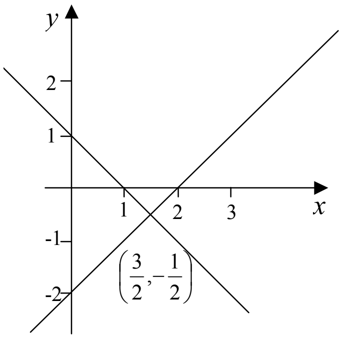
王晓峰著《线性代数》习题解答

第一章

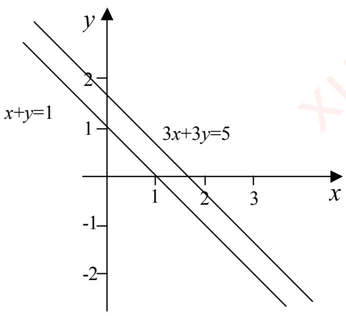
1. 1. 解下列方程组，并在直角坐标系中作出图示.

1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$；　2) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=5 \end{cases}$；　3) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$.

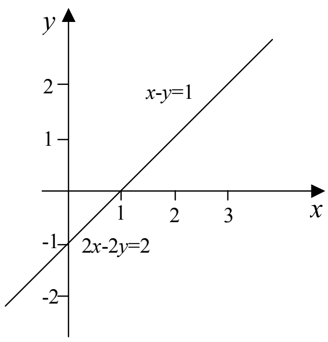
解: 1) 将第一个方程减去第二个方程，得 $2y=-1$, $y=-1/2$，再代入第个方程解得 $x=1+1/2=3/2$，绘出图示如下图所示，两直线相将于一点 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 方程有唯一解.



2) 将第二个方程除以 3 得 $x+y=\frac{5}{3}$，与第一个方程相比较知此方程组为矛盾方程组，无解，绘出图示如下图所示



3) 将第 2 个方程除以 2，可以得到第一个方程，令 $y=t$ 为任意实数，则 $x=1+t$，方程组的解集为$(1+t, t)$，图示如下图所示，方程的解集为一条直线.



2. 用 *Gauss* 消元法解下列线性方程组.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ 2x_1+x_2+x_3=13 \\ 3x_1+9x_2-36x_3=-33 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +3x_4=4 \\ 2x_2-x_3-x_4=0 \\ 3x_2 \quad -2x_4=1 \\ 2x_1-x_2+4x_3 \quad =5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \quad =0 \\ 4x_1+3x_2-x_3=0 \\ 8x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$

解: 1) 对增广矩阵进行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ 3 & 9 & -36 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-3)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & -3 & 15 & 21 \\ 0 & 3 & -15 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1/3)]{r_2\times 1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times(-2)+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 x_3 为自由变量, 令 $x_3=t$ 为任意实数, 则 $x_1=10-3t$, $x_2=5t-7$, 方程有无穷多解, 解集为 $(10-3t, 5t-7, t)$.

2) 对增广矩阵进行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-3)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & -16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times 1/8} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times 2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

则 x_3 为自由变量, 令 $x_3=t$ 为任意实数, 则 $x_1=-t$, $x_2=2t-1$,
解集为 $(-t, 2t-1, t)$.

3) 对增广矩阵进行变换:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&3&4\\0&2&-1&-1&0\\0&3&0&-2&1\\2&-1&4&0&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times(-2)+r_4}\begin{bmatrix}1&0&0&3&4\\0&2&-1&-1&0\\0&3&0&-2&1\\0&-1&4&-6&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\times 3+r_3\\ r_2\times 2+r_4}]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&0&3&4\\0&-1&4&-6&-3\\0&0&12&-20&-8\\0&0&7&-13&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(1/12)]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&-4&6&3\\0&0&1&-\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&7&-13&-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-7)+r_4]{r_3\times 4+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&0&-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4\times(\frac{5}{3})+r_3\\ r_4\times(\frac{2}{3})+r_2\\ r_4\times(-3)+r_1}]{r_4\times(-\frac{3}{4})}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

方程有唯一解 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

4) 此为齐次方程，对系数矩阵进行变换

$$\begin{bmatrix}2&3&0\\4&3&-1\\8&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-4)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2}\begin{bmatrix}2&3&0\\0&-3&-1\\0&-9&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times 1+r_1]{r_2\times(-3)+r_3}\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&-3&-1\\0&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\times 1+r_2\\ r_3\times 1+r_1}]{r_3\times(1/6)}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

可知方程有唯一零解 $x_1=x_2=x_3=0$.

3. 确定下列线性方程组中 k 的值满足所要求的解的个数.

1) 无解:

$$\begin{cases}x+2y+kz=6\\3x+6y+8z=4;\end{cases}$$

2) 有唯一解:

$$\begin{cases}kx+y=14\\2x-3y=-12\end{cases}$$

3) 有无穷多解:

$$\begin{cases}x+y+kz=4\\x+2y+z=5\\x-2y+z=1\end{cases}$$

解:

1) 对增广矩阵作变换:

$$\begin{bmatrix}1&2&k&6\\3&6&8&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times(-3)+r_2}\begin{bmatrix}1&2&k&6\\0&0&8-3k&-14\end{bmatrix}$$

因此，要使方程组无解，须使 $8-3k=0$，解得 $k=8/3$，即当 k 取值为 8/3 时，方程无解.

2) 对增广矩阵作变换:

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 14 \\ 2 & -3 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -12 \\ k & 1 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-\frac{k}{2})+r_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -12 \\ 0 & \frac{3k}{2}+1 & 6k+14 \end{bmatrix}$$

因此，如要方程组有唯一解，必须有 $\frac{3k}{2}+1 \neq 0$，即 $k \neq -\frac{2}{3}$.

3) 对增广矩阵作变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 1 & 1-k & 1 \\ 0 & -3 & 1-k & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times 3+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & 4-4k & 0 \end{bmatrix}$$

因此，如要方程组有无穷多解，必须 $4-4k=0$，即当 $k=1$ 时，方程组才有无穷多解.

4. 证明：如果对所有的实数 x 均有 $ax^2+bx+c=0$，那么 $a=b=c=0$.

证：既然对所有的实数 x 都有 $ax^2+bx+c=0$ 成立，那么具体地分别取 $x=0, x=1, x=2$ 代入上式也成立，则有

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases}$$，这是关于 a,b,c 的齐次线性方程组，对其系数矩阵作变换：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-4)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

看出此方程只有唯一零解，因此有 $a=b=c=0$.

5. 讨论以下述阶梯矩阵为增广矩阵的线性方程组是否有解；如有解区分是唯一解还是无穷多解.

1) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ 2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ 4) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

解：1) 方程组有一个自由变元 x_2，因此方程组有无穷多解.
2) 方程组的三个变元均为首项变元，因此方程组有唯一解.
3) 第三个方程 0=4 说明此方程无解.
4) 方程组的三个变元均为首项变元，因此方程组有唯一解.

6. 对给定方程组的增广矩阵施行行初等变换求解线性方程组..

1) $\begin{cases} -3x+5y=-22 \\ 3x+4y=4 \\ x-8y=32 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+12y-7z-20w=22 \\ 3x+9y-5z-28w=30 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=\frac{1}{2} \\ 4x+2y-2z+2w=2 \end{cases}$

解: 1) 对增广矩阵进行变换:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & -22 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & -8 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 32 \\ 3 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & -22 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1\times(3)+r_3]{r_1\times(-3)+r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 32 \\ 0 & 28 & -92 \\ 0 & -19 & 74 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times(1/28)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 32 \\ 0 & 1 & -\frac{23}{7} \\ 0 & -19 & 74 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times 19+r_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 32 \\ 0 & 1 & -\frac{23}{7} \\ 0 & 0 & \frac{81}{7} \end{array}\right]$$

方程组无解.

2) 对增广矩阵进行变换

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 12 & -7 & -20 & 22 \\ 3 & 9 & -5 & -28 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\times(1/4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -\frac{7}{4} & -5 & \frac{11}{2} \\ 3 & 9 & -5 & -28 & 30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\times(-3)+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -\frac{7}{4} & -5 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -13 & \frac{27}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times 4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -\frac{7}{4} & -5 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -52 & 54 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times 4/7+r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -96 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & -52 & 54 \end{array}\right]$$

可以看出 y 和 w 为自由变元, 则令 $y=s$, $w=t$, s 与 t 为任意常数, 则 $x=100-3s+96t$, $z=54+52t$. 方程的解集表示为$(100-3s+96t, s, 54+52t, t)$.

3) 对增广矩阵进行变换

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-4)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{r_2\times(-2)+r_3 \\ r_2\times(1/2) \\ r_2\times(1/2)+r_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

可知 y 与 z 为自由变元, 令 $y=s$, $z=t$, s 与 t 均为任意实数, 则 $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t, w=0$, 方程组的解集为$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t, s, t, 0\right)$

7. 对给定齐次线性方程组的系数矩阵施行行初等变换求解下列方程组.

1) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + z + w = 0 \\ x - 2y + 2w = 0 \\ 2y - z + w = 0 \end{cases}$

解: 1) 对系数矩阵作初等变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-2)+r_3]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3\times(-3/5) \\ r_3\times(2/3)+r_2 \\ r_3\times(-1/3)+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程只有零解, $x=y=z=0$.

2) 对系数矩阵作初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times 2+r_3]{r_2\times(-1)+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\times(-1/3)]{r_2\times(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-2)+r_1]{r_3\times(1/2)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此, w 为自由变元, 令 $w=t$ 为任意实数, 则 $x=-2t, y=0, z=t$, 方程组的解集为 $(2t, 0, t, t)$.

8. 设一线性方程组的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & \alpha & 3 \end{array}\right]$$

求α的值使得此方程组有唯一解.

解: 对增方矩阵求初等变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & \alpha & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1\times(-2)+r_3]{r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & \alpha-2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & 4 \end{array}\right]$$

因此, 此方程组要有唯一解, 就必须满足$\alpha+2\neq 0$, 即$\alpha\neq -2$.

9. 设一线性方程组的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & \beta & 0 \end{array}\right]$$

1) 此方程有可能无解吗？说明你的理由.
2) β取何值时方程组有无穷多解？
解: 1) 此方程一定有解, 因为此方程是齐次方程, 至少有零解.
2) 对此增广矩阵做初等变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & \beta & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1+r_3]{r_1\times 2+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & \beta-1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times 6+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta+5 & 0 \end{array}\right]$$

因此, 只有当$\beta+5=0$, 即$\beta=-5$ 时,方程才有无穷多解.

10. 求λ的值使得下述方程组有非零解.

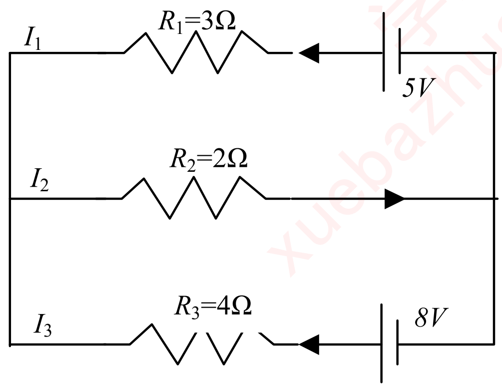
$$\begin{cases} (\lambda-2)x + \quad y = 0 \\ -x + (\lambda-2)y = 0 \end{cases}$$

解: 对系数矩阵作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -1 & \lambda-2 \\ \lambda-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(\lambda-2)+r_2} \begin{bmatrix} -1 & \lambda-2 \\ 0 & (\lambda-2)^2+1 \end{bmatrix}$$

因此, 要使方程有非零解, 必须有$(\lambda-2)^2+1=0$, 但$(\lambda-2)^2+1\geqslant 0$ 对λ取任何实数值总是成立, 因此必有$(\lambda-2)^2+1\neq 0$, 因此, 无论λ取什么值此方程组都不会有非零解.

11. 求出下列电路网络中电流 I_1,I_2,I_3 的值.



解: 根据基尔霍夫定律可得如下方程组:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 2I_2 + 4I_3 = 8 \\ 3I_1 + 2I_2 = 5 \end{cases}$$

对增广矩阵做初等行变换

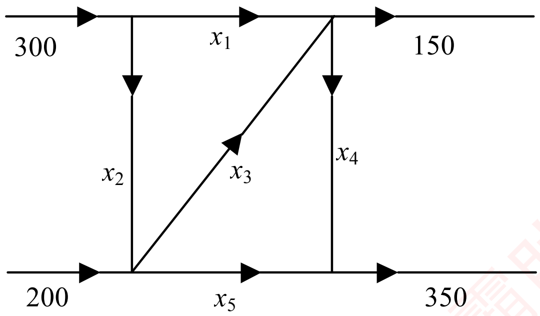
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&4&8\\3&2&0&5\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(1/2)]{r_1\times(-3)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&2&4\\0&5&-3&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times 1+r_1]{r_2\times(-5)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&4\\0&1&2&4\\0&0&-13&-15\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\times(-1/13)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&4\\0&1&2&4\\0&0&1&15/13\end{array}\right]$$

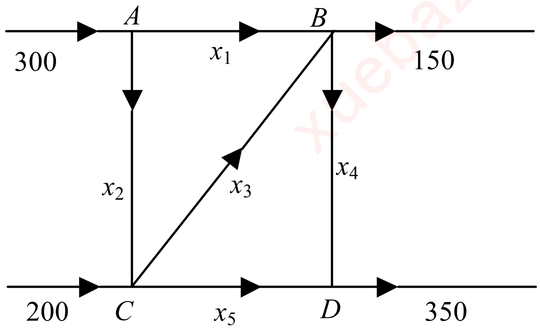
$$\xrightarrow[r_3\times(-3)+r_1]{r_3\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&7/13\\0&1&0&22/13\\0&0&1&15/13\end{array}\right]$$

最后得 I_1=7/13, I_2=22/13, I_3=15/13

12. 一城市局部交通流如图所示.(单位: 辆/小时)



1) 建立数学模型
2) 要控制 x_2 至多 200 辆/小时, 并且 x_3 至多 50 辆小时是可行的吗?
解: 1} 将上图的四个结点命名为 A, B, C, D, 如下图所示:



则每一个结点流入的车流总和与流出的车流总和应当一样, 这样这四个结点可列出四个方程如下:

$$\begin{cases}x_1+x_2 \qquad\qquad\qquad =300 & A\\ x_1 \qquad +x_3-x_4 \qquad =150 & B\\ \quad -x_2+x_3 \qquad +x_5=200 & C\\ \qquad\qquad\qquad x_4+x_5=350 & D\end{cases}$$

对增广矩阵进行变换:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&0&300\\1&0&1&-1&0&150\\0&-1&1&0&1&200\\0&0&0&1&1&350\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&0&300\\0&-1&1&-1&0&-150\\0&-1&1&0&1&200\\0&0&0&1&1&350\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)+r_1]{\substack{r_2\times(-1)\\ r_2+r_3}}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&-1&0&150\\0&1&-1&1&0&150\\0&0&0&1&1&350\\0&0&0&1&1&350\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{r_3\times(-1)+r_4\\ r_3\times(-1)+r_2\\ r_3+r_1}}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&1&500\\0&1&-1&0&-1&-200\\0&0&0&1&1&350\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

可见 x_3 和 x_5 为自由变量，因此令 $x_3=s, x_5=t$，其中 s,t 为任意正整数(车流量不可能为负值)，则可得 $x_1=500-s-t, x_2=s+t-200, x_4=350-t$.

2) 令 $x_2=200, x_3=s=50$，代入上面的 x_2 的表达式，得 $200=50+t-200$，求出 $t=350$，则 $x_1=500-s-t=100, x_4=0$，是可行的.

13. 在应用三的货物交换经济模型中，如果交换系统由下表给出，试确定农作物的价值 x_1，农具及工具的价值 x_2，织物的价值 x_3 的比值.

	F	M	C
F	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

解：根据上表可得关于 x_1, x_2, x_3 的三个齐次方程如下：

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=0\\ \frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=0\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵做行初等变换：

$$\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times 3\\ r_2\times 3\\ r_3\times 3\\ r_1\leftrightarrow r_2}}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times 2+r_2\\ r_1\times(-1)+r_3}}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2\times 1+r_3\\ r_2\times(-1/3)}}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times 2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可见方程有非零解，x_3 为自由变量，令 $x_3=t$ 为任意正实数，则有 $x_1=x_2=x_3=t$，即三种价值的比值为 1:1:1.

第二章

2. 1. 写出下列方程组的矩阵形式：

1) $x_1-2x_2+5x_3=-1$; 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + y + 4z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

解:

1) $[1,-2,5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. 设

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

求: 1) $3A-2B$;

2) 若 X 满足 $A^T+X^T=B^T$, 求 X..

解: 1)

$$3A-2B = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-8 & 6-6 & 3-4 \\ 6-(-4) & 3-2 & 6-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

2)

因 X 满足 $A^T+X^T=B^T$, 等号两边同时转置, 有

$A+X=B$,

等号两边同时减去 A, 得

$X=B-A$,

因此有

$$X = B - A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1 & 3-2 & 2-1 \\ -2-2 & 1-1 & -2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

3. 计算下列矩阵的乘积:

1) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$;　　4) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$

解:

1)

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=-1\times 3+2\times 1+1\times 2=1$$

2)

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1) & 1\times 2\\ 2\times(-1) & 2\times 2\\ 3\times(-1) & 3\times 2\\ 4\times(-1) & 4\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\\ -3 & 6\\ -4 & 8\end{bmatrix}$$

3)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\times 1+2\times 0+3\times 3 & 1\times 2+2\times 1+3\times 0 & 1\times 0+2\times 1+3\times(-1)\\ -2\times 1+1\times 0+2\times 3 & -2\times 2+1\times 1+2\times 0 & -2\times 0+1\times 1+2\times(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 4 & -1\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

4)

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\times 1+0\times(-1)+1\times 0\\ 0\times 1+2\times(-1)-1\times 0\\ -1\times 1+1\times(-1)+0\times 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times 1+1\times(-2)+2\times(-2)\\ 0\times 1+3\times(-2)+1\times(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ -8\end{bmatrix}$$

4. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

求: 1) $(A+B)(A-B)$;

　2) A^2-B^2.

比较 1)和 2)的结果, 可得出什么结论?

解: 1)

$$(A+B)(A-B)=\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&3&3\\1&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&1&5\\-3&6&0\\-7&6&5\end{bmatrix}$$

2)

$$A^2-B^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&4\\0&5&5\\0&5&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&0&0\\2&1&6\\5&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&1&4\\-2&4&-1\\-5&5&6\end{bmatrix}$$

可得出的结论：大家知道，在代数公式上有 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，而将此公式中的 a 和 b 换成矩阵 A 与 B，就不一定成立了，这是因为矩阵乘法一般不满足交换律，即一般 $AB\neq BA$，当然也就有 $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.

5. 已知矩阵 A,B,C，求矩阵 X,Y 使其满足下列方程：

$$\begin{cases}2X-Y=C\\X+Y=(A+B)^T\end{cases}$$

解：将此方程编上号，用类似解线性方程组一样的办法来解，

$$\begin{cases}2X-Y=C & (1)\\X+Y=(A+B)^T & (2)\end{cases}$$

将方程(1)的左边和(2)的左边和左边相加，右边和右边相加，等号还是成立，得：

$3X=C+(A+B)^T$

两边同乘 1/3，得

$$X=\frac{1}{3}C+\frac{1}{3}(A+B)^T \qquad (3)$$

(2)式等号两边都加上 X，得

$Y=(A+B)^T-X$ (4)

将(3)式代入到(4)式，得

$$Y=(A+B)^T-\frac{1}{3}C-\frac{1}{3}(A+B)^T=\frac{2}{3}(A+B)^T-\frac{1}{3}C$$

因此

$$\begin{cases}X=\frac{1}{3}A^T+\frac{1}{3}B^T+\frac{1}{3}C\\Y=\frac{2}{3}A^T+\frac{2}{3}B^T-\frac{1}{3}C\end{cases}$$

6. 如矩阵 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换，试证：

1) 如果 B_1, B_2 都与 A 可交换，那么 B_1+B_2, B_1B_2，也与 A 可交换；

2) 如果 B 与 A 可交换，那么 B 的 $k(k>0)$次幂 B^k 也与 A 可交换.

证：1) 因 B_1, B_2 都与 A 可交换，即 $AB_1=B_1A, AB_2=B_2A$，则

$(B_1+B_2)A=B_1A+B_2A=AB_1+AB_2=A(B_1+B_2)$

即 B_1+B_2 与 A 可交换. 而且

$(B_1B_2)A=B_1(B_2A)=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=(AB_1)B_2=A(B_1B_2)$,

因此 B_1B_2 与 A 可交换.

2)因 B 与 A 可交换, 即 $AB=BA$, 则用归纳法, 当 $k=1$ 时, 有 $B^1=B$, 结论显然成立.

假设当 $k=m$ 时假设成立, 即 $AB^m=B^mA$,

则当 $k=m+1$ 时, 有

$AB^{m+1}=AB^mB=B^mAB=B^mBA=B^{m+1}A$,

结论也成立.

7. 如矩阵 $A=A^T$, 则称 A 为对称矩阵.

设 A,B 都是 n 阶对称矩阵, 证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证: 已知 $A=A^T$, $B=B^T$,

充分性: 假设 $AB=BA$, 则$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$, 因此 AB 为对称矩阵.

必要性: 如果 AB 为对称矩阵, 即$(AB)^T=AB$, 则因

$(AB)^T=B^TA^T=BA$, 可得 $BA=AB$.

8. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

其中 $a_i\neq a_j$, 当 $i\neq j$ $(i,j=1,2,\dots,n)$. 试证: 与 A 可交换的矩阵一定是对角矩阵.

证:

假设矩阵 $B=\{b_{ij}\}_n$ 与 A 可交换, 即有 $BA=AB$, 而 BA 相乘得到的矩阵为 B 的第 j 列所有元素都乘上 a_j 得到的矩阵, AB 相乘得到的矩阵为 B 的第 i 行元素都乘上 a_i 得到的矩阵. 即 $BA=\{a_jb_{ij}\}_n$, $AB=\{a_ib_{ij}\}_n$, 但对于任给的 $i,j,i\neq j$, 因 $AB=BA$, 因此有 $a_jb_{ij}=a_ib_{ij}$, 因 $a_i\neq a_j$, 所以必有 $b_{ij}=0$, 即 B 只能是对角矩阵.

9. 检验以下两个矩阵是否互为可逆矩阵?

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解: 计算 AB 和 BA 如下:

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1&1\times(-2)+2\times1&1\times1+2\times(-2)+3\times1&2\times1+3\times(-2)+4\times1\\0&1\times1&1\times(-2)+2\times1&1\times1+2\times(-2)+3\times1\\0&0&1\times1&1\times(-2)+2\times1\\0&0&0&1\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I_4$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1&1\times2+(-2)\times1&1\times3+(-2)\times2+1\times1&1\times4+(-2)\times3+1\times2\\0&1\times1&1\times2+(-2)\times1&1\times3+(-2)\times2+1\times1\\0&0&1\times1&1\times2+(-2)\times1\\0&0&0&1\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I_4$$

因此 A 与 B 确实互为逆矩阵.

10. 设 A,B,C 为 n 阶方阵, 且 C 非奇异, 满足 $C^{-1}AC=B$, 求证 $B^m=C^{-1}A^mC$ (m 为正整数).
证: 用归纳法, 当 $m=1$ 时条件已经成立为 $C^{-1}AC=B$, 假设当 $m=k$ 时, 命题成立, 即有 $B^k=C^{-1}A^kC$, 则当 $m=k+1$ 时, 有
$B^{k+1}=B^kB=C^{-1}A^kCC^{-1}AC=C^{-1}A^k(CC^{-1})AC=C^{-1}A^kIAC=C^{-1}A^kAC=C^{-1}A^{k+1}C$,
命题得证.

11. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-4I=0$, 试证 $A+I$ 可逆, 并求$(A+I)^{-1}$.
证: 将 $A^2-2A-4I=0$ 改写为 $A^2-2A-3I=I$,

先解一元二次方程组 $x^2-2x-3=0$, 根据公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

其中 $a=1, b=-2, c=-3$, 则 $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$, 因此可将多项式 x^2-2x-3 因式分解为 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$, 那么, 根据矩阵相乘相加的性质也就能将 $A^2-2A-3I$ 因式分解为 $A^2-2A-3I=(A-3I)(A+I)=(A+I)(A-3I)$, 因此我们有
$(A-3I)(A+I)=(A+I)(A-3I)=I$, 即 $A+I$ 与 $A-3I$ 互为逆矩阵,

$(A+I)^{-1}=A-3I$.

12. 证明: 如果 $A=AB$, 但 B 不是单位矩阵, 则 A 必为奇异矩阵.
证: 用反证法, 假设 A 为可逆, 其逆为 A^{-1}, 则对于 $A=AB$ 两边同时左乘 A^{-1}, 得 $A^{-1}A=A^{-1}AB$, 即 $I=B$, 这与 B 不是单位矩阵相矛盾, 因此 A 必为奇异矩阵.

13. 判别下列矩阵是否初等矩阵?

1) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, 4) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

解: 1) 是初等矩阵 $P(2(-2))$,
2) 是初等矩阵 $P(1,3)$,
3) 不是初等矩阵,
4) 是初等矩阵 $P(3(-4), 2)$.

14. 求 3 阶方阵 A 满足

$$A\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}-5a_{31} & a_{12}-5a_{32} & a_{13}-5a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

解: 从等式看出 A 左乘一矩阵相当于对此矩阵作初等行变换 $r_3\times(-5)+r_1$, 因此 A 为一相应的初等矩阵, 即

$$A=P(3(-5),1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

15. 设 A,B,C 均为 n 阶可逆矩阵, 且 $ABC=I$, 证明 $BCA=I$
证: 因 B,C 为可逆矩阵, 则 BC 也是可逆矩阵, 且$(BC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}$,
因 $ABC=I$, 对此等式两边右乘$(BC)^{-1}$, 即 $ABC(BC)^{-1}=I(BC)^{-1}$,
因为 $BC(BC)^{-1}=I$, 因此上式化简为 $A=(BC)^{-1}$, 因此当然有
$BCA=BC(BC)^{-1}=I$.

16. 设 A,B 均为 n 阶方阵, 且 $A=\frac{1}{2}(B+I)$, 证明: $A^2=A$ 的充分必要条件是 $B^2=I$.
证: 充分性: 假设 $B^2=I$, 则

$$A^2=\frac{1}{4}(B+I)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+I)=\frac{1}{4}(2B+2I)=\frac{1}{2}(B+I)=A$$

必要性: 如果 $A^2=A$, 则有

$$\frac{1}{2}(B+I)=\frac{1}{4}(B+I)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+I)$$

等式两边乘 4 得

$$2B+2I=B^2+2B+I,$$

等式两边同时减去 $2B+I$ 得

$B^2=I$
证毕.

17. 如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, 且 $A\neq I$, 则 A 为奇异矩阵.
证: 用反证法, 假设 A 为可逆, 其逆为 A^{-1}, 则上式两边左乘(或者右乘) A^{-1}, 得 $AAA^{-1}=AA^{-1}$, 即 $A=I$, 但这与 $A\neq I$ 相矛盾, 因此 A 的逆不存在, 即 A 为奇异矩阵.

18. 求下列矩阵的逆矩阵:

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 4\\ 5 & 8 & 2\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

3) $A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$

解: 用对 $[A|I]$ 进行行初等变换为 $[I|A^{-1}]$ 的办法来求:

1)

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-5)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 6 & -9 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 18 & -18 & 0 & -5 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(1/3)+r_1]{r_2\times(-3)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 6 & -9 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1/9)+r_1]{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & -1/9\\ 0 & 6 & 0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 9 & -3 & 1 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\times 1/9]{r_2\times 1/6}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & -1/9\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/9 & 1/9\end{array}\right]$$

因此, 最后得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2/3 & 2/9 & -1/9\\ -1/3 & -1/6 & 1/6\\ -1/3 & 1/9 & 1/9\end{bmatrix}$$

2)

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1\times(-1)+r_2\\ r_1\times(-1)+r_3\\ r_1\times(-1)+r_4}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(1/2)+r_1]{r_2\times(-1)+r_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times 1/2+r_1]{r_3\times(-1)+r_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4\times 1/2+r_2 \\ r_4\times 1/2+r_3}]{r_4\times 1/4+r_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\times(-1/2) \\ r_4\times 1/4}]{r_2\times(-1/2)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

因此有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}A$$

3)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_{n-1}\leftrightarrow r_{n-2} \\ \cdots \\ r_1 \leftrightarrow r_2}]{r_n \leftrightarrow r_{n-1}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_n\times 1/a_{n-1}]{\substack{r_1\times 1/a_n\\ r_2\times 1/a_1\\ \vdots}}\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&1/a_n\\0&1&0&\cdots&0&1/a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&1/a_2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&\cdots&1/a_{n-1}&0\end{array}\right]$$

因此，最后得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1/a_n\\1/a_1&0&\cdots&0&0\\0&1/a_2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1/a_{n-1}&0\end{bmatrix}$$

19. 解下列矩阵方程，求出未知矩阵 X.

1) $\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix}$　　2) $X\begin{bmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{bmatrix}$

解：令 $A=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix}$，则要解的方程为 $AX=B$

将方程两边左乘上 A 的逆 A^{-1}，可得 $A^{-1}AX=A^{-1}B$，即

$X=A^{-1}B$

下面求 A^{-1}:

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{cc|cc}2&5&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\2&5&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\0&-1&1&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2\times 3+r_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-5\\0&1&-1&2\end{array}\right]$$

因此有 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}$

因此 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-23\\0&8\end{bmatrix}$

2) 令 $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{bmatrix}$　则矩阵方程为 $XA=B$

设 A 的逆存在为 A^{-1}，则方程两边右乘 A^{-1}，得 $XAA^{-1}=BA^{-1}$，

即

$X=BA^{-1}$

下面求 A^{-1}:

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&2&1&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\-3&3&-4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times 1/2]{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/2&3/2&0&1/2&0\\0&2&1&1&0&0\\-3&3&-4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times 1/2]{r_1\times 3+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 3/2 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-3/2)+r_3]{r_2\times 1/2+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 7/4 & 1/4 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1/4 & -3/4 & 3/2 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-4)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 7/4 & 1/4 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-7/4)+r_1]{r_3\times(-1/2)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -5 & 11 & 7\\0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2\\0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -4\end{array}\right]$$

因此，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-5 & 11 & 7\\-1 & 3 & 2\\3 & -6 & -4\end{bmatrix}$$

最后得

$$X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 11 & 7\\-1 & 3 & 2\\3 & -6 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-4 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

20. 求矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

解：将方程两边减去 $2X$，得 $AX-2X=A$

因 $2X=2IX$，因此上面的方程可以从右边提取公因子 X，得

$(A-2I)X=A$

假设 $A-2I$ 可逆，则方程两边同时左乘$(A-2I)^{-1}$，得$(A-2I)^{-1}(A-2I)X=(A-2I)^{-1}A$，

即 $X=(A-2I)^{-1}A$

设 $B=A-2I$，则 $X=B^{-1}A$，而

$$B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

下面用行初等变换求 B 的逆 B^{-1}：

$$[B\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2\times 1+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\times(-1)+r_1]{r_3\times(-1)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1\\0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

则

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

最后得

$$X=B^{-1}A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}$$

验算:

$$A+2X=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10&-4&-4\\8&-6&-4\\-4&4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-4&-3\\9&-5&-4\\-4&5&10\end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-4&-3\\9&-5&-4\\-4&5&10\end{bmatrix}$$

21. 利用分块的方法, 求下列矩阵的乘积:

1) $\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$;　　2) $\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\1&0&b&0\\0&1&0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&c&0\\0&1&0&c\\0&0&d&0\\0&0&0&d\end{bmatrix}$

解:

1) 将乘积分块为 $\left[\begin{array}{c|cc}1&-2&0\\0&1&1\\1&0&2\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0&1\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right]=[A\,|\,B]\left[\dfrac{C}{I_2}\right]$

其中 $A=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$

$$[A\,|\,B]\left[\frac{C}{I_2}\right]=AC+BI_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\\0&3\end{bmatrix}$$

2) 将乘积分块为

$$\left[\begin{array}{cc|cc}a&0&0&0\\0&a&0&0\\\hline 1&0&b&0\\0&1&0&b\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&c&0\\0&1&0&c\\\hline 0&0&d&0\\0&0&0&d\end{array}\right]=\begin{bmatrix}aI_2&O_2\\I_2&bI_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2&cI_2\\O&dI_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}aI_2&acI_2\\I_2&(c+bd)I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0&ac&0\\0&a&0&ac\\1&0&c+bd&0\\0&1&0&c+bd\end{bmatrix}$$

第三章

3.　1. 计算下列行列式:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$

解: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = 4 - 6 = -2$;

2) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - a^2 b = ab(b-a)$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0\times 7 - 0\times(-4) = 0$.

2. 计算下列三阶行列式:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

解: 1) 将行列式按第一列展开

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 10 = 8$$

2) 将行列式按第二行展开

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\times 3 - 2\times 7 = 1$$

3)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - a^3 - b^3 - c^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

3. 计算下列行列式:

1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$

解: 1) 将行列式按第一列展开后, 得到的各子式再按第二列展开, 这样展开后的后三列构成的任何三阶子式都至少包括一行 0, 因此后三列任何三阶子式均为 0, 整个行列式的值 D=0.

2) 将行列式按第一列展开得

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

3) 先对第一列展开, 然后对第二列展开, 得

$$D = -b\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = -ba\begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = -badf = -abdf$$

4. 利用行列式的性质计算下列行列式

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

解: 下面都将所求行列式的值设为 D.

1) 因为第 1 行加到第 2 行以后, 第 2 行将和第 4 行相等, 因此行列式的值 D=0;

2) 首先从第 1,2,3 行分别提取公因子 a,d,f, 再从第 1,2,3 列提取公因子 b,c,e, 得

$$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adfbce\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

3) 将第 2,3,4 列都展开, 并统统减去第 1 列, 得

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

再将第 3 列减去 2 倍的第 2 列, 第 4 列减去 3 倍的第 2 列, 得

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

5. 把下列行列式化为上三角形行列式, 并计算其值

1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解:

1)

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1\times 2+r_2 \\ r_1\times(3/2)+r_3 \\ r_1\times 1+r_4}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_2\leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -8 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{=} \begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2\times 8+r_3 \\ r_2\times 5+r_4}}{=} \begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \end{vmatrix} \overset{c_3\leftrightarrow c_4}{=} -\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3\times(-2)+r_4}{=} -\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{vmatrix} = 2\times 1\times 5\times(-27) = -270$$

2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_3\leftrightarrow c_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1\times 1+r_2 \\ r_1\times(-2)+r_3 \\ r_1\times(-1)+r_4}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2\times(-2)+r_3 \\ r_2\times 1+r_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3\times 1+r_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

6. 计算下列 n 阶行列式

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ b & & & & a \end{vmatrix}$

解: 1) 设此行列式的值为 D, 将第 $2,3,\ldots,n$ 列均加于第一列, 则第一列的所有元素均为 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 将此公因式提出, 因此有

$$D=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&3&4&\cdots&1\\1&4&5&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}$$

再令第 n 行减去第 n-1 行，第 n-1 行减去第 n-2 行，…，第 2 行减去第 1 行，可得

$$D=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&1&\cdots&1-n\\0&1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\overbrace{\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1-n&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}}^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\left(\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&\cdots&0&-n\\0&\cdots&-n&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&\cdots&0&0\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}n(n+1)(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(-n)^{n-1}$$

2) 此题和第 3 题的 2)一样，因此有 $D=a^n+(-1)^{n+1}b^n$

7. 证明下列行列式

1) $$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ca&ab\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

2) $$\overbrace{\begin{vmatrix}a&&&&&&&b\\&a&&&&&b&\\&&\ddots&&&\iddots&&\\&&&a&b&&&\\&&&b&a&&&\\&&\iddots&&&\ddots&&\\&b&&&&&a&\\b&&&&&&&a\end{vmatrix}}^{2n}=(a^2-b^2)^n$$

证: 1)

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ca&ab\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1\times(-1)+c_2\\c_2\times(-1)+c_3}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&c(a-b)&b(a-c)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&c-a\\c(a-b)&b(a-c)\end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}-1&-1\\c&b\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(c-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

2) 用归纳法，设 D_n 为所求行列式值，当 n=1 时，

$D_1=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2$，等式成立.

假设当 $n=k$ 时假设成立，即有

$$D_k=\overbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & & & b & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & & & a & b & & \\ & & & b & a & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & b & & & & a & \\ b & & & & & & a \end{vmatrix}}^{2k}=(a^2-b^2)^k$$

当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=\overbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & & & b & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & & & a & b & & \\ & & & b & a & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & b & & & & a & \\ b & & & & & & a \end{vmatrix}}^{2k+2}\overset{\text{按第一列展开}}{=}$$

$$=a\overbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ b & & & & & a & \\ & & & & & & a \end{vmatrix}}^{2k+1}+b\overbrace{\begin{vmatrix} & & & & & & b \\ a & & & & & b & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ b & & & & & a & \end{vmatrix}}^{2k+1}=$$

$$=a^2D_k-b^2D_k=D_k(a^2-b^2)=(a^2-b^2)^k(a^2-b^2)=(a^2-b^2)^{k+1}$$

证毕.

8. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 A^*，并求 A^{-1}.

解:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&-2\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\0&-2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\1&-1\end{vmatrix}=-2$$

因此得 $A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&3\\2&-4&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$

A 的行列式为 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=2\times1+0\times2+3\times1=5$

因此有 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}1&3&3\\2&-4&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$

9. 设 A 为三阶方阵, A^*是 A 的伴随矩阵, 且$|A|=1/2$, 求行列式$|(3A)^{-1}-2A^*|$的值.

解: 因 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*, A^*=|A|A^{-1}=\dfrac{1}{2}A^{-1}$, 以及 $(3A)^{-1}=\dfrac{1}{3}A^{-1}$, 还有 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=2$,

则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=|\dfrac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}|=|-\dfrac{2}{3}A^{-1}|=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3|A^{-1}|=-\dfrac{8}{27}\times2=-\dfrac{16}{27}$

10. 设 A 为 n 阶可逆阵, $A^2=|A|I$, 证明: A 的伴随矩阵 $A^*=A$.

证: 因 A 可逆, 则在等式 $A^2=|A|I$ 两边乘 A^{-1}, 得 $A=|A|A^{-1}$, 即

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$, 而因为 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$, 所以有 $A=A^*$, 证毕.

11. 用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31\\5x_1+x_2+2x_3=29\\3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=6\\x_1+x_2+5x_3+2x_4=2\\2x_1+x_2+3x_3+4x_4=2\\x_1+x_2+3x_1+4x_2=2\end{cases}$

解: (1) 方程的系数矩阵 A 为

$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\5&1&2\\3&-1&1\end{bmatrix}$, 常数向量 $\beta=[31\quad 29\quad 10]^T$, 则求 A 的逆矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\5&1&2&0&1&0\\3&-1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-3)+r_3]{r_1\times(-5)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\0&-9&-18&-5&1&0\\0&-7&-11&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1/9)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\0&1&2&5/9&-1/9&0\\0&-7&-11&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times 7+r_3]{r_2\times(-2)+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/9&2/9&0\\0&1&2&5/9&-1/9&0\\0&0&3&8/9&-7/9&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times 1/3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/9&2/9&0\\0&1&2&5/9&-1/9&0\\0&0&1&8/27&-7/27&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/9&2/9&0\\0&1&0&-1/27&11/27&-2/3\\0&0&1&8/27&-7/27&1/3\end{array}\right]$$

因此得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/9&2/9&0\\-1/27&11/27&-2/3\\8/27&-7/27&1/3\end{bmatrix}$$

则方程的解 X 为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A^{-1}\beta=\begin{bmatrix}-1/9&2/9&0\\-1/27&11/27&-2/3\\8/27&-7/27&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31\\29\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

即 $x_1=3,x_2=4,x_3=5$.

(2) 方程的系数矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}2&3&11&5\\1&1&5&2\\2&1&3&4\\1&1&3&4\end{bmatrix}$$, 常数向量 $\beta=\begin{bmatrix}6&2&2&2\end{bmatrix}^T$

先求 A 的逆 A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&3&11&5&1&0&0&0\\1&1&5&2&0&1&0&0\\2&1&3&4&0&0&1&0\\1&1&3&4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&5&2&0&1&0&0\\2&3&11&5&1&0&0&0\\2&1&3&4&0&0&1&0\\1&1&3&4&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1\times(-2)+r_3\\ r_1\times(-1)+r_4}]{r_1\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&5&2&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&-2&0&0\\0&-1&-7&0&0&-2&1&0\\0&0&-2&2&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times 1+r_3]{r_2\times(-1)+r_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&4&1&-1&3&0&0\\0&1&1&1&1&-2&0&0\\0&0&-6&1&1&-4&1&0\\0&0&-2&2&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1/2)]{r_3\leftrightarrow r_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&4&1&-1&3&0&0\\0&1&1&1&1&-2&0&0\\0&0&1&-1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&-6&1&1&-4&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\times(-1)+r_2\\ r_3\times6+r_3}]{r_3\times(-4)+r_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&5&-1&1&0&2\\0&1&0&2&1&-5/2&0&1/2\\0&0&1&-1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&0&-5&1&-1&1&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4\times(-1/5)}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&5&-1&1&0&2\\0&1&0&2&1&-5/2&0&1/2\\0&0&1&-1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&0&1&-1/5&1/5&-1/5&3/5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4\times(-2)+r_2\\ r_4\times1+r_3}]{r_4\times(-5)+r_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&7/5&-29/10&2/5&-7/10\\0&0&1&0&-1/5&7/10&-1/5&1/10\\0&0&0&1&-1/5&1/5&-1/5&3/5\end{array}\right]$$

因此有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\7/5&-29/10&2/5&-7/10\\-1/5&7/10&-1/5&1/10\\-1/5&1/5&-1/5&3/5\end{bmatrix}$$

则

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=A^{-1}\beta=\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\7/5&-29/10&2/5&-7/10\\-1/5&7/10&-1/5&1/10\\-1/5&1/5&-1/5&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix}$$

即 $x_1=0, x_2=2, x_3=0, x_4=0$.

12. 如果齐次线性方程组有非零解, k 应取什么值?

$$\begin{cases}(5-k)x+2y+2z=0\\ 2x+(6-k)y=0\\ 2x+(4-k)z=0\end{cases}$$

解: 此方程组的系数矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}5-k&2&2\\2&6-k&0\\2&0&4-k\end{bmatrix}$$

要使方程组有非零解, 必须有 $\det(A)=0$.

而

$$\det(A)=\begin{vmatrix}5-k&2&2\\2&6-k&0\\2&0&4-k\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1\times(-2)+r_2\\ r_3\times2+r_2}}{=}\begin{vmatrix}5-k&2&2\\-4+2k&2-k&4-2k\\2&0&4-k\end{vmatrix}$$

$$=(k-2)\begin{vmatrix}5-k & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 4-k\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3\times(-2)+r_1\\ r_2\times 2+r_1}}{=}(k-2)\begin{vmatrix}5-k & 0 & -10+k\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 4-k\end{vmatrix}$$

$$=(k-2)(k-5)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 4-k\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1\times 2+r_2\\ r_1\times 2+r_3}}{=}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 8-k\end{vmatrix}=-(k-2)(k-5)(k-8)$$

因此，只有当 k=5 或者 k=2 或者 k=8 时，此方程组才有非零解.

13. 问λ,μ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$ 有非零解?

解: 此方程组的系数矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{bmatrix}$$，要使方程组有非零解，必须 det(A)=0,

而

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1\times(-1)+r_2\\ r_1\times(-1)+r_3}}{=}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1-\lambda & \mu-1 & 0\\ 1-\lambda & 2\mu-1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第3列展开}}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & \mu-1\\ 1-\lambda & 2\mu-1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & \mu-1\\ 1 & 2\mu-1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\mu$$

因此，只有当λ=1 或者μ=0 时，方程组才有非零解.

4. 1. 设α_1=(1,1,1), α_2=(−1,2,1), α_3=(2,3,4)，求$\beta=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$

解: $\beta=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$=3(1,1,1)+2(−1,2,1)−(2,3,4)=(3,3,3)+(−2,4,2)−(2,3,4)

=(3−2−2, 3+4−3, 3+2−4)=(−1, 4, 1)

2. 设 $3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$，求$\alpha$，其中

α_1=(2,5,1,3), α_2=(10,1,5,10), α_3=(4,1,−1,1)

解: 将上述方程整理:

$3\alpha_1-3\alpha+2\alpha_2+2\alpha=5\alpha_3+5\alpha$

$-3\alpha+2\alpha-5\alpha=-3\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$

$(-3+2-5)\alpha=-3\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$

$-6\alpha=-3\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$

最后得

$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2-\frac{5}{6}\alpha_3=\frac{1}{2}(2,5,1,3)+\frac{1}{3}(10,1,5,10)-\frac{5}{6}(4,1,-1,1)$$
$$=(1,\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})+(\frac{10}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3})-(\frac{10}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{6})$$
$$=(1+\frac{10}{3}-\frac{10}{3},\frac{5}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6},\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{6},\frac{3}{2}+\frac{10}{3}-\frac{5}{6})$$
$$=(1,2,3,4)$$

3. 设 R 为全体实数的集合，并且设

$V_1=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in R,\text{满足}x_1+\cdots+x_n=0\}$,

$V_2=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in R,\text{满足}x_1+\cdots+x_n=1\}$.

问 V_1,V_2 是否向量空间？为什么？

解: (一般的技巧：凡是对 R^n 作一个齐次线性方程的约束的集合都是向量子空间，而作非齐次线性方程的约束的集合则因为它不穿过原点，就不是向量子空间).

V_1 是向量空间，且是 R^n 的向量子空间，因为 $V_1\subset R^n$，而任给 $X,Y\in V_1,k\in R$，设

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad x_1+\cdots+x_n=0$

$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),\quad y_1+\cdots y_n=0$

则令 $Z=X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$,

则因 $z_1+z_2+\cdots+z_n=x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n=$

$=x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_n=0$,

则 $X+Y\in V_1$,

因为 $kX=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$，而 $kx_1+\cdots+kx_n=k(x_1+\cdots+x_n)=0$

则 $kX\in V_1$,

因此，V_1 是 R^n 的向量子空间.

而 V_2 不是向量空间，是因为 $0+0+\cdots+0\neq 1$，零向量 O 不属于 V_2，$O\notin V_2$.

4. 试证：由 $\alpha_1=(0,0,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,1,1)$ 所生成的向量空间就是 R^3

证：因为 $Span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\subset R^3$，只须证 $R^3\subset Span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,

任给 $D=(d_1,d_2,d_3)\in R^3$，试求实数 x_1,x_2,x_3 使

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=D$，即

$x_1(0,0,1)+x_2(0,1,1)+x_3(1,1,1)=(x_3,x_2+x_3,x_1+x_2+x_3)=(d_1,d_2,d_3)$

也就是解线性方程组

$$\begin{cases} x_3=d_1\\ x_2+x_3=d_2\\ x_1+x_2+x_3=d_3\end{cases}$$

对其增广矩阵进行行初等变换成阶梯形矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&1&d_1\\0&1&1&d_2\\1&1&1&d_3\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&d_3\\0&1&1&d_2\\0&0&1&d_1\end{array}\right]$$

可见方程有解，因此得证.

5. 判数下列向量是线性相关还是线性无关.

1) $\alpha_1=(1,1)$, $\alpha_2=(2,2)$;

2) $\alpha_1=(2,3)$, $\alpha_2=(1,4)$, $\alpha_3=(5,6)$;

3) $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(2,1,3)$, $\alpha_3=(0,1,2)$;

4) $\alpha_1=(a_{11},0,0,\dots,0)$, $\alpha_2=(0,a_{22},0,\dots,0)$,…,$\alpha_n=(0,0,\dots,a_{nn})$;

解:

1) 考察齐次方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=O$,

即 $x_1(1,1)+x_2(2,2)=(0,0)$,

整理得$(x_1+2x_2, x_1+2x_2)=(0,0)$,

再写成如下的形式:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

对系数矩阵进行行初等变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

存在一自由变量 x_2, 方程有非零解, 因此α_1,α_2线性相关.

2) 考察齐次方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=O$

即 $x_1(2,3)+x_2(1,4)+x_3(5,6)=(0,0)$

整理得$(2x_1+x_2+5x_3, 3x_1+4x_2+6x_3)=(0,0)$

再写成如下形式:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+6x_3=0 \end{cases}$$

则因方程数少于变元数, 必有非零解, 因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

3) 考察齐次方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=O$

即 $x_1(1,1,1)+x_2(2,1,3)+x_3(0,1,2)=(0,0,0)$

整理得$(x_1+2x_2, x_1+x_2+x_3, x_1+3x_2+2x_3)=(0,0,0)$

再写成如下形式:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

对系数矩阵进行初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times 1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

方程没有自由变量, 只有唯一零解, 因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

4) 考察齐次方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n=O$,

即 $x_1(a_{11},0,0,\dots,0,0)+x_2(0,a_{22},0,\dots,0,0)+\dots+x_n(0,0,\dots,0,a_{nn})=(0,0,\dots,0)$

整理得$(a_{11}x_1,a_{22}x_2,\dots a_{nn}x_n)=(0,0,\dots,0)$

再写成如下形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1=0 \\ a_{22}x_2=0 \\ \quad\cdots \\ a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

由于 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$, 此齐次方程组只有零解, 因此$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性无关.

6. 设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_4, \beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

证：只须证明齐次方程

$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=O$ (1)

有非零解，即证明了向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

将$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_4, \beta_4=\alpha_4+\alpha_1$代入(1)式，得

$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_4)+x_4(\alpha_4+\alpha_1)=O$

整理后得

$(x_1+x_4)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3+(x_3+x_4)\alpha_4=O$

因此，只须找到不全为零的x_1,x_2,x_3,x_4使得上式中的$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,的系数等于0，则命题得证.

也就是要使

$$\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3+x_4=0 \end{cases} \qquad (2)$$

解此齐次方程组，对系数矩阵进行行初等变换得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\times(-1)+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程有一个自由变量x_4，因此方程组(2)有非零解，此解也就满足方程组(1)，因此$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

7. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关，证明向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\dots,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s$也线性无关.

证：考察齐次方程组

$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dots+x_s(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s)=O$ (1)

整理后得

$(x_1+x_2+\dots+x_s)\alpha_1+(x_2+\dots+x_s)\alpha_2+\dots+x_s\alpha_s=O$ (2)

因为$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关，因此要使(2)式乃至(1)式成立必有(2)中的$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$的各个系数为0，即

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_s=0 \\ \quad x_2+\cdots+x_s=0 \\ \qquad \cdots \\ \qquad\quad x_s=0 \end{cases}$$

此齐次方程组的系数矩阵为上三角方阵，对角线上元素全为1，因此只有零解，即齐次方程组(1)也只有零解，因此向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\dots,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s$线性无关.

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组3维向量，已知3维单位坐标向量

$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$

能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

证：用反证法，假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为零的数$x_1,x_2,x_3$，使得

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=O$

不妨假设 $x_1\neq 0$, 则可得 $\alpha_1=\frac{x_2}{x_1}\alpha_2+\frac{x_3}{x_1}\alpha_3$, 既然$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出,即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 则根据题意 e_1,e_2,e_3 又可被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 则 e_1,e_2,e_3 可被α_2,α_3线性表出, 则三个向量可被少于三个的向量线性表出, 其必线性相关. 但我们知道 e_1,e_2,e_3 线性无关, 因此导出矛盾. 这就证明了$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必线性无关.

9. 设 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关. 证明: 任意加上 h 个 n 维向量$\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{m+h}$构成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{m+h}$也线性相关.
证: 因向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关, 因此必有不全为零的数 $x_1,x_2,\ldots,x_m$ 使得
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_m\alpha_m=O$,
因此, 选取 $m+h$ 个数, 前面 m 个与 $x_1,x_2,\ldots,x_m$ 相同, 后面 h 个数为 0, 则这样的 $m+h$ 个数仍然是不全为零, 且有
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_m\alpha_m+0\alpha_{m+1}+0\alpha_{m+2}+\ldots+0\alpha_{m+h}=O$
所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{m+h}$也线性相关.

10. 判断下述向量组是否线性相关?
$\alpha_1=(1,0,\ldots,0,a_1)$, $\alpha_2=(0,1,\ldots,0,a_2)$, …, $\alpha_n=(0,0,\ldots,1,a_n)$
解: 因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是由单位坐标向量组
$e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,\ldots,0)$, …, $e_n=(0,0,\ldots,1)$
增加一个分量构成的 R^{n+1} 中的向量组, 而因为 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 线性无关, 因此$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$也线性无关.

11. 验证$\alpha_1=(1,-1,0)$, $\alpha_2=(2,1,3)$,$\alpha_3=(3,1,2)$是 R^3 的一个基， 并把$\beta=(5,0,7)$用这个基线性表示。
解: 如果将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$看作列向量拼成的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$$

有逆存在, 则它们必是 R^3 的一个基, 因此试求此矩阵的逆如下:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&3&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times 1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&3&4&1&1&0\\0&3&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2\times(1/3)\\ r_2\times(-2)+r_1\\ r_2\times(-3)+r_3}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/3&1/3&-2/3&0\\0&1&4/3&1/3&1/3&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3\times(-1/2)\\ r_3\times(-1/3)+r_1\\ r_3\times(-4/3)+r_2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/6&-5/6&1/6\\0&1&0&-1/3&-1/3&2/3\\0&0&1&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right]$$

因此 A 有逆存在为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/6&-5/6&1/6\\-1/3&-1/3&2/3\\1/2&1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关确实是 R^3 的一个基. 则任给一列向量 $D=(d_1,d_2,d_3)$, 将其作为列向量, 则解方程组 $AX=D$, 可得 $X=A^{-1}D$, 具体用β代入 D, 可得

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A^{-1}\beta=\begin{bmatrix}1/6&-5/6&1/6\\-1/3&-1/3&2/3\\1/2&1/2&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$$

即解得β在这基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为 2,3,−1，即
$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，不难验证确实有
$(5,0,7)=2(1,-1,0)+3(2,1,3)-(3,1,2)$

12. 判断 R^n 的子集 $S=\{X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，其中 $x_n=0\}$是否 R^n 的子空间？如果是子空间，写出该子空间的基和维数.
解：任取 S 中两个元素 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n),Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$，即 $x_n=y_n=0$，则 $X+Y$ 的第 n 个分量 $x_n+y_n=0$，因此 $X+Y\in S$，再任取 S 中的一个元素 X 和一实数 k，则 kX 的第 n 个分量 $kx_n=0$，即 $kX\in S$，因此 S 是 R^n 的子空间.
实际上，S 是齐次方程 $0x_1+0x_2+\ldots+x_n=0$ 的解集，此齐次方程共有 $n-1$ 个自由变元，将这 $n-1$ 个自由变元依次取 1 而其它变元为 0，就可以得到 S 的基或者说是齐次方程 $x_n=0$ 的基础解系. 因此，S 的维数为 $n-1$，其中的基或者说齐次方程 $x_n=0$ 的基础解系为:
$\xi_1=(1,0,\ldots,0,0),\ \xi_2=(0,1,\ldots,0,0),\ldots,\xi_{n-1}=(0,0,\ldots,1,0)$.

13. 在 R^3 中，设 S_1 是由$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(2,3,4)$生成的子空间，$S_2$ 是由$\beta_1=(3,4,5),\beta_2=(0,1,2)$生成的子空间，证明 $S_1=S_2$，并说出该子空间的维数.
解：要证明 $S_1=S_2$ 只须证明α_1,α_2 与β_1,β_2 相互等价，也就是要验证α_1,α_2 能够被β_1,β_2 线性表出，同时β_1,β_2 也能够被α_1,α_2 线性表出.
首先验证α_1,α_2 能够被β_1,β_2 线性表出，先验证α_1 能够被β_1,β_2 线性表出，就是要解线性方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2=\alpha_1$，写成标准的线性方程组的形式为

$$\begin{cases}3x_1=1\\4x_1+x_2=1\\5x_1+2x_2=1\end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换成为行最简矩阵:

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&0&1\\4&1&1\\5&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-5)+r_3]{\substack{r_1\times1/3\\r_1\times(-4)+r_2}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&2&-2/3\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times(-2)+r_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&0&0\end{array}\right]$$

方程有唯一解 $x_1=1/3, x_2=-1/3$. 因此α_1 能够被β_1,β_2 线性表出为

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2 \qquad (1)$$

再验证α_2 能够被β_1,β_2 线性表出，就是要解线性方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2=\alpha_1$，写成标准线性方程组的形式为

$$\begin{cases}3x_1=2\\4x_1+x_2=3\\5x_1+2x_2=4\end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换成为行最简矩阵:

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&0&2\\4&1&3\\5&2&4\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-5)+r_3]{\substack{r_1\times1/3\\r_1\times(-4)+r_2}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&2/3\\0&1&1/3\\0&2&2/3\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times(-2)+r_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&2/3\\0&1&1/3\\0&0&0\end{array}\right]$$

方程有唯一解 $x_1=2/3, x_2=1/3$. 因此α_1 能够被β_1,β_2 线性表出为

$$\alpha_2=\frac{2}{3}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2 \tag{2}$$

将(1)式和(2)式等号两边分别相加，得

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$$

而(1)式两边乘−2 再加到(2)式，可得

$$\beta_2=-2\alpha_1+\alpha_2$$

因此β_1,β_2也能够被α_1,α_2线性表出．所以两个向量组生成的子空间 $S_2=S_2$.

下面讨论α_1,α_2是否线性无关，即解齐次方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=O$，即解如下方程:

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\x_1+3x_2=0\\x_1+4x_2=0\end{cases}$$

对此方程的系数矩阵作行初等变换

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-2)+r_3}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

可见方程没有自由变量，只有唯一零解，因此α_1,α_2线性无关，构成 S_1 的一组基，因此 S_1 的维数是 2.

14. 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是 R^n 的一个基, A 为 n 阶可逆矩阵，求证 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n$ 也是 R^n 的一个基.

解：这种表述方法是将所有的向量看作是列向量，即 n 行一列的矩阵．任给一向量$\beta\in R^n$，当然有 $A^{-1}\beta\in R^n$，又因$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是 R^n 的一个基，因此向量 $A^{-1}\beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表出，即存在一组数 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 使得

$A^{-1}\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots+c_n\alpha_n$

则在上式两边同时左乘矩阵 A，可得

$\beta=c_1A\alpha_1+c_2A\alpha_2+\ldots+c_nA\alpha_n$

即β可由 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n$ 线性表出.

下面证 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n$ 线性无关．用反证法，如若不然，假设 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n$ 线性相关，齐次方程组

$x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+\ldots+x_nA\alpha_n=O$

有非零解，则方程两边左乘 A^{-1} 可得

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=O$

也有非零解，导出$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性相关，这与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是 R^n 的一个基相矛盾．因此 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n$ 线性无关，从而也是 R^n 的一个基.

15. 证明：同一个向量组的任意两个极大无关组等价.

证：假设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$的秩为 r，它的两个极大无关组为$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$和$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r$，则因为向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$中的每一个向量都是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$中的向量，当然就能够被向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r$线性表出，反之亦然，因此向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$和向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r$相互间等价.

16. 证明：等价的向量组有相同的秩.

证：假设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$和向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$相互等价，其中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$的秩为 r，不妨假设其头 r 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$为它的一个极大无关组，而向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的秩为 s，不妨假设其头 s 个向量$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$为它的一个极大无关组．则因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$和向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$相互等价，必有它们的极大无关组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$和$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$相互等价，则两个线性无关的向量组相互等价，必有它们的个数相同，即 $r=s$.

17. 设向量β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r$线性表出，但向量$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1}$线性表出，试证：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1},\beta$有相同的秩.

证: 因β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r$线性表出, 即存在一组数$c_1,c_2,\dots,c_{r-1},c_r$使得

$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_{r-1}\alpha_{r-1}+c_r\alpha_r$ (1)

现证明$c_r\neq 0$, 如若不然, $c_r=0$, 则上式就成为$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_{r-1}\alpha_{r-1}$, 但这与题意所述$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r-1}$线性表出相矛盾.

因此将(1)式的两边减β, 然后两边减$c_r\alpha_r$, 两边再乘$(-1/c_r)$, 可得

$$\alpha_r=-\frac{c_1}{c_r}\alpha_1-\frac{c_2}{c_r}\alpha_2-\dots-\frac{c_{r-1}}{c_r}\alpha_{r-1}-\frac{1}{c_r}\beta$$

即α_r可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r-1},\beta$线性表出, 当然向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r-1},\beta$也可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r$线性表出, 这两个向量组等价, 因此必有相同的秩.

18. 求下列向量组的秩, 并求出它的一个极大无关组:

1) $\alpha_1=(2,0,1,1)$, $\alpha_2=(-1,-1,0,1)$, $\alpha_3=(1,-1,0,0)$,$\alpha_4=(0,-2,-1,-1)$

2) $\alpha_1=(1,2,1,3)$, $\alpha_2=(4,-1,-5,-6)$, $\alpha_3=(1,-3,-4,-7)$

解:

1) 解齐次方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=O$, 化成$AX=O$的形式, 对其系数矩阵$A$作行初等变换成阶梯矩阵, 首项变元的个数为向量组的秩, 而首项变元对应的向量构成极大无关组.

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}2&-1&1&0\\0&-1&-1&-2\\1&0&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&-1&-2\\1&0&0&-1\\2&-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_4]{r_1\times(-1)+r_3}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&-1&-2\\0&-1&0&0\\0&-3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-3)+r_4]{r_2\times(-1)+r_3}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&-1&-2\\0&0&1&2\\0&0&4&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-4)+r_4}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&-1&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则首项变元x_1,x_2,x_3对应的向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成极大无关组, 因此向量组的秩为3.

2) 解齐次方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=O$, 化成$AX=O$的形式, 对其系数矩阵$A$作行初等变换成阶梯矩阵, 首项变元的个数为向量组的秩, 而首项变元对应的向量构成极大无关组.

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times(-2)+r_2\\r_1\times(-1)+r_3\\r_1\times(-3)+r_4}}\begin{bmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-2)+r_4]{r_2\times(-1)+r_3}\begin{bmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

首项变元数为 2 个，因此秩为 2，首项变元x_1,x_2对应的向量α_1,α_2构成极大无关组.

19. 求下列矩阵的秩

1) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&2\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{bmatrix}$

解: 求矩阵 A 的秩, 就是求 A 作为系数矩阵的齐次方程组 $AX=O$ 的解中首项变元的数目. 因此将 A 作行初等变换变成阶梯矩阵后, 不为零的行数就是 A 的秩.

1)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&8&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times 2+r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ 因此 A 的秩为 2

2)

$$A=\begin{bmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\2&1&8&3&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1\times(-3)+r_3\\ r_1\times(-2)+r_4}]{r_1\times(-2)+r_2}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&-3&-6&3&-5\\0&-2&-4&2&0\\0&1&2&-1&7\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&-2&-4&2&0\\0&-3&-6&3&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times 3+r_4]{r_2\times 2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&14\\0&0&0&0&26\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-26/14)+r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&14\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

秩为 3.

20. 求下列齐次线性方程组的基础解系, 并写出其通解:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$

解: 1) 对系数矩阵作行初行变换:

$$\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(1/3)]{\substack{r_2\times 1+r_1\\ r_2\times(-1)}}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&-1\\0&0&1&-4/3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-3)+r_2]{r_3\times 1+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&-4/3\\0&1&0&3\\0&0&1&-4/3\end{bmatrix}$$

x_4为自由变元，令 $x_4=t$, t 为任意常数，则有

$$x_1=\frac{4}{3}t, x_2=-3t, x_3=\frac{4}{3}t$$

写成向量形式为:

$$X=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}t\\-3t\\\frac{4}{3}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{bmatrix}$$，基础解系为 $$\xi=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{bmatrix}$$

2) 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-5)+r_3]{r_1\times(-3)+r_2}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times4+r_3]{\substack{r_2\times(-1/4)\\r_2\times(-1)+r_1}}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

有两个自由变元 x_2 和 x_4，令 $x_2=s$, $x_4=t$, s,t 为任意常数，则 $x_1=-2x_2+x_4$, $x_3=0$，写成向量形式有

$$X=\begin{bmatrix}-2s+t\\s\\0\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$，基础解系为 $$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

21. 求解下列非齐次线性方程组：

1) $$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\3x_1+2x_2+2x_3=10\\4x_1+4x_2+3x_3=0\end{cases}$$ 2) $$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7\\9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13\end{cases}$$

解: 1) 对其增广矩阵作行初等变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\3&2&2&10\\4&4&3&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-4)+r_3]{r_1\times(-3)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-4&-1&7\\0&-4&-1&-4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-4&-1&7\\0&0&0&-11\end{array}\right]$$

因此，方程无解.

2) 对其增广矩阵作行初等变换:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\6&8&2&5&7\\9&12&3&10&13\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-3)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&4&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-2)+r_1]{r_2\times(-4)+r_3}\left[\begin{array}{cccc|c}3&4&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(1/3)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&4/3&1/3&0&1/3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

方程有两个首项变元 x_1 和 x_4，两个自由变元 x_2 和 x_3，令 $x_2=s$, $x_3=t$，其中 s,t 为任意常数，则

$x_1=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}s-\frac{1}{3}t, x_4=1$，将解写成向量形式，有

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{4}{3}s-\frac{1}{3}t \\ s \\ t \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

22. 当 a_1,a_2,b_1,b_2 满足什么条件时，下述方程组有解，当方程组有解时，求出其通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_3+x_4=a_2 \\ x_1+x_3=b_1 \\ x_2+x_4=b_2 \end{cases}$$

解：对增广矩阵进行行初等变换，

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_1-a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_1-a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(-1)+r_1]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & a_1-b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_1+b_2-a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-1)+r_4}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & a_1-b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_1+b_2-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+a_1-b_1-b_2 \end{array}\right]$$

因此，为使方程有解，必须有 $a_1+a_2-b_1-b_2=0$，这时有 $a_2=b_1+b_2-a_1$. 方程有一个自由变元 x_4，令 $x_4=t$, t 为任意常数，则 $x_1=a_1-b_2+x_4=a_1-b_2+t$, $x_2=b_2-t$, $x_3=a_2-t$，写成向量形式，就是

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-b_2+t \\ b_2-t \\ a_2-t \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-b_2 \\ b_2 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

23. 设三维向量空间里的两个基底分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与β_1,β_2,β_3，且

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \end{cases}$$

1) 若向量$\xi=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$，求$\xi$对于基底$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标;
2) 若向量$\eta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$，求$\eta$对于基底$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的坐标.
解：将两个基底拼成按列分块的矩阵，即令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 A 与 B 均为三阶方阵. 则按题意知 A 与 B 的关系为

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{bmatrix}=AC$$

其中

$$C=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{bmatrix}$$

则

1)

$$\xi=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=AC\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

$$=A\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}=3\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3$$

即ξ对于基底$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的坐标为 3,4,4

2)

由 $B=AC$ 知 $A=BC^{-1}$，先求 C^{-1} 如下:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-1&3&3&0&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&5&4&1&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(1/2)]{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1/2\\0&5&4&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(-5)+r_3]{r_2\times(-2)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&1&1&0&0&1/2\\0&0&-1&1&1&-5/2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3\times(-1)\\ r_3+r_1\\ r_3\times(-1)+r_2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&3/2\\0&1&0&1&1&-2\\0&0&1&-1&-1&5/2\end{array}\right]$$

求出

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&3/2\\1&1&-2\\-1&-1&5/2\end{bmatrix}$$

则有

$$\eta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=BC^{-1}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=B\left(C^{-1}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$=B\begin{bmatrix}0&-1&3/2\\1&1&-2\\-1&-1&5/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}11/2\\-5\\13/2\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}11/2\\-5\\13/2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{11}{2}\beta_1-5\beta_2+\frac{13}{2}\beta_3$$

因此 η 对基底β_1,β_2,β_3的坐标为 11/2, −5, 13/2.

第五章

5. 1. 求如下矩阵的特征值和特征向量:

1) $A=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -a-2 & 2a\end{bmatrix}$

解: (注: 对于三阶以上矩阵, 没有多少可以解出特征值的好办法, 通常是尝试 0,1,2,−1,−2 这几个值是否特征值, 通过这样的尝试找出一个特征值之后, 通过因式分解将多项式化为二次方程再解余下的两个根).

1) 特征方程为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 4\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)(1+\lambda)-8=3+4\lambda+\lambda^2-8$$

$$=\lambda^2+4\lambda-5=0$$

解出两个特征值为:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+4\times1\times5}}{2}=-2\pm\frac{\sqrt{36}}{2}=-2\pm3=\begin{cases}1\\ -5\end{cases}$$

即两个特征值$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-5$,

对$\lambda_1=1$, 解齐次线性方程组

$\begin{cases}-4x_1+4x_2=0\\ 2x_1-2x_2=0\end{cases}$, 容易看出方程有一个自由变元 x_2, 令 $x_2=t$ 为任意常数, 则 $x_1=x_2=t$, 因此

通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, 则求得$\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $t(1,1)^T$.

对$\lambda_2=5$, 解齐次线性方程组

$\begin{cases}2x_1+4x_2=0\\ 2x_1+4x_2=0\end{cases}$, 此方程也有一个自由变元 x_2, 令 $x_2=t$ 为任意常数, 则 $x_1=-2x_2=-2t$

因此通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$, 则求得$\lambda_2=5$ 对应的特征向量为 $t(-2,1)^T$

2) 特证方程为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & -4\\ -2 & 6-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3\times(-1)+r_1}{=}\begin{vmatrix}7-\lambda & 0 & -7+\lambda\\ -2 & 6-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-7)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 6-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1+c_3\\ c_2\times4}}{=}(\lambda-7)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -4 & 24-4\lambda & -4\\ -4 & -8 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3\times(-1)+c_2}{=}(\lambda-7)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -4 & 28-4\lambda & -4\\ -4 & -7+\lambda & -1-\lambda\end{vmatrix}=-4(\lambda-7)^2\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -4 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2\times(-1)+c_3}{=} -4(\lambda-7)^2\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-4(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

因此特征值为$\lambda_1=\lambda_2=7$, $\lambda_3=-2$.

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=7$，解齐次方程

$$\begin{cases}-4x_1-2x_2-4x_3=0\\ -2x_1-x_2-2x_3=0\\ -4x_1-2x_2-4x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵作行初等变换,

$$\begin{bmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1/2)+r_2]{r_1\times(-1)+r_3}\begin{bmatrix}-4 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

方程有两个自由变元 x_2,x_3，令 $x_2=s$, $x_4=t$, s,t 为任意实数， 则

$$x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3=-\frac{1}{2}s-t$$

写成向量形式有

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}s-t\\ s\\ t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1/2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

因此特征值$\lambda_1=\lambda_2=7$ 对应的特征向量为 $s(-1/2,1,0)^T$, $t(-1,0,1)^T$.

对于特征值$\lambda_3=-2$，解下面的齐次方程

$$\begin{cases}5x_1-2x_2-4x_3=0\\ -2x_1+8x_2-2x_3=0\\ -4x_1-2x_2+5x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵作行初等变换

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1/2)]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 5 & -2 & -4\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times 4+r_3]{r_1\times(-5)+r_2}\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 18 & -9\\ 0 & -18 & 9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(1/18)]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times 4+r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

有一个自由变元 x_3，令 $x_3=t$ 为任意常数，则

$x_1=x_3=t$, $x_2=(1/2)x_3=(1/2)t$，写成向量形式，得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ \frac{1}{2}t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1/2\\ 1\end{bmatrix}$$

因此特征值$\lambda_3=-2$ 对应的特征向量为 $t(1,1/2,1)$.

3) 特征方程为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2\times(-1)+r_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & -(1-\lambda) & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1\times 3+r_3}{=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 0 & -a+1 & 2a-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -a+1 & 2a-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2\times(1/2)+c_1}{=}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 1-\lambda/2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1/2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1\times(-1/2)+r_2}{=}(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2a-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2a+1)=0$$

因此 A 的三个特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=2a-1$.

对于特征值$\lambda_1=1$，解齐次方程

$$\begin{cases} 2x_3=0\\ 2x_3=0\\ 3x_1-(a+2)x_2+(2a-1)x_3=0\end{cases}$$

对其系数矩阵作初等行变换，

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)+r_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}3 & -a-2 & 2a-1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

有一个自由变量 x_2，令 $x_2=t$ 为任意常数，则 $x_3=0$, $x_1=(1/3)(a+2)x_2-(2a-1)x_3=(1/3)(a+2)t$，写成向量形式，得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(a+2)t\\ t\\ 0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(a+2)\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

即对于应特征值$\lambda_1=1$ 的特征向量为 $t((a+2)/3,1,0)^T$.

对于特征值$\lambda_2=2$，解齐次方程

$$\begin{cases} -x_1+2x_3=0\\ -x_2+2x_3=0\\ 3x_1-(a+2)x_2+(2a-2)x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵作初等行变换，

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times 3+r_3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -a-2 & 2a+4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-a-2)+r_3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

方程有一个自由变量 x_3，令 $x_3=t$ 为任意常数，则 $x_1=x_2=2x_3=2t$，写成向量形式，得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即对应于特征值$\lambda_2=2$ 的特征向量为 $t(2,2,1)^T$.
对于特征值$\lambda_3=2a-1$, 解齐次方程

$$\begin{cases} (2-2a)x_1 + 2x_3 = 0 \\ (2-2a)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - (a+2)x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

对其系数矩阵作行初等变换

$$\begin{bmatrix} 2-2a & 0 & 2 \\ 0 & 2-2a & 2 \\ 3 & -a-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times(1/2)]{r_1\times(1/2)} \begin{bmatrix} 1-1a & 0 & 1 \\ 0 & 1-1a & 1 \\ 3 & -a-2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)+r_2]{r_3\times(-1)+r_1} \begin{bmatrix} -2-a & a+2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -a-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2\times(-a-2)+r_1 \\ r_2\times(a+2)+r_3}]{r_2\times(1/3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这是为了方便起见使矩阵变成一个"倒"的阶梯形, 可以看出 x_1 为自由变元, 令 $x_1=t$ 为任意常数, 则 $x_2=x_1=t$, $x_3=(a-1)x_1=(a-1)t$, 写成向量形式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ (a-1)t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a-1 \end{bmatrix}$$

因此, $\lambda_3=2a-1$ 对应的特征向量为 $t(1,1,a-1)^T$.

2. 已知 A 为 n 阶方阵且 $A^2=A$, 求 A 的特征值.
解: 设 A 的一个特征值为λ, 对应的特征向量为 X, 则有 $AX=\lambda X$, 又将题意中的条件 $A^2=A$ 代入此式, 得 $A^2X=\lambda X$, 但 $A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda^2X$, 因此有
$\lambda X=\lambda^2X$, 即$\lambda^2X-\lambda X=(\lambda^2-\lambda)X=O$, 因为 X 为特征向量则必不为零向量, 因此只能有
$\lambda^2-\lambda=0$, 即$\lambda(\lambda-1)=0$,
因此, A 的特征值只能取 0 或者 1 值.

3. A 是 3 阶实对称矩阵, A 的特征值为 1, -1, 0. 其中$\lambda=1$ 和$\lambda=0$ 所对应的特征向量分别为 $(1,a,1)^T$ 及$(a,a+1,1)^T$, 求矩阵 A.
解: 此题原本不适宜在这一章做. 因为 A 是实对称矩阵, 则必有它的各个不同特征值对应的特征向量相互正交, 因此特征向量$(1,a,1)$与$(a,a+1,1)$正交, 即对应分量相乘相加后等于 0, 即 $1a + a(a+1) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0$, 因此 $a=-1$, $\lambda=1$ 和$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 及$\alpha_2=(-1,0,1)^T$, 则因剩下的那个特征向量, 即$\lambda=-1$ 对应的特征向量$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ 必与α_1 和α_2 正交, 由此可得下面的齐次方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

对其系数矩阵作行初等变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_2\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

方程有一个自由变量 x_3, 令 $x_3=t$ 为任意常数, 则 $x_1=x_3=t$, $x_2=2x_3=2t$, 写成向量形式, 有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
，因此 $t(1,2,1)^T$ 为特征值-1 对应的特征向量，可令$\alpha_3=(1,2,1).^T$
将这三个向量规范化得

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}})^T$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \frac{1}{\sqrt{2}})^T$$

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

则令

$$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则必有，因此有

$$A = P\Lambda P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x.

解：特征方程为

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ x & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{r_1\times\lambda+r_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ x & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda^2)(1-\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)^2$$

因此, A 有三个特征值$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$, 因此, x 的选值必须使特征值为重根 1 的时候对应的齐次方程有两个自由变量, 才能够得到两个线性无关的特征向量.
因为待定数为 x, 因此齐次方程就用 y_1,y_2,y_3 来作变元, 则特征值为 1 对应的齐次方程为:

$$\begin{cases} -y_1+y_3=0 \\ xy_1=0 \\ y_1-y_3=0 \end{cases}$$

对系数矩阵作行初等变换

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{\substack{r_1\times(-1) \\ r_1\times(-x)+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如要方程有两个自由变元, 必须 $x=0$.

5. 判断第一题中各矩阵是否可对角化. 如可对角化, 求可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.
解: 各矩阵是否可对角化的等价条件是要有与矩阵阶数一样多的线性无关的特征向量.
1) 矩阵 A 有两个线性无关的特征向量$\alpha_1=(1,1)^T$, $\alpha_2=(-2,1)^T$, 因此可对角化,

$$T=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 矩阵 A 有三个线性无关的特征向量$\alpha_1=(-1/2,1,0)^T$,$\alpha_2=(-1,0,1)^T$,$\alpha_3=(1,1/2,1)^T$,因此可对角化,

$$T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) A 的三个特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=2a-1$. 当$\lambda_3\neq1$ 且$\lambda_3\neq2$ 时, 特征方程没有重根, 三个特征值不同, 因此对应的必有三个线性无关的特征向量, A 可对角化, 三个特征向量为
$\alpha_1=((a+2)/3,1,0)^T$,$\alpha_2=(2,2,1)^T$,$\alpha_3=(1,1,a-1)^T$, 因此

$$T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix} (a+2)/3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix}$$

而当$\lambda_3=2a-1=1$ 时, $a=1$, 这时候$\alpha_1=\alpha_3=(1,1,0)^T$, 则不够三个线性无关的特征向量, 矩阵 A 不能被对角化.
当$\lambda_3=2a-1=2$ 时, $a=3/2$, 这时候$\alpha_3=(1,1,1/2)^T=(1/2)\alpha_2$, 即与$\alpha_2$ 线性相关, 这样就还是不够三个线性无关的特征向量, 矩阵 A 也不能被对角化.

6. 已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$有特征值 1 和$-1$, 问 A 是否能对角化?
解: 将已知的特征值 1 和-1 分别代入特征方程$\det(A-\lambda I)=0$, 可得关于 a 和 b 的两个方程,
先将特征值 1 代入特征方程得

$$\det(A-I)=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 5 & b-1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2 \\ c_1\times(-2)+c_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 5 & b+4 & -7 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7(a+1)=0$$

得 $a=-1$,

再将特征值−1 代入特征方程得

$$\det(A+I)=\begin{vmatrix}3 & a & 2\\ 5 & b+1 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=}\begin{vmatrix}3 & a+3 & 2\\ 5 & b+6 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-3(a+3)+2(b+6)=0$$

将 $a=-1$ 代入上式，得

$-3\times 2+2b+12=0,\quad b=-6/2=-3$

因此有 $a=-1,b=-3$，则

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

看 A 除了 1 和−1 外还有没有其它的特征值，再重解特征方程，

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1-\lambda\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1+c_2\\ c_3\times(-1)+c_2}}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 5 & -1-\lambda & 3\\ -1 & 1+\lambda & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}(1-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 2-\lambda\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(1+\lambda)[4-(2-\lambda)]=(1-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda)$$

因此知道矩阵 A 除了 1 和−1 这两个特征值外还有一个特征值−2，这样三个不同的特征值必有三个线性无关的特征向量，A 可对角化.

7. 已知 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 4 & x & 1\end{bmatrix}$ 能对角化，求 $A^n(n\geq 1)$.

解：先求 A 的特征方程

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -2 & 2-\lambda & 0\\ 4 & x & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(-1-\lambda)(2-\lambda)+2]$$

$$=(1-\lambda)(-2-\lambda+\lambda^2+2)=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-1)$$

由此可见 A 有三个特征值，$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. 因此，因为 A 能够对角化，必须对应于重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量，对于特征值 1 解下面的齐次方程求对应的特征向量，

$$\begin{cases}-2y_1+y_2=0\\ -2y_1+y_2=0\\ 4y_1+xy_2=0\end{cases}$$

对其系数矩阵作行初等变换，

$$\begin{bmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&x&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times 2+r_3]{r_1\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&0&0\\0&x+2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&x+2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可以看出如果此齐次方程要有两个线性无关的基础解系，就必须有两个自由变量，y_3已经是一个自由变量，因此需要y_2也是自由变量，这就要求上面矩阵的第二行全为零，即$x+2=0$

得$x=-2$，矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$.

这时候，A能对角化，所以存在方阵T使 $T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

上式两边同时左乘T及右乘T^{-1}可得 $A=T\Lambda T^{-1}$

注意到 $\Lambda^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\Lambda$

因此有 $A^n=(T\Lambda T^{-1})^n=T\Lambda^nT^{-1}=T\Lambda T^{-1}=A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$

8. 设A,B是n阶方阵，证明AB与BA具有相同的特征值.

证：假设AB之一可逆，比如A可逆，则命题是成立的，因为AB的特征多项式为

$$\det(AB-\lambda I)=\det(AB-\lambda AA^{-1})=\det[A(B-\lambda A^{-1})]=\det A\cdot\det(B-\lambda A^{-1})$$

$$=\det(B-\lambda A^{-1})\cdot\det A=\det[(B-\lambda A^{-1})A]=\det(BA-\lambda I)$$

因此AB和BA的特征多项式相同，当然其特征值也就相同。而如果B可逆，同样有

$$\det(AB-\lambda I)=\det(AB-\lambda B^{-1}B)=\det[(A-\lambda B^{-1})B]=\det B\cdot\det(A-\lambda B^{-1})$$

$$=\det[B(A-\lambda B^{-1})]=\det(BA-\lambda I)$$

如果A与B都不可逆，如果它们之一是零矩阵O，$AB=BA=O$，当然都有特征值0。而如果它们都不是零矩阵，那么，对矩阵A进行一系列行变换和一系列的列变换之后，总能得到一个对角矩阵，从左上角到右下角是先是1再是，也就是说存在着可逆矩阵P和Q使得

$$PAQ=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_r&O\\O&O\end{bmatrix}=\Lambda,$$

即$A=P^{-1}\Lambda Q^{-1}$，也将矩阵$Q^{-1}BP^{-1}$按与Λ同样的办法分块，假设

$$Q^{-1}BP^{-1}=\begin{bmatrix}X&Y\\W&U\end{bmatrix}$$

则

$$\det(AB-\lambda I)=\det(P^{-1}\Lambda Q^{-1}B-\lambda P^{-1}P)=\det[P^{-1}(\Lambda Q^{-1}B-\lambda P)]$$
$$=\det P^{-1}\cdot\det(\Lambda Q^{-1}B-\lambda P)=\det(\Lambda Q^{-1}B-\lambda P)\cdot\det P^{-1}$$
$$=\det(\Lambda Q^{-1}BP^{-1}-\lambda I)$$
$$=\left|\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\\ W & U\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & I_s\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}X & Y\\ O & O\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & I_s\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}X-\lambda I_r & Y\\ O & I_s\end{bmatrix}\right|$$
$$=\det(X-\lambda I_r)$$
而
$$\det(BA-\lambda I)=\det(BP^{-1}\Lambda Q^{-1}-\lambda QQ^{-1})=\det(Q^{-1}BP^{-1}\Lambda-\lambda I)$$
$$=\left|\begin{bmatrix}X & Y\\ W & U\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & I_s\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}X & O\\ W & O\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & I_s\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}X-\lambda I_r & O\\ W & I_s\end{bmatrix}\right|$$
$$=\det(X-\lambda I_r)=\det(AB-\lambda I)$$
因此, AB 与 BA 的特征多项式相等，它们的特征值也一样.

9. 已知$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是 A 的特征值, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是相应的特征向量，如果$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$仍是 A 的特征向量，证明$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

证：如$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$及$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$都是 A 的特征向量，假设$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$对应的特征值为$\lambda$，则有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$, $A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$，和

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ (1)

但

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$ (2)

将(1),(2)两式左边与右边分别相减，得

$\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\lambda_1\alpha_1-\lambda_2\alpha_2-\lambda_3\alpha_3=O$

整理后得

$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda-\lambda_3)\alpha_3=O$

而因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是对应于三个特征值的特征向量，则必线性无关，因此上式要成立必须$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的系数都为 0，即

$$\begin{cases}\lambda-\lambda_1=0\\ \lambda-\lambda_2=0\\ \lambda-\lambda_3=0\end{cases}$$

则必有$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，证毕.

第六章

6. 1. 求由下列向量所构成的标准正交基:

1) $\alpha_1=(2,0)^T$, $\alpha_2=(1,1)^T$

2) $\alpha_1=(3,4)^T$, $\alpha_2=(2,3)^T$

3) $\alpha_1=(2,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$, $\alpha_3=(5,6,0)^T$.

解：用斯密特正交化方法,

1) $\beta_1=\alpha_1=(2,0)^T$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\beta_1,\alpha_2>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=(1,1)^T-\frac{2\times1+0\times1}{2\times2+0\times0}(2,0)^T$$
$$=(1,1)^T-\frac{1}{2}(2,0)^T=(1,1)^T-(1,0)^T=(0,1)^T$$

再进行规范化，令

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{<\beta_1,\beta_1>}}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2^2+0^2}}(2,0)^T=(1,0)^T$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{<\beta_2,\beta_2>}}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2}}(0,1)^T=(0,1)^T$$

则ε_1, ε_2构成标准成交基.

2) $\beta_1=\alpha_1=(3,4)^T$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\beta_1,\alpha_2>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=(2,3)^T-\frac{3\times2+4\times3}{3^2+4^2}(3,4)^T$$

$$=(2,3)^T-\frac{18}{25}(3,4)^T=(2,3)^T-(\frac{54}{25},\frac{72}{25})^T=(\frac{-4}{25},\frac{3}{25})^T$$

再进行规范化，令

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{<\beta_1,\beta_1>}}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,4)^T=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})^T$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{<\beta_2,\beta_2>}}\beta_2==\frac{25}{\sqrt{4^2+3^2}}(-\frac{4}{25},\frac{3}{25})^T=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})^T$$

3) $\beta_1=(2,0,0)^T$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\beta_1,\alpha_2>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=(0,1,1)^T-\frac{2\times0+0\times1+0\times1}{2\times2+0\times0+0\times0}(2,0,0)^T=(0,1,1)^T=\alpha_2$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\beta_1,\alpha_3>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\beta_2,\alpha_3>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2=$$

$$=(5,6,0)^T-\frac{10}{4}(2,0,0)^T-\frac{6}{2}(0,1,1)^T=(5,6,0)^T-(5,0,0)^T-(0,3,3)^T=(0,3,-3)^T$$

另有

$$|\beta_1|=\sqrt{2^2}=2,|\beta_2|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},|\beta_3|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$

因此对β_1,β_2,β_3作规范化得

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{2}(2,0,0)^T=(1,0,0)^T$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{3\sqrt{2}}(0,3,-3)^T=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$$

2. 在四维向量空间中找出一单位向量α与下列向量都正交。

$\alpha_1=(1,1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-1,-1,1)^T$, $\alpha_3=(2,1,1,3)^T$

解：假设 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都正交，则必有$<\alpha_i,X>=0$, $i=1,2,3$，这构成了如下的齐次方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

对系数矩阵做初等行变换，

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\2&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&0\\0&-1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{\substack{r_2\times(-1/2)\\ r_2\times(-1)+r_1}}\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_3\times(1/3)}\begin{bmatrix}1&0&0&4/3\\0&1&0&0\\0&0&1&1/3\end{bmatrix}$$

方程有一个自由变量 x_4，令 $x_4=t$ 为任意常数，则 $x_1=-(4/3)x_4=-(4/3)t$ $x_2=0$, $x_3=-(1/3)x_4=-(1/3)t$，写成向量形式，得

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}t\\0\\-\frac{1}{3}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-4/3\\0\\-1/3\\1\end{bmatrix}$$

不妨取 $t=3$，则 $X=(-4,0,-1,3)^T$，并有 $|X|=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$

将 X 单位化得到 α:

$$\alpha=\frac{1}{|X|}X=\frac{1}{\sqrt{26}}(-4,0,-1,3)^T=(-\frac{4}{\sqrt{26}},0,-\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{3}{\sqrt{26}})^T$$

3. 下列矩阵是否正交矩阵？若是，求出它的逆矩阵.

1) $\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{bmatrix}$

解: 1) 不是，因为第一列和第二列构成的列向量

$\alpha_1=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3})^T,\alpha_2=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$ 的内积

$<\alpha_1,\alpha_2>=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}\neq 0$，它们不正交，因此不是正交矩阵.

2) 设

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{bmatrix}$$

则

$$AA^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

因此是正交矩阵.

$$A^{-1}=A^T=A=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}$$

4. 用施密特正交化方法将向量空间的一个基$\alpha_1=(1,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, $\alpha_3=(1,-1,1)^T$化成标准正交基, 并求$\alpha=(1,2,3)^T$在该基下的坐标.

解: $\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0)^T$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\beta_1,\alpha_2>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\beta_1,\alpha_3>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\beta_2,\alpha_3>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2=$$

$$=(1,-1,1)^T-(1,-1,0)^T-\frac{2}{3}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T=(0,0,1)^T-(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$$

$$|\beta_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},|\beta_2|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2},|\beta_3|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

对β_1,β_2,β_3进行规范化得标准正交基为

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\sqrt{3}(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$$

求$\alpha=(1,2,3)^T$在该基下的坐标就是求解非齐次方程组

$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3=\alpha$,

写成线性方程组的规范形式, 就是

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2-\frac{1}{\sqrt{3}}x_3=1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2-\frac{1}{\sqrt{3}}x_3=2\\ \qquad\frac{2}{\sqrt{6}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3=3\end{cases}$$

其系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ 为正交矩阵,

即有

$$A^{-1}=A^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

则方程的解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A^T\alpha=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{9}{\sqrt{6}}\\ 0\end{bmatrix}$$

即 $\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1+\frac{9}{\sqrt{6}}\varepsilon_2$

5. 设α,β是任意两个 n 维向量，证明柯西–许瓦兹(Cauchy–Schwarz)不等式:

$|<\alpha,\beta>|\le|\alpha|\cdot|\beta|$

证：考虑关于变元 t 的一元二次方程

$|\alpha-t\beta|^2=0$

此方程或者只有 0 解或者无实数解，将方程整理，

$$|\alpha-t\beta|^2=<\alpha-t\beta,\alpha-t\beta>=<\alpha,\alpha>-2t<\alpha,\beta>+t^2<\beta,\beta>=0 \qquad (1)$$

我们知道一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，因此方程只有 0 解或者无解的条件为$b^2-4ac\le 0$，套用到(1)式，我们知道必有

$(2<\alpha,\beta>)^2-4<\alpha,\alpha><\beta,\beta>\le 0$

即

$<\alpha,\beta>^2\le<\alpha,\alpha><\beta,\beta>=|\alpha|^2|\beta|^2$

也就是

$|<\alpha,\beta>|\le|\alpha|\cdot|\beta|$

6. 设 $A=I-2XX^T$, X 为 n 维向量, $|X|=1$, I 为 n 阶单位矩阵，证明 A 为正交矩阵.

证：只须证明 $AA^T=I$，则 A 就是正交矩阵了，而

$AA^T=(I-2XX^T)(I-2XX^T)^T=(I-2XX^T)(I-2XX^T)$

$=I-2XX^T-2XX^T+4XX^TXX^T=I-4XX^T+4XX^TXX^T=I$

7. 证明§6.2 施密特正交化方法中给出的向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 为正交向量组.

证：用归纳法，当 $m=1$ 时，因为只有一个向量，当然正交，结果成立. 假设当 $m=k-1$ 时，结果成立，即$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1}$ 相互正交，即$<\beta_i,\beta_j>=0$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,k-1$. 则令

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{<\beta_1,\alpha_k>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\beta_2,\alpha_k>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2-\cdots-\frac{<\beta_{k-1},\alpha_k>}{<\beta_{k-1},\beta_{k-1}>}\beta_{k-1}$$

任给正整数 $i<k$，有

$$<\beta_k,\beta_i>=<\alpha_k-\frac{<\beta_1,\alpha_k>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\beta_2,\alpha_k>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2-\cdots-\frac{<\beta_{k-1},\alpha_k>}{<\beta_{k-1},\beta_{k-1}>}\beta_{k-1},\beta_i>$$
$$=<\alpha_k,\beta_i>-\frac{<\beta_1,\alpha_k>}{<\beta_1,\beta_1>}<\beta_1,\beta_i>-\cdots-\frac{<\beta_{k-1},\alpha_k>}{<\beta_{k-1},\beta_{k-1}>}<\beta_{k-1},\beta_i>$$
$$=<\alpha_k,\beta_i>-\frac{<\beta_i,\alpha_k>}{<\beta_i,\beta_i>}<\beta_i,\beta_i>=<\alpha_k,\beta_i>-<\alpha_k,\beta_i>=0$$
则$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$相互正交.

第七章

7. 1. 写出下列二次型的矩阵.

1) $x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$

2) $2x_1^2+4x_1x_2+7x_2^2+5x_1x_3+6x_2x_3-x_3^2$

解: 1) 二次型矩阵为
$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$
2) 二次型矩阵为
$$\begin{bmatrix}2&2&5/2\\2&7&3\\5/2&3&-1\end{bmatrix}$$

2. 写出如下矩阵所对应的二次型.

1) $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&3\\0&3&4\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

解: 1) 对应的二次型为$x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$

2) 对应的二次型为$x_1^2-x_2^2$

3. 试将二次型$s=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$写成矩阵形式, 其中$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$是算术平均值.

解: 根据题意
$$s=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\bar{x}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\sum_{\substack{i\neq j\\1\le i,j\le n}}x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_i^2-\frac{1}{n}\sum_{\substack{i\neq j\\1\le i,j\le n}}x_ix_j=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

因此对应的二次型矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}\frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n}\end{bmatrix}$$, 则令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

则此二次型表示为 X^TAX.

4. 用初等变换将下列二次型化为标准型.

1) $q=x_1^2-x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_2$;

2) $q=2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

解: 1) 对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ 对$(A|I)$进行初等变换如下:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(-3)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_1\times(-3)+c_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -10 & -1 & -3 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -10 & -3 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -11 & -3 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -11 & -3 & 1 & 1\end{array}\right]$$

故有

$$C^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -11\end{bmatrix}$$

使得

$$C^TAC=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & -11\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-11\end{bmatrix}=B$$

则令线性替换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

则有 $q=x_1^2-x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_2=y_1^2+y_2^2-11y_3^2$.

2) 对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$，对 $(A|I)$ 作初等变换如下:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&0&-1&0&1&0\\1&-1&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&0&0&1\\-1&0&-1&0&1&0\\0&-1&1&1&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&1&0&0&1\\-1&0&-1&0&1&0\\1&-1&0&1&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-1/2)+r_3]{r_1\times(1/2)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&1&0&0&1\\0&-1/2&-1/2&0&1&1/2\\0&-1/2&-1/2&1&0&-1/2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c_1\times(-1/2)+c_3]{c_1\times(1/2)+c_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&0&1\\0&-1/2&-1/2&0&1&1/2\\0&-1/2&-1/2&1&0&-1/2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-2)]{r_2\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&-2&-1\\0&1&1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[c_3\times(-2)]{c_2\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&0&1\\0&-2&-2&0&-2&-1\\0&-2&-2&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&0&1\\0&-2&-2&0&-2&-1\\0&0&0&-2&2&2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_2\times(-1)+c_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&0&1\\0&-2&0&0&-2&-1\\0&0&0&-2&2&2\end{array}\right]$$

故有

$$C^T=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-2&-1\\-2&2&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

使得

$$C^TAC=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-2&-1\\-2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-2&2\\1&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-2&-1\\-2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}=B$$

令线性替换

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，则 $q=2y_1^2-2y_2^2$

5. 用正交变换的方法将二次型化为标准型，并写出所用正交变换.

1) $q=2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

2) $q=x_1^2-x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_2$；

解: 1) 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

求其特征值，求解特征方程$|A-\lambda I|=0$，而

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{=}\begin{vmatrix}-\lambda-1&-1-\lambda&0\\-1&-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-1&-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\times(-1)+c_2}{=}(\lambda+1)\begin{vmatrix}-1&0&0\\-1&-\lambda+1&-1\\1&-2&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda+1&-1\\-2&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+c_1}{=}-(\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\-\lambda&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(3-\lambda)$$

因此，矩阵 A 的三个特征值为$\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$. 现求各特征值对应的特征向量.
对于特征值$\lambda_1=3$，解齐次方程

$$\begin{cases}-3x_1-x_2+x_3=0\\-x_1-3x_2-x_3=0\\x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵作行初等变换:

$$\begin{bmatrix}-3&-1&1\\-1&-3&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-1&-3&-1\\-3&-1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{r_1\times(-3)+r_2}\begin{bmatrix}-1&-3&-1\\0&8&4\\0&-4&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(1/4)]{\substack{r_1\times(-1)\\ r_2\times(1/2)+r_3}}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&1&1/2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-3)+r_1}\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

方程有一个自由变量 x_3，令 $x_3=t$ 为任意实数，则 $x_1=(1/2)x_3=(1/2)t$, $x_2=-(1/2)x_3=-(1/2)t$.得特征向量为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t\\-\frac{1}{2}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}$$，对其进行单位化，得向量

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}(1,-1,2)^T=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$$

对于特征值$\lambda_2=-1$，解齐次方程

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+x_2-x_3=0\\x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵作行初等变换:

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)+r_1]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_2\times(1/2)}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

方程有自由变量 x_2，令 $x_2=t$ 为任意实数，则 $x_1=x_2=t$, $x_3=0$，得特征向量为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\t\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$对其进行规格化得

$$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}(1,1,0)^T=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$$

对于$\lambda_3=0$，解齐次方程

$$\begin{cases}-x_2+x_3=0\\-x_1-x_3=0\\x_1-x_2+2=0\end{cases}$$

对系数矩阵作行初等变换:

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2\times(-1)+r_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

方程有一个自由变元 x_3，令 $x_3=t$ 为任意实数，则 $x_1=-x_3=-t$, $x_2=x_3=t$，则对应的特征向量为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 对其规格化得

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}(-1,1,1)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$$

最后得正交矩阵

$$Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

则作线性替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$，使得 $q = 3y_1^2 - y_2^2$

2) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

求其特征值，求解特征方程$|A-\lambda I|=0$，而

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3\times 3+r_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3(1-\lambda) \\ 3 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1\times(-3)+r_2}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & -10 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -10 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda)-10] = (1-\lambda)(\lambda^2-1-10) = (1-\lambda)(\lambda^2-11)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+\sqrt{11})(\lambda-\sqrt{11}) = 0$$

解得三个特征值为 $\lambda_1 = \sqrt{11}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -\sqrt{11}$

对于 $\lambda_1 = \sqrt{11}$，解齐次方程组

$$\begin{cases} (1-\sqrt{11})x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - (1+\sqrt{11})x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (1-\sqrt{11})x_3 = 0 \end{cases}$$

对系数矩阵做行初等变换:

$$\begin{bmatrix}1-\sqrt{11} & 3 & 0\\ 3 & -1-\sqrt{11} & -1\\ 0 & -1 & 1-\sqrt{11}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{(-3)}{1-\sqrt{11}}+r_2}\begin{bmatrix}1-\sqrt{11} & 3 & 0\\ 0 & -\frac{9}{1-\sqrt{11}}-1-\sqrt{11} & -1\\ 0 & -1 & 1-\sqrt{11}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\sqrt{11} & 3 & 0\\ 0 & \frac{-9+11-1}{1-\sqrt{11}} & -1\\ 0 & -1 & 1-\sqrt{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\sqrt{11} & 3 & 0\\ 0 & \frac{1}{1-\sqrt{11}} & -1\\ 0 & -1 & 1-\sqrt{11}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(1-\sqrt{11})}\begin{bmatrix}1-\sqrt{11} & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1+\sqrt{11}\\ 0 & -1 & 1-\sqrt{11}\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-3)+r_1]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1-\sqrt{11} & 0 & 3(1-\sqrt{11})\\ 0 & 1 & -1+\sqrt{11}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{1-\sqrt{11}}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1+\sqrt{11}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

有一自由变元x_3，令$x_3=t$为任意实数，则$x_1=-3x_3=-3t$，$x_2=(1-\sqrt{11})x_3=(1-\sqrt{11})t$，得特征向量

$$\beta_1=t\begin{bmatrix}-3\\ 1-\sqrt{11}\\ 1\end{bmatrix},\quad |\beta_1|=|t|\sqrt{9+(1-\sqrt{11})^2+1}=|t|\sqrt{22-2\sqrt{11}}$$

对β_1做规格化得规格化的特征向量

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}}\begin{bmatrix}-3\\ 1-\sqrt{11}\\ 1\end{bmatrix}$$

对于$\lambda_2=1$，解齐次方程组

$$\begin{cases}3x_2=0\\ 3x_1-2x_2-x_3=0\\ -x_2=0\end{cases}$$

令x_1为自由变元，并令$x_1=t$为任意实数，则$x_2=0$, $x_3=3x_1=3t$，得到特征向量

$$\beta_2=t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$，且有$|\beta_2|=|t|\sqrt{1^2+3^2}=|t|\sqrt{10}$

对β_2作规格化得规格化特征向量

$$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$

对于$\lambda_3=-\sqrt{11}$，解齐次方程组

$$\begin{cases} (1+\sqrt{11})x_1+3x_2=0 \\ 3x_1-(1-\sqrt{11})x_2-x_3=0 \\ -x_2+(1+\sqrt{11})x_3=0 \end{cases}$$

对系数矩阵做行初等变换:

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{11} & 3 & 0 \\ 3 & -1+\sqrt{11} & -1 \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{11} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times\frac{(-3)}{1+\sqrt{11}}+r_2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{11} & 3 & 0 \\ 0 & \frac{-9}{1+\sqrt{11}}-1+\sqrt{11} & -1 \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(1+\sqrt{11})} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{11} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{11} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{11} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-3)+r_1]{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{11} & 0 & 3(1+\sqrt{11}) \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{1+\sqrt{11}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程有一个自由变元 x_3, 令 $x_3=1$, 可得 $x_1=-3x_3=-3$, $x_2=(1+\sqrt{11})x_3=1+\sqrt{11}$, 因此得特征向量

$\beta_3=\begin{bmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{11} \\ 1 \end{bmatrix}$, 而 $|\beta_3|=\sqrt{3^2+(1+\sqrt{11})^2+1^2}=\sqrt{22+2\sqrt{11}}$, 则对 β_3 作规格化得特征向量

$$\xi_3=\frac{1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此得正交矩阵

$$Q=[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]=\begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \\ \frac{1-\sqrt{11}}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & 0 & \frac{1+\sqrt{11}}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \\ \frac{1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \end{bmatrix}$$

满足 $Q^TAQ=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{11} \end{bmatrix}$, 作线性替换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,

可得, $q=\sqrt{11}y_1^2+y_2^2-\sqrt{11}y_3^2$

6. 二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$ 经正交变换后化为标准型 $3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$, 求 a,b 的值.

解：二次型矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & a\\ -2 & a & 1\end{bmatrix}$$

因此二次型经正交变换后化为标准型 $3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$，因此 A 的 3 个特征值为 3, 3, b.

考虑其中的已知的一个特征值 3，则必有 $\det(A-3I)=0$，而且特征值 3 一定为此特征方程的重根，因此方程$(A-3I)X=O$ 的基础解系必只有 3−2=1 个线性无关的向量，即矩阵 $A-3I$ 的秩

$r(A-3I)=1$，即 $A-3I$ 的行向量中最大线性无关组的个数为 1 个，即只能找到一个线性无关的向量，说明另外两个行向量都与之线性相关，则根据两个线性相关的向量必然有对应分量成比例的定理，矩阵 $A-3I$ 的第二行与第三行必与第一行成比例，而

$$A-3I=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & a\\ -2 & a & -2\end{bmatrix}$$，因此看出必有 $a=-2$ 才满足这一点，即 $a=-2$. 则

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$，解 A 的特征方程 $\det(A-\lambda I)=0$，

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ -2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}}{=}\begin{vmatrix}-3-\lambda & -3-\lambda & -3-\lambda\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ -2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3+\lambda)\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ -2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$，知道矩阵 A 有一个特征值为−3，而我们知道 A 只有两个不同的特征值 3 和 b，因此只有 $b=-3$.

7. 判定二次型的正定性.

1) $x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$

2) $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$

解：1) 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$，其特征方程为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1-\lambda\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1\times(-1)+c_3}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & -4\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(5-\lambda)(1-\lambda)-8]$$

$$=(1-\lambda)(5-6\lambda+\lambda^2-8)=(1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda-3)$$

我们已经得到一个特征值为 1 外，还要解一元二次方程 $\lambda^2-6\lambda-3=0$，得另两个特征值为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-4\times(-3)}}{2}=3\pm\sqrt{9+3}=3\pm\sqrt{12}$，则存在一个小于 0 的特征值 $3-\sqrt{12}$，则此二次型即非正定的，也非负定的.

2) 此二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

则 A 的特征多项式为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1-\lambda & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

将第 2 行到第 n 行都加到第 1 行，得

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1-\lambda & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda+\frac{n-1}{2} & 1-\lambda+\frac{n-1}{2} & \cdots & 1-\lambda+\frac{n-1}{2}\\ 1/2 & 1-\lambda & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{n+1}{2}-\lambda & \frac{n+1}{2}-\lambda & \cdots & \frac{n+1}{2}-\lambda\\ 1/2 & 1-\lambda & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{2}-\lambda\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1/2 & 1-\lambda & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix},$$

将上式的第 1 行乘上(−1/2)加到所有其余行，得

$$\det(A-\lambda I)=\left(\frac{n+1}{2}-\lambda\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \frac12-\lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \frac12-\lambda\end{vmatrix}=\left(\frac{n+1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^{n-1}$$

则此矩阵的两个特征值$(n+1)/2$ 和 1/2 都大于零，则此二次型正定.

8. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，证明 A^TA 是 n 阶正定矩阵.

证：因为$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$ 为对称矩阵，其对应的二次型为

$X^T(A^TA)X=(AX)^T(AX)=|AX|^2\geqslant 0$，其中 $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in R^n$.
又因为 A 可逆，因此齐次方程组 $AX=O$ 只有零解，也即当且仅当 $X=O$ 才有
$X^T(A^TA)X=(AX)^T(AX)=|AX|^2=0$，即二次型 $X^T(A^TA)X$ 正定，或者等价地矩阵 A^TA 正定.

9. 已知 A, $A-I$ 都是 n 阶实对称正定矩阵，证明 $I-A^{-1}$ 也是正定矩阵.
证：设 A 的 n 个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$，因 A 正定，因此有$\lambda_i>0$，且存在正交矩阵 Q, $QQ^T=I$,
使得

$A=Q\Lambda Q^T$，其中 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则

$$A-I=Q\Lambda Q^T-QQ^T=Q(\Lambda-I)Q^T=Q\begin{bmatrix}\lambda_1-1 & & & \\ & \lambda_2-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n-1\end{bmatrix}Q^T,$$

因此$\lambda_1-1,\lambda_2-1,\dots,\lambda_n-1$ 是 $A-I$ 的特征值，而因 $A-I$ 正定，必有$\lambda_i-1>0$，或$\lambda_i>1$, $i=1,2,\dots,n$.
而

$$A^{-1}=Q\Lambda^{-1}Q^T=Q\begin{bmatrix}1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n\end{bmatrix}Q^T$$

$$I-A^{-1}=QQ^T-Q\Lambda^{-1}Q^T=Q(I-\Lambda^{-1})Q^T=Q\begin{bmatrix}1-\frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & 1-\frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T$$

因此 $1-\frac{1}{\lambda_1},1-\frac{1}{\lambda_2},\cdots,1-\frac{1}{\lambda_n}$ 为 $I-A^{-1}$ 的各个特征值，而如前所述，因$\lambda_i>1$, $i=1,2,\dots,n$，则必有 $1-\frac{1}{\lambda_i}>0$，即 $I-A^{-1}$ 的各个特征值大于零，即 $I-A^{-1}$ 为正定阵.

10. 已知 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，问当 t 为何值时，矩阵 $A+tI$ 是正定，半正定，负定，半负定，不定的.
解：设$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 中的最大值为λ_{max}，最小值为λ_{min}，存在着正交矩阵 Q, $QQ^T=I$，使得

$A=Q\Lambda Q^T$，其中 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则

$$A+tI=Q\Lambda Q^T+tQQ^T=Q(\Lambda+tI)Q^T=Q\begin{bmatrix}\lambda_1+t & & & \\ & \lambda_2+t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+t\end{bmatrix}Q^T$$

即$\lambda_1+t,\lambda_2+t,\ldots,\lambda_n+t$ 是 $A+tI$ 的特征值，
当 t 小到很小以致于所有特征值是负值时，$A+tI$ 是负定的，即当 $t<-\lambda_{max}$ 时 $A+tI$ 负定，
而当 t 正好等于负的最大的特征值的时候，即当 $t=-\lambda_{max}$ 时，$A+tI$ 存在着一个零特征值使它不可逆，而所有特征值仍然不大于 0，因此是半负定的.
当 t 大到一定程度，使所有的特征值都是正的时候，$A+tI$ 是正定的，即当 $t>-\lambda_{min}$ 时，$A+tI$ 正定，
而当 t 正好等于负的最小值时，即当 $t=-\lambda_{min}$ 时，$A+tI$ 存在着一个零特征值使它不可逆，而所有的特征值仍然不小于 0，因此是半正定的.
如果 t 介乎于负的最大特征值和最小特征值之间，即当$-\lambda_{max}<t<-\lambda_{min}$ 时，$A+tI$ 不定.

第八章

8.　1. 验证

1) 全体 $n\times m$ 级的实矩阵的集合 $M_{n\times m}(R)$ 关于矩阵的加法和(实)数乘矩阵构成一线性空间.

2) 给定实数轴上一闭区间$[a,b](a<b)$，取 $C[a,b]$为$[a,b]$上的全体连续函数的集合，则 $C[a,b]$关于函数的相加和实数乘函数松成一线性空间.

证: 1) 任给三 $n\times m$ 级矩阵 $A,B,C\in M_{n\times m}(R)$，任给二实数 $k,l\in R$，因有

$A+B=B+A$,
$(A+B)+C=A+(B+C)$
$O+A=A$
$A+(-A)=O$
$k(A+B)=kA+kB$
$(k+l)A=kA+lA$
$(kl)A=k(lA)$
$1A=A$

因此，$M_{n\times m}(R)$ 关于矩阵的加法和(实)数乘矩阵构成一线性空间.

2) 任给三个在闭区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x),g(x),h(x)\in C[a,b]$，任给二实数 $k,l\in R$，并用 $O(x)$在此闭区间上的函数值总取 0 值的函数，即 $O(x)=0$, $a\le x\le b$, $f(x)$的负函数则为$-f(x)$因有

$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$
$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$
$O(x)+f(x)=f(x)$
$f(x)+[-f(x)]=O(x)$
$k[f(x)+g(x)]=kf(x)+kg(x)$
$(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$
$(kl)f(x)=k[lf(x)]$
$1f(x)=f(x)$

因此，$C[a,b]$关于函数的相加和实数乘函数松成一线性空间.

2. 取上一题中 $M_{n\times m}(R)$ 的 $n\times m$ 个元素 E_{ij} 为(i,j)位元素为 1，其它全为零的矩阵，$i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$. 验证这 $n\times m$ 个元素为 $M_{n\times m}(R)$的一个基. 从而 $M_{n\times m}(R)$的维数为 $n\times m$.
证：首先验证 $n\times m$ 个元素线性无关，考察关于 k_{ij}, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$ 的齐次方程

$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}k_{ij}E_{ij}=O$，这 $n\times m$ 个相加的矩阵中的每一个 $k_{ij}E_{ij}$ 都是只有一个第 i 行第 j 列的元素为 k_{ij}，其余元素为 0，这样就有

$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}k_{ij}E_{ij}=\{k_{ij}\}_{m\times n}$，只有当 $k_{ij}=0, i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m$ 时才有 $\{k_{ij}\}_{m\times n}=O_{m\times n}$，因此知这 $n\times m$ 个元素 E_{ij} 线性无关.

此外，任何 $\{a_{ij}\}_{n\times m}\in M_{n\times m}(R)$，都有

$$\{a_{ij}\}_{n\times m}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

从而这 $n\times m$ 个元素为 $M_{n\times m}(R)$的一个基. 从而 $M_{n\times m}(R)$的维数为 $n\times m$.

3. 判断下述变换中哪些是线性变换.

1) 线性空间 V 中，$\mathrm{A}\xi=\alpha,\alpha\in V$ 是一固定向量.

2) 线性空间 V 中，$\mathrm{A}\xi=\alpha+\xi,\alpha\in V$ 是一固定向量。

3) R^3 中，A$((x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2, x_3-x_2, x_1)$.

4) R^3 中，A$((x_1,x_2,x_3)=(x_1^2, x_1+x_2, x_3)$.

5) 全体实系数多项式构成的线性空间 $R[x]$中，A$(f(x))=f(x-a)$, a 是一固定的数.

6) 同上，$R[x]$中，$A(f(x))=f(x^2)$.

解：1) 如果$\alpha\neq O$，则不是线性变换，因 A$O=\alpha$并没有将零向量映射为零向量.

2) 如果$\alpha\neq O$，则不是线性变换，同样因为 A$O=\alpha$.

3) 任给$\alpha,\beta\in R^3$, $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$, $\beta=(b_1,b_2,b_3)$, k 为任意实数，则

$\mathrm{A}(\alpha+\beta)=\mathrm{A}(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(2(a_1+b_1)+(a_2+b_2), (a_3+b_3)-(a_2+b_2),(a_1+b_1))$

$=(2a_1+a_2, a_3-a_2, a_1)+(2a_1+a_2, a_3-a_2, a_1)=\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{A}(\beta)$

$\mathrm{A}(k\alpha)=\mathrm{A}(ka_1,ka_2,ka_3)=(2ka_1+ka_2, ka_3-ka_2, ka_1)=k(2a_1+a_2, a_3-a_2, a_1)=k\mathrm{A}(\alpha)$

因此 A 为线性变换.

4) 不是线性变换，第一个分量产生平方项 x_1^2 是非线性的原因. 因此找任何一个第一个分量不为零的向量作反例即可，因此令$\alpha=(1,0,0)$，并给出实数 2,

则 $\mathrm{A}\alpha=\mathrm{A}(1,0,0)=(1, 1, 0)$，而 $\mathrm{A}(2\alpha)=\mathrm{A}(2,0,0)=(4,2,0)\neq(2,2,0)=2\mathrm{A}\alpha$.

5) 任给实系数多项式 $f(x),g(x)\in R[x]$，任给实数 $k\in R$,

$\mathrm{A}(f(x))=f(x-a)$, $\mathrm{A}(g(x))=g(x-a)$,

$\mathrm{A}(f(x)+g(x))=f(x-a)+g(x-a)=\mathrm{A}(f(x))+\mathrm{A}(g(x))$,

$\mathrm{A}(kf(x))=kf(x-a)=k\mathrm{A}(f(x))$,

因此 A 是线性变换.

6) 任给实系数多项式 $f(x),g(x)\in R[x]$，任给实数 $k\in R$,

$\mathrm{A}(f(x))=f(x^2)$, $\mathrm{A}(g(x))=g(x^2)$,

$\mathrm{A}(f(x)+g(x))=f(x^2)+g(x^2)=\mathrm{A}(f(x))+\mathrm{A}(g(x))$,

$\mathrm{A}(kf(x))=kf(x^2)=k\mathrm{A}(f(x))$,

因此 A 是线性变换.

4. 在 $R[x]$中，$\mathrm{A}\ (f(x))=f'(x),\mathrm{B}\ (f(x)=xf(x)$，验证 A,B 均是线性变换，且 AB−BA=E. 其中，E 是指恒等变换.

证：$\mathrm{AB}\ (f(x))=\mathrm{A}\ (xf(x)=(xf(x)'=f(x)+xf'(x)$

$\mathrm{BA}\ (f(x))=\mathrm{B}\ (f'(x))=xf'(x)$

因此有

$(\mathrm{AB}\ -\mathrm{BA}\ )(f(x))=\mathrm{AB}\ (f(x))-\mathrm{BA}\ (f(x))=f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)$

即 AB−BA=E.

5. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$$

定义 R^3 上的一个线性变换 A 使得 A 在基 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T,\alpha_3=(0,2,-1)^T$ 下的矩阵为 A.

解：设 R^3 中的任意一向量 β 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,下的坐标向量为 $(b_1,b_2,b_3)^T$，即

$$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$，则有

$$\mathrm{A}\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\beta$$

现求 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$ 如下：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&0&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&0&1&0&0\\0&3&2&1&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\\0&3&2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(-3)+r_3]{r_2\times(-2)+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&0&-2\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&5&1&1&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-2/5)+r_1]{r_3\times(1/5)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&3/5&-2/5&-4/5\\0&1&0&1/5&1/5&2/5\\0&0&5&1&1&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(1/5)]{r_1\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3/5&2/5&4/5\\0&1&0&1/5&1/5&2/5\\0&0&1&1/5&1/5&-3/5\end{array}\right]$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T=\begin{bmatrix}-3/5&2/5&4/5\\1/5&1/5&2/5\\1/5&1/5&-3/5\end{bmatrix}$$

即有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&1&2\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2&4\\1&1&2\\1&1&-3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&1&2\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&1&7\\-3&7&9\\-1&4&13\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-2&13&11\\-9&16&42\\-2&3&-4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}\beta=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-2&13&11\\-9&16&42\\-2&3&-4\end{bmatrix}\beta$$

最后得

6. 设 A,B 为 R^3 中如下定义的线性变换：

A$(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ -x_2+x_3)$
B$(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3,x_1+x_3,x_1+x_2)$
分别求 A,B 和 AB 在基$\varepsilon_1=(1,0,0)^T$, $\varepsilon_2=(0,1,0)^T$, $\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵.
解:

$$\mathrm{A}\ (x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}2x_1-x_2\\x_1+x_2+x_3\\-x_2+x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$ 就是 A 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵,

$$\mathrm{B}\ (x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_2+x_3\\x_1+x_3\\x_1+x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

其中 $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ 就是 B 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵,

$$\mathrm{AB}\ (x_1,x_2,x_3)=AB\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&2&2\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

因此, $AB=\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&2&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$ 就是 AB 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵.

7. 设 R^3 中一线性变换 A 在基$\alpha_1=(1,-2,1)^T,\alpha_2=(0,2,-1)^T, \alpha_3=(-1,0,3)^T$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&1\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

求 A 在基$\beta_1=(1,1,1)^T$, $\beta_2=(1,1,0)^T$, $\beta_3=(1,0,0)^T$下的矩阵.
解: 设由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基β_1,β_2,β_3下的过渡矩阵为 T, 则
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$
因此, 对分块矩阵$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|\beta_1,\beta_2,\beta_3)$作行初等变换使左边一半变换为单位矩阵时, 右边的一半的内容即为 T,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&1\\-2&2&0&1&1&0\\1&-1&3&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times2+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&1\\0&2&-2&3&3&2\\0&-1&4&0&-1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&1\\0&-1&4&0&-1&-1\\0&2&-2&3&3&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2\times2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&1\\0&1&-4&0&1&1\\0&0&6&3&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times(1/6)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&1\\0&1&-4&0&1&1\\0&0&1&1/2&1/6&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times4+r_2]{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/2&7/6&1\\0&1&0&2&5/3&1\\0&0&1&1/2&1/6&0\end{array}\right]$$

因此

$$T=\begin{bmatrix}3/2&7/6&1\\2&5/3&1\\1/2&1/6&0\end{bmatrix}$$

再求过渡矩阵的逆 T^{-1}，因为$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)T^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因此对分块矩阵$(\beta_1,\beta_2,\beta_3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$作行初等变换使左边成为单位矩阵，则右边即为 T^{-1}，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&-1\\1&1&0&-2&2&0\\1&0&0&1&-1&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&-1\\0&0&-1&-3&2&1\\0&-1&-1&0&-1&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&-1\\0&-1&-1&0&-1&4\\0&0&-1&-3&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&3\\0&1&1&0&1&-4\\0&0&-1&-3&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&3\\0&1&0&-3&3&-3\\0&0&1&3&-2&-1\end{array}\right]$$

因此

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-3&3&-3\\3&-2&-1\end{bmatrix}$$

任给$\xi\in R^3$，设其在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标向量为$(x_1,x_2,x_3)^T$，即
$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(x_1,x_2,x_3)^T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)T^{-1}(x_1,x_2,x_3)^T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(c_1,c_2,c_3)^T$，
其中$(c_1,c_2,c_3)^T$为ξ在基β_1,β_2,β_3下的坐标向量，满足
$(c_1,c_2,c_3)^T=T^{-1}(x_1,x_2,x_3)^T$，或$(x_1,x_2,x_3)^T=T(c_1,c_2,c_3)^T$
有 $\mathrm{A}(\xi)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A(x_1,x_2,x_3)^T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)T^{-1}AT(c_1,c_2,c_3)^T$，
其中

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-3&3&-3\\3&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&1\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2&7/6&1\\2&5/3&1\\1/2&1/6&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4&8&3\\6&-12&-3\\-1&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2&7/6&1\\2&5/3&1\\1/2&1/6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23/2&55/6&4\\-33/2&-27/2&-6\\13/2&11/2&3\end{bmatrix}$$

即 A 在基β_1,β_2,β_3下的矩阵为

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}23/2 & 55/6 & 4\\ -33/2 & -27/2 & -6\\ 13/2 & 11/2 & 3\end{bmatrix}$$

8. 设 A 为 7 题中的线性变换，并设向量$\gamma=(2,-3,1)^T$，求γ和 A(γ)在基β_1,β_2,β_3下的坐标.
解：设γ在在基β_1,β_2,β_3下的坐标为(x_1,x_2,x_3)，则解非齐次方程$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\gamma$，写成齐次方程组的标准形式:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\ x_1+x_2=-3\\ x_1=1\end{cases}$$

由下面的方程往上面的方程依次解可得$x_1=1,x_2=-3-1=-4$, $x_3=2-1+4=5$，即γ在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$(1,-4,5)$, $\gamma=\beta_1-4\beta_2+5\beta_3$,
而上题已经求得 A(γ)在基β_1,β_2,β_3下的矩阵 B 为

$$B=\begin{bmatrix}23/2 & 55/6 & 4\\ -33/2 & -27/2 & -6\\ 13/2 & 11/2 & 3\end{bmatrix}$$

因此 A(γ)在基β_1,β_2,β_3下的坐标为

$$\begin{bmatrix}23/2 & 55/6 & 4\\ -33/2 & -27/2 & -6\\ 13/2 & 11/2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -4\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-31/6\\ 15/2\\ -1/2\end{bmatrix}$$

9. 求 6 题中线性变换 B 的逆变换。
解: 6 题已经解出 B 的在基$\varepsilon_1=(1,0,0)^T$, $\varepsilon_2=(0,1,0)^T$, $\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵 B 为

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

因此, B 的逆变换在同样基下的矩阵为 B^{-1}，下面求 B^{-1}，对分块矩阵$(B|I)$作行初等变换:

$$(B\,|\,I)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\times(-1)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times(-1)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1/2)]{\substack{r_3\times(1/2)+r_1\\ r_3\times(1/2)+r_2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&1/2&1/2\\0&1&0&1/2&-1/2&1/2\\0&0&1&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right]$$

因此

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-x_1+x_2+x_3\\x_1-x_2+x_3\\x_1+x_2-x_3\end{bmatrix}$$

因

即

$$\mathrm{B}^{-1}(x_1,x_2,x_3)=(-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)$$

10. 设 R^4 中线性变换 A 在一基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\2&1&-1&0\\0&-1&3&1\\-3&1&3&2\end{bmatrix}$$

1) 分别求 A 的值域和核的一个基.

2) A 可逆吗?

解: 任给 R^4 中的一向量ξ, 设其在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下的坐标向量为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 则 Aξ在同样基下的坐标向量为

$Y=AX$,

为研究 A 的值域, 可先上式中 Y 的值域. 将 $E_1=(1,0,0,0)^T$, $E_2=(0,1,0,0)^T$,$E_3=(0,0,1,0)^T$, $E_4=(0,0,0,1)^T$, 这四个线性无关的向量代入上式, 得到的四个向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$正好是 A 的各个列向量, 即$\beta_1=AE_1,\beta_2=AE_2,\beta_3=AE_3,\beta_1=AE_3$, $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$, 下面对 A 做行初等变换来研究它的各个列向量间的线性关系.

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\2&1&-1&0\\0&-1&3&1\\-3&1&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-3)+r_3]{r_1\times 2+r_2}\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&1&3&2\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3+r_4\\ r_2+r_3\\ r_1\times(-1)}}\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&3&2\\0&0&6&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3\times 1/3+r_1\\ r_3\times(-1/2)+r_2\\ r_3\times(1/6)}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1/2\\0&0&1&1/2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可见向量组β_1,β_2,β_3为 A 的各个列向量的极大无关组, 而

$$\beta_4=\frac{1}{2}\beta_2+\frac{1}{2}\beta_3$$

因此, 矩阵相乘 $Y=AX$ 中当 X 取 R^4 中的一切值时, Y 的值域为 $span(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 相对应地, A 的值域就是

$span((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\beta_1,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\beta_2,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\beta_3)=$

$=span(-\varepsilon_1+2\varepsilon_2-3\varepsilon_4, \varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4, 2\varepsilon_1-\varepsilon_2+3\varepsilon_3+3\varepsilon_4)$

现在求 A 的核, 则考察齐次方程 $AX=O$, 按上面的变换有一个自由变元 $x_4=t$ 为任意常数时, $x_1=0$, $x_2=-t/2$, $x_3=-t/2$, 写成向量形式有

$$X=\begin{bmatrix}0\\-t/2\\-t/2\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\-1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}$$

这是 A 的核的所有向量的坐标向量的形式, 因此 A 的核为

$span(-\frac{1}{2}\varepsilon_2-\frac{1}{2}\varepsilon_3+\varepsilon_4)$.

2) 因为 A 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下矩阵 A 不可逆，所以 A 也不可逆.

11. 证明：非零向量是一线性变换 A 的核中元素当且仅当它是 A 的属于零特征值的特征向量.
证：假设向量$\alpha\in Ker$(A)，即有 A$\alpha=O=0\alpha$，即α为 A 的关于特征值 0 的特征向量，此外，假设β为 A 的关于特征值 0 的特征向量，即 A$\beta=0\beta=O$，则$\beta\in Ker$(A)，证毕.

12. 证明：如果向量$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$是 n 维线性空间 V 上的线性变换 A 的属于特征值 0 的线性无关的特征向量，$\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$是 A 的非零特征值的线性无关的特征向量，(即 A 可对角化)，则
Ker(A)$=Span(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$
A$(V)=Span(\xi_{r+1},\xi_{r+1},\ldots,\xi_n)$
证：因为 A 的不同特征值间的特征向量间线性无关，因此有$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$是 n 维线性空间 V 上的 n 个线性无关的向量，自然可以做 V 上的一个基，则任给$\alpha\in V$，其在这组基上的坐标为 x_1, x_2, …, x_n，即$\alpha=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n$，则
A$(\alpha)=$A$(x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n)==x_1A\xi_1+x_2A\xi_2+\ldots+x_rA\xi_r+x_{r+1}A\xi_{r+1}+\ldots+x_nA\xi_n=$
$=O+x_{r+1}\lambda_{r+1}\xi_{r+1}+\ldots+x_n\lambda_n\xi_n\in Span(\xi_{r+1},\xi_{r+1},\ldots,\xi_n)$ (1)
其中$\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_n$为对应特征向量$\xi_{r+1},\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$的特征值，根据假设它们都不为零.
反过来，任给$\beta\in Span(\xi_{r+1},\xi_{r+1},\ldots,\xi_n)$，即$\beta=y_{r+1}\xi_{r+1}+\ldots+y_n\xi_n$，则有

$$\mathrm{A}\left(\frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}}\xi_{r+1}+\cdots+\frac{y_n}{\lambda_n}\xi_n\right)=\frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}}\mathrm{A}(\xi_{r+1})+\cdots+\frac{y_n}{\lambda_n}\mathrm{A}(\xi_n)$$

$$=\frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}}\lambda_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+\frac{y_n}{\lambda_n}\lambda_n\xi_n=y_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+y_n\xi_n=\beta\in\mathrm{A}(V)$$

这就证明了 A$(V)=Span(\xi_{r+1},\xi_{r+1},\ldots,\xi_n)$
现证明 Ker(A)$=Span(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$
假设$\alpha=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n\in Ker(A)$，即 A$(\alpha)=O$，按(1)式有
$x_{r+1}\lambda_{r+1}\xi_{r+1}+\ldots+x_n\lambda_n\xi_n=O$，因$\xi_{r+1},\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$线性无关，且$\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_n$都不为 0，则必有
$x_{r+1}=x_{r+2}=\ldots=x_n=0$，则$\alpha=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_r\xi_r\in Span(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$，
反过来，假设有$\beta\in Span(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$，即$\beta=y_1\xi_1+y_2\xi_2+\ldots+y_r\xi_r$，必有
A$(\beta)=$A$(y_1\xi_1+y_2\xi_2+\ldots+y_n\xi_n)==y_1A\xi_1+y_2A\xi_2+\ldots+y_rA\xi_r=O$，
即$\beta\in Ker$(A).
因此有 Ker(A)$=Span(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$
证毕.

13. 求 R^3 上的线性变换 A 的特征值和特征向量. 这里，A 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下矩阵为

1) $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$ 2) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$

解: 1) 先求 A 的特征值和特征向量. A 的特征多项式为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -4 & -1-\lambda & 0\\ 4 & -8 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ -4 & -1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)[(3-\lambda)(-1-\lambda)+4]=-(\lambda+2)(-3-2\lambda+\lambda^2+4)$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+1)=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

因此 A 有两个特征值$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$,
对于$\lambda_1=-2$，解齐次方程$(A+2I)X=O$，对系数矩阵 $A+2I$ 作行初等变换，

$$\begin{bmatrix}5&1&0\\-4&1&0\\4&-8&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times(4/5)+r_2\\ r_1\times(-4/5)+r_3}}\begin{bmatrix}5&1&0\\0&6/5&0\\0&-44/5&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2\times5/6\\ r_3\times5/44\\ r_2+r_3}}\begin{bmatrix}5&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2\times(-1)+r_1\\ r_1\times(1/5)}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

有一个自由变元 $x_3=t$ 为任意常数, $x_1=x_2=0$, 写成向量形式

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

因此对应于$\lambda_1=2$ 的特征向量为 $t(0,0,1)^T$.

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$, 解齐次方程$(A-I)X=O$, 对系数矩阵 $A-I$ 作行初等变换

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&-8&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times2+r_2\\ r_1\times(-2)+r_3}}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&0\\0&-10&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2\times1/10+r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{bmatrix}2&0&-3/10\\0&-10&-3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1\times1/2\\ r_2\times(-1/10)}}\begin{bmatrix}1&0&-3/20\\0&1&3/10\\0&0&0\end{bmatrix}$$

方程有一个自由变元 $x_3=t$ 为任意常数, $x_1=(3/20)t$, $x_2=-(3/10)t$, 写成向量形式,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}t\\-\frac{3}{10}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}3/20\\-3/10\\1\end{bmatrix}$$

因此$\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $t(3/20,-3/10,1)^T$,

综上所述, A 的特征值为$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, 其中

$\lambda_1=-2$ 对应的特征值向量为 $t\varepsilon_3$,

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量为 $t(\frac{3}{20}\varepsilon_1-\frac{3}{10}\varepsilon_2+\varepsilon_3)$

2) A 的特征多项式为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&-2\\2&-\lambda&-2\\2&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2+c_1\\ c_3+c_1}}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&-1&-2\\-\lambda&-\lambda&-2\\-\lambda&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}1&-1&-2\\1&-\lambda&-2\\1&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1\times(-1)+r_2\\ r_1\times(-1)+r_3}}{=}-\lambda\begin{vmatrix}1&-1&-2\\0&-\lambda+1&0\\0&0&-\lambda+1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2$$

A 的特征值为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$,

对于$\lambda_1=0$, 解齐次方程 $AX=O$, 对 A 作行初等变换

$$\begin{bmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times(-2/3)+r_2\\ r_1\times(-2/3)+r_3}}\begin{bmatrix}3&-1&-2\\0&2/3&-2/3\\0&-1/3&1/3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(3/2)]{r_2\times(1/2)+r_3}\begin{bmatrix}3&-1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times 1/3]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

方程有一个自由变元 $x_3=t$ 为任意常数，则 $x_1=x_2=t$，可知 $t(1,1,1)^T$ 为$\lambda_1=0$ 对应的特征向量.
对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，解齐次方程$(A-I)X=O$，对 $A-I$ 作行初等变换

$$\begin{bmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-2\\2&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}2&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

方程有两个自由变元 $x_2=s$, $x_3=t$, s,t 为任意实数，则 $x_1=(s/2)+t$，写成向量形式，

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}s+t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1/2\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

即$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应于两个线性无关的特征向量 $s(1/2,1,0)^T$ 和 $t(1,0,1)^T$.
综上所述，A 的对应于$\lambda_1=0$ 的特征向量为 $t(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$，对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为

$s(\frac{1}{2}\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ 和 $t(\varepsilon_1+\varepsilon_3)$

14. 上题中，哪一个线性变换在适当的基下的矩阵为对角形，并求相应的过渡矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形.
解: 1)中的线性变换只有两个线性无关的特征向量，因此 A 无法对角化.
2) 中的线性变换有三个线性无关的特征向量，因此可对角化，令矩阵 T 由$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量按列向量拼成，即

$$T=\begin{bmatrix}1&1/2&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$，则必有

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$