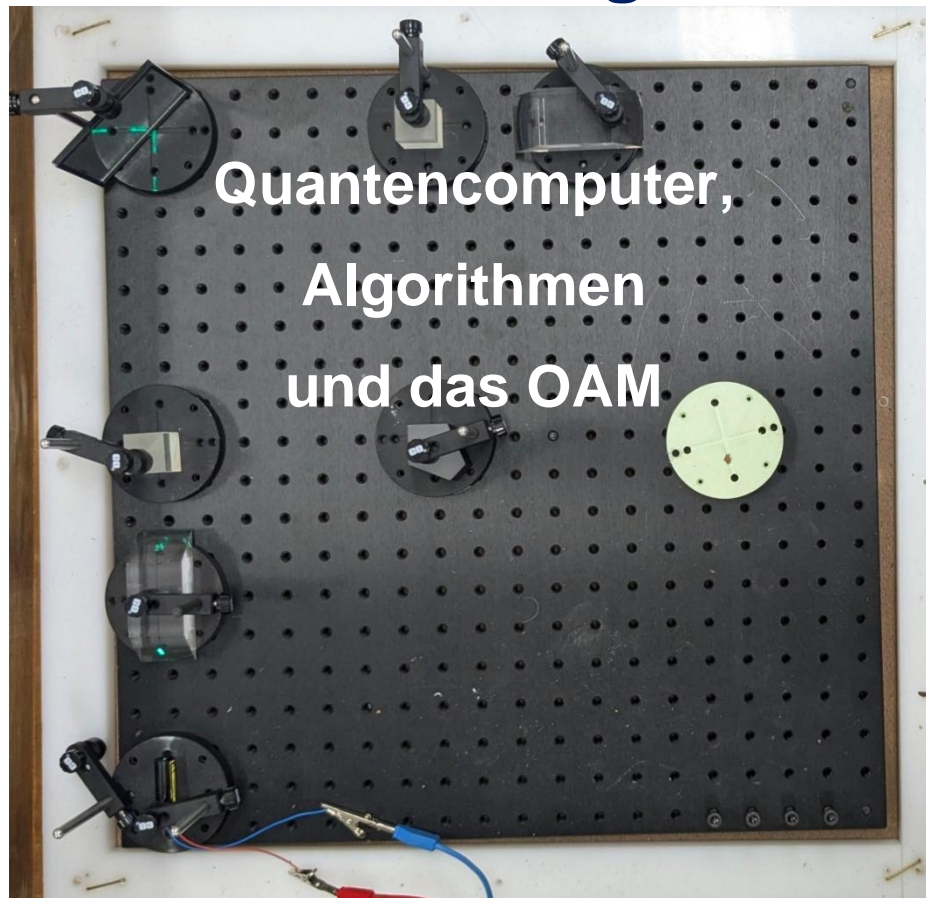


Jugend forscht Wettbewerb 2025

Lüneburg



(Bild 1) Die Abbildung zeigt das Prinzip eines C-NOT-Gatters im Quantencomputer. Auch findet man auf der Abbildung zwei 3D gedruckte Bauteile: in dem Gatter die erste Bodenhalterung einschließlich Stab für das Dove Prisma nach dem Laser, und die hellgrüne Halterung auf der rechten Seite der Abbildung

Teilnehmer:	Jannes Ruder (15) Johann Wischner (17)
Erarbeitungsort:	Himmelpforten, Stade
Projektbetreuer:	Dr. Hans Otto-Carmesin
Fachgebiet:	Technik
Wettbewerbssparte:	Jugend forscht
Bundesland:	Niedersachsen
Wettbewerbsjahr:	2025

Kurzfassung

Quantencomputer, Algorithmen und das OAM

Unsere Arbeit ist die Weiterführung eines ein Quantencomputer-Demonstrator-Projekts aus dem Vorjahr von Philipp Schöneberg, Phil Gustke und Jannes Ruder. Quantencomputer nutzen Superposition und Verschränkung, um bestimmte Probleme schneller zu lösen als klassische Computer. Wir haben gezeigt, wie Hologramme genutzt werden, um Licht mit Orbital Angular Momentum zu erzeugen. Dieses eignet sich neben der Polarisation als zweites Qubit. Andererseits haben wir theoretisch wie experimentell nachgewiesen, dass auch optische Quantencomputer, die mit Laserlicht arbeiten, das Qubit-Prinzip nutzen können. Diese verzichten durch Nutzung der Lasertechnologie auf Einzel-Photonen und bieten so einen besonders einfachen und eleganten sowie günstigen Aufbau ohne Verlust der Funktion der Qubits.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung.....	2
1. Einleitung.....	4
2. Gatter und Methode.....	5
2.1 Quantengatter.....	5
2.1.1 CNOT-Gatter.....	5
2.1.2 Hadamard-Gatter.....	6
2.1.3 NOT-Gatter.....	6
2.1.5 Z-Gatter.....	7
2.2 Das OAM.....	7
2.2.1 Einführung in den Bahndrehimpuls (OAM).....	7
2.2.1.1 Definition und Eigenschaften des Bahndrehimpulses.....	7
2.2.2 Erzeugung von OAM-Zuständen.....	8
2.2.2.1 Theoretische Grundlagen der OAM-Erzeugung.....	8
2.2.2.2 Zielzustände: $\ell = +1$ und $\ell = -1$	9
2.2.3 Hologramme als Werkzeuge zur OAM-Erzeugung.....	9
2.2.3.1 Rolle der Hologramme in der OAM-Manipulation.....	9
2.2.3.2 Probleme bei der Herstellung von Hologrammen.....	9
2.2.3.3 Lösung: Microsheet Hologramme.....	10
2.2.3.5. Integration in den Quantencomputer-Demonstrator.....	10
2.2.3.5.1 Kombination von Polarisation und OAM als Qubits.....	10
3 Algorithmen.....	10
3.1 Deutsch-Algorithmus.....	10
3.1.1 Theorie.....	10
3.1.2 Aufbau.....	11
3.1.3 Durchführung.....	11
3.1.4 Ergebnisse.....	12
3.2 Erklärung und Verallgemeinerung.....	12
3.2.1. Beweismethode.....	12
3.2.2. Step 1.....	12
3.2.3. Step 2.....	13
3.2.4. Step 3.....	13
3.2.5. Step 4.....	13
3.2.6.1. Step 5a.....	13
3.2.6.2. Step 5b.....	14
3.2.6.3. Step 5c.....	14
3.2.7. Step $U_f(b\rangle)$	14
3.2.8. Fazit.....	14
3.3 Deutsch-Jozsa.....	15
3.3.1 Theorie.....	15
3.3.2 Aufbau.....	16
3.3.3. Durchführung.....	16
4. Ergebnisse und Ziele.....	17
4.1 Fazit.....	17
4.2 Ziele.....	17
5. Quellen- und Literaturverzeichnis.....	18
6. Danksagung.....	19

1. Einleitung

Quantencomputer sind eine revolutionäre Technologie, die die Grenzen der klassischen Informatik überschreiten. Basierend auf den Prinzipien der Quantenmechanik versprechen sie, komplexe Probleme zu lösen, die für herkömmliche Computer nahezu unlösbar sind. Diese Arbeit untersucht die Funktionsweise von Quantencomputern, Algorithmen und Quantengattern.

Unser Ziel für dieses Jahr war es das OAM als unabhängiges Qubit ausgearbeitet und einsatzfähig zu machen, wir hatten uns auch vorgenommen das Projekt umweltfreundlicher zu gestalten. Außerdem haben wir uns vorgenommen Algorithmen auf unseren Quanten Computer rechnen zu lassen, wobei unser Fokus auf dem Deutsch-Jozsa-Algorithmus lag.

2. Gatter und Methode

In diesem Abschnitt stellen wir an Beispielen wesentliche Methoden und Gatter dar.

2.1 Quantengatter

Quantengatter sind fundamentale Bausteine im Quantencomputing, die es ermöglichen, die Zustände von Qubits gezielt zu verändern und zu verschränken. In unserer Arbeit am Quantencomputer haben wir mit den Gattern {CNOT, H, T, Not, Z} geforscht, um einen Algorithmus zu entwerfen.

2.1.1 CNOT-Gatter

Die Controlled-NOT-Abbildung oder kurz C-NOT- beziehungsweise CX-Abbildung führt eine NOT-beziehungsweise X-Operation am Zielqubit durch, welche durch den Zustand des Kontrollqubits kontrolliert wird. Dementsprechend werden zwei Qubits benötigt, welche durch die Abbildung miteinander verknüpft werden.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die mathematische Umsetzung als Matrix ist entsprechend vierdimensional und hängt davon ab, ob Qubit $|q0\rangle$ oder Qubit $|q1\rangle$ als kontrollierendes Qubit verwendet wird.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Will man dies nun ausrechnen, erkennt man das sich die Polarisation des Zielqubits ändert, wenn Qubit $|q1\rangle$ als kontrollierendes Qubit verwendet wird. (Development Team)

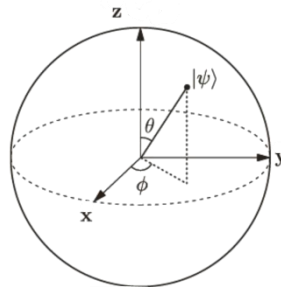
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Hadamard-Gatter

Die Hadamard-Abbildung ist eine Einzel-Qubit-Abbildung, welche es ermöglicht, ein Qubit von einem Basiszustand in eine uniforme Superposition und wieder zurückzusetzen.

Prinzipiell lässt sich die Abbildung anhand der Einheitskugel



(Bild 2)

Die Abbildung zeigt eine Einheitskugel, die den Hilbert-Raum darstellt.

durch eine Rotation um die X + Z-Achse (Roy) erklären und resultiert deshalb beispielsweise ausgehend vom Startzustand $|0\rangle$ ($|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) im Zustand $|+\rangle$ ($|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Da die Hadamard-Abbildung in den späteren Berechnungen mit zwei Qubits, nicht nur mit sich selbst verknüpft wird, sondern teilweise auch auf einzelne Qubits angewendet wird, zeigen wir hier unsere drei verschiedenen Verknüpfungen. Die erste ist die Verknüpfung zweier Hadamard-Abbildungen, welche eine Anwendung der Abbildung auf beide Qubits ermöglicht. Die zweite ist die Verknüpfung einer Hadamard-Abbildung und einer Einheitsmatrix. Diese ermöglicht eine Anwendung der Hadamard-Abbildung nur auf das erste Qubit, hier $|q0\rangle$, wobei das zweite Qubit $|q1\rangle$ keine Rolle spielt. Die dritte Möglichkeit ist die ausschließliche Anwendung der Hadamard-Abbildung auf das zweite Qubit des Systems, wofür die Einheitsmatrix und die Hadamard-Abbildung in einer anderen Reihenfolge verknüpft werden.

Für diese Abbildung nutzen wir das um $22,5^\circ$ gedrehte $\frac{\lambda}{2}$ Plättchen für das Qubit mit Polarisation. (Universum Physik Sekundarstufe 2) Rechnerisch sieht die Abbildung wie folgt aus:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 NOT-Gatter

Das NOT-Gatter ermöglicht, dass ein Qubit von einem Basiszustand in einen anderen Basiszustand versetzt wird.

Anhand der Einheitskugel kann man sich das NOT-Gatter erklären.

Die NOT-Abbildung sorgt dafür, dass sich der Basiszustand zum entgegengesetzten spiegelt. Die sorgt zum Beispiel, dass sich der Basiszustand 0, nachdem dieser auf ein NOT-Gatter angewendet wird,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu dem Basiszustand 1 ($|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) wechselt.

2.1.5 Z-Gatter

Das Z-Gatter, auch als Pauli-Z-Gatter bekannt, ist ein fundamentales Quantengatter, das auf ein Qubit angewendet wird. Es wird durch die Matrix Z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dargestellt und rotiert den Qubit-Zustand um π (180°) um die z-Achse der Einheitskugel. In der Dirac-Notation transformiert das Z-Gatter die Basiszustände wie folgt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + -1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + -1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

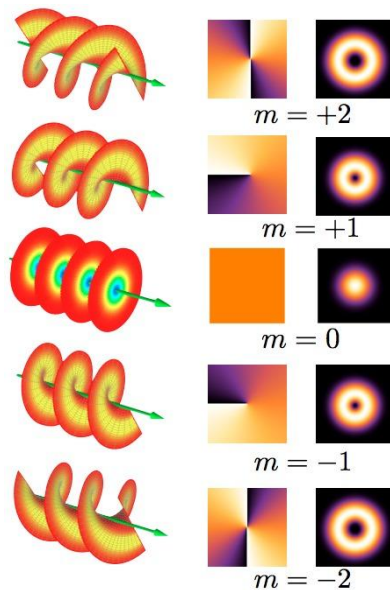
Dies bedeutet, dass das Z-Gatter die Phase des $|1\rangle$ -Zustands invertiert, während der $|0\rangle$ -Zustand unverändert bleibt.

2.2 Das OAM

2.2.1 Einführung in den Bahndrehimpuls (OAM)

2.2.1.1 Definition und Eigenschaften des Bahndrehimpulses

Der Bahndrehimpuls ist ähnlich wie der Spin-Drehimpuls eine Form des elektromagnetischen Drehimpulses. Er beschreibt die Verteilung der Wellenfront entlang der Azimutalachse - bei einem normalen Laser also eine plane Ebene. Im Gegensatz zum Spin welcher nur + oder - sein kann wird der Bahndrehimpuls in topologischer Ladung (ℓ) angegeben, welche Zustände von +n bis -n annehmen kann und so eine höhere Zustandsvielfalt bietet. Licht mit einer topologischen Ladung größer 0 ist aufgrund der auffälligen, ringförmigen Struktur gut erkennbar.

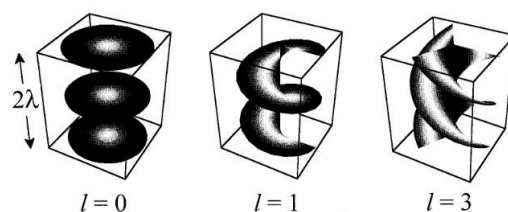


(Bild 3) Die Abbildung zeigt Lichtwellenfronten mit verschiedenen topologischen Ladungen m von -2 bis +2. Auf der linken Seite eine dreidimensionale Darstellung der helikalen Struktur, in der Mitte die Phasenfront und rechts die Intensitätsverteilung am Schirm.

2.2.2 Erzeugung von OAM-Zuständen

2.2.2.1 Theoretische Grundlagen der OAM-Erzeugung

Die topologische Ladung beschreibt die Anzahl an Drehungen pro Wellenlänge.



(Bild 4) Die Abbildung zeigt Wellenfronten für verschiedene topologische Ladungen $\ell(0, 1, 3)$ in einer Strecke von $\frac{\lambda}{2}$.

Das Licht wird also in eine helikale Struktur gebracht, die durch den Phasenterm $\exp(il\varphi)$ beschrieben wird. Dementsprechend sind auch Zustände wie $\ell = 10$ möglich, praktisch aber nicht mehr gut umsetzbar da bei größerer topologischer Ladung ein Intensitätsverlust zu vermerken ist. Die Ringstruktur ist eine Folge der Phasenverschiebungen, welche zur Auslöschung der Lichtintensität im Kern führen.

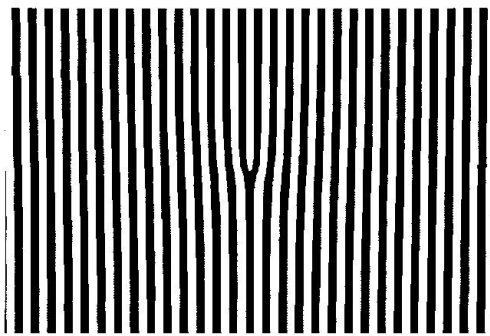
2.2.2.2 Zielzustände: $\ell = +1$ und $\ell = -1$

Positive und negative topologische Ladungen unterscheiden sich in ihrer Drehrichtung: linksherum oder rechtsherum. Trotz dessen, dass der Bahndrehimpuls mehr Möglichkeiten bietet, bleiben wir vorerst beim Bit-System und haben so als Zielzustände nur $\ell = +1$ und $\ell = -1$. Die Drehung (rechts- / linksherum) lässt sich mithilfe von Spiegeln beeinflussen, so wird z.B. aus $\ell = +1$, wenn es gespiegelt wird, $\ell = -1$. Spiegel funktionieren wie Gatter.

2.2.3 Hologramme als Werkzeuge zur OAM-Erzeugung

2.2.3.1 Rolle der Hologramme in der OAM-Manipulation

Um Licht mit topologischer Ladung größer 0 zu erzeugen, eignen sich computergenerierte Hologramme mit einem Gabelmuster.



(Bild 5) Die Abbildung zeigt ein Computer generiertes Hologramm. Wird es mit einer ebenen Wellenfront beleuchtet, gibt es eine Welle mit helikalen Wellenfronten aus.

Beim Auftreffen eines Lichtstrahls ist der Beugungswinkel auf der einen Seite größer. Das hat eine Phasenverschiebung zur Folge, welche sich spiralförmig um das Zentrum des Strahls ändert.

2.2.3.2 Probleme bei der Herstellung von Hologrammen

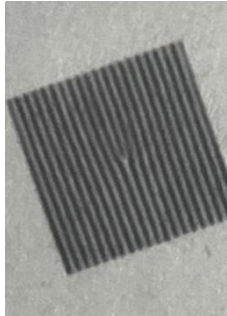
Die Beschaffung der Hologramme hat sich vorerst als schwierig erwiesen. Unsere ersten Exemplare haben wir bei örtlichen Druckereien besorgt. Diese Exemplare haben allerdings nicht die gewünschte Qualität gehabt, was zur Folge hatte, dass die Ringstruktur nicht zu erkennen war



(Bild 6/7) Die Abbildung 7 zeigt ein Foto vom Beugungsmuster, gegeben durch das Hologramm von nicht ausreichender Qualität. Man erkennt keine Ringstruktur. Die Abbildung 6 zeigt ein Foto von einem Hologramm mit ungenügender Qualität. Zu erkennen sind die Unregelmäßigkeiten in den schwarzen Linien.

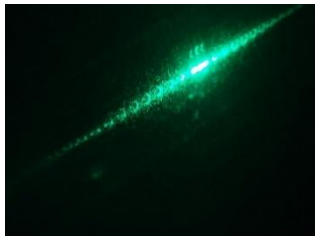
2.2.3.3 Lösung: Microsheet Hologramme

Letztendlich haben wir bei einem Mikrofilm-Unternehmen (Wandel: <https://www.dd-wandel.de>) angefragt, was eine teurere Herstellung bedeutet, aber sich auch lohnt, da die Exemplare eine gute Qualität haben und auch die Ringstruktur klar zu erkennen ist.



(Bild 8) Die Abbildung zeigt ein Foto von einem Hologramm hergestellt mit Mikrofilmtechnologie. Man erkennt klare durchgängige Linien von hoher Qualität.

Selbst die Unterscheidung zwischen Links- und Rechtsdrehung ist mit dem bloßen Auge möglich



(Bild 9) Die Abbildung zeigt ein Foto vom Beugungsmuster, gegeben durch das Hologramm von hoher Qualität. Die Ringstruktur ist bei dem äußeren Maximum klar zu erkennen. Außerdem erkennt man, dass es links vom nullten Maximum eine Rechtsdrehung und rechts von dem nullten Maximum eine Linksdrehung in der Wellenfront gibt.

2.2.3.5. Integration in den Quantencomputer-Demonstrator

2.2.3.5.1 Kombination von Polarisation und OAM als Qubits

Da Licht einen Bahndrehimpuls hat, und man diesen mit einfachen Bauteilen wie Hologrammen gezielt beeinflussen kann, eignet sich dieser neben der Polarisation gut als zweites Qubit.

3 Algorithmen

3.1 Deutsch-Algorithmus

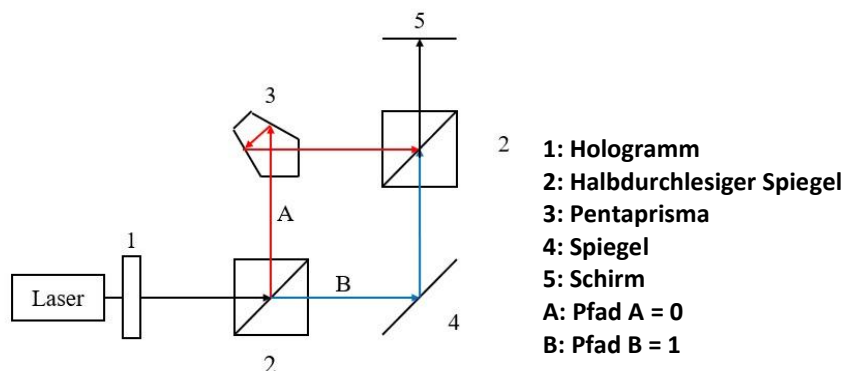
3.1.1 Theorie

Der Deutsch-Algorithmus ist ein Spezialfall des Deutsch-Jozsa-Algorithmus, für welchen die Eingabe ein Bit groß ist. Es gibt also nur die Eingabemöglichkeiten 0 oder 1. Der Algorithmus soll überprüfen, ob eine binäre Funktion konstant oder balanciert ist. Konstant bedeutet für jedes x ist $f(x)$ gleich: entweder $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1$. Balanciert bedeutet $f(x) = x$ oder $f(x) = NOT(x)$. Daraus ergeben sich zwei

konstante Funktionen f_a , f_b und zwei balancierte f_c , f_d . Das interessante am Algorithmus ist, dass man vorab kein Wissen über f hat, sondern nur eine Eingabe $x \in \{0, 1\}$ machen kann und die Ausgabe $f(x)$ überprüfen kann. Ein klassischer Computer müsste also zwei Eingaben $f(0)$ und $f(1)$ machen und die Ausgaben vergleichen, um zu überprüfen, ob die Funktion konstant oder balanciert ist. Der Quantencomputer kann das Problem mit nur einer Eingabe lösen, indem er die beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in eine Superposition versetzt. Dadurch wird mit nur einer Eingabe genug Information gesammelt.

3.1.2 Aufbau

Der Aufbau eines Deutsch-Algorithmus, also eines Deutsch-Jozsa mit einem Qubit ähnelt in der praktischen Umsetzung dem CNOT-Gatter. Wir behalten den Grundaufbau bei



(Bild 10) Die Abbildung zeigt den Aufbau des Deutsch-Algorithmus für die balancierte Funktion f_d . 1 ist das Hologramm, 2 sind Polwürfel, 3 ein Pentaprisma und 4 ein Spiegel. 5 ist der Schirm, an dem das Ergebnis ausgelesen wird.

und ändern lediglich je nach Funktion (f_a bis f_d) die Operation auf den Pfaden, sprich wann wo entweder ein Spiegel oder ein Pentaprisma steht. Das resultiert in folgenden Aufbauten:

- f_a : Spiegel auf beiden Pfaden.
- f_b : Pentaprisma auf beiden Pfaden.
- f_c : Spiegel auf Pfad A und Pentaprisma auf Pfad B.
- f_d : Pentaprisma auf Pfad A und Spiegel auf Pfad B.

Damit der Algorithmus auch wie gewünscht funktioniert wird als erstes ein Hadamard-Gatter auf die Polarisation angewendet, damit das Licht auch beide Pfade durchläuft.

3.1.3 Durchführung

Um den Versuch gemäß der Theorie durchzuführen, gibt man mit einem horizontalen Polarisationsfilter $|x\rangle = |0\rangle$ ein und wendet dann ein Hadamard-Gatter ($\frac{1}{2}$ -Plättchen) auf den Zustand an. Dadurch liegt eine Überlagerung von Horizontaler und vertikaler Polarisation vor. Hierdurch werden beide Wege

gleichzeitig abgetastet. Außerdem erzeugt man mit dem Hologramm einen Bahndrehimpuls $\ell = -1$. Nun kann man am Schirm ablesen, ob es sich um eine konstante $f(0) = f(1)$ oder balancierte $f(0) \neq f(1)$ Funktion handelt: fa erzeugt auf beiden Wegen $\ell = +1$. fb erzeugt auf beiden Wegen $\ell = -1$. fc sowie fd erzeugt eine Überlagerung von $\ell = +1$ und $\ell = -1$

3.1.4 Ergebnisse

Wir konnten zeigen, dass eine Umsetzung des Deutsch-Algorithmus auch mit Laserlicht möglich ist.

3.2 Erklärung und Verallgemeinerung

3.2.1. Beweismethode

Die Tabellen zeigen die Rechenschritte des Deutsch($A(1)$) und Deutsch-Jozsa-Algorithmus für $n = 2$ Eingaben ($A(2)$). Schritt für Schritt analysieren wir die Tabellen und mithilfe der vollständigen Induktion beweisen wir die Funktionalität des Algorithmus. Die vollständige Induktion beschreibt das Verfahren, bei dem man sich anguckt, was bei $A(1)$ passiert und was sich zwischen $A(1)$ und $A(2)$ ändert. Diesen Zwischenschritt verallgemeinert man zu $A(n + 1)$, wobei man die Annahme tätigt, dass n durch jeden ganzzahligen Wert k ersetzt werden kann. Schlussendlich beweist man also auf der Grundlage von $A(1)$ und $A(1 + 1)$ was für $A(n + 1)$ passieren würde. Das wäre die vollständige Induktion. Wir zeigen nur eine beinahe vollständige Induktion. Das heißt wir analysieren wie bei einer vollständigen Induktion $A(1)$ und gucken uns an was zu $A(2)$ passiert, wenden die Erkenntnisse dann aber lediglich auf $A(3)$ an und nicht allgemein auf $A(n + 1)$. Soweit es uns möglich ist, probieren wir dennoch die Schritte zu verallgemeinern.

3.2.2. Step 1

Im ersten Schritt legen wir einen Testzustand fest bei dem alle $x_n \rightarrow |0\rangle$ und $y \rightarrow |1\rangle$. Für $n = 1$ also: $|x_1\rangle, |y\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ und für $n = 2$: $|x_1\rangle, |x_2\rangle, |y\rangle = |0\rangle, |0\rangle, |1\rangle$. Für $n = 3$ müsste man nur $x_3 = |0\rangle$ hinzufügen. Verallgemeinert lautet der Schritt: $|x_1\rangle \dots |x_n\rangle, |y\rangle = |0\rangle \dots |0\rangle, |1\rangle$.

3.2.3. Step 2

In Schritt zwei werden die Superpositionen nach der Anwendung eines Hadamard-Gatters wie folgt definiert: $H(|0\rangle) = |0\rangle + |1\rangle \div \sqrt{2} = |+\rangle$ und $H(|1\rangle) = |0\rangle - |1\rangle \div \sqrt{2} = |-\rangle$.

3.2.4. Step 3

In Schritt drei wird das Tensorprodukt der Qubits in Superposition ausgerechnet. Für $n = 1$ also $H(x1) \otimes H(y)$ und für $n = 2$ $H(x1) \otimes H(x2) \otimes H(y)$. Für $n = 3$, müsste man dem Term noch $(\otimes)H(x3)$ hinzufügen. Eine Verallgemeinerte Darstellung gelingt durch: $(\bigotimes_{i=1}^n H(x_i)) \otimes y$. Der Term rechnet mithilfe der Zählvariable i von 1 bis n das Tensorprodukt der n Qubits aus. Das Ergebnis daraus bildet alle möglichen Kombinationen der Qubits ab. Für ein Qubit also 0 und 1. Dieses Ergebnis wird dann noch $\otimes y$ gerechnet, um alle Kombinationen von x und y darzustellen. Für $n = 1$ also 00, 01, 10, 11. Da $\sqrt{2}$ kein Tensor ist wird es einfach $n + 1$ -mal mit sich selbst multipliziert, woraus sich unter dem Bruch für $n = 1$ $\sqrt{2^{1+1}}$ und für $n = 2$: $\sqrt{2^{2+1}}$ ergibt. Für $n = 3$ also $\sqrt{2^{3+1}}$. Allgemein gilt dementsprechend $\sqrt{2^{n+1}}$. Der Bruch aus 3b) wird als Zustand $|b\rangle$ definiert.

3.2.5. Step 4

In Schritt vier definiert man die Abbildung Uf , in der das Qubit y mit den Qubits x_n durch den Term $f(x_1, \dots, x_n) \oplus y$ verbunden wird.

3.2.6.1. Step 5a

In Schritt fünf wendet man die Abbildung Uf auf den Zustand $|b\rangle$ aus Schritt 3 an. Das bedeutet, wenn man in 3 den Zustand $|x = 0\rangle|y = 1\rangle$ hat, wird aus $y \rightarrow f(x) \oplus y$. Aus $|0\rangle|0\rangle$ wird also $|0\rangle|f(0) \oplus 0\rangle$. Das wird für jede Kombination $|x\rangle|y\rangle$ gemacht. Daraus ergibt sich dann der Term in 5a). Für $n = 1$ hat man wie bereits gesagt die Kombinationen 00, 01, 10, 11, bei $n = 2$ von 000 bis 111. In diesem Schritt wird immer aus dem letzten Qubit y der Kombination: $f(x) \oplus y$. Für $n = 3$ erweitert man die Kombinationen lediglich auf vier Stellen also von 0000 bis 1111. Allgemein ergeben sich also immer die Binärzahlen von 0 bis $(2n + 1 - 1)$.

3.2.6.2. Step 5b

In diesem Teilschritt vereinfachen wir den Term aus 5a indem wir x ausklammern. Im Term aus 5a sehen wir, dass wir in $|x\rangle|f(x) \oplus 0\rangle$ und in $|x\rangle|f(x) \oplus 1\rangle$ haben. Dieses $|x\rangle$ kann man ausklammern. Daraus ergibt sich: $|x\rangle[|f(x) \oplus 0\rangle - |f(x) \oplus 1\rangle]$. Es gilt: $f(x) \oplus 0 = f(x)$. Daraus ergibt sich die gekürzte Version aus 5b.

3.2.6.3. Step 5c

Hier wird weiter gekürzt und eine Schlüsseleigenschaft des Deutsch-Jozsa-Algorithmus macht sich erkenntlich. Aus $[|f(x)\rangle - |f(x) \oplus y\rangle]$ wird $(-1)^{f(x)[|0\rangle - |1\rangle]}$. Diese Umstellung des Terms ergibt sich durch eine Verschiebung der Amplitudeninformation in die Phaseninformation. Der Term $|0\rangle - |1\rangle$ bleibt unverändert, da er die Superposition in Abhängigkeit von der Phase $(-1)^{f(x)}$ abbildet. Das $\oplus 1$ invertiert. Wenn $f(x) = 0 : [|0\rangle - |1\rangle]$, und wenn $f(x) = 1 : -|0\rangle - |1\rangle]$. Die Schlüsseleigenschaft besteht eben darin, dass alle möglichen Funktionen für $n = 1: 0, 1$, für $n = 2: 00, 01, 10, 11$ und für $n = 3$ wäre es: $000, 0001...111$ - vorhanden sind. Das bedeutet, dass obwohl man nur $f(1)$ eingibt, man eine Ausgabe für alle möglichen Funktionen erhält. Das zeigt sich auch beim Experiment ganz gut. So tätigt man zwar eine Eingabe ($x_1 = 0, x_2 = 0$), aber dennoch kann man am Schirm alle vier Funktionen $(00, 01, 10, 11)$ ablesen.

3.2.7. Step $U_f(|b\rangle)$

Dieser Schritt ist ausschließlich eine Verkürzung des Terms. So erkennt man das in Schritt 5c) mehrfach $|0\rangle - |1\rangle$ vorkommt, was durch eine Multiplikation mit $1/\sqrt{2}$ zur Superposition $|-\rangle$ wird (siehe Schritt 2).

3.2.8. Fazit

Es zeigt sich, dass die Zwischenschritte, also von $A(1)$ zu $A(2)$ eigentlich immer demselben Schema folgen und der Term bloß für mehr Qubits länger wird. Im Endeffekt hat man immer dasselbe Ergebnis, nämlich einen Term, der alle möglichen x für $f(x)$ enthält und somit die Überlegenheit der Quantencomputer zeigt. Es ist eben so, dass der Quantencomputer alle Eigenschaften simultan überprüfen kann, anstatt jede Möglichkeit einzeln zu überprüfen.

Step	A(1)
1	$ x_1\rangle, y\rangle = 0\rangle, 1\rangle$
2	$H(0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0\rangle + 1\rangle / H(1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0\rangle - 1\rangle$
3a	$H(x_1\rangle) \otimes H(y\rangle) = H(0\rangle) \otimes H(1\rangle)$
3b	$\frac{ 0\rangle 0\rangle - 0\rangle 1\rangle + 1\rangle 0\rangle - 1\rangle 1\rangle}{\sqrt{2^{1+1}}} := b\rangle$
4	$U_f : (x_1\rangle, y\rangle) := (x_1\rangle, f(x_1) \oplus y\rangle)$
5a	$U_f(b\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{1+1}}} \cdot 0\rangle f(0) \oplus 0\rangle - 0\rangle f(0) \oplus 1\rangle + 1\rangle f(1) \oplus 0\rangle - 1\rangle f(1) \oplus 1\rangle$
5b	$\frac{1}{2} \cdot 0\rangle \cdot [f(0)\rangle - f(0) \oplus 1\rangle] + 1\rangle \cdot [f(1)\rangle - f(1) \oplus 1\rangle]$
5c	$\frac{1}{2} \cdot 0\rangle \cdot (-1)^{f(0)}[0\rangle - 1\rangle] + 1\rangle \cdot (-1)^{f(1)}[0\rangle - 1\rangle]$
$U_f(b\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)^{f(0)} 0\rangle -\rangle + (-1)^{f(1)} 1\rangle -\rangle$
$U_f(b\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [-\rangle \cdot [(-1)^{f(0)} 0\rangle + (-1)^{f(1)} 1\rangle]]$

Step	A(2)
1	$ x_1\rangle, x_2\rangle, y\rangle = 0\rangle, 0\rangle, 1\rangle$
2	$H(0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0\rangle + 1\rangle / H(1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0\rangle - 1\rangle$
3a	$H(x_1\rangle) \otimes H(x_2\rangle) \otimes H(y\rangle) = H(0\rangle) \otimes H(0\rangle) \otimes H(1\rangle)$
3b	$\frac{ 000\rangle - 001\rangle + 010\rangle - 011\rangle + 100\rangle - 101\rangle + 110\rangle - 111\rangle}{\sqrt{2^{2+1}}} := b\rangle$
4	$U_f := (x_1\rangle, y\rangle) := (x_1\rangle, x_2\rangle, f(x_1, x_2) \oplus y\rangle)$
5a	$U_f(b\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{2+1}}} \cdot 0\rangle 0\rangle f(0 \cdot 0) \oplus 0\rangle - 0\rangle 0\rangle f(0 \cdot 0) \oplus 1\rangle + 0\rangle 1\rangle f(0 \cdot 1) \oplus 0\rangle - 0\rangle 1\rangle f(0 \cdot 1) \oplus 1\rangle \dots$ $\dots + 1\rangle 0\rangle f(1 \cdot 0) \oplus 0\rangle - 1\rangle 0\rangle f(1 \cdot 0) \oplus 1\rangle + 1\rangle 1\rangle f(1 \cdot 1) \oplus 0\rangle - 1\rangle 1\rangle f(1 \cdot 1) \oplus 1\rangle$
5b	$U_f(b\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{2+1}}} \cdot 0\rangle 0\rangle \cdot [f(0,0)\rangle - f(0,0) \oplus 1\rangle] + 0\rangle 1\rangle \cdot [f(0,1)\rangle - f(0,1) \oplus 1\rangle] \dots$ $\dots + 1\rangle 0\rangle \cdot [f(1,0)\rangle - f(1,0) \oplus 1\rangle] + 1\rangle 1\rangle \cdot [f(1,1)\rangle - f(1,1) \oplus 1\rangle]$
5c	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0\rangle 0\rangle \cdot (-1)^{f(0,0)}[0\rangle - 1\rangle] + 0\rangle 1\rangle \cdot (-1)^{f(0,1)}[0\rangle - 1\rangle] \dots$ $\dots + 1\rangle 0\rangle \cdot (-1)^{f(1,0)}[0\rangle - 1\rangle] + 1\rangle 1\rangle \cdot (-1)^{f(1,1)}[0\rangle - 1\rangle]$
$U_f(b\rangle)$	$\frac{1}{2} \cdot (-1)^{f(0,0)} 0\rangle 0\rangle -\rangle + (-1)^{f(0,1)} 0\rangle 1\rangle -\rangle + (-1)^{f(1,0)} 1\rangle 0\rangle -\rangle + (-1)^{f(1,1)} 1\rangle 1\rangle -\rangle$
$U_f(b\rangle)$	$\frac{1}{2} \cdot [-\rangle \cdot [(-1)^{f(0,0)} 0\rangle 0\rangle + (-1)^{f(0,1)} 0\rangle 1\rangle + (-1)^{f(1,0)} 1\rangle 0\rangle + (-1)^{f(1,1)} 1\rangle 1\rangle]]$

(Tabelle 1) Die Tabellen zeigen die jeweiligen Algorithmen: Deutsch Algorithmus (oben) und Deutsch-Jozsa-Algorithmus mit zwei Eingabequbits (unten). Es handelt sich um selbstgeschriebene Mathematik bzw. Quantenalgorithmen in der Dirac-Notation. Sie werden in 3.2 Erklärung und Verallgemeinerung Schritt für Schritt erklärt.

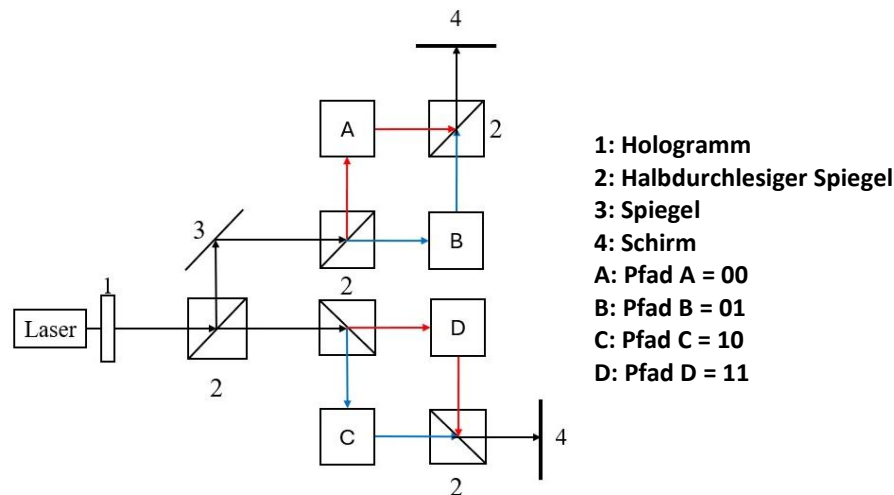
3.3 Deutsch-Jozsa

3.3.1 Theorie

Wie bereits erklärt ist der Deutsch-Jozsa-Algorithmus nur eine Erweiterung des Deutsch-Algorithmus auf n Qubits. Er hat dasselbe Ziel eine Funktion auf konstant oder balanciert zu überprüfen. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung des Problems. Ein klassischer Computer bräuchte im schlimmsten Fall $(n \div 2) + 1$ Eingaben: also die Hälfte der möglichen Eingaben plus eins, um sicherzustellen, ob die Funktion konstant oder balanciert ist. Ein Quantencomputer benötigt wieder nur eine Eingabe.

3.3.2 Aufbau

Um zu zeigen, wie man theoretisch einen Aufbau für n Qubits umsetzen könnte haben wir erstmal den Aufbau für 2 Qubits als $x \in \{00,01,10,11\}$ zu umgesetzt. Dafür erweitert man einfach den Aufbau für den Deutsch-Algorithmus um eine Verzweigungstiefe



(Bild 11) Die Abbildung zeigt den allgemeinen Versuchsaufbau des Deutsch-Jozsa-Algorithmus mit 2 Eingabequbits. 1: Hologramm, 2: Polwürfel, 3: Spiegel, 4: Schirm. A, B, C und D stellen die Pfade bzw. Operationsfelder dar, welche abhängig von der Funktion (fa-fh) durch Spiegel oder Pentaprismen ersetzt werden. Die erste Eingabe durch Polfilter durchläuft ein Hadamard-Gatter, danach ein Hologramm. Dann geht es zum ersten Polwürfel. Wie beim Deutsch-Algorithmus führt eine ausbalancierte Funktion zu einer Überlagerung von $\ell = +1$ und $\ell = -1$ an wenigstens einen der beiden Schirme.

Wieder werden je nach Funktion die Positionen der Spiegel und Pentaprisma abgewandelt. Da es nun vier Pfade A bis D gibt ist dieser benötigt dieser Aufbau deutlich mehr Materialien. Er zeigt aber gut, wie die Umsetzung für n Qubits funktionieren könnte, so fügt man einfach mehr Verzweigungen hinzu.

3.3.3. Durchführung

Die Versuchs Durchführung ist in der Bildunterschrift von Bild 11 Beschrieben

4. Ergebnisse und Ziele

4.1 Fazit

In diesem Jahr haben wir die Idee des OAMs als unabhängiges Qubit ausgearbeitet und einsatzfähig gemacht. Wir hatten auch daran gearbeitet das Projekt umweltfreundlicher zu gestalten, indem wir damit begannen benötigte Teile selbst aus PLA (Polylactide: $C_3H_4O_2$) zu drucken, anstatt diese zu bestellen (siehe Bild 19).

Außerdem haben wir es geschafft Algorithmen auf unseren Quantencomputer rechnen zu lassen. Wir setzen den Deutsch-Algorithmus, sowie den Deutsch-Jozsa-Algorithmus mit zwei Eingabequbits experimentell um. Theoretisch ist es uns gelungen, den Deutsch-Jozsa-Algorithmus in einer effizienten Schreibweise für einen, zwei und auch arithmetisiert für n Eingabequbits darzustellen.

Zudem konnten wir praktisch beweisen, dass unsere universellen Quantengatter auch auf optischen Quantencomputern mit Laserlicht laufen. Dazu haben wir den Beweis von De Ro 2021 auf unseren Quantencomputer übertragen

Als Fazit lässt sich sagen, dass wir in diesem Jahr, alle im Vorjahr gesetzten Ziele gemeistert haben und einen guten Schritt in Richtung eines einsatzfähigen Quantencomputer gegangen sind.

4.2 Ziele

Unser Ziel für das kommende Jahr ist es den Grover-Algorithmus erstmalig auf unserem Quantencomputer laufen zu lassen. Auch arbeiten wir daran den Quantencomputer zu miniaturisieren, kostengünstiger zu gestalten und eine Schnittstelle zu herkömmlichen Computern zu schaffen.

5. Quellen- und Literaturverzeichnis

Orbital angular momentum of light. Wikipedia, 2024

Padgett, Miles John / Allen, Les: The angular momentum of light: Optical spanners and the rotational frequency shift. Research Gate, 1999

IBM Development Team, Q: Circuit Library. IBM, 2021

Roy, Pradosh: Quantum Logic Gates. Research Gate, 2020

Dilba, Dennis: schaeffler-tomorrow.com, 2019

Ruder, Jannes / Schöneberg, Philipp / Gustke, Phil. Experimentelle und theoretische Analyse von Quantencomputern. Jugend-Forscht, 2024

Carmesin, Hans-Otto et al.: Universum Physik Sekundarstufe 2. Cornelsen, 2024

De Ro, Nicolas: Universal Sets of Gates in Quantum Computing. Research Gate, 2021

6. Danksagung

Besonders danken möchten wir Herrn Dr. Hans-Otto Carmesin, Fachleiter AG Jugend forscht am Gymnasium Athenaeum in Stade für die ausgezeichnete Betreuung und Unterstützung bei der Durchführung und Umsetzung der gesamten Arbeit. Außerdem möchten wir uns bei unseren Eltern für ihre moralische Unterstützung bedanken, die uns auf unserem Weg stets motiviert haben.