深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭 A/B 卷 A

课程编号 课程名称 高等数学 B(1) 学分 4

命题人(签字)__________ 审题人(签字)__________ 2006 年 12 月 10 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

高等数学 B（1）21 试卷

一.选择与填空题 (每题 3 分，共 18 分)

1.当 $x \quad 0$ 时，$x(x \quad \sin x)$ 与 x^2 比较是（ ）

A．同阶但不等价无穷小 B．等价无穷小

C．高阶无穷小 D．低阶无穷小

2.曲线 $y \quad x^3 \quad 3x$ 上切线平行于 x 轴的点有（ ）

A .(0,0) B .(1,2) C .(-1,2) D .(1,-2)

3.若 $f(x)dx \quad x^2 e^{-x} \quad c$ 则 $f(x)$ （ ）。

A．xe^x B．$x^2 e^x$ C．$2xe^x$ D．$e^{-x}(2x - x^2)$

4.求极限 $\lim\limits_{x} (\frac{x \quad 3}{x \quad 1})^x =$__________。

5.设 e^x 是 $f(x)$ 的原函数，则 $xf(x)dx$ __________。

6.曲线 $y \quad \frac{2x \quad 1}{(x \quad 1)^2}$ 的铅垂渐近线是__________。

二.计算题：（每题 6 分，共 48 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x \quad 2} \frac{x^2 \quad 3x \quad 2}{x^2 \quad 4}$ 2.求极限 $\lim\limits_{x \quad 0} (\frac{1}{\sin x} \quad \frac{1}{x})$

3 . $y \quad e^x \sin x \quad \tan x$ 求 $\frac{dy}{dx}$。 4. 设 $xy \quad e^{x \quad y}$，y 是 x 的函数，求 y'；

5.设 $y \quad e^{f(x)}$ 求 y ；　　6. 设 $y \quad 2^{3x}\sin^2 x$, 求 dy ；

7. 求 $\ln(x^2 \quad 1)dx$ ；　　8. 求 $x^2 e^{x^3} dx$ ；

三.设 f(x)= $\begin{cases} \frac{1}{x}\sin x & x \quad 0 \\ k(\text{常数}) & x \quad 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x \quad 0 \end{cases}$ 问当 k 为何值时，函数在 x=0 处连续？为什么？（ 7 分）

四、 利用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{x}{1 \quad x} \quad \ln(1 \quad x) \quad x$ 对一切 $x \quad 0$ 成立 .（7 分）

五. 判定曲线 $y \quad xe^{\ x}$ 的单调性、极值、凹向及拐点 （10 分）

六. 某厂每批生产某种商品 x 单位的费用为

$C(x) \quad 5x \quad 200$ （元）

得到的收益是

$R(x) \quad 10x \quad 0.01x^2$ （元）

求:1.生产 10 个单位时的边际成本和边际收益 .

2.每批应生产多少单位时才能使利润最大。 （10 分）

附加题：((每题 10 分共 30 分）

1. $\lim\limits_{x} \frac{e^x}{(1 \quad \frac{1}{x})^{x^2}}$ （10 分）

2. 求 $1,\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},L \quad \sqrt[n]{n},L$ 中的最大值 .

3. 若 f (x) 的一个原函数是 $\ln(x \quad \sqrt{x^2 \quad 1})$，求 $xf \ (x)dx$

高等数学 B（1）21 试卷解答及评分标准

一、选择与填空题 (每题 3 分，共 18 分)

1.当 $x \quad 0$ 时，$x(x \quad \sin x)$ 与 x^2 比较是（ A ）

A．同阶但不等价无穷小　　B．等价无穷小

C．高阶无穷小　　D．低阶无穷小

2. 曲线 $y \quad x^3 \quad 3x$ 上切线平行于 x 轴的点有（ D ）

A .(0,0)　　B .(1,2)　　C .(-1,2)　　D .(1,-2)

3.若 $f(x)dx \quad x^2e^{-x} \quad c$ 则 $f(x)$ （ D ）

A． xe^x　　B． x^2e^x　　C． $2xe^x$　　D． $e^{-x}(2x - x^2)$

4.求极限 $\lim\limits_{x} (\frac{x \quad 3}{x \quad 1})^x =$ __e^4__

5. 设 e^x 是 $f(x)$ 的原函数，则 $xf(x)dx$ __$xe^x \quad e^x \quad c$__

6.曲线 $y \quad \frac{2x \quad 1}{(x \quad 1)^2}$ 的铅垂渐近线是 _x=1________。

二 计算题：（每题 6 分，共 48 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x \quad 2} \frac{x^2 \quad 3x \quad 2}{x^2 \quad 4}$

解：原式 $= \lim\limits_{x \quad 2} \frac{2x-3}{2x}$ （4 分）

$= \frac{1}{4}$ （6 分）

2.求极限 $\lim\limits_{x \quad 0} (\frac{1}{\sin x} \quad \frac{1}{x})$

解：原式 $= \lim\limits_{x \quad 0} \frac{x \quad \sin x}{x\sin x}$ （1 分）

$= \lim\limits_{x \quad 0} \frac{1 \quad \cos x}{\sin x \quad x\cos x}$ （3 分）

$= \lim\limits_{x \quad 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x}$ （4 分）

$=0$ （5 分）

3 . $y \quad e^x\sin x \quad \tan x$ 求 $\frac{dy}{dx}$

解：$y \quad e^x\sin x \quad e^x\cos x \quad \sec^2 x$ （6 分）

4. 设 $xy \quad e^{x \quad y} \quad y$ 是 x 的函数，求 y

解：两边求导： $y \quad xy \quad e^{x \quad y}(1 \quad y)$ （4

分）

$y \quad \frac{e^{x\ y}\quad y}{x\quad e^{x+y}}$ （6 分）

5.设 $y\quad e^{f\,(x)}$ 求 y

解：$y\quad e^{f\,(x)}f\ (x)$ 2 分

$y\quad e^{f\,(x)}(f^{\ 2}(x)\quad f\ (x))$ （5 分）

6. 设 $y\quad 2^{3x}\sin^{2}x$，求 dy；

$y\quad (2^{3x})\quad \sin^{2}x\quad 2^{3x}\quad (\sin^{2}x)$ 4 分

$dy=2^{3x}(3\ln 2\sin^{2}x\quad 2\sin x\cos x)dx$ 6 分

7. 求 $\ln(x^{2}\quad 1)dx$

解：原式 $=x\ln(1\quad x^{2})\quad xd\ln(1\quad x^{2})$ （2 分）

$=x\ln(1\quad x^{2})\quad \frac{2x^{2}}{1\quad x^{2}}dx$ （4 分）

$=x\ln(1\quad x^{2})\quad 2x\quad \arctan x\quad c$ （6 分）

9. 求 $x^{2}e^{x^{3}}dx$

解：原式 $=\frac{1}{3}\ e^{x^{3}}dx^{3}$ （3 分）

$=-\frac{1}{3}e^{x^{3}}\quad c$ （6 分）

三.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x & x\quad 0\\ k(\text{常数}) & x\quad 0\\ x\sin\frac{1}{x}+1 & x\quad 0\end{cases}$ 问当 k 为何值时，函数在其定义域内连续？（7 分）

解：$Q\ \lim_{x\quad 0} f(x)\quad \lim_{x\quad 0}\frac{1}{x}\sin x\quad 1$ 2 分

$\lim_{x\quad 0} f(x)\quad \lim_{x\quad 0}(x\sin\frac{1}{x}\quad 1)\quad 1$ 4 分

$\lim_{x\quad 0} f(x)\quad \lim_{x\quad 0} f(x)\quad 1\quad \lim_{x\quad 0} f(x)$ 6 分

当 $\lim_{x\quad 0} f(x)\quad f(0)\quad k$ 时函数连续，即 k=0 时，f(x) 在 x=0 处连续。7 分

四、 利用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{x}{1\quad x}\quad \ln(1\quad x)\quad x$ 对一切 $x\quad 0$ 成立．（7 分）

解：设 $f(x)\quad \ln(1\quad x)$，则 $f\ (x)\quad \frac{1}{1\quad x}$ 2 分

显然对一切 $x\quad 0$，$f(x)$ 在[0,1] 上满足拉格朗日定理条件 3 分

存在 (0,1) 使得 $\frac{\ln(1+x) \quad \ln(1 \quad 0)}{x \quad 0}$ f ( ) $\frac{1}{1}$ 4 分

Q 0< <x $\frac{1}{1 \quad x}$ $\frac{1}{1}$ 1 即有 $\frac{x}{1 \quad x}$ ln(1 x) x 成立 7 分

五．判定曲线 y xe ^{x} 的单调性、极值、凹向及拐点 （10 分）

解： y xe ^{x} 的定义域为 (,)， （1 分）

y e ^{x} xe ^{x} e ^{x}(1 x) 令 y' 0, 得 x=1 （3 分）

y 2e ^{x} xe ^{x} e ^{x}(x 2) 令 y 0 有 x 2 （5 分）

x		1	（1，2）	2	
	+	0	_		+
	_		_	0	+
y		极大值		拐点	

8 分 当 x=1 时，有极大值 f (1) e ^{1}， （9 分）；

当 x=2 时， (2, 2e ^{2})，拐点为 (10 分) 。

六．某厂每批生产某种商品 x 单位的费用为 C(x) 5x 200 （元）

得到的收益是 R(x) 10x 0.01x ^{2} （元）

求:1.生产 10 个单位是的边际成本和边际收益 .

2.每批应生产多少单位时才能使利润最大 （10 分）

解：1. C (x) 5 （1 分）

R (x) 10 0.02x (2 分)

生产 10 个单位时，边际成本 C (10) 5 边际收益 R (10) 10 0.02 10 9.8 （5 分）

2.利润 L (x) 10x 0.01x ^{2} 5x 200

＝5x 0.01x ^{2} 200 （7 分）

令 L (x) 0 有 x 250 （9 分）

当每批生产 250 个单位时，能使利润最大。 （10 分）

附加题：

1、 $\lim_{x} \frac{e^x}{(1 \quad \frac{1}{x})^{x^2}}$

解 $\lim_{x}\frac{e^x}{(1\quad \frac{1}{x})^{x^2}} \quad \lim_{x} e^{x\quad x^2\ln(1\ \frac{1}{x})} \quad \lim_{x} e^{x\ 1\quad x\ln(1\ \frac{1}{x})}$

4 分

因为 $\lim_{x} x\ 1\quad x\ln(1\ \frac{1}{x})\quad \lim_{t\ 0}\frac{1\ \frac{1\quad \ln(1\quad t)}{t}}{t}\quad \lim_{t\ 0}\frac{t\quad \ln(1\quad t)}{t^2}$

$\lim_{t\ 0}\frac{1\ \frac{1}{1\quad t}}{2t}\quad \lim_{t\ 0}\frac{t}{2t(1\quad t)}\quad \frac{1}{2}$ 9 分

所 以 $\lim_{x}\frac{e^x}{(1\quad \frac{1}{x})^{x^2}}\quad e^{\frac{1}{2}}$

10 分

2. 求 $1,\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},L\ \sqrt[n]{n},L$ 中的最大值 .

解 设 $f(x)\quad x^{\frac{1}{x}}\ (x\quad 1)$，则

$f(x)\quad x^{\frac{1}{x}}\frac{1\quad \ln x}{x^2}$ 5 分

令 $f(x)\quad 0$得唯一驻点 $x\quad e$，且 $1\quad x\quad e$时，$f(x)\quad 0$；$x\quad e$时，$f(x)\quad 0$；

$f_{max}\quad f_{极大}\quad f(e)\quad \sqrt[e]{e}$ 7 分

最大值可能是 $\sqrt{2}$或$\sqrt[3]{3}$。由于

所以最大值为 $\sqrt[3]{3}$ 10 分

3、 若 $f(x)$的一个原函数是 $\ln(x\quad \sqrt{x^2\quad 1})$，求 $xf\ (x)dx$

解 $xf\ (x)dx\quad xdf\ (x)$ 2 分

$xf\ (x)\quad f\ (x)dx$ 3 分

$xf\ (x)\quad f\ (x)\quad C$ 5 分

$f\ (x)\quad \ln(x\ \sqrt{x^{2}\ \ 1})\quad \frac{1}{\sqrt{x^{2}\ \ 1}}$ 7 分

$f\ (x)\quad \frac{x}{\sqrt{(x^{2}\ \ 1)^{3}}}$ 8 分

$xf\ \ (x)dx\quad \frac{x^{2}}{\sqrt{(x^{2}\ \ 1)^{3}}}\ \ \frac{1}{\sqrt{x^{2}\ \ 1}}\ \ C$ 10 分

深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷　　　　　　　　　　　　　　　　A/B 卷 B

课程编号 05　　课程名称 高等数学 B（1）　　学分 4

命题人(签字)__________　审题人(签字)__________　06 年 12 月 10 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

高等数学 B（2）25 试卷

一、　单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1.　两曲线 y=f(x)，y=g(x)相交于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 \quad x_2$，且 $f(x) \quad 0, g(x) \quad 0$，它们所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V= (　　　)

(A) $_{x_1}^{x_2} \ f(x) \quad g(x)^2 dx$　　(B) $_{x_1}^{x_2} \ f(x) \quad g(x)^2 dx$

(C) $_{x_1}^{x_2} \ \left| f^2(x) \quad g^2(x) \right| dx$　　(D) $_{x_1}^{x_2} \ f(x)^2 dx \quad _{x_1}^{x_2} \ g(x)^2 dx$

2.　下列级数中，条件收敛的是（　　　）

（A）$_{n\ 1} \ 1^{n\ 1}\dfrac{n}{\sqrt{2n^3 \quad 6}}$　　（B）$_{n\ 1} \ 1^{n\ 1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

（C）$_{n\ 1} \ 1^{n\ 1}\dfrac{1}{n^2}$　　（D）$_{n\ 1} \ 1^{n\ 1}\dfrac{1}{n2^n}$

3.　设 $z \quad g(x, v), v \quad v(x, y)$ 其中 g, v 具有二阶连续偏导数 . 则 $\dfrac{^2 z}{y^2}$ (　　)

(A) $\dfrac{^2 g}{v^2}\ \dfrac{v}{y}\quad \dfrac{g}{v}\ \dfrac{^2 v}{y^2}$　(B) $\dfrac{g}{v}\ \dfrac{^2 v}{y^2}$

(C) $\dfrac{^2 g}{v^2}(\dfrac{v}{y})^2 \quad \dfrac{g}{v}\ \dfrac{^2 v}{y^2}$　(D) $\dfrac{^2 g}{v\ y}\ \dfrac{v}{y}\quad \dfrac{g}{v}\ \dfrac{^2 v}{y^2}$

4.　$_{1}^{1} \dfrac{2}{x^2} dx$ (　　　)

号学　名姓　业专　院学　(密封线内不答题)　线　封　密

（A）4　　（B）-4　　（C）0　　（D）发散

5. 求微分方程 $y \quad e^{2x}$ 的通解（　　　）

（A）$y \quad \frac{e^{2x}}{4} \quad c_1 x \quad c_2$　　（B）$y \quad \frac{e^{2x}}{4} \quad cx$

（C）$y \quad \frac{e^{2x}}{4} \quad c$　　（D）$y \quad \frac{e^{2x}}{4} \quad c_1 x^2 \quad c_2$

二、　填空（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 若 $f(x) \quad {}_0^{x^2} 2x\sin t^2 dt$，则 $f\ (x) =$ ______________________________

2. 设 f(x,y)是连续函数，交换积分次序：${}_0^1 dx \ {}_{1\ x^2}^{1} f(x,y)dy \quad {}_1^e dx \ {}_{\ln x}^{1} f(x,y)dy =$ ________

3. 设幂级数 $\boxed{\ {}_{n\ 0} a_n x^n}$ 的收敛半径是 $\boxed{R\ 0 \quad R}$，则幂级数 $\boxed{\ {}_{n\ 0} a_n x^{2n}}$ 的收敛半径是______________。

4. 已知 $f(0) \quad 1$，$f(2) \quad 3$，$f^{'}(2) \quad 5$，则 $2\ {}_0^2 xf^{''}(x)dx$ ______

通解为 $y \quad c_1 e^x \quad c_2 x$ 的微分方程为 ______________________

三、　计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

1. $z \quad (\ln x)^{\sin y}$，求 $\boxed{dz}$。

2. 求 ${}_1^e (\ln x)^2 dx$。

3. 设 $\boxed{z \quad z(x,y)}$ 由方程 $y \quad 2x \quad z \quad xyz$ 所确定，求 $\boxed{\frac{z}{x}, \frac{z}{y}}$。

4. 计算二重积分 ${}_D 3\sqrt{x^2 \quad y^2}dxdy$，其中 D：$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ （b＞a＞0)。

四、　解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 求曲线 $y \quad 2 \quad |x^2 \quad 4|$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积。

2. 求 $f(x,y) \quad xy$ 在条件 $x \quad y \quad 2$ 下的可能极值点。

3. 试求函数 $f\ x\quad \arctan x$ 在点 $x_0\quad 0$ 的泰勒级数展开式，并求 $_{n\ 1}\frac{1}{2n\quad 1}^{n}\ \frac{3}{4}^{n}$ 之值。

4. 求微分方程 $y\quad 2y\quad 2y\quad 0$ 的一条积分曲线，使其在点 $(0,1)$ 处有水平切线。

五、 附加题（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

1. 设 $I\ \ _{0}^{\frac{}{2}}\frac{\sin^{10}x\quad \cos^{10}x}{4\quad \sin x\quad \cos x}dx$，求 I。

2. 求 $\lim_{n}\ \frac{1}{n\quad 1}\quad \frac{1}{n\quad 2}\quad L\quad \frac{1}{n\quad n}$

3. 设 $f\ x\quad x\ln(1\quad x^2)$，（1）将 $f\ x$ 展成 x 的幂级数，并求收敛域；（2）求 $f^{101}\ 0$ 。

高等数学 B（2）25 试卷解答及评分标准

六、 单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

C A C D A

七、 填空（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 16

八、 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

5. 解：$dz\quad \frac{\sin y}{x\ln x}(\ln x)^{\sin y}dx\quad \cos y(\ln x)^{\sin y}\ln(\ln x)dy$

6. 解：原式 $x(\ln x)^2\Big|_1^e\quad 2\ _1^e\ln xdx\quad e\quad 2$.

7. 解：$dy\quad 2dx\quad dz\quad yzdx\quad xzdy\quad xydz$

8. 解：原式＝$3\ _0^2\ d\ \ _a^b r^2dr\quad 2\ (b^3\quad a^3)$

九、 解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 解：$y\quad \begin{matrix} x^2\quad 2, |x|\quad 2, \\ 6\quad x^2, |x|\quad 2. \end{matrix}$ 2 分

$\begin{matrix} x^2\quad 2\quad 0,\quad x\quad \sqrt{2}, \\ 6\quad x^2\quad 0,\quad x\quad \sqrt{6}, \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y\quad x^2\quad 2, \\ y\quad 6\quad x^2, \end{matrix}\quad x\quad 2$ 4 分

$S\quad 2\ _0^{\sqrt{2}}\ (x^2\quad 2)dx\quad _{\sqrt{2}}^{2}(x^2\quad 2)dx\quad _2^{\sqrt{6}}(6\quad x^2)dx$ 7 分

$2(\frac{8}{3}\sqrt{2}\quad 4\sqrt{6}\quad \frac{32}{3})\quad \frac{16}{3}\sqrt{2}\quad 8\sqrt{6}\quad \frac{64}{3}$. 10 分

2. 解：$F(x, y, \ ) \quad xy \quad (x \quad y \quad 2)$ 4 分

令 $\begin{matrix} F_x \quad y \quad 0 \\ F_y \quad x \quad 0 \\ F \quad x \quad y \quad 2 \quad 0 \end{matrix}$ $\quad x \quad y \quad 1$（唯一驻点） 7 分

故 $(1,1)$ 是 $f(x, y)$ 的可能极值点。 10 分

3. 解：因为 $f \quad x \quad \frac{1}{1 \quad x^2} \quad \underset{n\ 0}{} \quad 1^{n} x^{2n} x \quad 1, \quad 1$ 4 分

所以 $f \quad x \quad {}_0^x \frac{1}{1 \quad x^2} dx \quad \underset{n\ 0}{} \quad 1^{n} \frac{x^{2n\ 1}}{2n \quad 1} x \quad 1, \quad 1$ 7 分

所以 $\underset{n\ 1}{} \frac{1}{2n \quad 1}^{n} \frac{3}{4}^{n} \quad \underset{n\ 0}{} \frac{1}{2n \quad 1}^{n\ 1} \frac{3}{4}^{n\ 1} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} f \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ 10 分

4. 解：特征方程：$r^2 \quad 2r \quad 2 \quad 0 \quad\quad r \quad 1 \quad i$ 4 分

通解：$y \quad e^{x}(c_1 \sin x \quad c_2 \cos x)$ 6 分

因为过点（ 0，1）且在此处有水平切线，即 $y \quad 0$ 8 分

故积分曲线为：$y \quad e^{x}(\cos x \quad \sin x)$ 10 分

十、 附加题（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

1. 解：$2I \quad {}_0^{\frac{}{2}} \frac{\sin^{10} x \quad \cos^{10} x}{4 \quad \sin x \quad \cos x} dx \quad {}_0^{\frac{}{2}} \frac{\cos^{10} x \quad \sin^{10} x}{4 \quad \cos x \quad \sin x} dx \quad 0 \quad\quad I \quad 0$

2. 解：原式 $\lim_{n} \underset{i\ 1}{\overset{n}{}} \frac{1}{1 \quad \frac{i}{n}} \frac{1}{n} \quad {}_0^1 \frac{1}{1 \quad x} dx \quad \ln 2$

3. 解：(1) $f \quad x \quad x\ln(1 \quad x^2) \quad x \quad \underset{n\ 0}{} \quad 1^{n} \frac{x^{2\ n\ 1}}{n \quad 1} \quad \underset{n\ 0}{} \frac{x^{2n\ 3}}{n \quad 1}$

(2) 取 $n \quad 50$，对上式两边求 $x \quad 0$ 处的 101 阶导数得 $f^{101} \quad 0 \quad\quad \frac{101!}{50}$

深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷　　　　A/B 卷 B

课程编号 05　　课程名称 高等数学 B（1）　　学分 4

命题人 (签字)__________　审题人 (签字)__________　06 年 12 月 10 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

学号　　姓名　　专业　　学院

(密封线内不答题)

线　封　密

高等数学 B（2）24 试卷

十一、 单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 由 $[a,b]$ 上连续曲线 $y = g(x)$，直线 $x \quad a$，$x \quad b\ (a \quad b)$ 和 x 轴围成图形的面积 S （ ）.

(A) ${}_a^b g(x)dx$　　(B) $\left|{}_a^b g(x)dx\right|$

(C) ${}_a^b |g(x)|dx$　　(D) $\frac{[g(b) \quad g(a)](b \quad a)}{2}$

2. 下列级数中，绝对收敛的是（ ）

（A） $_{n\ 1}\ 1^{n}\frac{2n}{3n \quad 1}$　　（B） $_{n\ 1}\ 1^{n\ 1}\frac{1}{3\ln(n \quad 1)}$

（C） $_{n\ 1}\ 1^{n\ 1}\frac{n}{\sqrt{n^2 \quad 9}}$　　（D） $\boxed{_{n\ 1}\ 1^{n\ 1}\frac{1}{n^2}}$

3. 设 $z \quad f(x,v), v \quad v(x,y)$ 其中 f, v 具有二阶连续偏导数 . 则 $\frac{{}^2 z}{y^2}$ （ ）.

(A) $\frac{{}^2 f}{v\ y}\ \frac{v}{y}\ \frac{f}{v}\ \frac{{}^2 v}{y^2}$　　(B) $\frac{f}{v}\ \frac{{}^2 v}{y^2}$

(C) $\frac{{}^2 f}{v^2}(\frac{v}{y})^2\ \frac{f}{v}\ \frac{{}^2 v}{y^2}$　　(D) $\frac{{}^2 f}{v^2}\ \frac{v}{y}\ \frac{f}{v}\ \frac{{}^2 v}{y^2}$

4. ${}_1^1\frac{1}{x^2}dx$ （ ）

（A）2 （B）-2 （C）0 （D）发散

5. 求微分方程 $y \quad x^2$ 的通解（ ）

（A）$y \quad \frac{x^4}{12} \quad c_1 x \quad c_2$ （B）$y \quad \frac{x^4}{12} \quad cx$ （C）$y \quad \frac{x^4}{12} \quad c$ （D）$y \quad \frac{x^4}{12} \quad c_1 x^2 \quad c_2$

十二、 填空（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

5. 若 $f(x) \quad {}_0^{x^2} 3x\sin t^2 dt$，则 $f \ (x) =$ ______________________________

6. 设 f(x,y)是连续函数，交换积分次序：$_0^{\frac{1}{4}} dy \ _y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \quad _{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \ _y^{\frac{1}{2}} f(x,y)dx =$ __________

7. 幂级数 $_{n \ 1} \frac{1^{n \ 1} x^{2n}}{2n\,!}$ 的收敛半径是 ________

8. 已知 $f(0) \quad 1, f(2) \quad 3, f'(2) \quad 5$，则 $_0^2 xf''(x)dx$ ______

通解为 $y \quad ce^x \quad x$ 的微分方程为 ______________________

十三、 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

9. $z \quad (\ln y)^{\cos x}$，求 $\boxed{dz}$。

10. 求 $_0^1 15x\sqrt{2 \quad x}dx$。

11. 设 $\boxed{z \quad z(x,y)}$ 由方程 $\frac{x}{z} \quad \ln\frac{z}{y}$ 所确定，求 $\boxed{z_x, z_y}$。

12. 计算二重积分 $_D 15xy^2 dxdy$，其中 D 为 $x \quad \sqrt{4 \quad y^2}$ 与 y 轴所围成的区域。

十四、 解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 求由曲线 y=sinx，y=cosx，（0≤x≤π/4）及直线 x=0 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积。

2. 已知两种商品的需求函数为 $Q_1 \quad 8 \quad p_1 \quad p_2$；$Q_2 \quad 10 \quad 2p_1 \quad 5p_2$，其中 p_1, p_2 为两种商品的价格，总成本函数为 $C \quad 3Q_1 \quad 2Q_2$，问如何定价可使利润最大？

3. 利用 $\boxed{y \quad \frac{1}{1 \quad x^2}}$ 的展开式，求级数 $_{n \ 0} \ 1^n \frac{4}{2n \quad 1}$ 的和。

4. 求解初值问题 $\boxed{\begin{cases} y' + 2y + \int_0^x y\,dx = 1 & x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}}$

十五、 附加题（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

1. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$，求 I。

2. 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+2n} \right)$

3. 设 $f(x) = x^{100} e^{x^2}$，（1）将 $f(x)$ 展成 x 的幂级数，（2）求 $f^{(200)}(0)$

高等数学 B（2）24 试卷解答及评分标准

十六、 单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

C D C D A

十七、 填空（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 8

十八、 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. 解： $dz \quad \frac{\cos x}{y\ln y}(\ln y)^{\cos x} dy \quad \sin x(\ln y)^{\cos x}\ln(\ln y)dx$

14. 解：令 $\sqrt{2 \quad x} \quad t$，原式 $15 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(t^2 \quad 2) \ t \ 2tdt \quad 15(\frac{2}{5}t^5 \quad \frac{4}{3}t^3)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \quad 16\sqrt{2} \quad 6\sqrt{3}$.

15. 解： $\frac{1}{z}dx \quad \frac{x}{z^2}dz \quad \frac{dz}{z} \quad \frac{dy}{y}$

16. 解：原式＝$15 \int_2^2 y^2dy \int_0^{\sqrt{4 \ y^2}} xdx \quad \int_0^2 y^2(4 \quad y^2)dy \quad 64$

十九、 解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

5. 解：$V \quad \int_0^{/4}(\cos^2 x \quad \sin^2 x)dx$ 6 分

$\int_0^{/4}\cos 2xdx$ 8 分

$\frac{}{2}\sin 2x\Big|_0^{/4}$ 10 分

$\frac{}{2}$.

6. 解：$R \quad p_1Q_1 \quad p_2Q_2$

$L \quad R \quad C \quad (p_1 \quad 3)(8 \quad p_1 \quad p_2) \quad (p_2 \quad 2)(10 \quad 2p_1 \quad 5p_2)$ 4 分

令 $L_{p_1} \quad 7 \quad 2p_1 \quad 3p_2 \quad 0$，$L_{p_2} \quad 17 \quad 3p_1 \quad 10p_2 \quad 0$ $p_1 \quad 11$，$p_2 \quad 5$（唯一驻点） 7 分

$L_{max} \quad L(11,5)$ 10 分

7. 解： 因为 $\frac{1}{1 \quad x^2} \quad \sum_{n \ 0} 1^n x^{2n}$ $x \quad 1, \ 1$ 4 分

所以 $\boxed{\arctan x \quad \sum_{n \ 0} 1^n \frac{x^{2n \ 1}}{2n \quad 1} \quad x \quad 1, \ 1}$ 7 分

所以 $\quad_{n\ 0} \quad 1^{n} \frac{4}{2n\quad 1}$ 10 分

8. 解：将积分方程化为微分方程： $y \quad 2y \quad y \quad 0$ 2 分

特征方程： $r^{2} \quad 2r \quad 1 \quad 0 \qquad r_{1,2} \quad 1$ 4 分

通解： $y \quad e^{x}(c_1 \quad c_2 x) \qquad y \quad e^{x}(c_2 \quad c_1 \quad c_2 x)$ 6 分

由原方程得另一初值条件： $y \quad 2 \quad 1, y \quad 1$ 8 分

$y \quad e^{x}$ 10 分

二十、 附加题（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

1. 解： $I \quad {}_{0}^{\overline{2}} \frac{f\ \sin x}{f\ \sin x \quad f\ \cos x} dx \quad {}_{0}^{\overline{2}} \frac{f\ \cos x}{f\ \sin x \quad f\ \cos x} dx$

2. 解：原式 $\lim_{n} {}_{i\ 1}^{2n} \frac{1}{1 \quad \frac{i}{n}} \frac{1}{n} \quad {}_{0}^{2} \frac{1}{1 \quad x} dx \quad \ln 3$

3. 解：（1） $f\ x \quad x^{100} e^{x^2} \quad x^{100} {}_{n\ 0} \frac{(x^2)^n}{n!} \quad {}_{n\ 0} \frac{x^{2n\ 100}}{n!}$

（2）取 $n \quad 50$，对上式两边求 $x \quad 0$ 处的 200 阶导数得 $f^{200}\ 0 \quad \frac{200!}{50!}$

学号 姓名 专业 学院

（密封线内不答题）

密 封 线

深圳大学期末考试试卷 答案及评分标准

开/闭卷 闭卷 A/B 卷 A

课程编号 01-10 01-03 课程名称 线性代数 学分 4

命题人(签字)__________ 审题人(签字)__________ 2007 年 11 月 15 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

一、选择（每题 4 分，共 20 分）

1 设 A_{ij}（i,j=1,2,3,4）是四阶行列式 D（D≠0）中元素 a_{ij} 代数余子式，则当（ B）时，有 $a_{1k}A_{12}+a_{2k}A_{22}+a_{3k}A_{32}+a_{4k}A_{42}\neq 0$.

(A) K=1 (B) K=2 (C) K=3 (D) K=4

2 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则下面命题正确的是（ A）

(A) $|A^*|=|A|^{n-1}$ (B) $|A^*|=|A|$ (C) $|A^*|=|A|^{n}$ (D) $|A^*|=|A^{-1}|$

3 设 A、B 为 n 阶可逆矩阵，下列（ B）正确。

(A) $(2A)^{-1}=2A^{-1}$ (B) $(2A)^{T}=2A^{T}$

(C) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ (D) $[(A^{T})^{T}]^{-1}=[(A^{-1})^{-1}]^{T}$

4 线性方程组 Ax=b，其中 A 为 t×s 阶矩阵，则（ A）

(A) 当 R(A)=t 时，必有解 (B) t=s 时，有唯一解

(C) R(A) =s 时，必有解 (D) R(A) <s 时，有无穷多解

5 设 A、B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似， E 为 n 阶单位矩阵，则（ C）

(A) E-A= E-B (B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量

(C) 对任意常数 t，tE-A 与 tE-B 相似 (D) A 与 B 都相似于一个对角矩阵

二、填空（每题 4 分，共 20 分）

1 行列式 $D_3=\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & ef \end{vmatrix}$ = ____4abcdef____。

2 当 K=____1____时，A= $\begin{matrix} K & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$ 不可逆。

3 设 A 为三阶矩阵，且 $|A| \quad 1$,则 $|2A^{1} \quad 3A^*|$ ____125____。

4 设有 4 阶矩阵 A $\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$，则 A^{1} ____ $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$ ____。

5 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1,-2,3，则 $(3A)^{-1}$ 的特征值为 ____1/3,-1/6,1/9____。

三、计算（每题 10 分，共 40 分）

1 求矩阵 X，使 $AX \quad B$，其中，$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$，$B = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{matrix}$。

解：因为

$$(A,B) \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{matrix}$$ ------（3 分）

$$\overset{R}{} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$ ------（4 分）

显然 $A \overset{r}{} E$，因此 A 可逆，且

$$X \quad A^{1}B \quad \begin{matrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$ ------（3 分）

还可有第二种解法，先求出 $A^{1} \quad \frac{1}{5}\begin{matrix} 10 & 11 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{matrix}$ ------（5 分）

再解 $X \quad A^{1}B \quad \begin{matrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$ ------（5 分）

2 有方程组 $\begin{matrix} (2 \quad)x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3 \quad 1 \\ 2x_1 \quad (5 \quad)x_2 \quad 4x_3 \quad 2 \\ 2x_1 \quad 4x_2 \quad (5 \quad)x_3 \quad 1 \end{matrix}$，讨论 取值与方程组解的关系。

解：两种途径可以对本题进行求解，一是以系数行列式非零性求解，一是构造增广矩阵求解，下面以系数行列式出发求解。

以方程组的系数矩阵为 A，其行列式为：

$$|A| \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (\quad 1)^2(\quad 10)$$ ------（4 分）

------（2 分）

（1）由此可知，当 1且 10时，方程组有惟一解；

（2）而当 =1时，方程组的增广矩阵 B为

由此可知 $R(A)$ $R(B)$ 1，方程组有无穷多解， ------（2分）

且其通解为 $x \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \quad k_1 \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad k_2 \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, k_1, k_2 \quad R$（不做要求）

（3）当 =10时，方程组的增广矩阵 B为

由此可知 $R(A)$ 2 $R(B)$ 3，方程组无解。 ------（2分）

3 已知 $_1$ $4,2,6^T$， $_2$ $1,2,1^T$， $_3$ $5,1,6^T$， $_4$ $3,0,4^T$，求该向量组的一个极大无关组，并把其他向量用该极大无关组线性表示。

解：考察由该向量组构成的矩阵

$$_1,\ _2,\ _3,\ _4 \quad \begin{matrix} 4 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 4 \end{matrix} \quad \text{------（3分）}$$

$$r \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} \quad \text{------（3分）}$$

知 $R(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4)$ 3，并由以上结果可以得出该向量组的一个极大无关组为

$$_1,\ _2,\ _3, \qquad \text{------（2分）}$$

且有 $\quad _4 \ \frac{1}{4}\ _1 \ \frac{1}{2}\ _2 \ \frac{1}{2}\ _3$。 ------（2分）

4 求一个正交变换，把二次型 $f \quad 3x_1^2 \quad 2x_2^2 \quad 2x_3^2 \quad 2x_1x_2 \quad 2x_1x_3$化为标准型。

解：该二次型所对应的矩阵

$$A \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\ ; \qquad \text{------（2分）}$$

其特征方程 $|A \quad E| \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (\quad 1)(\quad 2)(\quad 4)$，即求得特征值为 1,2,4 。 ------（2分）

当 1时，解特征方程 $(A \quad E)x \quad 0$，可得特征向量为 $(\ 1,1,1)^T$； ------（1分）

当 2时，解特征方程 $(A \quad 2E)x \quad 0$，可得特征向量为 $(0,\ 1,1)^T$；------（1分）

当 4时，解特征方程 $(A \quad 4E)x \quad 0$，可得特征向量为 $(2,1,1)^T$； ------（1分）

将以上所得特征向量单位化，即得正交矩阵

$$P \quad \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{matrix}$$ ------（2 分）

在正交变换 $(x_1, x_2, x_3)^T \quad P(x_1', x_2', x_3')^T$ 下，原二次型化为标准形

$$f \quad x_1'^2 \quad 2x_2'^2 \quad 4x_3'^2$$ ------（1 分）

四、证明（每题 10 分，共 20 分）

1 设 A、B 均为 n 阶方阵，且有 $B \quad B^2$，$A \quad E \quad B$，证明 A 可逆，并求出其逆 A^{1}。

证明：

$$A \quad E \quad B \qquad B \quad A \quad E \qquad B^2 \quad (A \quad E)^2 \quad A^2 \quad 2A \quad E$$ ------（2 分）

由 $B \quad B^2$，有 $\qquad B^2 \quad A^2 \quad 2A \quad E \quad B \quad A \quad E$ ------（2 分）

则 $\quad A^2 \quad 2A \quad E \quad A \quad E \qquad A^2 \quad 3A \quad 2E \qquad A(A \quad 3E) \quad 2E$ ------（2 分）

由 $\qquad |A(A \quad 3E)| \quad |A||A \quad 3E| \quad |\ 2E| \quad 0 \quad |A| \quad 0$

所以 A 可逆，且有 $\qquad A^{1} \quad \dfrac{A \quad 3E}{2}$ ------（4 分）

2 设向量 $_1, \ _2, \ _3, \ldots, \ _s$ 是齐次线性方程组 $AX \quad 0$ 的一个基础解系，向量 不是方程组 $AX \quad 0$ 的解，即 $A \quad 0$。证明：向量组 $, \quad _1, \quad _2, \quad _3, \ldots, \quad _s$ 线性无关。

证明：设存在系数 $k_0, k_1, \ldots, k_s$，使得

$$k_0 \quad k_1(\quad _1) \quad k_2(\quad _2) \quad k_3(\quad _3) \quad \ldots \quad k_s(\quad _s) \quad 0,$$

整理可得 $(k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_s) \quad k_1 \ _1 \quad k_2 \ _2 \quad \ldots \quad k_s \ _s \quad 0$，（1） ------（4 分）

两边左乘 A 并知道 $A \ _j \quad 0, (1 \quad j \quad s)$，$A \quad 0$，可以得到 $k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_s = 0$；

则（1）式化为 $\qquad k_1 \ _1 \quad k_2 \ _2 \quad \ldots \quad k_s \ _s \quad 0$ ------（4 分）

而由题可知 $_1, \ _2, \ _3, \ldots, \ _s$ 线性无关，则 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 都为 0, 因此可以得出 $k_0, k_1, \ldots, k_s$ 全为 0，因此向量组 $, \quad _1, \quad _2, \quad _3, \ldots, \quad _s$ 线性无关。------（2 分）

五、附加题（共 30 分）

1 （18 分）设 3 阶方阵 A $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$ 是满秩矩阵，证明：

直线 $l_1: \frac{x \quad a_3}{a_1 \quad a_2} \quad \frac{y \quad b_3}{b_1 \quad b_2} \quad \frac{z \quad c_3}{c_1 \quad c_2}$ 与直线 $l_2: \frac{x \quad a_1}{a_2 \quad a_3} \quad \frac{y \quad b_1}{b_2 \quad b_3} \quad \frac{z \quad c_1}{c_2 \quad c_3}$ 相交于一点。

证明：记向量 $(a_1, b_1, c_1)^T$， $(a_2, b_2, c_2)^T$， $(a_3, b_3, c_3)^T$

则 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 3 矩阵 A 的行向量组线性无关 ------（3 分）

向量组 ， ， 线性无关 ------（3 分）

， ， 不共面 ------（3 分）

于是，把向量 ， ， 的起点取在原点，则它们的终点不在一条直线上，三个终点惟一地确定了一张平面 。由解析几何知：直线 $l_1: \frac{x \quad a_3}{a_1 \quad a_2} \quad \frac{y \quad b_3}{b_1 \quad b_2} \quad \frac{z \quad c_3}{c_1 \quad c_2}$ 是在平面 上过的终点且平行于向量 S_1 的直线；直线 $l_2: \frac{x \quad a_1}{a_2 \quad a_3} \quad \frac{y \quad b_1}{b_2 \quad b_3} \quad \frac{z \quad c_1}{c_2 \quad c_3}$ 是在平面 上过 的终点且平行于向量 S_2 的直线。于是，两直线必定相交于一点。 ------（9 分）

2 （12 分）设 A 是 n 阶对称阵， P 是 n 阶可逆矩阵。已知 n 维列向量 是 A 的对应于特征值 的特征向量，求矩阵 $(P^{\ 1}AP)^T$ 对应于特征值 的特征向量。

解：记 B $(P^{\ 1}AP)^T$，则有 B $(P^{\ 1}AP)^T$ $P^T A^T (P^{\ 1})^T$ $P^T A (P^T)^{\ 1}$，表明矩阵 B 与 A 相似，从而 是 B 的一个特征值。 ------（4 分）

设 0 是矩阵 B 的对应于特征值 的特征向量，则有

$$B \qquad P^T A (P^T)^{\ 1} \qquad A(P^T)^{\ 1} \qquad (P^T)^{\ 1}$$ ------（5 分）

由上可知 $(P^T)^{\ 1}$ 是 A 的对应于特征值 的特征向量，于是，令 $(P^T)^{\ 1}$ ，

即 P^T ，为矩阵 $(P^{\ 1}AP)^T$ 对应于特征值 的特征向量。 ------（3 分）

大学高等数学 A-1 试卷

学院 ________________ 班级 ______________ 学号 _________________ 姓名 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分

得分								

一、选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1、设 $f(x) \quad x \ \arctan\frac{1}{x}$，则 $x \quad 0$是$f(x)$的（ ）

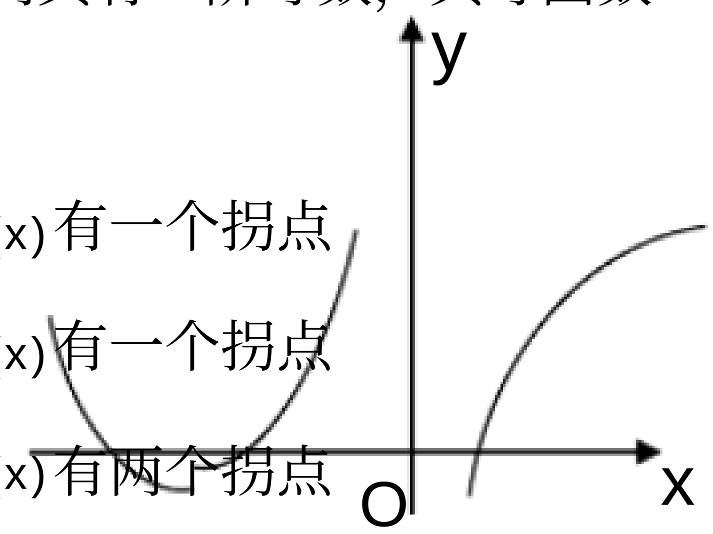
(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 连续点　　(D) 第二类间断点

2、设 $f(x) \quad \sqrt[3]{1 \quad x \quad x^2} \quad 1, g(x) \quad \sin 2x$，则当 $x \quad 0$时（ ）

(A) $f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量　　(B) $f(x)$是$g(x)$的低阶无穷小量

(C) $f(x)$是$g(x)$的是同阶但非等价无穷小量　　(D) $f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量

3、设函数 $f(x)$ 在 $(\quad , \quad)$ 连续，在 $(\quad ,0) \cup (0, \quad)$ 内具有二阶导数，其导函数 $f(x)$的图像如图，则 $f(x)$（ ）



(A) 有两个极大值点和一个极小值点，曲线 $y \quad f(x)$有一个拐点

(B) 有一个极大值点和两个极小值点，曲线 $y \quad f(x)$有一个拐点

(C) 有一个极大值点和一个极小值点，曲线 $y \quad f(x)$有两个拐点

(D) 有两个极大值点和两个极小值点，曲线 $y \quad f(x)$有一个拐点

4、下列广义积分中收敛的是（ ）

二、填空题（每空 3 分，共 12 分，把答案填在题中横线上）

1、设 $f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x \quad 0}\frac{f(0) \quad f(2x)}{x}$ ________________。

2、xoy 面内的曲线 $C: x^2 \quad y^2 \quad 1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的曲面方程为 ________________。

3、已知 $(x) \quad \int_0^x t \ f(x^2 \quad t^2)dt$，则 (x) ________________。

4、定积分 $\int_1^1 (x^2 \sin x \quad \sqrt{1 \quad x^2})dx$ ________________。

三、试解下列各题（本大题共 5 个小题，每题 6 分，计 30 分，解答写出推理、演算步骤）

1、求极限 $\lim\limits_{x \quad 0}\frac{3\arctan x \quad x^2 \sin\frac{1}{x}}{(1 \quad \cos x)\ln(1 \quad 2x)}$。

2、求极限 $\lim\limits_{x}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 \quad 1}}$。

3、设 $y \quad y(x)$ 是由方程 $e^{y} \quad y \quad \sin(xy)$ 确定的隐函数，求 dy。

4、设 $f''(t)$ 存在且不为零， y 与 x 间的函数关系由 $\begin{cases} x \quad f'(t), \\ y \quad tf'(t) \quad f(t); \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

5、求过点 $(0,2,4)$ 与两平面 $x \quad 2z \quad 1$ 和 $y \quad 3z \quad 2$ 平行的直线的方程。

四、试解下列各题（本大题共 4 个小题，每题 6 分，计 24 分，解答写出推理、演算步骤）

1、求 $\dfrac{1}{\sqrt{x \quad x^2}}dx$。

2、求 $\dfrac{x}{\cos^2 x}dx$。

3、设 $f(x) \quad \begin{cases} \sin^2 x \quad , \quad x \quad 0 \\ xe^{x} \quad , \quad x \quad 0 \end{cases}$，求 $\int_0^1 f(x \quad 1)dx$。

4、讨论函数 $f(x) \quad \ln x \quad \dfrac{x}{e} \quad k$ 在 $0,$ 内零点个数（其中 k 为常数）。

五、（本题满分 6 分）在曲线 $y \quad \sqrt{x}$ 上求一点 P，使其到点 $M(4,0)$ 的距离最短，并求出这个最短距离。

六、（本题满分 8分）设曲线 $y \quad \ln x$，

（1）求该曲线过原点的切线；

（2）求由上述切线与曲线及 x 轴所围平面图形的面积；

（3）求（2）中平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积。

八、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在 $0,1$ 连续，在 $0,1$ 内可导，且 $f(0) \quad f(1) \quad 0, f(\frac{1}{2}) \quad 1,$

证明：（1）存在 $(\frac{1}{2},1),$ 使 $f(\ ) \qquad ;$

（2）对任意 $R,$ 存在 $(0,\ ),$ 使 $f'(\ ) \quad f(\ ) \quad 1$。

高等数学 A-1 试卷解答

一、选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1、(A)　　2、(C)　　3、(D)　　4、(B)

二、填空题（每空 3 分，共 12 分, 把答案填在题中横线上）

1、 $2f'(0)$ 　 2 、 $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1$ 　 3、 $x \quad f(x^2)$ 　 4、 $\overline{2}$

三、试解下列各题（本大题共 5 个小题，每题 6 分，计 30 分，解答写出推理、演算步骤）

1、 $\lim\limits_{x \quad 0} \dfrac{3\arctan x \quad x^2 \sin\frac{1}{x}}{(1 \quad \cos x)\ln(1 \quad 2x)} \quad \lim\limits_{x \quad 0} \dfrac{1}{1 \quad \cos x} \dfrac{1}{2}(3\dfrac{\arctan x}{x} \quad x \sin\dfrac{1}{x})$

$\frac{1}{4}\lim_{x\ \ 0}(3\frac{\arctan\ x}{x}\quad x\ \sin\frac{1}{x})=\frac{3}{4}$

2、$\lim_{x}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2\quad 1}}=\lim_{x}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2\quad 1}}}\quad\frac{^2}{4}$

3、方程 $e^y\quad y\quad \sin(xy)$ 两边直接微分，得

4、$\frac{dy}{dx}\quad\frac{dy/dt}{dx/dt}\quad\frac{f'(t)\quad t\ f''(t)\quad f'(t)}{f''(t)}\quad t$

5、所求直线的方向向量 s 可取为

因此所求直线的方程为 $\frac{x}{2}\quad\frac{y\quad 2}{3}\quad\frac{z\quad 4}{1}$

四、试解下列各题（本大题共 4 个小题，每题 6 分，计 24 分，解答写出推理、演算步骤）

1、$\frac{dx}{\sqrt{x(1\quad x)}}\quad 2\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1\quad(\sqrt{x})^2}}\quad 2\arcsin\sqrt{x}\quad C$

或 $\frac{dx}{\sqrt{x\quad x^2}}\quad\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}\quad(x\quad\frac{1}{2})^2}}\quad\arcsin\frac{x\quad\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\quad C\quad\arcsin(2x\quad 1)\quad C$

2、$\frac{x}{\cos^2x}dx\quad x d\tan x\quad x\ \tan x\quad\tan x dx$

3、令 $x\quad 1\quad t$，则 $\int_0^1 f(x\quad 1)dx=\int_1 f(t)dt$

$=\quad\int_1^0 te^t dt\quad\int_0 \sin^2 tdt$

$=\quad te^t\quad e^t\Big|_1^0\quad 2\int_0^{\frac{}{2}}\sin^2 tdt\quad\frac{}{2}\quad\frac{2}{e}\quad 1$

4、因 $f'(x)\quad\frac{1}{x}\quad\frac{1}{e}$，驻点 $x\quad e$ 。

当 $0\quad x\quad e$ ，$f'(x)\quad 0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\quad e$ ，$f'(x)\quad 0$，$f(x)$ 单调递减；

故 $x\quad e$ 为 $f(x)$ 的最大值点，最大值 $M\quad f(e)\quad k$。

（1）当 $k\quad 0$ 时，$f(x)\quad\ln x\quad\frac{x}{e}\quad k$ 在 $0,\quad$ 内无零点；

（2）当 $k\quad 0$ 时，$f(x)\quad\ln x\quad\frac{x}{e}\quad k$ 在 $0,\quad$ 内有惟一零点 $x\quad e$；

（3）当 $k\quad 0$ 时，因 $\lim_{x} f(x)\quad ,\lim_{x\ \ 0} f(x)\quad ,$

所以 $f(x)\quad\ln x\quad\frac{x}{e}\quad k$ 在 $0,\quad$ 内恰有两个零点。

五、（本题满分 6 分）

解： 记曲线 $y \quad \sqrt{x}$ 上点 $P(x,\sqrt{x})$ 到点 $M(4,0)$ 的距离为 d，则

$(d^2)' \quad 2x \quad 7$， 唯一驻点 $x \quad \frac{7}{2}$， $(d^2)''\big|_{x\ \frac{7}{2}} \quad 0$ ；

故当 $x \quad \frac{7}{2}$ 时，d 也最小，即点 $\frac{7}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}$ 到点 $M(4,0)$ 的距离最短，且这个最短距离

为 $d_{min} \quad \frac{\sqrt{15}}{2}$。

六、（本题满分 8 分）

(1) 设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，由题意及导数几何意义，应有 $\frac{1}{x_0} \quad \frac{\ln x_0}{x_0}$，

即 $\ln x_0 \quad 1$，于是切点为 $(e,1)$，切线的方程为 $y \quad \frac{1}{e}x$ ；

（2）于是所求面积为

$S \quad \int_0^1 e^y \quad e \quad y\,dy \quad \frac{e}{2} \quad 1$ ；

（3）所求旋转体体积为

$V \quad \frac{1}{3} \quad 1^2 \quad e \quad \int_1^e \ln^2 x dx \quad (2 \quad \frac{2}{3}e)$ 。

七、略

八、（本题满分 8 分）

证明设 $f(x)$ 在 $0,1$ 连续，在 $0,1$ 内可导，且 $f(0) \quad f(1) \quad 0, f(\frac{1}{2}) \quad 1$,

证明：（1）存在 $(\frac{1}{2},1)$, 使 $f(\ )$ ；

（2）对任意 R, 存在 $(0,\ )$, 使 $f'(\ ) \quad f(\ ) \quad 1$。

解：（1）令 $F(x) \quad f(x) \quad x$, 则 $F(x)$ 在 $0,1$ 连续，从而在 $\frac{1}{2},1$ 连续，又

$F(\frac{1}{2}) \quad \frac{1}{2} \quad 0, F(1) \quad 1 \quad 0$; 由零点定理知：

存在 $(\frac{1}{2},1)$, 使得 $F(\ ) \quad 0$，即 $f(\ )$ ；

(2) 令 $(x) \quad e^{x}[f(x) \quad x]$, 因 (x) 在 $0,$ 连续，在 $0,$ 内可导，且

$(0) \quad f(0) \quad 0, \ (\ ) \quad 0$, 故由罗尔定理知：

存在 $(0,\ )$, 使得 $'(\ ) \quad 0$, 即 $f'(\ ) \quad f(\ ) \quad 1$。