1 Ergänzungsgleichheit von Polytopen

Wir wollen uns nun dem zweiten Teil von Hilberts Problem widmen und zwar der Ergänzungsgleichheit von Polytopen. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit gleichbedeutend sind. Der Beweis hierzu ist nicht gerade trivial, weswegen wir vorweg noch einige Kenntnisse über Polytope benötigen. Das Kapitel richtet sich nach [1]. Im Folgenden meinen wir mit Polytopen wieder d-Polytope.

1.1 Ein wenig Polyedertheorie

Definition 1.1 (i-stufiger Zylinder)**.** Ein Polytop P ist ein i-stufiger Zylinder, falls es eine Darstellung der Form

$$P = P_1 \times \ldots \times P_i$$

gibt, wobei P_i hier konvexe Polytope sind, die jeweils in einer d_i-dimensionalen Ebene E_{d_i} liegen. Hierbei soll $\sum_1^i d_i = d$ gelten und die Ebenen E_{d_i} befinden sich paarweise in allgemeiner Lage.

1.2 Ergänzungsgleich und Zerlegungsgleichheit

Wir wollen noch einmal kurz die Definition der Zerlegungsgleichheit wiederholen.

Definition 1.2 (Zerlegungsgleichheit)**.** Zwei d-Polytope P und Q heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele d-Polytope $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ mit $P = P_1 + \ldots + P_n$, $Q = Q_1 + \ldots + Q_n$ gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir schreiben $P \sim Q$.

Nun können wir die Ergänzungsgleichheit definieren.

Definition 1.3 (Ergänzungsgleich)**.** Zwei d-Polytope P und Q heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele d-Polytope $P_1, \ldots, P_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$ gibt, wobei gilt $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \ldots + P_n, \qquad Q' = Q + Q_1 + \ldots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Alternativ ist auch die schreibweise üblich, dass zwei Poltope P und Q ergänzungsgleich sind, falls es zwei zerlegungsgleiche Polytope A und B gibt, sd. $P + A \sim Q + B$ gilt.
Man sieht leicht, dass die Folgende Aussage gilt.

Folgerung 1.4. Seien P und Q ergänzungsgleiche Polytope, dann gilt

$$vol(P) = vol(Q).$$

Beweis. Seien P und Q ergänzungsgleich, also gibt es Polytope zerlegungsgleiche R und S mit $P + R \sim Q + S$. Mit

folgt mit der paarweisen Disjunktheit, dass

$$vol(P) + vol(R) = vol(P + R) = vol(Q + S) = vol(Q) + vol(S).$$

Mit der Zerlegungsgleichheit von R und S gilt also auch $vol(R) = vol(S)$ und damit folgt $vol(P) = vol(Q)$. □

Satz 1.5. Zwei Polyeder P und Q sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie ergänzungsgleich sind.

Der Beweis richtet sich nach [1, Satz III].

Beweis.

" $\Rightarrow$ ": Haben wir zwei zerlegungsgleiche Polytope, so müssen wir kein weiteres Polytop ergänzen, damit die Ergänzungen zerlegungsgleich sind, also folgt bereits die Ergänzungsgleichheit.

" $\Leftarrow$ ": Die Rückrichtung funktioniert per Induktion über die Zylinderklassen. Seien also Polytope P, Q, A, B gegeben, sd.

$$P + A \sim Q + B \tag{1}$$

und

$$A \sim B. \tag{2}$$

Falls nun $P, Q \in \mathfrak{B}_d$ gilt, dann gibt es mit

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$, sd. $P \sim \lambda_1 W_d$ und $Q \sim \lambda_2 W_d$, wobei mit hier W_d der d-dimensionale Einheitswürfel gemeint ist. Da mit Folgerung 1.4 folgt, dass $vol(P) = vol(Q)$, muss $\lambda_1 = \lambda_2$ und damit $P \sim Q$.

Wir nehmen nun also induktiv an, dass die Aussage bereits für alle Polytope $P, Q \in \mathfrak{B}_{i+1}$ gilt. Es sei nun also $P, Q \in \mathfrak{B}_i$ für ein beliebiges $1 \leq i \leq d-1$. Da $d-i > 0$ und o.B.d.A. $vol(A) > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, sd.

$$n^{d-i} > 1 + \frac{vol(A)}{vol(P)}. \tag{3}$$

Weiterhin gilt mit 1 und

$$nP + nA \sim nQ + nB \tag{4}$$

und

$$nA \sim nB. \tag{5}$$

Mit

gibt es nun ein Polytop $P_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$, sd.

$$nP \sim P_0 + n^i \cdot P \tag{6}$$

und mit

folgt dann

$$vol(nP) = vol(P_0 + n^i \cdot P) = vol(P_0) + vol(n^i \cdot P) = vol(P_0) + n^i \cdot vol(P).$$

Nach

gilt $vol(nP) = n^d vol(P)$ und damit

$$vol(P_0) = (n^d - n^i) vol(P). \tag{7}$$

Weiter folgt mit der Ungleichung 3, dass $n^d > n^i + n^i \frac{vol(A)}{vol(P)}$ und damit

$$vol(P_0) = (n^d - n^i)vol(P) > n^i vol(A) = vol(n^i \cdot A). \tag{8}$$

Mit

ist $n^i \cdot A$ nun also zerlegungsgleich zu einem Teilpolytop von P_0, dh. es gibt Polytope $C, D \subset P_0$ mit $P + Q = P_0$ und $n^i \cdot A \sim C$, sd.

$$P_0 = C + D \sim n^i \cdot A + D. \tag{9}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} nP &\overset{9}{\sim} P_0 + n^i \cdot P \\ &\sim n^i A + D + n^i \cdot P \\ &= D + n^i \cdot (A + P) \\ &\overset{1}{\sim} D + n^i \cdot (Q + B) \\ &\overset{2}{\sim} D + n^i \cdot (Q + A) \\ &= Q + n^i \cdot Q + n^i \cdot A \\ &\overset{9}{\sim} P_0 + n^i \cdot Q. \end{aligned} \tag{10}$$

Analog zu 6 finden wir für Q ebenso ein $Q_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$ mit $nQ \sim Q_0 + n^i \cdot Q$. Wir erhalten

$$P_0 + n^i \cdot Q + nA \overset{10}{\sim} nP + nA \overset{4}{\sim} nQ + nB \sim Q_0 + n^i \cdot Q + nB.$$

Wegen 5 gilt $n^i \cdot Q + nA \sim n^i \cdot Q + nB$ und mit der Induktionsvoraussetzung folgt für $P_0, Q_0 \mathfrak{B}$, dass $P_0 \sim Q_0$ und damit folgt mit 10 und der analogen Folgerung, dass

$$nP \sim nQ$$

gilt. Mit

gilt also

$$P \sim Q.$$

□

Literatur

[1] Hugo Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, volume 93. Springer-Verlag, 2013.