставности и рачунарској ефикасности. Међутим, због горепоменутог проблема, КФТ може бити лош алат за анализирање сигнала са променљивим карактеристикама које садрже разне фреквенције које трају у разном периоду.

9 Закључак

Краткорочна Фуријева Трансформација представља вредан алат за анализу временски променљивих сигнала. Њене примене у различитим областима показују њену свестраност. Упркос изазовима, разумевање мана КФТ-а нам омогућава да донесемо добру одлуку при избору алата за анализирање сигнала.

Literatura

- [1] Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (1999). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall.
- [2] [ilkerbayram.github](#).