

# Hilberts drittes Problem

Jannis Klingler

## Bachelorarbeit

Zur Erlangung des Akademischen Grades  
Bachelor of Science

vorgelegt am 27. Februar 2020



Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Institut für Mathematik

Seminar: Numberphile

Betreuung: Dr. Oliver Bräunling

Vorgelegt von: Jannis Klingler  
Unterer Mühlenweg 57  
79114 Freiburg im Breisgau  
jannis-klingler@web.de  
Matrikelnummer: 4331982  
Studiengang: Mathematik  
Nebenfach: Volkswirtschaftslehre  
Bearbeitungszeitraum: 27.11.2019 bis 27.02.2020

# ERKLÄRUNG ZUR BACHELORARBEIT

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig verfasst wurde und dass keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden.

Sämtliche Stellen der Arbeit, die im Wortlaut oder dem Sinn nach Publikationen anderer Autoren entsprechen wurden gekennzeichnet.

Diese Erklärung bezieht sich auch auf in der Arbeit enthaltene Grafiken und bildliche Darstellungen.

Darüber hinaus versichere ich, dass diese Arbeit nicht und auch nicht auszugsweise bereits für eine andere Prüfung angefertigt wurde.

---

Datum, Ort

---

Unterschrift



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen</b>	<b>1</b>
1.1	Polytope . . . . .	1
1.2	Bolyai-Gerwien Theorem . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante</b>	<b>9</b>
2.1	Tensoren . . . . .	10
2.2	Die Dehn-Invariante . . . . .	11



# 1 Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen

## 1.1 Polytope

*Wiederholung* (Dual-Raum). Der Dualraum  $V^*$  eines  $k$ -Vektorraums  $V$  ist die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  in den Körper  $k$ .

**Definition 1.1** (Halbraum). Ein Halbraum in einem reellen Vektorraum ist eine Teilmenge der Form

$$H = \{v \in V \mid \alpha(v) \leq r\},$$

wobei  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  und  $r \in \mathbb{R}$ .

**Definition 1.2** (konvexes Polytop). Ein konvexes  $d$ -Polytop  $P$  in einem  $d$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  ist der Schnitt endlich vieler Halbräume.  $P$  ist beschränkt, falls für jedes  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  ein  $r \in \mathbb{R}$  existiert, sd.  $\alpha(x) \leq r$  für alle  $x \in P$  gilt.

Für  $d = 0$  ist  $P$  eine Ecke, für  $d = 1$  ist  $P$  eine Strecke, für  $d = 2$  ist  $P$  ein Polygon und für  $d = 3$  ist  $P$  ein Polyeder.

Wir werden im Folgenden immer beschränkte konvexe  $d$ -Polytope betrachten. Wir stellen außerdem fest, dass der Schnitt konvexer Polytope wieder ein konvexes Polytop ist. Hierbei kann der Schnitt auch niedrigerdimensional sein. Wir sagen zwei Polytope  $P_1$  und  $P_2$  sind disjunkt, wenn  $\dim(P_1 \cap P_2) < d$ . Wir schreiben dann für die Vereinigung zweier disjunkter Polytope  $P_1 + P_2$ .

Wir definieren  $\dim(P_1 \cap P_2) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \exists p_0, \dots, p_k \in P_1 \cap P_2 : (p_0 - p_1), \dots, (p_{k-1} - p_k) \text{ linear unabhängig}\}$ .

**Definition 1.3** (Kongruenz). Wir nennen zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  *kongruent*, wenn es eine Isometrie  $g$  gibt, sd.  $g(P) = Q$ . Eine Isometrie ist hierbei eine Abbildung, die die Abstände zweier beliebiger Punkte erhält. Wir schreiben dann  $P \cong Q$ .

**Definition 1.4** (Zerlegungsgleichheit). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P = P_1 + \dots + P_n$ ,  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir schreiben  $P \sim Q$ .

**Definition 1.5** (Ergänzungsgleich). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  gibt, wobei gilt  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \dots + P_n, \quad Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

**Proposition 1.6.** Zerlegungsgleiche Polytope sind ergänzungsgleich.

*Beweis.* Haben wir zwei zerlegungsgleiche Polytope, so müssen wir kein weiteres Polytop ergänzen, damit die Ergänzungen zerlegungsgleich sind, also folgt bereits die Ergänzungsgleichheit.  $\square$

Wir wollen uns anschauen, wie sich das Volumen von Polytopen verhält. Dabei ist vor allem die Invarianz des Volumens unter Zerschneidung von Polytopen, die wir in Proposition 1.9 beweisen werden, ein wichtiges Resultat. Mit dem Volumen eines Polytops meinen wir im Folgenden das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß.

**Proposition 1.7.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei  $d$ -Polytope, sd.  $P \cong Q$ , dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Da sich eine Isometrie für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  darstellen lässt als  $f(x) = Ux + a$  für eine orthogonale Matrix  $U \in O(d)$  und ein  $a \in \mathbb{R}^d$  ergibt sich die Aussage mit der Transformationsformel aus der Analysis.  $\square$

**Lemma 1.8.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei disjunkte Polytope, dann gilt

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

*Beweis.* Sei  $\mathbb{R}^d$  der zugrundeliegende Vektorraum und  $\text{vol} = \text{vol}_d$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß. Seien weiter  $P$  und  $Q$  zwei Polytope in  $\mathbb{R}^d$  mit  $k := \dim(P \cap Q) < d$ . Mit der Siebformel erhalten wir nun

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q) - \text{vol}(P \cap Q).$$

Wir wollen also zeigen, dass der Schnitt von  $P$  und  $Q$  eine Nullmenge bezüglich unseres Maßes ist. Wir definieren  $\mathfrak{L} := P \cap Q \subset \mathbb{R}^k$ . Sei nun  $M := \mathfrak{L} \times [0, 1]^{d-k} \subset \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler



Quader, der  $\mathfrak{L}$  einschließt. Für die Aufzählung  $\mathfrak{L}_q := \mathfrak{L} + (0, q)$ , wobei  $q \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^{d-k}$ , gilt dann mit der  $\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Maßes

$$\text{vol}_d \left( \bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q), \quad (1)$$

da diese Aufzählung abzählbar ist und die einzelnen  $\mathfrak{L}_q$  jeweils einen leeren Schnitt haben. Es gilt also mit der Monotonie und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\infty > \text{vol}_d(M) \geq \text{vol}_d \left( \bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) \stackrel{1}{=} \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}).$$

Also muss gelten  $\text{vol}_d(\mathfrak{L}) = 0$ , da wir eine abzählbar große Summe haben. Damit ergibt sich also

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

□

Wir stellen fest, dass dieser Beweis über eine beliebige endliche Anzahl von disjunkten Polytopen funktioniert. Mit diesem Resultat ergibt sich die folgende Proposition.

**Proposition 1.9.** Seien  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche  $d$ -Polytope, dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  die Zerlegungen von  $P$  und  $Q$ , also  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir erhalten mit Proposition 1.7 und Lemma 1.8

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(P_i) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(Q_i) = \text{vol}(Q_1 + \dots + Q_n) = \text{vol}(Q).$$

□

**Proposition 1.10.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei ergänzungsgleiche Polytope, dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  ergänzungsgleich, d. h. es gibt endlich viele Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in 1, \dots, n$ , sd.  $P' = P + P_1 + \dots + P_n$  und  $Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$  zerlegungsgleich sind. Nach Proposition 1.9 gilt dann also auch  $\text{vol}(P') = \text{vol}(Q')$ . Damit folgt

$$\text{vol}(P) + \text{vol}(P_1) + \dots + \text{vol}(P_n) = \text{vol}(P') = \text{vol}(Q') = \text{vol}(Q) + \text{vol}(Q_1) + \dots + \text{vol}(Q_n)$$

und da mit  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in 1, \dots, n$  nach Proposition 1.7 auch  $\text{vol}(P_i) = \text{vol}(Q_i)$  gilt, folgt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .  $\square$

## 1.2 Bolyai-Gerwien Theorem

Im Folgenden setzen wir  $d = 2$  und betrachten also Polygone.

**Lemma 1.11.** Seien  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Polygone und es gilt  $P \sim Q$  und  $Q \sim R$ . Dann folgt  $P \sim R$ .

*Beweis.* Seien die Zerlegungen der Polygone wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \dots + P_n \\ Q &= Q_1 + \dots + Q_n = Q'_1 + \dots + Q'_m \\ R &= R_1 + \dots + R_m, \end{aligned}$$

wobei  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $Q'_j \cong R_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Seien  $f_1, \dots, f_n$  die Isometrien, die alle  $Q_i$  in  $P_i$  überführen (d. h.  $f_i(Q_i) = P_i$ ) und  $g_1, \dots, g_m$  die Isometrien, die alle  $R_j$  in  $Q'_j$  überführen (d. h.  $g_j(R_j) = Q'_j$ ). Wir definieren

$$F_{ij} := Q_i \cap Q'_j,$$

für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$  (Beachte, dass  $F_{ij}$  leer sein kann). Zwei verschiedene  $F_{ij}$  sind disjunkt, denn für  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 \neq i_2$  gilt

$$F_{i_1 j} \cap F_{i_2 j} = (Q_{i_1} \cap Q'_j) \cap (Q_{i_2} \cap Q'_j) = (Q_{i_1} \cap Q_{i_2}) \cap Q'_j.$$

Da  $Q_{i_1}$  und  $Q_{i_2}$  disjunkt sind, d. h. der Schnitt niedrigerdimensional ist, ist auch dieser Schnitt mit  $Q'_j$  niedrigerdimensional, also sind  $F_{i_1 j}$  und  $F_{i_2 j}$  disjunkt. Außerdem gilt

$$\bigcup_{j=1}^m F_{ij} = \bigcup_{j=1}^m (Q_i \cap Q'_j) = Q_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^m Q'_j \right) = Q_i \cap Q = Q_i. \quad (2)$$

Also lässt sich  $P$  folgendermaßen darstellen

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{i=1}^n f_i(Q_i) \stackrel{2}{=} \bigcup_{i=1}^n f_i \left( \bigcup_{j=1}^m F_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m f_i(F_{ij}),$$

und für  $R$  gilt analog

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m g_j(F_{ij}).$$

Damit haben wir sowohl für  $P$ , als auch für  $R$  eine Zerlegung in disjunkte Polygone gefunden. Als letztes überlegen wir uns, dass gilt  $f_i(F_{ij}) \cong g_j(F_{ij})$ . Betrachte hierzu die Isometrie  $g_j \circ f_i^{-1}$ , dann gilt  $g_j(f_i^{-1}(f_i(F_{ij}))) = g_j(F_{ij})$ . Also finden wir für  $P$  und  $R$  jeweils eine Zerlegung aus kongruenten Polygonen und damit sind auch  $P$  und  $R$  zerlegungsgleich bzw.  $P \sim R$ .  $\square$

**Lemma 1.12.** Sei  $P$  ein beliebiges Polygon, dann lässt sich  $P$  in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegen.

*Beweis.* Kommt noch.  $\square$

**Lemma 1.13.** Sei  $P$  ein Dreieck, dann gibt es ein Rechteck  $Q$ , sd.  $P \sim Q$ .

*Beweis.* Sei  $P$  das Dreieck mit den Ecken  $a, b, c$  und sei o.B.d.A  $\overline{ab}$  die längste Seite. Wir zeichnen nun die Lotstrecke auf der Strecke  $\overline{ab}$  durch den Punkt  $c$  ein und nennen den Lotfußpunkt  $d$ . Der Punkt  $d$  liegt auf der Strecke  $\overline{ab}$ , da sonst  $\overline{ab}$  nicht die längste Seite war. Nun halbieren wir die Lotstrecke  $\overline{cd}$  und zeichnen die Lotgerade durch die Punkte  $m$  und  $n$  auf dem Mittelpunkt  $e$  der Strecke  $\overline{cd}$  ein ( $m$  und  $n$  sind hierbei die Schnittpunkte dieser Lotgeraden mit dem Dreieck  $P$ ). Da  $\overline{cd}$  senkrecht auf  $\overline{ab}$  und die Lotgerade durch die Punkte  $m$  und  $n$  senkrecht auf  $\overline{cd}$  ist, sind  $\overline{ab}$  und die Lotgerade parallel. Wir bilden erneut die Lotgeraden auf  $\overline{ab}$  durch die Punkte  $a$  und  $b$  und nennen den Schnittpunkt der Lotgerade durch  $a$  mit der Lotgerade, die durch  $m$  und  $n$  verläuft,  $f$  und den Schnittpunkt der Lotgerade durch  $b$  mit der Lotgerade, die durch  $m$  und  $n$  verläuft,  $g$ . Dadurch erhalten wir ein Rechteck  $Q$  mit den Eckpunkten  $a, b, g, f$ . Wir stellen fest, dass die Dreiecke mit den Eckpunkten  $m, e, c$  und  $a, m, f$ , welche in Abbildung 1 grau hinterlegt sind, kongruent sind, da mit dem Strahlensatz der Winkel an dem Punkt  $m$  in den beiden Dreiecken gleich ist und somit beiden Dreiecke gleiche Basis und Höhe haben. Weiterhin sind mit dem gleichen Argument die Dreiecke mit den Eckpunkten  $e, n, c$  und  $b, g, n$ , welche weiß hinterlegt sind, kongruent. Damit lassen sich  $P$  und  $Q$  in die beiden kongruenten Dreiecke und den schraffierten Trapezoid, mit den Eckpunkten  $a, b, n, m$ , zerlegen und sind somit zerlegungsgleich.  $\square$

**Lemma 1.14.** Zwei beliebige Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, sind zerlegungsgleich.

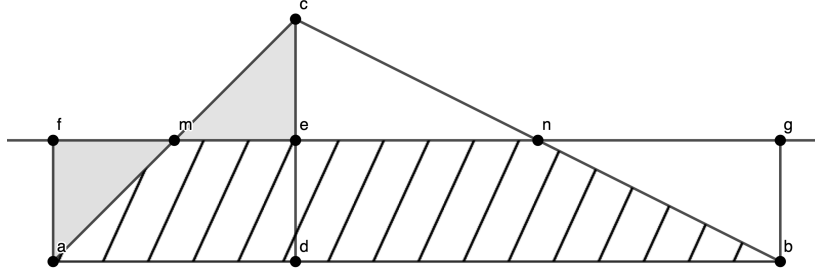


Abbildung 1: Zerlegung eines Dreiecks in ein Rechteck

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  zwei Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, d. h. falls  $h_P$  die Höhe und  $b_P$  die Breite des Rechtecks  $P$  und  $h_Q$  die Höhe und  $b_Q$  die Breite des Rechtecks  $Q$  sind, dann soll gelten  $h_P \cdot b_P = h_Q \cdot b_Q$  also auch

$$\frac{b_P}{h_Q} = \frac{b_Q}{h_P}. \quad (3)$$

Seien  $o, a, b, c$  die Eckpunkte des Dreiecks  $P$  und  $o, m, n, p$  die Eckpunkte des Dreiecks  $Q$ ,

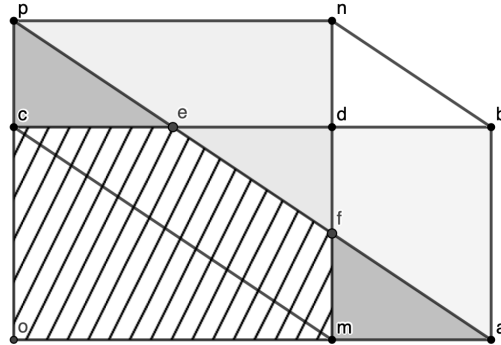


Abbildung 2: Zerlegung zweier Rechtecke

siehe Abbildung 2. Wir verschieben hier  $Q$  so auf auf  $P$ , dass beide eine gemeinsame Ecke  $o$  mit rechtem Winkel haben. Dies ändert nichts am Resultat. Die Höhe  $h_P$  soll also der Länge der Strecken  $\overline{co}$  und  $\overline{ab}$  entsprechen. Die Breite  $b_P$  soll der Länge der Strecken  $\overline{oa}$  und  $\overline{bc}$  entsprechen. Analog soll  $h_Q$  der Länge der Strecken  $\overline{po}$  und  $\overline{mn}$  und  $b_Q$  der Länge der Strecken  $\overline{om}$  und  $\overline{np}$  entsprechen. Wegen 3 sehen wir also, dass die Strecken  $\overline{mc}$  und  $\overline{ap}$

parallel sind. Außerdem stellen wir fest, dass gilt

$$(b_P - b_Q)h_P = b_P h_P - b_Q h_P = h_Q b_Q - b_Q h_P = b_Q(h_Q - h_P)$$

also auch

$$\frac{b_P - b_Q}{h_Q - h_P} = \frac{b_Q}{h_P}.$$

Damit folgt, dass die Dreiecke  $oap$  und  $dbn$  ähnlich sind und folglich sind die Strecken  $\overline{ap}$  und  $\overline{nb}$  parallel. Hierbei sei  $d$  der Schnittpunkt der Strecken  $\overline{mn}$  und  $\overline{bc}$ . Also sind die drei Strecken  $\overline{mc}$ ,  $\overline{ap}$  und  $\overline{nb}$  parallel. Nun unterscheiden wir zwei Fälle

1. *Fall:* Die Verbindungsstrecke  $\overline{ap}$  der Eckpunkte schneidet das Rechteck  $omdc$  in den Punkten  $e$ , mit der Seite  $\overline{dc}$  und  $f$ , mit der Seite  $\overline{md}$ , siehe Abbildung 2. Es gilt  $2b_Q \geq b_P$ . Also sind die beiden in der Abbildung grau hinterlegten Dreiecke  $maf$  und  $cep$  und die beiden in der Abbildung hellgrau hinterlegten Dreiecke  $abe$  und  $fnp$  kongruent. Mit dem übrig gebliebenen in der Abbildung schraffierten Fünfeck  $omfec$  ist unsere Zerlegung komplett.
2. *Fall:* Die Verbindungsstrecke  $\overline{ap}$  der Eckpunkte schneidet das Rechteck  $omdc$  nicht, siehe Abbildung 3. Es gilt also  $2b_Q < b_P$ . Sei nun  $e$  hierbei der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{oa}$  und  $k$  die kleinste natürliche Zahl, wie oft man die Strecke  $\overline{om}$  entlang der Strecke  $\overline{oa}$  legen muss, sd. wir einen Punkt  $t$  erhalten der nicht mehr auf der Strecke  $\overline{oe}$  liegt sondern auf der Strecke  $\overline{ea}$ . Nun zerlegen wir das Rechteck  $Q$  in  $k$  Rechtecke, deren Basis parallel ist zur Strecke  $\overline{om}$ , die wir nun entlang der neu entstandenen Strecke  $\overline{ot}$  legen. Wir erhalten, somit das zu  $Q$  zerlegungsgleiche Rechteck  $otuv$ . Sei die Breite dieses Rechtecks nun  $b'$ , die offensichtlich die Bedingung

$$2b' > b_P$$

erfüllt. Damit können wir nach dem ersten Fall sagen, dass die Rechtecke  $P$  und  $otuv$  zerlegungsgleich sind. Nach Lemma 1.11 sind also auch  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich.

Damit sind  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich. □

**Satz 1.15** (Bolyai-Gerwien Theorem). Zwei beliebige Polygone mit dem gleichen Flächeninhalt sind zerlegungsgleich.

*Beweis.* Sei  $P$  ein Polygon. Dann kann  $P$  in endlich viele disjunkte Dreiecke zerlegt werden und jedes dieser Dreiecke ist nach Lemma 1.13 zerlegungsgleich zu einem Rechteck. Wir finden

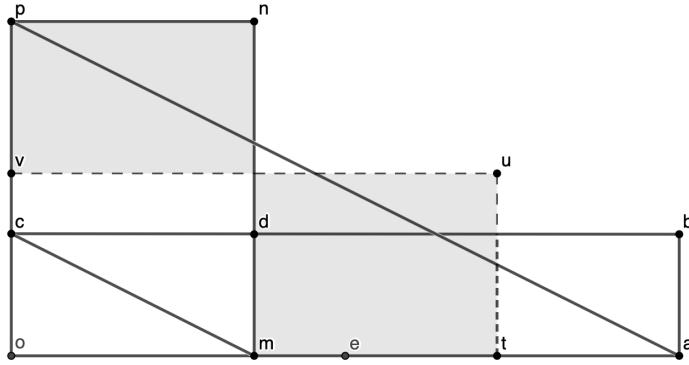


Abbildung 3: Zerlegung zweier Rechtecke

also für  $P$  die Darstellung

$$P \sim P_1 + \dots + P_n,$$

wobei  $P_1, \dots, P_n$  Rechtecke sind. Nun nehmen wir eine beliebige Kante  $\overline{a_0 b_0}$  und stellen die Lotgeraden auf den Eckpunkten  $a_0$  und  $b_0$  durch die Strecke  $\overline{a_0 b_0}$  auf. Anschließend ziehen wir  $n$  parallele Strecken zu  $\overline{a_0 b_0}$ , sd. der Flächeninhalt des Rechtecks  $a_{i-1} b_{i-1} b_i a_i$ , welches wir  $R_i$  nennen, dem Flächeninhalt des Rechtecks  $P_i$  entspricht, wobei  $i = 1, \dots, n$ . Nach Lemma 1.14 gilt also  $P_i \sim R_i$  für alle  $i$  und damit

$$P_1 + \dots + P_n \sim R_1 + \dots + R_n.$$

Da  $P \sim P_1 + \dots + P_n$  gilt also mit Lemma 1.11

$$P \sim R_1 + \dots + R_n$$

und damit zum Rechteck  $a_0 b_0 b_n a_n$ . Damit ist jedes Polygon zerlegungsgleich zu einem Rechteck.

Seien nun  $P$  und  $Q$  zwei Polygone mit gleichem Flächeninhalt, dann finden wir wie oben gezeigt Rechtecke  $R_1$  und  $R_2$ , sd.

$$P \sim R_1, \quad Q \sim R_2.$$

Nach Lemma 1.14 gilt also nun auch  $R_1 \sim R_2$  und damit folgt mit Lemma 1.11  $P \sim Q$ .  $\square$

Wir haben also nun gesehen, dass sich jedes beliebige Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Diese

Dreiecke sind nach Lemma 1.13 zerlegungsgleich zu Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt. Zuletzt können wir mit Satz 1.15 die Rechtecke zerlegen zu Rechtecken mit gleicher Grundseite. Dieses Verfahren können wir nun auf beliebige Polygone mit gleichem Flächeninhalt anwenden. Da diese Rechtecke nach Lemma 1.14 zerlegungsgleich sind folgt mit der Transitivität der Zerlegungsgleichheit aus Lemma 1.11 die Zerlegungsgleichheit der Polygone und mit Proposition 1.6 auch die Ergänzungsgleichheit. Dies führt uns zu der Frage, ob das gleiche auch für dreidimensionale Polytope, also Polyeder, möglich ist.

*Motivation:* Als Hilbert 1900 diese Frage auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris als sein drittes von 23 Problemen stellte, vermutete er wohl schon, dass die Antwort 'Nein' ist. Im Folgenden wollen wir uns zwei Beweise anschauen, die zeigen, dass es Polyeder gibt, die nicht zerlegungs- und ergänzungsgleich sind. Der erste bezieht sich auf die Arbeit Max Dehn's, ein Schüler Hilberts, der ein Jahr später in seiner Habilitationsarbeit die Aussage mithilfe der von ihm erfundenen Dehn-Invariante widerlegte. Der zweite Beweis...

## 2 Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante

Im Folgenden setzen wir  $d = 3$  und betrachten Polyeder.

Wir müssen uns zunächst überlegen, was mit den Kanten eines Polyeders  $P$  passiert, wenn wir diesen in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  zerlegen. Sei  $k$  also eine Kante des Polyeders  $P$ . Diese Kante hat die Länge  $\ell(k) = l$ . Außerdem ist die Kante  $k$  die Schnittmenge der zwei anliegenden Seitenflächen. Den Winkel zweier solcher Flächen nennt man Diederwinkel. Sei also  $w(k) = \varphi$  der zu  $k$  gehörige Diederwinkel. Dann können beim zerschneiden folgende Fälle eintreten

1. Wir schneiden durch die Kante: Also entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Kantenlängen sich zu der von  $k$  addieren lassen und deren Winkel gleich dem von  $k$  bleibt. D. h. für  $\ell(k_1) = l_1$  und  $\ell(k_2) = l_2$  gilt  $l = l_1 + l_2$ .
2. Wir schneiden entlang der Kante: Also entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Kantenlänge gleich der von  $k$  ist und deren Winkel sich zu dem von  $k$  addieren lassen. D. h. für  $w(k_1) = \varphi_1$  und  $w(k_2) = \varphi_2$  gilt  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .
3. Wir schneiden nicht durch die Kante: Die Kante  $k$  lässt sich also entweder in  $P_1$  oder  $P_2$  wiederfinden und sowohl Kantenlänge, als auch Diederwinkel bleiben gleich.
4. Bleibt nur noch der Sonderfall, wenn wir durch eine der Flächen von  $P$  schneiden. Hierbei entstehen aus dem nichts zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren

Länge der Länge des Schnitts entsprechen und deren Winkel sich zu  $\pi$  addieren lässt.  
D. h. für  $w(k_1) = \varphi_1$  und  $w(k_2) = \varphi_2$  gilt  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ .

Wir wollen also eine Operation, die in beiden Argumenten, sowohl in Länge als auch Diederwinkel, linear ist und bei der wir einen Diederwinkel  $\pi$  mit 0 identifizieren. Dies führt uns auf das Tensorprodukt.

## 2.1 Tensoren

Wir kennen Tensoren bereits aus der linearen Algebra. Deshalb wiederholen wir noch einmal die universelle Eigenschaft dieser.

**Proposition 2.1** (Universelle Eigenschaft). Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und seien  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln. Dann ist das Tensorprodukt  $M \otimes_R N$  genau derjenige  $R$ -Modul zu dem es eine bilineare Abbildung  $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  gibt, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Sei  $L$  ein weiterer  $R$ -Modul und  $\phi : M \times N \rightarrow L$  eine bilineare Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\eta : M \otimes_R N \rightarrow L$ , sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! \eta & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

Gibt ein solches  $R$ -Modul  $M \otimes_R N$ , dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Für den Beweis sei auf Proposition 2.12 in Atiyah verwiesen.  $\square$

Also wissen wir nun, dass das Tensorprodukt folgende Eigenschaften erfüllt. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $R$ -Moduln  $M$  und  $N$ , dann gilt für alle  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  und  $r, r' \in R$

$$\begin{aligned} (mr + m'r' \otimes n) &= (m \otimes n) \cdot r + (m' \otimes n) \cdot r' \\ (m \otimes nr + n'r') &= (m \otimes n) \cdot r + (m \otimes n') \cdot r'. \end{aligned}$$

Damit ist der bilineare Operator gefunden. Wir wollen für unser Problem den Spezialfall  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  betrachten. Hierbei identifizieren wir die Länge einer Kante mit dem ersten Argument und tensorieren dies mit einem Winkel, wobei wir den Winkel  $\pi$  mit 0 identifizieren.



## 2.2 Die Dehn-Invariante

**Definition 2.2** (Dehn-Invariante). Sei  $P$  ein dreidimensionaler beschränkter Polyeder mit den Kanten  $k_1, \dots, k_n$ . Dann definieren wir die *Dehn-Invariante*  $D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  durch

$$\sum_{i=1}^n \ell(k_i) \otimes [w(k_i)].$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Dehn-Invariante sich beim Zerschneiden eines Polyeders nicht verändert und somit eine Invariante ist.

**Proposition 2.3** (Invarianz). Sei  $P$  ein Polyeder und  $P = P_1 + P_2$  eine Zerlegung von  $P$  in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$ , dann gilt  $D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$ .

*Beweis.* Sei  $P$  ein beschränkter Polyeder, den wir in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  zerschneiden. Die Summe der Dehn-Invarianten der einzelnen Polyeder soll also gerade der Dehn-Invariante von  $P$  entsprechen. Dazu betrachten wir die Kanten der Polyeder und überlegen was für die Summanden gilt. Es reicht die Fälle zu betrachten, die wir am Anfang des Kapitels erwähnt haben.

- Zu 1: Beim schneiden durch eine Kante  $k$  von  $P$  entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , wobei die Längen sich addieren und der Winkel gleich bleibt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) + \ell(k_2) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = (\ell(k_1) + \ell(k_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 2: Beim schneiden entlang einer Kante  $k$  von  $P$  entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , wobei die Längen gleich bleiben und die Winkel sich addieren. Es gilt

$$\ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich auch hier die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 3: Wir schneiden nicht durch die Kante  $k$  von  $P$ , also ändert sich auch der Summand nicht und damit die Dehn-Invariante.
- Zu 4: Beim Schneiden durch eine Fläche entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$

von  $P_2$ , deren Länge gleich ist und Winkel sich zu  $\pi$  addieren lässt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Also ändert auch dies nichts an der Dehn-Invariante.

Im Beweis haben wir lediglich die Bilinearität des Tensorprodukts ausgenutzt.  $\square$

**Proposition 2.4.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei Polyeder, sd.  $P \cong Q$ , dann gilt  $D(P) = D(Q)$ .

*Beweis.* Isometrien erhalten sowohl Kantenlängen, als auch Diederwinkel der Polyeder und damit bleibt auch die Dehn-Invariante unverändert.  $\square$

**Satz 2.5** (Dehn). Seien  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche Polyeder, dann gilt  $D(P) = D(Q)$  und  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  die Zerlegungen von  $P$  und  $Q$ , also  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann folgt mit Proposition 1.9 dass  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ . Außerdem gilt mit Proposition 2.4 und mit Proposition 2.3

$$D(P) = D(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n D(P_i) = \sum_{i=1}^n D(Q_i) = D(Q_1 + \dots + Q_n) = D(Q).$$

$\square$

Wir wollen uns nun zur Berechnung der Dehn-Invariante einiger Polyeder ein paar Eigenschaften des Tensorprodukts  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z}$  anschauen. Dazu wollen wir zeigen, dass unser Tensorprodukt isomorph zum Tensorprodukt  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} / \pi \mathbb{Q}$  ist, hierzu benötigen wir ein paar Resultate aus der Kommutativen Algebra.

Sei nun  $R$  ein Integritätsring, wir wollen nun Brüche einführen. Sei dazu  $S$  eine multiplikative Teilmenge von  $R$ , das heißt  $1 \in S$  und  $S$  ist unter Multiplikation abgeschlossen, also ein Monoid. Wir definieren die Relation  $\equiv$  auf  $R \times S$  durch

$$(r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2) \quad \Leftrightarrow \quad r_1 s_2 = r_2 s_1$$

für Elemente  $r_1, r_2 \in R$  und  $s_1, s_2 \in S$ .

Wir stellen fest, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität und Symmetrie ist klar, wir zeigen also noch die Transitivität. Es gelte also  $(r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2)$  und

$(r_2, s_2) \equiv (r_3, s_3)$  für  $r_1, r_2, r_3 \in R$  und  $s_1, s_2, s_3 \in S$ , also gilt  $r_1 s_2 = r_2 s_1$  und  $r_2 s_3 = r_3 s_2$  und damit  $r_1 s_2 r_2 s_3 = r_2 s_1 r_3 s_2$ . Falls  $r_2 = 0$  ist klar, dass  $(r_1, s_1) \equiv (r_3, s_3)$  gilt, falls  $r_2 \neq 0$  können wir  $r_2$  aus der Gleichung streichen und es folgt  $r_1 s_3 = r_3 s_1$  und damit  $(r_1, s_1) \equiv (r_3, s_3)$ . Wir schreiben  $\frac{r}{s}$  für die Äquivalenzklasse von  $(r, s)$  und  $S^{-1}R$  für die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir können  $S^{-1}R$  nun eine Ringstruktur geben, indem wir die Addition und Multiplikation wie folgt definieren

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_1}{s_1}\right) + \left(\frac{r_2}{s_2}\right) &= \left(\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}\right) \\ \left(\frac{r_1}{s_1}\right) \cdot \left(\frac{r_2}{s_2}\right) &= \left(\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}\right) \end{aligned}$$

für alle  $r_1, r_2 \in R$  und  $s_1, s_2 \in S$ . Wir stellen fest, dass  $S^{-1}R$  sogar ein kommutativer Ring mit Eins ist. Außerdem ist  $S^{-1}R$  gerade der Quotientenkörper von  $R$ , falls  $S = R \setminus \{0\}$  ist. Betrachten wir also beispielweise den Ring  $\mathbb{Z}$  mit der multiplikativen Teilmenge  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , so ist  $S^{-1}\mathbb{Z}$  gerade der Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}$ , also  $\mathbb{Q}$ . Wir können diese Konstruktion nun auch auf Moduln fortführen. Haben wir ein  $R$ -Modul  $M$ , dann definieren wir die Äquivalenzrelation wie oben, nur auf  $M$ , und erhalten die Äquivalenzklassen  $\frac{m}{s}$  für Elemente  $m \in M$  und  $s \in S$ . Dann ist  $S^{-1}M$  gerade die Menge solcher Brüche und wir erhalten mit  $S^{-1}M$  ein  $S^{-1}R$ -Modul mit der natürlichen Definition der Addition und skalaren Multiplikation. Haben wir nun einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f : M \rightarrow N$ , dann führt uns dies zu einem  $S^{-1}R$ -Modulhomomorphismus  $S^{-1}f : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ , indem  $S^{-1}f$  Elemente  $\frac{m}{s}$  auf  $\frac{f(m)}{s}$  abbildet. Damit gilt also

$$S^{-1}(f \circ g) = (S^{-1}f) \circ (S^{-1}g),$$

für Modulhomomorphismen  $f$  und  $g$ .

**Lemma 2.6.** Sei  $R$  ein Integritätsring und  $M, M_1, M_2$  seien  $R$ -Moduln. Weiter sei die Sequenz

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \tag{4}$$

exakt in  $M$ . Dann ist die Sequenz

$$S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_2$$

exakt in  $S^{-1}M$ .

Siehe dazu auch [1, Proposition 3.3].

*Beweis.* Sei  $m_1 \in M_1$  dann gilt  $f(m_1) \in \text{im}(f) = \ker(g)$ , wegen der Exaktheit von 4 in  $M$  und damit ist  $f(m_1) = 0$ . Also gilt  $f \circ g = 0$  und weiterhin

$$S^{-1}f \circ S^{-1}g = S^{-1}(f \circ g) = S^{-1}(0) = 0.$$

Wir erhalten also

$$\text{im}(S^{-1}f) \subset \ker(S^{-1}g).$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen wählen wir  $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}g)$ , das heißt  $\frac{g(m)}{s} = 0$  in  $S^{-1}M_2$ . Das wiederum bedeutet, dass  $g(m) = 0$  in  $M_2$ , da  $R$  ein Integritätsring ist, also auch  $m \in \ker(g) = \text{im}(f)$ , wegen der Exaktheit von  $M$  in 4. Also gibt es ein  $m_1 \in M_1$  mit  $f(m_1) = m$  und damit gilt

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m_1)}{s} = (S^{-1}f) \left( \frac{m_1}{s} \right) \in \text{im}(S^{-1}f).$$

Es folgt

$$\ker(S^{-1}g) \subset \text{im}(S^{-1}f).$$

□

Nun zurück zu unserem Problem. Wir wollen nun wissen, was passiert wenn wir in dem  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  Brüche einführen. Um das zu verstehen, hilft uns das folgende Resultat.

**Lemma 2.7.** Sei  $R$  ein Integritätsring,  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N$  ein  $R$ -Untermodul von  $M$ . Weiter sei  $S$  eine multiplikative Teilmenge von  $R$ , dann sind die  $S^{-1}R$ -Moduln  $S^{-1}(M/N)$  und  $S^{-1}M/S^{-1}N$  isomorph.

Siehe [1, Korollar 3.4 (iii)].

*Beweis.* Wir betrachten hierzu die Sequenz

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \xrightarrow{h} 0,$$

wobei  $f, g$  und  $h$  hier Modulhomomorphismen sind. Die Funktion  $f$  bettet das Untermodul  $N$  in  $M$  ein, also gilt  $\text{im}(f) = N$ . Weiter bildet die Funktion  $g$  gerade die Elemente aus  $M$  auf deren Äquivalenzklassen in  $M/N$  ab und da für alle  $n \in N \subset M$  gilt, dass  $g(n) = [n] = 0$

in  $M/N$ , folgt auch, dass  $\ker(g) = N$ . Damit ist die Sequenz in  $M$  exakt.

Weiter ist  $\operatorname{im}(g) = M/N$  und da  $h$  die Nullabbildung ist, gilt  $\ker(h) = M/N$ . Also ist die Sequenz auch in  $M/N$  exakt.

Wir wenden nun  $S^{-1}$  auf die exakte Sequenz an, dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}(M/N) \rightarrow 0 \quad (5)$$

mit Lemma 2.6 exakt.

Wir wollen nun den Homomorphiesatz auf den Modulhomomorphismus  $S^{-1}g$  anwenden und erhalten mit der Exaktheit von 5 in  $S^{-1}M$

$$S^{-1}(M/N) = \operatorname{im}(S^{-1}g) \simeq S^{-1}M/\ker(S^{-1}g) = S^{-1}M/\operatorname{im}(S^{-1}f) = S^{-1}M/S^{-1}N.$$

□

Wenden wir das nun auf das  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  mit  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  an, dann sind die  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Z}$ - also  $\mathbb{Q}$ -Moduln  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$  und  $((\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{R}) / ((\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\pi\mathbb{Z})$  isomorph. Wir bemerken, dass  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  und  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\pi\mathbb{Z} \simeq \pi\mathbb{Q}$ . Damit gilt also

$$(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

**Lemma 2.8.** Sei  $R$  ein Integritätsring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$f : S^{-1}R \otimes_R M \rightarrow S^{-1}M$$

zwischen den  $S^{-1}R$ -Moduln, sd.

$$f\left(\frac{r}{s} \otimes m\right) = \frac{rm}{s} \quad (6)$$

für alle  $r \in R$ ,  $m \in M$  und  $s \in S$ .

Der Beweis richtet sich nach [1, Proposition 3.5].

*Beweis.* Die Abbildung  $g : S^{-1}R \times M \rightarrow S^{-1}M$  mit  $g\left(\frac{r}{s}, m\right) = \frac{rm}{s}$  ist bilinear, da

$$\begin{aligned} g\left(\lambda_1\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right), \lambda_2(m_1 + m_2)\right) &= g\left(\frac{\lambda_1(r_1s_2 + r_2s_1)}{s_1s_2}, \lambda_2(m_1 + m_2)\right) \\ &= \frac{\lambda_1(r_1s_2 + r_2s_1)\lambda_2(m_1 + m_2)}{s_1s_2} \\ &= \lambda_1\lambda_2\left(\frac{r_1(m_1 + m_2)}{s_1} + \frac{r_2(m_1 + m_2)}{s_2}\right) \\ &= \lambda_1\lambda_2\left(g\left(\frac{r_1}{s_1}, m_1\right) + g\left(\frac{r_1}{s_1}, m_2\right) + g\left(\frac{r_2}{s_2}, m_1\right) + g\left(\frac{r_2}{s_2}, m_2\right)\right) \end{aligned}$$

für alle  $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ ,  $s_1, s_2 \in S$  und  $m_1, m_2 \in M$  gilt. Damit gibt es mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts (Proposition 2.1) einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f : S^{-1}R \otimes_R M \rightarrow S^{-1}M$ , sd. 6 gilt. Es ist klar, dass  $f$  surjektiv ist, dazu wählen wir  $r = 1$  und erhalten somit alle Elemente aus  $S^{-1}M$ . Weiter ist  $f$  auch eindeutig bestimmt durch 6. Wir zeigen also noch die Injektivität. Dazu betrachten wir die Elemente von  $S^{-1}R \otimes_R M$ . Sei also

$$\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}R \otimes_R M$$

ein beliebiges Element, dann definieren wir

$$s := \prod_{i=1}^n s_i \in S, \quad t_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n s_j \in S$$

und es gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{r_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \otimes r_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum_{i=1}^n \underbrace{r_i t_i m_i}_{\in M}.$$

Wir können also jedes Element aus  $S^{-1}R \otimes_R M$  in der Form

$$\frac{1}{s} \otimes m$$

schreiben. Betrachten wir nun den Kern von  $f$ . Sei also  $\frac{1}{s} \otimes m \in \ker(f) \subset S^{-1}R \otimes_R M$ , dh.  $f\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = 0$ . Da  $R$  ein Integritätsring ist folgt also mit  $f\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s} = 0$ , dass  $m = 0$

und damit gilt

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{1}{s} \otimes 0 = 0.$$

Damit ist  $f$  bijektiv, also der gesuchte Isomorphismus.  $\square$

Es lässt sich nun folgendes Resultat zeigen, siehe dazu auch [1][Proposition 3.7].

**Proposition 2.9.** Seien  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$f : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \rightarrow S^{-1}(M \otimes_R N)$$

zwischen den  $S^{-1}R$ -Moduln, sd.

$$f \left( \frac{m}{s_1} \otimes \frac{n}{s_2} \right) = \frac{m \otimes n}{s_1 s_2}.$$

*Beweis.* Es gilt mit Lemma 2.8 und den kanonischen Isomorphismen des Tensorprodukts

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N &\stackrel{2.8}{\simeq} (S^{-1}R \otimes_R M) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}R \otimes_R N) \\ &= M \otimes_R \underbrace{(S^{-1}R \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R)}_{\simeq S^{-1}R} \otimes_R N \\ &\simeq M \otimes_R S^{-1}R \otimes_R N \\ &= S^{-1}R \otimes_R (M \otimes_R N) \\ &\stackrel{2.8}{\simeq} S^{-1}(M \otimes_R N). \end{aligned}$$

$\square$

Dies lässt sich nun auf unser Tensorprodukt  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  anwenden, indem wir  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = \mathbb{R}$  und  $N = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  setzen und mit  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und dem obigen Resultat ergibt sich dann

$$S^{-1}R \simeq \mathbb{Q}, \quad S^{-1}M \simeq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad S^{-1}N \simeq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

Weiterhin gilt

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},$$

denn mit der Bilinearität des Tensorprodukt gilt für

$$\begin{aligned}
(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) &\simeq \left\langle \left\{ \frac{r \otimes s}{z} \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \right\rangle \\
&\simeq \left\langle \left\{ \frac{r}{z} \otimes s \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \right\rangle \\
&\simeq (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \\
&\simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

wobei wir mit  $\langle \cdot \rangle$  hier das Erzeugnis meinen. Insgesamt erhalten wir also mit der Proposition

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}. \quad (7)$$

Wir können die Dehn-Invariante also auch auf dem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  betrachten, was uns zu der folgenden Tatsache führt.

**Satz 2.10.** Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  Elemente, dann gilt

$$x \otimes y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y \in \pi\mathbb{Q}.$$

*Beweis.* Die Rückrichtung ist schnell gezeigt, denn für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  und  $y = \pi \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , wobei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , gilt

$$x \otimes y = x \otimes \pi \frac{p}{q} = xp \otimes \frac{\pi}{q} = q \frac{xp}{q} \otimes \frac{\pi}{q} = \frac{xp}{q} \otimes \pi = \frac{xp}{q} \otimes 0 = 0.$$

Dabei haben wir  $p$  zuerst nach links und danach  $q$  nach rechts bewegt.

Zur Hinrichtung: Betrachte  $\pi\mathbb{Q}$  ist 1-dimensionaler  $\mathbb{Q}$ - Vektorraum mit Basis  $\{\pi\}$  und  $\pi\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  ist Untervektorraum von  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Wir können also nun unsere Basis mit dem Lemma von Zorn auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Also hat  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum die Basis

$$\{\pi\} \dot{\bigcup} B,$$



wobei  $B$  die Menge ist mit der wir  $\{\pi\}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}$  ergänzen. Weiterhin gilt auch

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\simeq \pi\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q} & \text{und} \\ \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q} &\simeq \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\left\{ (b_1 \otimes b_2) \left| b_1 \in \pi\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q}, b_2 \in \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q} \right. \right\}$$

eine Basis von  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ .

Zwei Elemente  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  haben also die Darstellung

$$\begin{aligned}x &= \alpha\pi + \sum_{b \in B} \beta_b b \\ y &= \sum_{b' \in B} \gamma_{b'} b',\end{aligned}$$

wobei  $\alpha, \beta_b, \gamma_{b'} \in \mathbb{Q}$  für alle  $b, b' \in B$  sind. Falls nun  $x \otimes y = 0$  gilt also

$$0 = x \otimes y = \left( \alpha\pi + \sum_{b \in B} \beta_b b \right) \otimes \left( \sum_{b' \in B} \gamma_{b'} b' \right) = \sum_{b' \in B} \alpha \gamma_{b'} (\pi \otimes b') + \sum_{\substack{b \in B \\ b' \in B}} \beta_b \gamma_{b'} (b \otimes b').$$

Da  $(\pi \otimes b')$  und  $(b \otimes b')$  linear unabhängig sind für alle  $b, b' \in B$  folgt

$$\alpha \gamma_{b'} = 0 \quad \text{und} \quad \beta_b \gamma_{b'} = 0$$

für alle  $b, b' \in B$ .

1. Falls  $\alpha \neq 0$ , dann sind  $\gamma_{b'} = 0$  für alle  $b' \in B$  und damit ist  $y = 0$ , also  $y \in \pi\mathbb{Q}$ .
2. Falls  $\alpha = 0$ , dann sind die  $\gamma_{b'}$  beliebig. Angenommen es gibt also ein  $b \in B$ , sd.  $\beta_b \neq 0$ , dann muss  $\gamma_{b'} = 0$  für alle  $b' \in B$  damit  $\beta_b \gamma_{b'} = 0$  für alle  $b' \in B$  gilt. Das wiederum bedeutet  $y = 0$  und wir sind hier fertig. Falls also  $\beta_b = 0$  für alle  $b \in B$ , folgt mit  $\alpha = 0$ , dass  $x = 0$ .

Damit haben wir die Aussage gezeigt. □

Wir bemerken, dass wir für die Hinrichtung also das Auswahl-Axiom benutzt haben. Jedoch ist klar, dass wir bei einer konkreten Berechnung der Dehn-Invariante nur endlich viele Polyeder haben, diese somit auch nur einen endlich-dimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{R}$  aufspannen und wir somit nicht auf das Auswahl-Axiom angewiesen sind. Wir werden später sehen, dass wir im Beweis der Bricardschen Bedingung vollkommen auf dieses verzichten können.

Wir erhalten also auch:

**Folgerung 2.11.** Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  Elemente, dann gilt

$$x \otimes y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Folglich ist die Dehn-Invariante eines Polyeders 0, falls dessen Diederwinkel alle in  $\pi\mathbb{Q}$  liegen.

Wir können nun die Dehn-Invarianten einiger Polyeder berechnen.

**Beispiel 2.12** (Quader). Sei  $P$  ein dreidimensionaler Quader. Dann gilt für alle Kanten  $k$  von  $P$ , dass  $w(k) = \frac{\pi}{2}$ . Also gilt  $w(k) \in \pi\mathbb{Q}$  für alle Kanten  $k$  und nach Bemerkung 2.10 folgt

$$D(P) = 0.$$

**Beispiel 2.13** (regulärer Tetraeder). Sei  $P$  ein dreidimensionaler regulärer Tetraeder, also haben alle Kanten von  $P$  die gleiche Länge  $l$  und den gleichen Diederwinkel  $\alpha$ . Seien  $A, B, C, D$  die Ecken von  $P$  wie in Abbildung 4. Sei  $F$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ , also  $|BF| = \frac{l}{2}$  und damit ist nach Pythagoras  $|AF| = \frac{\sqrt{3}}{2}l = |DF|$ . Der Mittelpunkt  $E$  des Dreiecks  $ABC$  hat gerade den Abstand  $\frac{\sqrt{3}}{3}l = \frac{l}{2\sqrt{3}}$  zu  $F$  und schließlich gilt mit Pythagoras

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{l}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{3} \quad \text{also} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Damit können wir die Dehn-Invariante berechnen. Es gibt sechs Kanten der Länge  $l$ , die alle den Diederwinkel  $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  haben, also

$$D(P) = \sum_{i=1}^6 l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

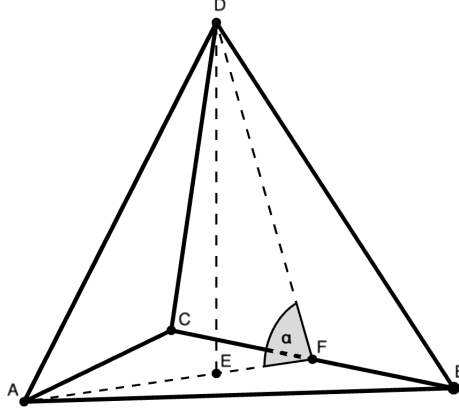


Abbildung 4: Ein regulärer Tetraeder

**Proposition 2.14.** Für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt,  $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  ist irrational.

*Beweis.* Zuerst stellen wir fest, dass mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

für  $\alpha = (k + 1)\varphi$  und  $\beta = (k - 1)\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \cos((k + 1)\varphi) + \cos((k - 1)\varphi) &= 2 \cos\left(\frac{(k + 1)\varphi + (k - 1)\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{(k + 1)\varphi - (k - 1)\varphi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\cos((k + 1)\varphi) = 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) - \cos((k - 1)\varphi). \quad (8)$$

Wir definieren uns nun  $\varphi_n = \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$  für  $n = 2l + 1$  mit  $l \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$  und  $0 \leq \varphi_n \leq \pi$ .

Mit Induktion über  $k \in \mathbb{N}_0$  zeigen wir, dass gilt

$$\cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}, \quad (9)$$

wobei  $A_k$  eine ganze Zahl ist, die nicht durch  $n$  teilbar ist. Wir beginnen und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \text{für } k = 0 \quad 1 &= \cos(0 \cdot \varphi_n) = \frac{A_0}{\sqrt{n^0}} = A_0 \\ \text{für } k = 1 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} &= \cos(1 \cdot \varphi_n) = \frac{A_1}{\sqrt{n^1}} = \frac{A_0}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

und damit  $A_0 = A_1 = 1$  ist. Weiterhin gilt mit 8

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi_n) &= 2\cos(k\varphi_n)\cos(\varphi_n) - \cos((k-1)\varphi_n) \\ &= 2\frac{A_k}{\sqrt{n^k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}} \\ &\quad \stackrel{=: A_{k+1}}{=} \underbrace{2A_k - nA_{k-1}}_{=: A_{k+1}} \\ &= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n^{k+1}}}. \end{aligned}$$

Da  $A_k$  nicht durch  $n$  teilbar ist und  $n \geq 3$  ungerade, ist die Zahl  $2A_k$  auch nicht durch  $n$  teilbar und damit auch nicht  $A_{k+1} := 2A_k - nA_{k-1}$ . Wir haben also eine konkrete Darstellung für  $A_{k+1}$  gefunden und sind mit der Induktion fertig.

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis. Angenommen  $\frac{1}{\pi}\varphi_n$  ist rational mit

$$\frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{m}{k}$$

für  $m \in \mathbb{Z}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt mit  $k\varphi_n = m\pi$  und 9

$$\pm 1 = \cos(m\pi) = \cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n^k}}.$$

Also auch  $\sqrt{n^k} = \pm A_k$  und da  $A_k$  eine ganze Zahl ist, ist  $\sqrt{n^k}$  auch eine und somit  $k \geq 2$ . Damit ist jedoch  $n$  ein Teiler von  $\sqrt{n^k}$  und da  $\sqrt{n^k} | A_k$ , teilt  $n$  auch  $A_k$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

Damit folgt also für  $n = 9$ , dass  $\arccos(\frac{1}{3})$  nicht in  $\pi\mathbb{Q}$  liegt. Wir erhalten unser folgendes Resultat.

**Folgerung 2.15** (Dehns Lösung). Sei  $Q$  ein Quader und  $T$  ein regulärer Tetraeder mit Kantenlänge  $l$ . Angenommen  $Q$  und  $T$  sind zerlegungsgleich, dann gilt mit Satz 2.5 sowohl  $\text{vol}(Q) = \text{vol}(T)$ , als auch  $D(Q) = D(T)$ . Nach Beispiel 2.12 gilt  $D(Q) = 0$  und nach Beispiel

2.13 gilt

$$D(T) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Da nach Proposition 2.14  $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  irrational ist, liegt  $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  nicht in  $\pi\mathbb{Q}$  und damit ist nach Bemerkung 2.10 mit  $l \neq 0$  auch  $6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$ . Also gilt

$$D(Q) = 0 \neq 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = D(T).$$

Was ein Widerspruch ist.

Damit sind  $Q$  und  $T$  nicht zerlegungsgleich.

[2, def 3.1]

## Literatur

- [1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016. For the 1969 original see [ MR0242802].
- [2] Vladimir G. Boltianskiĭ. *Hilbert's third problem*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto-London, 1978. Translated from the Russian by Richard A. Silverman, With a foreword by Albert B. J. Novikoff, Scripta Series in Mathematics.