Гаус Бонеова Теорема

Никола Јанкуловић

Математички факултет

17. јун 2022.

Садржај

- Гаус Бонеова теорема је врло елегантна теорема из диференцијалне геометрије.

- Гаус Бонеова теорема је врло елегантна теорема из диференцијалне геометрије.
- Под Гаус Бонеовом теоремом се подразумевају две варијанте теореме, Локална и Глобална верзија.

- Гаус Бонеова теорема је врло елегантна теорема из диференцијалне геометрије.
- Под Гаус Бонеовом теоремом се подразумевају две варијанте теореме, Локална и Глобална верзија.
- Локална верзија нам даје везу између различитих појмова из теорије површи, као што су Гаусова, геодезијска кривина и збир углова многоугла.

- Гаус Бонеова теорема је врло елегантна теорема из диференцијалне геометрије.
- Под Гаус Бонеовом теоремом се подразумевају две варијанте теореме, Локална и Глобална верзија.
- Локална верзија нам даје везу између различитих појмова из теорије површи, као што су Гаусова, геодезијска кривина и збир углова многоугла.
- Глобална верзија нам даје везу између укупне Гаусове кривине и тополошке карактеристике те површи.

- Гаус[1] је први доказао теорему за геодезијски троугао 1827 год.

[1]Гаус - Johann Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855
[2]Боне - Pierre Ossian Bonnet 1819 - 1892
[3]Бине - Jacques Philippe Marie Binet 1786 - 1856

- Гаус[1] је први доказао теорему за геодезијски троугао 1827 год.
- Локалну верзију теореме су доказали Пјер Боне[2] и Жак Бине[3] 1848.

[1] Гаус - Johann Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855
[2] Боне - Pierre Ossian Bonnet 1819 - 1892
[3] Бине - Jacques Philippe Marie Binet 1786 - 1856

- Гаус[1] је први доказао теорему за геодезијски троугао 1827 год.
- Локалну верзију теореме су доказали Пјер Боне[2] и Жак Бине[3] 1848.
- Глобалну верзију је доказао Валтер фон Дик

[1] Гаус - Johann Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855
[2] Боне - Pierre Ossian Bonnet 1819 - 1892
[3] Бине - Jacques Philippe Marie Binet 1786 - 1856

Садржај

Потребни састојци

- $r : U \to \mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ елементарна површ, $r(U) = \mathrm{M}$

Потребни састојци

- $r : U \to \mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ елементарна површ, $r(U) = \mathrm{M}$
- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ део-по-део диференцијабилна проста затворена крива, која није диференцијабилна у n различитих тачака, таква да је $\partial \mathrm{M} = \alpha([a, b])$.

Потребни састојци

- $r : U \to \mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ елементарна површ, $r(U) = \mathrm{M}$
- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ део-по-део диференцијабилна проста затворена крива, која није диференцијабилна у n различитих тачака, таква да је $\partial \mathrm{M} = \alpha([a, b])$.
- $\mathrm{K} : U \to \mathbb{R}$ Гаусова кривина те површи

Потребни састојци

- $r : U \to \mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ елементарна површ, $r(U) = \mathrm{M}$
- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ део-по-део диференцијабилна проста затворена крива, која није диференцијабилна у n различитих тачака, таква да је $\partial \mathrm{M} = \alpha([a, b])$.
- $\mathrm{K} : U \to \mathbb{R}$ Гаусова кривина те површи
- $\kappa_g : [a, b] \to \mathbb{R}$ геодезијска кривина од α

Потребни састојци

- $r : U \to \mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ елементарна површ, $r(U) = \mathrm{M}$
- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ део-по-део диференцијабилна проста затворена крива, која није диференцијабилна у n различитих тачака, таква да је $\partial\mathrm{M} = \alpha([a, b])$.
- $\mathrm{K} : U \to \mathbb{R}$ Гаусова кривина те површи
- $\kappa_g : [a, b] \to \mathbb{R}$ геодезијска кривина од α
- $\theta_i \in R^+, \ i = 1, \ldots, n$ су унутрашњи углови у тачкама прекида диференцијабилности криве α

Теорема (Локални Гаус Боне)

$$\iint\limits_{\mathrm{M}} \mathrm{KdA} + \int\limits_{\alpha} \kappa_g \mathrm{ds} = (2 - n)\pi + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

Примери

Сада ћемо дати примену теореме у пар специфичних случајева:

1. троугао у равни
2. сферни троугао
3. хиперболички троугао

Троугао у равни

$$\mathrm{K} \equiv 0, \kappa_g \equiv 0, n = 3$$

$$\iint\limits_{\Sigma} 0 \ \mathrm{dA} + \int\limits_{\alpha} 0 \ \mathrm{ds} = -\pi + \sum_{i=1}^{3} \theta_i$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Сферни троугао

$$\mathrm{K} \equiv 1, \kappa_g \equiv 0, n = 3$$

$$\iint_{\Sigma} 1 \ \mathrm{dA} + \int_{\alpha} 0 \ \mathrm{ds} = -\pi + \sum_{i=1}^{3} \theta_i$$

$$P(\triangle ABC) + \pi = \alpha + \beta + \gamma$$

Хиперболички троугао

$$\mathrm{K} \equiv -1, \kappa_g \equiv 0, n = 3$$

$$\iint\limits_{\Sigma} -1 \ \mathrm{dA} + \int\limits_{\alpha} 0 \ \mathrm{ds} = -\pi + \sum_{i=1}^{3} \theta_i$$

$$P(\triangle ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Садржај

Ојлерова карактеристична функција

Дефиниција

Криволинијски многоугао на површи M *је унија скупа од n тачака*$(A_1, ..A_n)$ *које се налазе на површи, скупа диференцијабилних простих кривих* $\alpha_1, ...\alpha_n$ *таквих да* α_i *спаја тачке* A_i *и* A_{i+1} $(\alpha_n$ *спаја тачке* A_n *и* $A_1)$ *и које припадају површи* M *и површ ограничена овим кривама.*

Дефиниција

Подела површи M *унија криволинијских многоуглова на површи* M *тако да важи:*

- *Свака тачка површи се налази у бар једном многоуглу*
- *Пресек два многоугла може бити највише скуп заједничких тачака и кривих.*

Дефиниција

Са V, E, F *означимо број чворова, кривих и лица неке поделе површи. Ојлерова карактеристична функција гласи:*

$$\chi_{\mathrm{M}} = V - E + F$$

Теорема

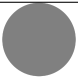
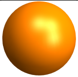
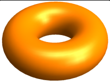
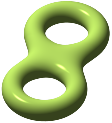
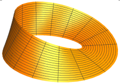
χ_{M} *је инваријантна на поделу површи.*

Теорема

χ_{M} *је инваријантна на хомеоморфизам површи.*

Теорема

Нека је g генус торуса T. Онда важи: $\chi_{\mathrm{T}} = 2 - 2g$

Назив	Слика	χ_M
Диск		1
Сфера		2
Торус		0
Дупли Торус		-2
Мебиусова трака		0

Задржавајући претходне ознаке, променићемо једино услове за површ.

Теорема (Глобални Гаус Боне)

Нека је M *компактна површ, онда важи:*

$$\iint_{\mathrm{M}} \mathrm{K}\ \mathrm{dA} + \int_{\partial \mathrm{M}} \kappa_g\ \mathrm{ds} + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i) = 2\pi\chi_{\mathrm{M}}$$

Уколико је M затворена $(\partial \mathrm{M} = \emptyset)$ компактна површ, формула гласи овако:

Уколико је M затворена $(\partial \mathrm{M} = \emptyset)$ компактна површ, формула гласи овако:

$$\iint\limits_{\mathrm{M}} \mathrm{K} \ \mathrm{dA} = 2\pi\chi_{\mathrm{M}}$$

Уколико је M затворена ($\partial M = \emptyset$) компактна површ, формула гласи овако:

$$\iint\limits_{M} K \, dA = 2\pi\chi_{M}$$

Ово је врло интересантно, јер нам говори да је укупна Гаусова кривина неке затворене површи инваријантна на хомеоморфизме.

Садржај

Уопштења

- Черн[4] - Гаус - Боне
- Риман[5] - Рох[6]
- Атијах[7]-Сингерова[8] теорема о индексу
- Кон-Восенова[9] неједнакост

[4] Черн - Shiing-Shen Chern 1911 - 2004
[5] Риман - Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826 - 1866
[6] Рох - Gustav Adolph Roch 1839 - 1866
[7] Атијах - Sir Michael Francis Atiyah 1929 - 2019
[8] Сингер - Isadore Manuel Singer 1924 - 2021
[9] Кон-Восен - Stefan Cohn-Vossen 1902 - 1936

Садржај

- Mark Powell. M435: INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL GEOMETRY, The Gauss-Bonnet Theorem. URL: https://maths.dur.ac.uk/users/mark.a.powell/M435-chapter-6-gauss-bonnet.pdf
- Karen Butt. THE GAUSS-BONNET THEOREM. URL: https://math.uchicago.edu/ may/REU2015/REUPapers/Butt-.pdf
- Hung-Hsi Wu. Historical development of the Gauss-Bonnet theorem. DOI:10.1007/s11425-008-0029-8. URL: https://www.researchgate.net/publication/226231776_-Historical_development_of_the_Gauss-Bonnet_theorem