

# Hilberts drittes Problem

**Jannis Klingler**

## Bachelorarbeit

Zur Erlangung des Akademischen Grades  
Bachelor of Science

vorgelegt am 27. Februar 2020



**Albert-Ludwigs-Universität Freiburg**

Institut für Mathematik

Seminar: Numberphile

Betreuung: Dr. Oliver Bräunling

Vorgelegt von: Jannis Klingler  
Unterer Mühlenweg 57  
79114 Freiburg im Breisgau  
jannis-klingler@web.de  
Matrikelnummer: 4331982  
Studiengang: Mathematik  
Nebenfach: Volkswirtschaftslehre  
Bearbeitungszeitraum: 27.11.2019 bis 27.02.2020

# ERKLÄRUNG ZUR BACHELORARBEIT

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig verfasst wurde und dass keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden.

Sämtliche Stellen der Arbeit, die im Wortlaut oder dem Sinn nach Publikationen anderer Autoren entsprechen wurden gekennzeichnet.

Diese Erklärung bezieht sich auch auf in der Arbeit enthaltene Grafiken und bildliche Darstellungen.

Darüber hinaus versichere ich, dass diese Arbeit nicht und auch nicht auszugsweise bereits für eine andere Prüfung angefertigt wurde.

---

Datum, Ort

---

Unterschrift



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
2.1	Polytope . . . . .	1
2.2	Zerlegungsgleichheit . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Zerlegungsgleichheit im 2-dimensionalen</b>	<b>5</b>
3.1	Bolyai-Gerwien Theorem . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante</b>	<b>11</b>
4.1	Tensoren . . . . .	11
4.2	Die Dehn-Invariante . . . . .	12
4.3	Lokalisierung des Tensorprodukts . . . . .	14
4.4	Dehns Lösung . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Ergänzungsgleichheit von Polytopen</b>	<b>26</b>
5.1	Ein wenig Polyedertheorie . . . . .	26
5.2	Zylinderklassen . . . . .	30
5.3	Ergänzungsgleich und Zerlegungsgleichheit . . . . .	37



# 1 Einleitung

## 2 Einführung

### 2.1 Polytope

Zu Beginn wollen Polytope formal über Vektorräumen einführen. Später werden wir dann vor allem auf dem Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  arbeiten. Wir betrachten dazu einen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $k$  mit Dimension  $d$ .

*Wiederholung* (Dual-Raum). Der Dualraum  $V^*$  eines  $k$ -Vektorraums  $V$  ist die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  in den Körper  $k$ .

Wir bemerken, dass der Dualraum wieder ein Vektorraum ist.

**Definition 2.1** (Halbraum). Ein Halbraum in einem reellen Vektorraum ist eine Teilmenge der Form

$$H = \{v \in V \mid \alpha(v) \leq r\},$$

wobei  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  und  $r \in \mathbb{R}$ .

**Definition 2.2** (konvexes Polytop). Ein konvexes  $d$ -Polytop  $P$  in einem  $d$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  ist der Schnitt endlich vieler Halbräume.  $P$  ist beschränkt, falls für jedes  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  ein  $r \in \mathbb{R}$  existiert, sd.  $\alpha(x) \leq r$  für alle  $x \in P$  gilt.

Wir wollen die Dimension eines konvexen Polytops  $P$  definieren als das Maximum der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren, die wir in  $P$  finden. Hierbei ist es auch möglich, dass das, durch die Halbräume entstehende, Polytop von niedrigerer Dimension ist als der ursprünglich zugrunde liegende Vektorraum, das Polytop also keine inneren Punkte hat. Ein solches Polytop wollen wir uneigentlich nennen. Ein Polytop, das innere Punkte besitzt, nennen wir dementsprechend eigentlich. Wir meinen in dieser Arbeit, falls nicht anders genannt, mit Polytopen immer eigentliche Polytope.

**Definition 2.3** (Polytop). Ein  $d$ -Polytop  $P$  ist die Vereinigung endlich vieler konvexer  $d$ -Polytope.

Weiter nennen wir ein 0-dimensionales Polytop eine Ecke, ein 1-dimensionales Polytop eine Strecke bzw. Kante, ein 2-dimensionales Polytop ein Polygon und ein 3-dimensionales Polytop einen Polyeder.

Wir werden im Folgenden immer beschränkte konvexe  $d$ -Polytope betrachten. Wir stellen außerdem fest, dass der Schnitt konvexer Polytope wieder ein konvexes Polytop ist. Hierbei kann der Schnitt auch niedrigerdimensional sein. Wir sagen zwei Polytope  $P_1$  und  $P_2$  sind disjunkt, wenn  $\dim(P_1 \cap P_2) < d$ . Wir schreiben dann für die Vereinigung zweier disjunkter Polytope  $P_1 + P_2$ .

Wir definieren  $\dim(P_1 \cap P_2) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \exists p_0, \dots, p_k \in P_1 \cap P_2 : (p_0 - p_1), \dots, (p_{k-1} - p_k) \text{ linear unabhängige}\}$ .

**Definition 2.4** (Kongruenz). Wir nennen zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  *kongruent*, wenn es eine Isometrie  $g$  gibt, sd.  $g(P) = Q$ . Wir schreiben dann  $P \cong Q$ .

Mit Isometrien meinen wir hier längenerhaltende Affinitäten, also bijektive affine Abbildungen, die den Abstand zweier beliebiger Punkte erhalten. Isometrien sind Bewegungen, das heißt sie setzen sich gerade aus einer Translation und einer Drehung zusammen. Zu jeder Isometrie  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  lässt sich also ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  und eine orthogonale Matrix  $U \in O(d)$ , also eine Drehung, finden, sd. wir die Darstellung  $f(x) = \alpha + Ux$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  erhalten. Da das Skalarprodukt translationsinvariant ist und auch invariant unter Drehungen, ist das Skalarprodukt auch invariant unter Isometrien. Weiter bilden Isometrien Halbräume wieder auf Halbräume ab und damit auch Polytope auf Polytope. Die Menge der Isometrien  $\{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f \text{ ist Isometrie}\}$  ist eine Gruppe mit der Verknüpfung von Abbildungen als Operation und der Identitätsabbildung als neutralem Element. Wir wollen diese Gruppe die Isometriegruppe nennen. Wir bemerken außerdem, dass wir die Isometrien auf Translationen einschränken können und erhalten so eine Untergruppe der Isometriegruppe, die Translationsgruppe. Die Translationsgruppe hat also Untergruppe also die gleiche Eigenschaften wie die Isometriegruppe. Wir werden diese im späteren Verlauf benötigen.

**Bemerkung 2.5.** Wir stellen fest, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität und Symmetrie sind klar. Zur Transitivität seien  $P, Q, R$  drei  $d$ -Polytope mit  $P \cong Q$  und  $Q \cong R$ , es gibt also Isometrien  $f, g$ , sd.  $f(P) = Q$  und  $g(Q) = R$ . Dann ist  $g \circ f$  wieder eine Isometrie und wir erhalten

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)) = g(Q) = R,$$

also  $P \cong R$ .

Wir können uns nun also der Zerlegungsgleichheit von Polytopen widmen.



## 2.2 Zerlegungsgleichheit

**Definition 2.6** (Zerlegungsgleichheit). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P = P_1 + \dots + P_n$ ,  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir schreiben  $P \sim Q$ .

Wir stellen fest, dass die Kongruenz zweier Polytope auch deren Zerlegungsgleichheit impliziert, dazu betrachten wir als Zerlegung einfach die Polytope selbst. Wir wollen nun des Begriff des Volumens eines Polytops anschauen. Dabei ist vor allem die Invarianz des Volumens unter Zerschneidung von Polytopen, die wir in Proposition 2.9 beweisen werden, ein wichtiges Resultat. Mit dem Volumen eines Polytops meinen wir im Folgenden das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß. Da unsere Polytope abgeschlossene Mengen sind, liegen sie in der Borelalgebra und sind damit auch Lebesgue-messbar.

**Proposition 2.7.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei  $d$ -Polytope, sd.  $P \cong Q$ , dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Sei  $f$  also die Isometrie, sd.  $f(P) = Q$ . Dann finden wir ein  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  und eine orthogonale Matrix  $U \in O(d)$ , sd. für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt  $f(x) = \alpha + Ux$ . Damit ergibt sich die Aussage mit der Transformationsformel aus der Analysis (siehe auch [3, Satz 4.7]).  $\square$

**Lemma 2.8.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei disjunkte Polytope, dann gilt

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

*Beweis.* Sei  $\mathbb{R}^d$  der zugrundeliegende Vektorraum und  $\text{vol} = \text{vol}_d$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß. Seien weiter  $P$  und  $Q$  zwei Polytope in  $\mathbb{R}^d$  mit  $k := \dim(P \cap Q) < d$ . Mit der Siebformel erhalten wir nun

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q) - \text{vol}(P \cap Q).$$

Wir wollen also zeigen, dass der Schnitt von  $P$  und  $Q$  eine Nullmenge bezüglich unseres Maßes ist. Wir definieren  $\mathcal{L} := P \cap Q \subset \mathbb{R}^k$ . Sei nun  $M := \mathcal{L} \times [0, 1]^{d-k} \subset \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler Quader, der  $\mathcal{L}$  einschließt. Für die Aufzählung  $\mathcal{L}_q := \mathcal{L} + (0, q)$ , wobei  $q \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^{d-k}$ , gilt

dann mit der  $\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Maßes

$$\text{vol}_d \left( \bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q), \quad (1)$$

da diese Aufzählung abzählbar ist und die einzelnen  $\mathfrak{L}_q$  jeweils einen leeren Schnitt haben. Es gilt also mit der Monotonie und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\infty > \text{vol}_d(M) \geq \text{vol}_d \left( \bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) \stackrel{1}{=} \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}).$$

Also muss gelten  $\text{vol}_d(\mathfrak{L}) = 0$ , da wir eine abzählbar große Summe haben. Damit ergibt sich also

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

□

Wir stellen fest, dass dieser Beweis über eine beliebige endliche Anzahl von disjunkten Polytopen funktioniert. Mit diesem Resultat ergibt sich die folgende Proposition.

**Proposition 2.9.** Seien  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche  $d$ -Polytope, dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  die Zerlegungen von  $P$  und  $Q$ , also  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir erhalten mit Proposition 2.7 und Lemma 2.8

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(P_i) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(Q_i) = \text{vol}(Q_1 + \dots + Q_n) = \text{vol}(Q).$$

□

### 3 Zerlegungsgleichheit im 2-dimensionalen

#### 3.1 Bolyai-Gerwien Theorem

Im Folgenden setzen wir  $d = 2$  und betrachten also Polygone.

**Lemma 3.1.** Seien  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Polygone und es gilt  $P \sim Q$  und  $Q \sim R$ . Dann folgt  $P \sim R$ .

*Beweis.* Seien die Zerlegungen der Polygone wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \dots + P_n \\ Q &= Q_1 + \dots + Q_n = Q'_1 + \dots + Q'_m \\ R &= R_1 + \dots + R_m, \end{aligned}$$

wobei  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $Q'_j \cong R_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Seien  $f_1, \dots, f_n$  die Isometrien, die alle  $Q_i$  in  $P_i$  überführen (d. h.  $f_i(Q_i) = P_i$ ) und  $g_1, \dots, g_m$  die Isometrien, die alle  $R_j$  in  $Q'_j$  überführen (d. h.  $g_j(R_j) = Q'_j$ ). Wir definieren

$$F_{ij} := Q_i \cap Q'_j,$$

für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$  (Beachte, dass  $F_{ij}$  leer sein kann). Zwei verschiedene  $F_{ij}$  sind disjunkt, denn für  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 \neq i_2$  gilt

$$F_{i_1 j} \cap F_{i_2 j} = (Q_{i_1} \cap Q'_j) \cap (Q_{i_2} \cap Q'_j) = (Q_{i_1} \cap Q_{i_2}) \cap Q'_j.$$

Da  $Q_{i_1}$  und  $Q_{i_2}$  disjunkt sind, d. h. der Schnitt niedrigerdimensional ist, ist auch dieser Schnitt mit  $Q'_j$  niedrigerdimensional, also sind  $F_{i_1 j}$  und  $F_{i_2 j}$  disjunkt. Außerdem gilt

$$\bigcup_{j=1}^m F_{ij} = \bigcup_{j=1}^m (Q_i \cap Q'_j) = Q_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^m Q'_j \right) = Q_i \cap Q = Q_i. \quad (2)$$

Also lässt sich  $P$  folgendermaßen darstellen

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{i=1}^n f_i(Q_i) \stackrel{2}{=} \bigcup_{i=1}^n f_i \left( \bigcup_{j=1}^m F_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m f_i(F_{ij}),$$

und für  $R$  gilt analog

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m g_j(F_{ij}).$$

Damit haben wir sowohl für  $P$ , als auch für  $R$  eine Zerlegung in disjunkte Polygone gefunden. Als letztes überlegen wir uns, dass gilt  $f_i(F_{ij}) \cong g_j(F_{ij})$ . Betrachte hierzu die Isometrie  $g_j \circ f_i^{-1}$ , dann gilt  $g_j(f_i^{-1}(f_i(F_{ij}))) = g_j(F_{ij})$ . Also finden wir für  $P$  und  $R$  jeweils eine Zerlegung aus kongruenten Polygonen und damit sind auch  $P$  und  $R$  zerlegungsgleich bzw.  $P \sim R$ .  $\square$

**Lemma 3.2.** Sei  $P$  ein Dreieck, dann gibt es ein Rechteck  $Q$ , sd.  $P \sim Q$ .

*Beweis.* Sei  $P$  das Dreieck mit den Ecken  $a, b, c$  und sei o.B.d.A  $\overline{ab}$  die längste Seite. Wir zeichnen nun die Lotstrecke auf der Strecke  $\overline{ab}$  durch den Punkt  $c$  ein und nennen den Lotfußpunkt  $d$ . Der Punkt  $d$  liegt auf der Strecke  $\overline{ab}$ , da sonst  $\overline{ab}$  nicht die längste Seite war. Nun halbieren wir die Lotstrecke  $\overline{cd}$  und zeichnen die Lotgerade durch die Punkte  $m$  und  $n$  auf dem Mittelpunkt  $e$  der Strecke  $\overline{cd}$  ein ( $m$  und  $n$  sind hierbei die Schnittpunkte dieser Lotgeraden mit dem Dreieck  $P$ ). Da  $\overline{cd}$  senkrecht auf  $\overline{ab}$  und die Lotgerade durch die Punkte  $m$  und  $n$  senkrecht auf  $\overline{cd}$  ist, sind  $\overline{ab}$  und die Lotgerade parallel. Wir bilden erneut die Lotgeraden auf  $\overline{ab}$  durch die Punkte  $a$  und  $b$  und nennen den Schnittpunkt der Lotgerade durch  $a$  mit der Lotgerade, die durch  $m$  und  $n$  verläuft,  $f$  und den Schnittpunkt der Lotgerade durch  $b$  mit der Lotgerade, die durch  $m$  und  $n$  verläuft,  $g$ . Dadurch erhalten wir ein Rechteck  $Q$  mit den Eckpunkten  $a, b, g, f$ . Wir stellen fest, dass die Dreiecke mit den Eckpunkten  $m, e, c$  und  $a, m, f$ , welche in Abbildung 1 grau hinterlegt sind, kongruent sind, da mit dem Strahlensatz der Winkel an dem Punkt  $m$  in den beiden Dreiecken gleich ist und somit beiden Dreiecke gleiche Basis und Höhe haben. Weiterhin sind mit dem gleichen Argument die Dreiecke mit den Eckpunkten  $e, n, c$  und  $b, g, n$ , welche weiß hinterlegt sind, kongruent. Damit lassen sich  $P$  und  $Q$  in die beiden kongruenten Dreiecke und den schraffierten Trapezoid, mit den Eckpunkten  $a, b, n, m$ , zerlegen und sind somit zerlegungsgleich.  $\square$

**Lemma 3.3.** Zwei beliebige Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, sind zerlegungsgleich.

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  zwei Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, d. h. falls  $h_P$  die Höhe und  $b_P$  die Breite des Rechtecks  $P$  und  $h_Q$  die Höhe und  $b_Q$  die Breite des Rechtecks  $Q$  sind, dann soll gelten  $h_P \cdot b_P = h_Q \cdot b_Q$  also auch

$$\frac{b_P}{h_Q} = \frac{b_Q}{h_P}. \quad (3)$$

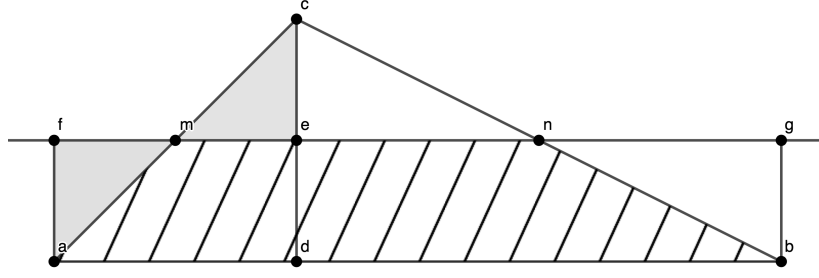


Abbildung 1: Zerlegung eines Dreiecks in ein Rechteck

Seien  $o, a, b, c$  die Eckpunkte des Dreiecks  $P$  und  $o, m, n, p$  die Eckpunkte des Dreiecks  $Q$ ,

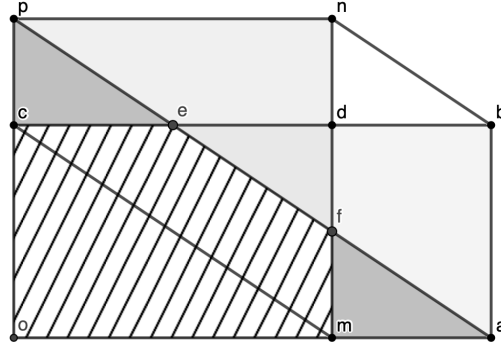


Abbildung 2: Zerlegung zweier Rechtecke

siehe Abbildung 2. Wir verschieben hier  $Q$  so auf auf  $P$ , dass beide eine gemeinsame Ecke  $o$  mit rechtem Winkel haben. Dies ändert nichts am Resultat. Die Höhe  $h_P$  soll also der Länge der Strecken  $\overline{co}$  und  $\overline{ab}$  entsprechen. Die Breite  $b_P$  soll der Länge der Strecken  $\overline{oa}$  und  $\overline{bc}$  entsprechen. Analog soll  $h_Q$  der Länge der Strecken  $\overline{po}$  und  $\overline{mn}$  und  $b_Q$  der Länge der Strecken  $\overline{om}$  und  $\overline{np}$  entsprechen. Wegen 3 sehen wir also, dass die Strecken  $\overline{mc}$  und  $\overline{ap}$  parallel sind. Außerdem stellen wir fest, dass gilt

$$(b_P - b_Q)h_P = b_P h_P - b_Q h_P = h_Q b_Q - b_Q h_P = b_Q (h_Q - h_P)$$

also auch

$$\frac{b_P - b_Q}{h_Q - h_P} = \frac{b_Q}{h_P}.$$

Damit folgt, dass die Dreiecke  $oap$  und  $dbn$  ähnlich sind und folglich sind die Strecken  $\overline{ap}$  und  $\overline{nb}$  parallel. Hierbei sei  $d$  der Schnittpunkt der Strecken  $\overline{mn}$  und  $\overline{bc}$ . Also sind die drei Strecken

$\overline{mc}$ ,  $\overline{ap}$  und  $\overline{nb}$  parallel. Nun unterscheiden wir zwei Fälle

1. *Fall:* Die Verbindungsstrecke  $\overline{ap}$  der Eckpunkte schneidet das Rechteck  $omdc$  in den Punkten  $e$ , mit der Seite  $\overline{dc}$  und  $f$ , mit der Seite  $\overline{md}$ , siehe Abbildung 2. Es gilt  $2b_Q \geq b_P$ . Also sind die beiden in der Abbildung grau hinterlegten Dreiecke  $maf$  und  $cep$  und die beiden in der Abbildung hellgrau hinterlegten Dreiecke  $abe$  und  $fnp$  kongruent. Mit dem übrig gebliebenen in der Abbildung schraffierten Fünfeck  $omfec$  ist unsere Zerlegung komplett.
2. *Fall:* Die Verbindungsstrecke  $\overline{ap}$  der Eckpunkte schneidet das Rechteck  $omdc$  nicht, siehe Abbildung 3. Es gilt also  $2b_Q < b_P$ . Sei nun  $e$  hierbei der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{oa}$  und  $k$  die kleinste natürliche Zahl, wie oft man die Strecke  $\overline{om}$  entlang der Strecke  $\overline{oa}$  legen muss, sd. wir einen Punkt  $t$  erhalten der nicht mehr auf der Strecke  $\overline{oe}$  liegt sondern auf der Strecke  $\overline{ea}$ . Nun zerlegen wir das Rechteck  $Q$  in  $k$  Rechtecke, deren Basis parallel ist zur Strecke  $\overline{om}$ , die wir nun entlang der neu entstandenen Strecke  $\overline{ot}$  legen. Wir erhalten, somit das zu  $Q$  zerlegungsgleiche Rechteck  $otuv$ . Sei die Breite dieses Rechtecks nun  $b'$ , die offensichtlich die Bedingung

$$2b' > b_P$$

erfüllt. Damit können wir nach dem ersten Fall sagen, dass die Rechtecke  $P$  und  $otuv$  zerlegungsgleich sind. Nach Lemma 3.1 sind also auch  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich.

Damit sind  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich. □

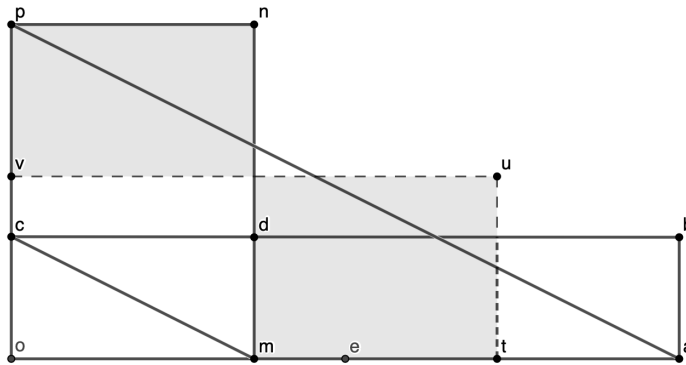


Abbildung 3: Zerlegung zweier Rechtecke

**Satz 3.4** (Bolyai-Gerwien Theorem). Zwei beliebige Polygone mit dem gleichen Flächeninhalt sind zerlegungsgleich.

*Beweis.* Sei  $P$  ein Polygon. Dann kann  $P$ , wie wir später in Satz 5.2 sehen werden, in endlich viele disjunkte Dreiecke zerlegt werden und jedes dieser Dreiecke ist nach Lemma 3.2 zerlegungsgleich zu einem Rechteck. Wir finden also für  $P$  die Darstellung

$$P \sim P_1 + \dots + P_n,$$

wobei  $P_1, \dots, P_n$  Rechtecke sind. Nun nehmen wir eine beliebige Kante  $\overline{a_0 b_0}$  und stellen die Lotgeraden auf den Eckpunkten  $a_0$  und  $b_0$  durch die Strecke  $\overline{a_0 b_0}$  auf. Anschließend ziehen wir  $n$  parallele Strecken zu  $\overline{a_0 b_0}$ , sd. der Flächeninhalt des Rechtecks  $a_{i-1} b_{i-1} b_i a_i$ , welches wir  $R_i$  nennen, dem Flächeninhalt des Rechtecks  $P_i$  entspricht, wobei  $i = 1, \dots, n$ . Nach Lemma 3.3 gilt also  $P_i \sim R_i$  für alle  $i$  und damit

$$P_1 + \dots + P_n \sim R_1 + \dots + R_n.$$

Da  $P \sim P_1 + \dots + P_n$  gilt also mit Lemma 3.1

$$P \sim R_1 + \dots + R_n$$

und damit zum Rechteck  $a_0 b_0 b_n a_n$ . Damit ist jedes Polygon zerlegungsgleich zu einem Rechteck.

Seien nun  $P$  und  $Q$  zwei Polygone mit gleichem Flächeninhalt, dann finden wir wie oben gezeigt Rechtecke  $R_1$  und  $R_2$ , sd.

$$P \sim R_1, \quad Q \sim R_2.$$

Nach Lemma 3.3 gilt also nun auch  $R_1 \sim R_2$  und damit folgt mit Lemma 3.1  $P \sim Q$ . □

Wir haben also nun gesehen, dass sich jedes beliebige Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Diese Dreiecke sind nach Lemma 3.2 zerlegungsgleich zu Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt. Zuletzt können wir mit Satz 3.4 die Rechtecke zerlegen zu Rechtecken mit gleicher Grundseite. Dieses Verfahren können wir nun auf beliebige Polygone mit gleichem Flächeninhalt anwenden. Da diese Rechtecke nach Lemma 3.3 zerlegungsgleich sind folgt mit der Transitivität der Zerlegungsgleichheit aus Lemma 3.1 die Zerlegungsgleichheit der Polygone und mit Proposi-

tion ?? auch die Ergänzungsgleichheit. Dies führt uns zu der Frage, ob das gleiche auch für dreidimensionale Polytope, also Polyeder, möglich ist.

*Motivation:* Als Hilbert 1900 diese Frage auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris als sein drittes von 23 Problemen stellte, vermutete er wohl schon, dass die Antwort 'Nein' ist. Im Folgenden wollen wir uns zwei Beweise anschauen, die zeigen, dass es Polyeder gibt, die nicht zerlegungs- und ergänzungsgleich sind. Der erste bezieht sich auf die Arbeit Max Dehn's, ein Schüler Hilberts, der ein Jahr später in seiner Habilitationsarbeit die Aussage mithilfe der von ihm erfundenen Dehn-Invariante widerlegte.



## 4 Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante

Im Folgenden setzen wir  $d = 3$  und betrachten Polyeder.

Wir müssen uns zunächst überlegen, was mit den Kanten eines Polyeders  $P$  passiert, wenn wir diesen in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  zerlegen. Sei  $k$  also eine Kante des Polyeders  $P$ . Diese Kante hat die Länge  $\ell(k) = l$ . Außerdem ist die Kante  $k$  die Schnittmenge der zwei anliegenden Seitenflächen. Den Winkel zweier solcher Flächen nennt man Diederwinkel. Sei also  $w(k) = \varphi$  der zu  $k$  gehörige Diederwinkel. Dann können beim zerschneiden folgende Fälle eintreten

1. Wir schneiden durch die Kante: Also entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Kantenlängen sich zu der von  $k$  addieren lassen und deren Winkel gleich dem von  $k$  bleibt. D. h. für  $\ell(k_1) = l_1$  und  $\ell(k_2) = l_2$  gilt  $l = l_1 + l_2$ .
2. Wir schneiden entlang der Kante: Also entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Kantenlänge gleich der von  $k$  ist und deren Winkel sich zu dem von  $k$  addieren lassen. D. h. für  $w(k_1) = \varphi_1$  und  $w(k_2) = \varphi_2$  gilt  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .
3. Wir schneiden nicht durch die Kante: Die Kante  $k$  lässt sich also entweder in  $P_1$  oder  $P_2$  wiederfinden und sowohl Kantenlänge, als auch Diederwinkel bleiben gleich.
4. Bleibt nur noch der Sonderfall, wenn wir durch eine der Flächen von  $P$  schneiden. Hierbei entstehen aus dem nichts zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Länge der Länge des Schnitts entsprechen und deren Winkel sich zu  $\pi$  addieren lässt. D. h. für  $w(k_1) = \varphi_1$  und  $w(k_2) = \varphi_2$  gilt  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ .

Wir wollen also eine Operation, die in beiden Argumenten, sowohl in Länge als auch Diederwinkel, linear ist und bei der wir einen Diederwinkel  $\pi$  mit 0 identifizieren. Dies führt uns auf das Tensorprodukt.

### 4.1 Tensoren

Wir kennen Tensoren bereits aus der linearen Algebra. Deshalb wiederholen wir noch einmal die universelle Eigenschaft dieser.

**Proposition 4.1** (Universelle Eigenschaft). Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und seien  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln. Dann ist das *Tensorprodukt*  $M \otimes_R N$  genau derjenige  $R$ -Modul zu dem es eine bilineare Abbildung  $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  gibt, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Sei  $L$  ein weiterer  $R$ -Modul und  $\phi : M \times N \rightarrow L$  eine bilineare Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\eta : M \otimes_R N \rightarrow L$ , sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! \eta & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

Gibt ein solches  $R$ -Modul  $M \otimes_R N$ , dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Für den Beweis verweise ich auf [1, Proposition 2.12] oder [6, Satz 7.3]. □

Also wissen wir nun, dass das Tensorprodukt folgende Eigenschaften erfüllt. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $R$ -Moduln  $M$  und  $N$ , dann gilt für alle  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  und  $r, r' \in R$

$$\begin{aligned} (mr + m'r' \otimes n) &= (m \otimes n) \cdot r + (m' \otimes n) \cdot r' \\ (m \otimes nr + n'r') &= (m \otimes n) \cdot r + (m \otimes n') \cdot r'. \end{aligned}$$

Damit ist der bilineare Operator gefunden. Wir wollen für unser Problem den Spezialfall  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  betrachten. Hierbei identifizieren wir die Länge einer Kante mit dem ersten Argument und tensorieren dies mit einem Winkel, wobei wir den Winkel  $\pi$  mit 0 identifizieren.

## 4.2 Die Dehn-Invariante

**Definition 4.2** (Dehn-Invariante). Sei  $P$  ein dreidimensionaler beschränkter Polyeder mit den Kanten  $k_1, \dots, k_n$ . Dann definieren wir die *Dehn-Invariante*  $D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  durch

$$\sum_{i=1}^n \ell(k_i) \otimes [w(k_i)].$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Dehn-Invariante sich beim Zerschneiden eines Polyeders nicht verändert und somit eine Invariante ist.

**Proposition 4.3** (Invarianz). Sei  $P$  ein Polyeder und  $P = P_1 + P_2$  eine Zerlegung von  $P$  in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$ , dann gilt  $D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$ .

*Beweis.* Sei  $P$  ein beschränkter Polyeder, den wir in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  zerschneiden. Die Summe der Dehn-Invarianten der einzelnen Polyeder soll also gerade der Dehn-Invariante von  $P$  entsprechen. Dazu betrachten wir die Kanten der Polyeder und überlegen was für die Summanden gilt. Es reicht die Fälle zu betrachten, die wir am Anfang des Kapitels erwähnt haben.

- Zu 1: Beim schneiden durch eine Kante  $k$  von  $P$  entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , wobei die Längen sich addieren und der Winkel gleich bleibt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) + \ell(k_2) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = (\ell(k_1) + \ell(k_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 2: Beim schneiden entlang einer Kante  $k$  von  $P$  entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , wobei die Längen gleich bleiben und die Winkel sich addieren. Es gilt

$$\ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich auch hier die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 3: Wir schneiden nicht durch die Kante  $k$  von  $P$ , also ändert sich auch der Summand nicht und damit die Dehn-Invariante.
- Zu 4: Beim Schneiden durch eine Fläche entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Länge gleich ist und Winkel sich zu  $\pi$  addieren lässt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Also ändert auch dies nichts an der Dehn-Invariante.

Im Beweis haben wir lediglich die Bilinearität des Tensorprodukts ausgenutzt.  $\square$

**Proposition 4.4.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei Polyeder, sd.  $P \cong Q$ , dann gilt  $D(P) = D(Q)$ .

*Beweis.* Isometrien erhalten sowohl Kantenlängen, als auch Diederwinkel der Polyeder und damit bleibt auch die Dehn-Invariante unverändert.  $\square$

**Satz 4.5** (Dehn). Seien  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche Polyeder, dann gilt  $D(P) = D(Q)$  und  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  die Zerlegungen von  $P$  und  $Q$ , also  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann folgt mit Proposition 2.9 dass  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ . Außerdem gilt mit Proposition 4.4 und mit Proposition 4.3

$$D(P) = D(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n D(P_i) = \sum_{i=1}^n D(Q_i) = D(Q_1 + \dots + Q_n) = D(Q).$$

□

### 4.3 Lokalisierung des Tensorprodukts

Wir wollen uns nun zur Berechnung der Dehn-Invariante einiger Polyeder ein paar Eigenschaften des Tensorprodukts  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  anschauen. Dazu wollen wir zeigen, dass unser Tensorprodukt isomorph zum Tensorprodukt  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  ist, hierzu benötigen wir ein paar Resultate aus der Kommutativen Algebra.

Sei im Folgenden  $R$  ein Integritätsring, wir wollen nun Brüche einführen. Sei dazu  $S$  eine multiplikative Teilmenge von  $R$ , das heißt  $1 \in S$  und  $S$  ist unter Multiplikation abgeschlossen, also ein Monoid. Wir definieren die Relation  $\equiv$  auf  $R \times S$  durch

$$(r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2) \quad \Leftrightarrow \quad r_1 s_2 = r_2 s_1$$

für Elemente  $r_1, r_2 \in R$  und  $s_1, s_2 \in S$ .

Wir stellen fest, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität und Symmetrie sind klar, wir zeigen also noch die Transitivität. Es gelte also  $(r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2)$  und  $(r_2, s_2) \equiv (r_3, s_3)$  für  $r_1, r_2, r_3 \in R$  und  $s_1, s_2, s_3 \in S$ , also gilt  $r_1 s_2 = r_2 s_1$  und  $r_2 s_3 = r_3 s_2$  und damit  $r_1 s_2 r_2 s_3 = r_2 s_1 r_3 s_2$ . Falls  $r_2 = 0$  ist klar, dass  $(r_1, s_1) \equiv (r_3, s_3)$  gilt, falls  $r_2 \neq 0$  können wir  $r_2$  aus der Gleichung streichen und es folgt  $r_1 s_3 = r_3 s_1$  und damit  $(r_1, s_1) \equiv (r_3, s_3)$ .

Wir schreiben  $\frac{r}{s}$  für die Äquivalenzklasse von  $(r, s)$  und  $S^{-1}R$  für die Menge aller Äquivalenzklassen.

Wir können  $S^{-1}R$  nun eine Ringstruktur geben, indem wir die Addition und Multiplikation wie folgt definieren

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_1}{s_1}\right) + \left(\frac{r_2}{s_2}\right) &= \left(\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}\right) \\ \left(\frac{r_1}{s_1}\right) \cdot \left(\frac{r_2}{s_2}\right) &= \left(\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}\right) \end{aligned}$$

für alle  $r_1, r_2 \in R$  und  $s_1, s_2 \in S$ . Wir stellen fest, dass  $S^{-1}R$  sogar ein kommutativer Ring mit Eins ist. Außerdem ist  $S^{-1}R$  gerade der Quotientenkörper von  $R$ , falls  $S = R \setminus \{0\}$  ist. Betrachten wir also beispielweise den Ring  $\mathbb{Z}$  mit der multiplikativen Teilmenge  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , so ist  $S^{-1}\mathbb{Z}$  gerade der Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}$ , also  $\mathbb{Q}$ . Wir können diese Konstruktion nun auch auf Moduln fortführen. Haben wir ein  $R$ -Modul  $M$ , dann definieren wir die Äquivalenzrelation wie oben, nur auf  $M$ , und erhalten die Äquivalenzklassen  $\frac{m}{s}$  für Elemente  $m \in M$  und  $s \in S$ . Dann ist  $S^{-1}M$  gerade die Menge solcher Brüche und wir erhalten mit  $S^{-1}M$  ein  $S^{-1}R$ -Modul mit der natürlichen Definition der Addition und skalaren Multiplikation. Haben wir nun einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f : M \rightarrow N$ , dann führt uns dies zu einem  $S^{-1}R$ -Modulhomomorphismus  $S^{-1}f : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ , indem  $S^{-1}f$  Elemente  $\frac{m}{s}$  auf  $\frac{f(m)}{s}$  abbildet. Damit gilt also

$$S^{-1}(f \circ g) = (S^{-1}f) \circ (S^{-1}g),$$

für Modulhomomorphismen  $f$  und  $g$ .

**Lemma 4.6.** Sei  $R$  ein Integritätsring und  $M, M_1, M_2$  seien  $R$ -Moduln. Weiter sei die Sequenz

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \tag{4}$$

exakt<sup>1</sup> in  $M$ . Dann ist die Sequenz

$$S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_2$$

exakt in  $S^{-1}M$ .

Siehe dazu auch [1, Proposition 3.3].

*Beweis.* Sei  $m_1 \in M_1$  dann gilt  $f(m_1) \in \text{im}(f) = \ker(g)$ , wegen der Exaktheit von 4 in  $M$  und damit ist  $g(f(m_1)) = 0$ . Also gilt  $g \circ f = 0$  und weiterhin

$$S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}(0) = 0.$$

Wir erhalten also

$$\text{im}(S^{-1}f) \subset \ker(S^{-1}g).$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen wählen wir  $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}g)$ , das heißt  $S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right) =$

---

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Eine Sequenz  $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$  ist exakt in  $M$ , falls  $\text{im}(f) = \ker(g)$ .

$\frac{g(m)}{s} = 0$  in  $S^{-1}M_2$ . Das wiederum bedeutet, dass  $g(m) = 0$  in  $M_2$ , da  $R$  ein Integritätsring ist, also auch  $m \in \ker(g) = \operatorname{im}(f)$ , wegen der Exaktheit von  $M$  in 4. Also gibt es ein  $m_1 \in M_1$  mit  $f(m_1) = m$  und damit gilt

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m_1)}{s} = (S^{-1}f) \left( \frac{m_1}{s} \right) \in \operatorname{im}(S^{-1}f).$$

Es folgt

$$\ker(S^{-1}g) \subset \operatorname{im}(S^{-1}f).$$

□

Nun zurück zu unserem Problem. Wir wollen nun wissen, was passiert wenn wir in dem  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  Brüche einführen. Um das zu verstehen, hilft uns das folgende Resultat.

**Lemma 4.7.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N$  ein  $R$ -Untermodul von  $M$ . Dann sind die  $S^{-1}R$ -Moduln  $S^{-1}(M/N)$  und  $S^{-1}M/S^{-1}N$  isomorph.

Siehe [1, Korollar 3.4 (iii)].

*Beweis.* Wir betrachten hierzu die Sequenz

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \xrightarrow{h} 0,$$

wobei  $f, g$  und  $h$  hier Modulhomomorphismen sind. Die Funktion  $f$  bettet das Untermodul  $N$  in  $M$  ein, also gilt  $\operatorname{im}(f) = N$ . Weiter bildet die Funktion  $g$  gerade die Elemente aus  $M$  auf deren Äquivalenzklassen in  $M/N$  ab und da für alle  $n \in N \subset M$  gilt, dass  $g(n) = [n] = 0$  in  $M/N$ , folgt auch, dass  $\ker(g) = N$ . Damit ist die Sequenz in  $M$  exakt.

Weiter ist  $\operatorname{im}(g) = M/N$  und da  $h$  die Nullabbildung ist, gilt  $\ker(h) = M/N$ . Also ist die Sequenz auch in  $M/N$  exakt.

Wir wenden nun  $S^{-1}$  auf die exakte Sequenz an, dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}(M/N) \rightarrow 0 \quad (5)$$

mit Lemma 4.6 exakt.

Wir wollen nun den Homomorphiesatz<sup>2</sup> auf den Modulhomomorphismus  $S^{-1}g$  anwenden und

---

<sup>2</sup>Für einen Modulhomomorphismus  $f : M \rightarrow N$ , induziert der Homomorphiesatz einen Isomorphismus  $g : M/\ker(f) \rightarrow \operatorname{im}(f)$ .

erhalten mit der Exaktheit von 5 in  $S^{-1}M$

$$S^{-1}(M/N) = \text{im}(S^{-1}g) \simeq S^{-1}M/\ker(S^{-1}g) = S^{-1}M/\text{im}(S^{-1}f) = S^{-1}M/S^{-1}N.$$

□

Wenden wir das nun auf das  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  mit  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  an, dann sind die  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Z}$ - also  $\mathbb{Q}$ -Moduln  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$  und  $((\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{R}) / ((\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\pi\mathbb{Z})$  isomorph. Wir bemerken, dass  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  und  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\pi\mathbb{Z} \simeq \pi\mathbb{Q}$ . Damit gilt also

$$(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

**Lemma 4.8.** Sei  $R$  ein Integritätsring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$f : S^{-1}R \otimes_R M \rightarrow S^{-1}M$$

zwischen den  $S^{-1}R$ -Moduln, sd.

$$f\left(\frac{r}{s} \otimes m\right) = \frac{rm}{s} \tag{6}$$

für alle  $r \in R$ ,  $m \in M$  und  $s \in S$ .

Der Beweis richtet sich nach [1, Proposition 3.5].

*Beweis.* Die Abbildung  $g : S^{-1}R \times M \rightarrow S^{-1}M$  mit  $g\left(\frac{r}{s}, m\right) = \frac{rm}{s}$  ist bilinear, da

$$\begin{aligned} g\left(\lambda_1\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right), \lambda_2(m_1 + m_2)\right) &= g\left(\frac{\lambda_1(r_1s_2 + r_2s_1)}{s_1s_2}, \lambda_2(m_1 + m_2)\right) \\ &= \frac{\lambda_1(r_1s_2 + r_2s_1)\lambda_2(m_1 + m_2)}{s_1s_2} \\ &= \lambda_1\lambda_2\left(\frac{r_1(m_1 + m_2)}{s_1} + \frac{r_2(m_1 + m_2)}{s_2}\right) \\ &= \lambda_1\lambda_2\left(g\left(\frac{r_1}{s_1}, m_1\right) + g\left(\frac{r_1}{s_1}, m_2\right) + g\left(\frac{r_2}{s_2}, m_1\right) + g\left(\frac{r_2}{s_2}, m_2\right)\right) \end{aligned}$$

für alle  $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ ,  $s_1, s_2 \in S$  und  $m_1, m_2 \in M$  gilt. Damit gibt es mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts (Proposition 4.1) einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f : S^{-1}R \otimes_R M \rightarrow S^{-1}M$ , sd. 6 gilt. Es ist klar, dass  $f$  surjektiv ist, dazu wählen wir  $r = 1$

und erhalten somit alle Elemente aus  $S^{-1}M$ . Weiter ist  $f$  auch eindeutig bestimmt durch 6. Wir zeigen also noch die Injektivität. Dazu betrachten wir die Elemente von  $S^{-1}R \otimes_R M$ . Sei also

$$\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}R \otimes_R M$$

ein beliebiges Element, dann definieren wir

$$s := \prod_{i=1}^n s_i \in S, \quad t_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n s_j \in S$$

und es gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{r_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \otimes r_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum_{i=1}^n \underbrace{r_i t_i m_i}_{\in M}.$$

Wir können also jedes Element aus  $S^{-1}R \otimes_R M$  in der Form

$$\frac{1}{s} \otimes m$$

schreiben. Betrachten wir nun den Kern von  $f$ . Sei also  $\frac{1}{s} \otimes m \in \ker(f) \subset S^{-1}R \otimes_R M$ , dh.  $f\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = 0$ . Da  $R$  ein Integritätsring ist folgt also mit  $f\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s} = 0$ , dass  $m = 0$  und damit gilt

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{1}{s} \otimes 0 = 0.$$

Damit ist  $f$  bijektiv, also der gesuchte Isomorphismus. □

Es lässt sich nun folgendes Resultat zeigen, siehe dazu auch [1][Proposition 3.7].

**Proposition 4.9.** Seien  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$f : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \rightarrow S^{-1}(M \otimes_R N)$$

zwischen den  $S^{-1}R$ -Moduln, sd.

$$f\left(\frac{m}{s_1} \otimes \frac{n}{s_2}\right) = \frac{m \otimes n}{s_1 s_2}.$$



*Beweis.* Es gilt mit Lemma 4.8 und den kanonischen Isomorphismen des Tensorprodukts

$$\begin{aligned}
S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N &\stackrel{4.8}{\simeq} (S^{-1}R \otimes_R M) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}R \otimes_R N) \\
&\stackrel{3}{=} M \otimes_R \underbrace{(S^{-1}R \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R)}_{\simeq S^{-1}R} \otimes_R N \\
&\simeq M \otimes_R S^{-1}R \otimes_R N \\
&= S^{-1}R \otimes_R (M \otimes_R N) \\
&\stackrel{4.8}{\simeq} S^{-1}(M \otimes_R N).
\end{aligned}$$

□

Dies lässt sich nun auf unser Tensorprodukt  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  anwenden, indem wir  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = \mathbb{R}$  und  $N = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  setzen und mit  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und dem obigen Resultat ergibt sich dann

$$S^{-1}R \simeq \mathbb{Q}, \quad S^{-1}M \simeq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad S^{-1}N \simeq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

Weiterhin gilt

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},$$

denn mit der Bilinearität des Tensorprodukt gilt für

$$\begin{aligned}
(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) &\simeq \left\langle \left\{ \frac{r \otimes s}{z} \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \right\rangle \\
&\simeq \left\langle \left\{ \frac{r}{z} \otimes s \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \right\rangle \\
&\simeq (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \\
&\simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

wobei wir mit  $\langle \cdot \rangle$  hier das Erzeugnis meinen. Insgesamt erhalten wir also mit der Proposition

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}. \tag{7}$$

Wir können die Dehn-Invariante also auch auf dem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  betrachten, was uns zu der folgenden Tatsache führt.

---

<sup>3</sup>Wir können hier trotz der unterschiedlichen Tensorprodukte die Klammern vertauschen. Siehe dazu auch [5, Formula 10]

**Satz 4.10.** Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  Elemente, dann gilt

$$x \otimes y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y \in \pi\mathbb{Q}.$$

*Beweis.* Die Rückrichtung ist schnell gezeigt, denn für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  und  $y = \pi \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , wobei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , gilt

$$x \otimes y = x \otimes \pi \frac{p}{q} = xp \otimes \frac{\pi}{q} = q \frac{xp}{q} \otimes \frac{\pi}{q} = \frac{xp}{q} \otimes \pi = \frac{xp}{q} \otimes 0 = 0.$$

Dabei haben wir  $p$  zuerst nach links und danach  $q$  nach rechts bewegt.

Zur Hinrichtung: Betrachte  $\pi\mathbb{Q}$  ist 1-dimensionaler  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit Basis  $\{\pi\}$  und  $\pi\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  ist Untervektorraum von  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Wir können also nun unsere Basis mit dem Lemma von Zorn auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Also hat  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum die Basis

$$\{\pi\} \dot{\bigcup} B,$$

wobei  $B$  die Menge ist mit der wir  $\{\pi\}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}$  ergänzen. Weiterhin gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\simeq \pi\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q} \quad \text{und} \\ \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q} &\simeq \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left\{ (b_1 \otimes b_2) \left| b_1 \in \pi\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q}, b_2 \in \bigoplus_{b \in B} b\mathbb{Q} \right. \right\}$$

eine Basis von  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ .

Zwei Elemente  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  haben also die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= \alpha\pi + \sum_{b \in B} \beta_b b \\ y &= \sum_{b' \in B} \gamma_{b'} b', \end{aligned}$$

wobei  $\alpha, \beta_b, \gamma_{b'} \in \mathbb{Q}$  für alle  $b, b' \in B$  sind. Falls nun  $x \otimes y = 0$  gilt also

$$0 = x \otimes y = \left( \alpha\pi + \sum_{b \in B} \beta_b b \right) \otimes \left( \sum_{b' \in B} \gamma_{b'} b' \right) = \sum_{b' \in B} \alpha \gamma_{b'} (\pi \otimes b') + \sum_{\substack{b \in B \\ b' \in B}} \beta_b \gamma_{b'} (b \otimes b').$$

Da  $(\pi \otimes b')$  und  $(b \otimes b')$  linear unabhängig sind für alle  $b, b' \in B$  folgt

$$\alpha \gamma_{b'} = 0 \quad \text{und} \quad \beta_b \gamma_{b'} = 0$$

für alle  $b, b' \in B$ .

1. Falls  $\alpha \neq 0$ , dann sind  $\gamma_{b'} = 0$  für alle  $b' \in B$  und damit ist  $y = 0$ , also  $y \in \pi\mathbb{Q}$ .
2. Falls  $\alpha = 0$ , dann sind die  $\gamma_{b'}$  beliebig. Angenommen es gibt also ein  $b \in B$ , sd.  $\beta_b \neq 0$ , dann muss  $\gamma_{b'} = 0$  für alle  $b' \in B$  damit  $\beta_b \gamma_{b'} = 0$  für alle  $b' \in B$  gilt. Das wiederum bedeutet  $y = 0$  und wir sind hier fertig. Falls also  $\beta_b = 0$  für alle  $b \in B$ , folgt mit  $\alpha = 0$ , dass  $x = 0$ .

Damit haben wir die Aussage gezeigt. □

Wir bemerken, dass wir für die Hinrichtung also das Auswahl-Axiom benutzt haben. Jedoch ist klar, dass wir bei einer konkreten Berechnung der Dehn-Invariante nur endlich viele Polyeder haben, diese somit auch nur einen endlich-dimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{R}$  aufspannen und wir somit nicht auf das Auswahl-Axiom angewiesen sind. Wir werden später sehen, dass wir im Beweis der Bricardschen Bedingung vollkommen auf dieses verzichten können.

Wir erhalten also auch:

**Folgerung 4.11.** Seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$  Elemente, dann gilt

$$x \otimes y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Folglich ist die Dehn-Invariante eines Polyeders 0, falls dessen Diederwinkel alle in  $\pi\mathbb{Q}$  liegen.

Wir können nun die Dehn-Invarianten einiger Polyeder berechnen.

#### 4.4 Dehns Lösung

**Beispiel 4.12** (Quader). Sei  $P$  ein dreidimensionaler Quader. Dann gilt für alle Kanten  $k$  von  $P$ , dass  $w(k) = \frac{\pi}{2}$ . Also gilt  $w(k) \in \pi\mathbb{Q}$  für alle Kanten  $k$  und nach Bemerkung 4.10 folgt

$$D(P) = 0.$$

**Beispiel 4.13** (regulärer Tetraeder). Sei  $P$  ein dreidimensionaler regulärer Tetraeder, also haben alle Kanten von  $P$  die gleiche Länge  $l$  und den gleichen Diederwinkel  $\alpha$ . Seien  $A, B, C, D$  die Ecken von  $P$  wie in Abbildung 4. Sei  $F$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ , also  $|BF| = \frac{l}{2}$  und damit ist nach Pythagoras  $|AF| = \frac{\sqrt{3}}{2}l = |DF|$ . Der Mittelpunkt  $E$  des Dreiecks  $ABC$  hat gerade den Abstand  $\frac{\sqrt{3}}{3}l = \frac{l}{2\sqrt{3}}$  zu  $F$  und schließlich gilt mit Pythagoras

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{l}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{3} \quad \text{also} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Damit können wir die Dehn-Invariante berechnen. Es gibt sechs Kanten der Länge  $l$ , die alle den Diederwinkel  $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  haben, also

$$D(P) = \sum_{i=1}^6 l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

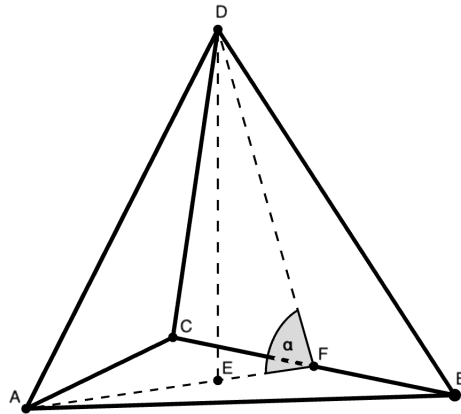


Abbildung 4: Ein regulärer Tetraeder

**Proposition 4.14.** Für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt,  $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  ist irrational.

*Beweis.* Zuerst stellen wir fest, dass mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

für  $\alpha = (k+1)\varphi$  und  $\beta = (k-1)\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi) + \cos((k-1)\varphi) &= 2 \cos\left(\frac{(k+1)\varphi + (k-1)\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{(k+1)\varphi - (k-1)\varphi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\cos((k+1)\varphi) = 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) - \cos((k-1)\varphi). \quad (8)$$

Wir definieren uns nun  $\varphi_n = \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$  für  $n = 2l+1$  mit  $l \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$  und  $0 \leq \varphi_n \leq \pi$ .

Mit Induktion über  $k \in \mathbb{N}_0$  zeigen wir, dass gilt

$$\cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}, \quad (9)$$

wobei  $A_k$  eine ganze Zahl ist, die nicht durch  $n$  teilbar ist. Wir beginnen und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \text{für } k=0 \quad 1 &= \cos(0 \cdot \varphi_n) = \frac{A_0}{\sqrt{n}^0} = A_0 \\ \text{für } k=1 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} &= \cos(1 \cdot \varphi_n) = \frac{A_1}{\sqrt{n}^1} = \frac{A_0}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

und damit  $A_0 = A_1 = 1$  ist. Weiterhin gilt mit 8

$$\begin{aligned}\cos((k+1)\varphi_n) &= 2\cos(k\varphi_n)\cos(\varphi_n) - \cos((k-1)\varphi_n) \\ &= 2\frac{A_k}{\sqrt{n^k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}} \\ &\quad \stackrel{=:A_{k+1}}{=} \overbrace{2A_k - nA_{k-1}} \\ &= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n^{k+1}}}.\end{aligned}$$

Da  $A_k$  nicht durch  $n$  teilbar ist und  $n \geq 3$  ungerade, ist die Zahl  $2A_k$  auch nicht durch  $n$  teilbar und damit auch nicht  $A_{k+1} := 2A_k - nA_{k-1}$ . Wir haben also eine konkrete Darstellung für  $A_{k+1}$  gefunden und sind mit der Induktion fertig.

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis. Angenommen  $\frac{1}{\pi}\varphi_n$  ist rational mit

$$\frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{m}{k}$$

für  $m \in \mathbb{Z}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt mit  $k\varphi_n = m\pi$  und 9

$$\pm 1 = \cos(m\pi) = \cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n^k}}.$$

Also auch  $\sqrt{n^k} = \pm A_k$  und da  $A_k$  eine ganze Zahl ist, ist  $\sqrt{n^k}$  auch eine und somit  $k \geq 2$ . Damit ist jedoch  $n$  ein Teiler von  $\sqrt{n^k}$  und da  $\sqrt{n^k} | A_k$ , teilt  $n$  auch  $A_k$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

Damit folgt also für  $n = 9$ , dass  $\arccos(\frac{1}{3})$  nicht in  $\pi\mathbb{Q}$  liegt. Wir erhalten unser folgendes Resultat.

**Folgerung 4.15** (Dehns Lösung). Sei  $Q$  ein Quader und  $T$  ein regulärer Tetraeder mit Kantenlänge  $l$ . Angenommen  $Q$  und  $T$  sind zerlegungsgleich, dann gilt mit Satz 4.5 sowohl  $\text{vol}(Q) = \text{vol}(T)$ , als auch  $D(Q) = D(T)$ . Nach Beispiel 4.12 gilt  $D(Q) = 0$  und nach Beispiel 4.13 gilt

$$D(T) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Da nach Proposition 4.14  $\frac{1}{\pi} \arccos(\frac{1}{3})$  irrational ist, liegt  $\arccos(\frac{1}{3})$  nicht in  $\pi\mathbb{Q}$  und damit

ist nach Bemerkung 4.10 mit  $l \neq 0$  auch  $6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$ . Also gilt

$$D(Q) = 0 \neq 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = D(T).$$

Was ein Widerspruch ist.

Damit sind  $Q$  und  $T$  nicht zerlegungsgleich.

## 5 Ergänzungsgleichheit von Polytopen

Wir wollen uns nun dem zweiten Teil von Hilberts Problem widmen und zwar der Ergänzungsgleichheit von Polytopen. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit gleichbedeutend sind. Der Beweis hierzu ist nicht gerade trivial, weswegen wir vorweg noch einige Kenntnisse über Polytope benötigen. Das Kapitel richtet sich nach [4]. Im Folgenden meinen wir mit Polytopen wieder  $d$ -Polytope.

### 5.1 Ein wenig Polyedertheorie

Wir beginnen mit dem einfachsten Polytop, dem Simplex. Ein Simplex hat gerade  $d + 1$  ausgezeichnete Ecken und hat damit gerade soviele Kanten, dass wir ein konvexes Polytop erhalten. Im zwei-dimensionalen Fall ist ein Simplex ein Dreieck und im drei-dimensionalen ein Tetraeder. Wir werden feststellen, dass sich jedes konvexe Polytop in endlich viele Simplizes zerlegen lässt. Diese Simplicialzerlegung von Polytopen spielt bei der Zerlegungsgleichheit von Polytopen eine wichtige Rolle, wie wir schon im Beweis des Bolyai-Gerwien-Theorems (Satz 3.4) gesehen haben. Ebenso war, wie sich schon aus der Formulierung des dritten Problem von Hilbert herauslesen lässt, klar, dass es eine der einfachsten Lösungen ist, zwei Simplizes mit gleichem Volumen zu finden, die nicht zerlegungsgleich sind.

**Definition 5.1** (Simplex). Ein Simplex  $S$  ist die konvexe Hülle einer Menge von  $d+1$  Punkten  $p_0, \dots, p_d$ , die sich im Raum in allgemeiner Lage befinden, also nicht alle in einer Ebene liegen. Die Punkte bezeichnen wir als Ecken des Simplex.

**Satz 5.2** (Simplicialzerlegung von Polytopen). Sei  $P$  ein Polytop, dann lässt sich  $P$  in endlich viele Simplizes  $S_1, \dots, S_n$  zerlegen, also

$$P = S_1 + \dots + S_n.$$

*Beweis.* Das Polytop  $P$  lässt sich nach der Definition als Vereinigung endlich vieler konvexer Polytope darstellen. Wir müssen also zeigen, dass sich jedes konvexe Polytop  $P'$  in endlich viele Simplizes zerlegen lässt. Wir wollen dies per Induktion über die Dimension unseres Vektorraumes zeigen. Für  $d = 1$  ist die Aussage klar, da jedes konvexe 1-Polytop gerade eine Strecke ist und damit auch ein Simplex. Wir nehmen also an, die Aussage sei für die Dimension  $d - 1$  bewiesen. Betrachten wir also die  $d - 1$ -dimensionalen Seiten von  $P'$ , dann wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, dass diese sich in endlich viele  $d - 1$ -dimensionale



Simplizes  $S'_i$  zerlegen lassen. Betrachten wir also einen beliebigen Punkt  $p' \in P'$ , dann bildet die konvexe Hülle des Punktes  $p'$  und des Simplex  $S'_i$  ein neues Simplex  $S_i$ . Führen wir das fort auf alle Simplizes der Seiten von  $P'$ , so erhalten wir eine Zerlegung von  $P'$  in endlich viele Simplizes. Weiter erhalten wir also auch eine Zerlegung von  $P$  in Simplizes.  $\square$

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie wir Polytope vervielfältigen, sowie über eine Dilatation stauchen und strecken können.

**Definition 5.3** (Dilatation). Unter einer Dilatation mit einem Faktor  $\lambda > 0$  verstehen wir eine Streckung bzw. Stauchung aller Punkte im Koordinatensystem. Ein Punkt  $p \in \mathbb{R}^d$  wird also auf sein skalares Vielfaches  $\lambda \cdot p$  abgebildet. Im Zusammenhang mit Polytopen erhalten wir mit dem Faktor  $\lambda$  das dilatierte Polytop  $\lambda P$ .

Wir bemerken, dass wenn wir diese Abbildungen auf Polytope anwenden wir wieder Polytope erhalten, da Halbräume auf Halbräume abgebildet werden. Eine Dilatation um den Faktor  $\lambda = 1$  lässt die Punkte unverändert und hat somit keine Auswirkung.

**Bemerkung 5.4.** Gegeben  $\lambda > 0$ , dann können wir eine Dilatation mittels der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

darstellen. Für das Volumen eines Polytops  $P$  erhält man also mit der Transformationsformel aus der Analysis (siehe auch [3, Satz 4.7])

$$\text{vol}(\lambda P) = |\det(M)| \cdot \text{vol}(P) = \lambda^d \cdot \text{vol}(P).$$

Weiter stellen wir fest, dass wenn wir eine Zerlegung eines Polytops strecken, es das gleiche ist, wenn wir die Zerlegung der gestreckten Polytopen betrachten.

**Lemma 5.5.** Sei  $P$  ein Polytop und  $P_1, \dots, P_n$  endlich viele Polytope, sd.  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $\lambda > 0$  gegeben, dann gilt

$$\lambda P = \lambda P_1 + \dots + \lambda P_n.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda P &= \lambda(P_1 + \dots + P_n) \\
&= \{\lambda p \mid p \in P_1 \vee \dots \vee p \in P_n\} \\
&= \{\lambda p \mid p \in P_1\} \cup \dots \cup \{\lambda p \mid p \in P_n\} \\
&= \lambda P_1 + \dots + \lambda P_n.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 5.6.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei Polytope und  $\lambda > 0$  gegeben, dann gilt  $P \cong Q$  genau dann, wenn  $\lambda P \cong \lambda Q$ .

*Beweis.* Seien für die Hinrichtung  $P \cong Q$ , also gibt es eine Isometrie  $f$ , sd. gilt  $f(P) = Q$ . Wir können die Isometrie  $f$  durch ein  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  und eine orthogonale Matrix  $U \in O(d)$  darstellen, sd.  $f(P) = \alpha + UP$  gilt. Betrachte die Isometrie  $f_\lambda$ , die wir durch  $f_\lambda(x) = \lambda \cdot \alpha + Ux$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  definieren. Offensichtlich ist  $f_\lambda$  wieder eine Isometrie. Dann gilt

$$f_\lambda(\lambda P) = \lambda \cdot \alpha + U\lambda P = \lambda \cdot \alpha + \lambda UP = \lambda(\alpha + UP) = \lambda f(P) = \lambda Q$$

Damit sind also  $\lambda P$  und  $\lambda Q$  kongruent.

Seien also für die Rückrichtung nun  $\lambda P \cong \lambda Q$ , also gibt es eine Isometrie  $f$ , sd.  $f(\lambda P) = \lambda Q$ . Es gibt also wieder  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  und  $U \in O(d)$ , sd.  $f(x) = \alpha + Ux$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt. Betrachte die Isometrie  $f_\lambda$ , die wir durch  $f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha + Ux$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  definieren. Diese ist wieder eine Isometrie. Dann gilt

$$f_\lambda(P) = \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha + UP = \frac{1}{\lambda}(\alpha + \lambda UP) = \frac{1}{\lambda}(\alpha + U\lambda P) = \frac{1}{\lambda}f(\lambda P) = \frac{1}{\lambda}\lambda Q = 1 \cdot Q = Q.$$

Die Polytope  $P$  und  $Q$  sind also kongruent. □

**Proposition 5.7.** Seien  $P$  und  $Q$  Polytope und  $\lambda > 0$  gegeben, dann gilt  $P \sim Q$  genau dann, wenn  $\lambda P \sim \lambda Q$ .

*Beweis.* Seien für die Hinrichtung  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich, also gibt es endlich viele Polytope  $P_1, \dots, P_n$  und  $Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ , sd.  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Nach Lemma 5.5 können wir die Zerlegungen der gestreckten Polytope

betrachten, also

$$\begin{aligned}\lambda P &= \lambda(P_1 + \dots + P_n) = \lambda P_1 + \dots + \lambda P_n \\ \lambda Q &= \lambda(Q_1 + \dots + Q_n) = \lambda Q_1 + \dots + \lambda Q_n.\end{aligned}$$

Weiter gilt mit Lemma 5.6, dass aus  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  folgt, dass auch  $\lambda P_i \cong \lambda Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt. Damit folgt  $\lambda P \sim \lambda Q$ .

Für die Rückrichtung seien  $\lambda P \sim \lambda Q$ , dann gibt endlich viele Polytop  $P_1, \dots, P_n$  und  $Q_1, \dots, Q_n$  mit  $\lambda P = P_1 + \dots + P_n$  und  $\lambda Q = Q_1 + \dots + Q_n$ , sd.  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir betrachten die Zerlegungen

$$\begin{aligned}P &= 1 \cdot P = \frac{1}{\lambda} \lambda P = \frac{1}{\lambda} (P_1 + \dots + P_n) = \frac{1}{\lambda} P_1 + \dots + \frac{1}{\lambda} P_n \\ Q &= 1 \cdot Q = \frac{1}{\lambda} \lambda Q = \frac{1}{\lambda} (Q_1 + \dots + Q_n) = \frac{1}{\lambda} Q_1 + \dots + \frac{1}{\lambda} Q_n.\end{aligned}$$

Dann sind mit Lemma 5.6, wegen der Kongruenz der  $P_i$  und  $Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , die Polytope  $\frac{1}{\lambda} P_i$  und  $\frac{1}{\lambda} Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  kongruent. Die Polytope  $P$  und  $Q$  sind also zerlegungsgleich.  $\square$

**Definition 5.8** (Vervielfachung). Eine ganze Vervielfachung eines Polytop  $P$ , mit einer natürlichen Zahl  $n$ , ist ein Polytop  $Q$ , das sich in  $n$  viele Polytope zerlegen lässt, die alle kongruent zu  $P$  sind. Wir schreiben für das Polytop  $Q$  auch  $n \cdot P$ . Formal bedeutet dies, dass es Polytope  $P_1, \dots, P_n$  gibt, sd.

$$n \cdot P = P_1 + \dots + P_n,$$

wobei  $P_i \cong P$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Wir bemerken, dass die Lage der Polyeder  $P_i$  nicht eindeutig festgelegt ist, was jedoch beim eigentlichen zerlegen keine Rolle spielt. Wir wollen die Polytope so verschieben, dass sie paarweise disjunkt sind.

Es ergeben sich beim Vervielfältigen, wie man leicht sieht folgende Eigenschaften.

**Bemerkung 5.9** (Additionssatz). Seien  $P, Q, R, S$  vier Polytope, sd.  $P \sim Q$  und  $R \sim S$ , dann gilt

$$P + R \sim Q + S.$$

Wir summieren hierbei einfach die Zerlegungen der einzelnen Polytope auf und erhalten damit die Zerlegungsgleichheit.

**Folgerung 5.10.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei Polytope und  $n$  eine natürliche Zahl, dann gilt

$$n \cdot (P + Q) \sim n \cdot P + n \cdot Q.$$

*Beweis.* Wir finden also  $n$  viele Polytope  $R_1, \dots, R_n$  mit  $R_i \cong (P + Q)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , sd.  $n \cdot (P + Q) = R_1 + \dots + R_n$ . Das heißt aber auch, dass sich jedes  $R_i$  darstellen lässt durch Polytope  $P_i$  und  $Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $P_i \cong P$  und  $Q_i \cong Q$ . Ebenso finden wir aber auch jeweils  $n$  viele Polytope  $P'_1, \dots, P'_n$  und  $Q'_1, \dots, Q'_n$  mit  $P'_i \cong P$  und  $Q'_i \cong Q$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , sd.  $n \cdot P = P'_1 + \dots + P'_n$  und  $n \cdot Q = Q'_1 + \dots + Q'_n$ . Mit der Transitivität der Kongruenz gilt also auch  $P_i \cong P'_i$  und  $Q_i \cong Q'_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir erhalten also die Zerlegungen

$$\begin{aligned} n \cdot (P + Q) &= R_1 + \dots + R_n = P_1 + Q_1 + \dots + P_n + Q_n \quad \text{und} \\ n \cdot P + n \cdot Q &= P'_1 + \dots + P'_n + Q'_1 + \dots + Q'_n = P'_1 + Q'_1 + \dots + P'_n + Q'_n. \end{aligned}$$

Damit sind  $n \cdot (P + Q)$  und  $n \cdot P + n \cdot Q$  zerlegungsgleich. □

Um Polytope besser charakterisieren, werden wir in diesem Abschnitt sogenannte Zylinderklassen einführen. Wir werden später feststellen, dass diese Charakterisierung beim Beweisen einiger Resultate sehr hilfreich ist.

## 5.2 Zylinderklassen

**Definition 5.11** (Minkowski-Summe). Seien  $A$  und  $B$  Mengen, dann ist die Minkowski-Summe  $A \times B$  von  $A$  und  $B$  mit der vektoriellen Addition definiert als

$$A \times B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

In Bezug auf die leere Menge gilt

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

**Bemerkung 5.12.** Seien  $A, B, C$  Mengen dann ergeben sich folgende Eigenschaften mit der Minkowski-Summe.

1. Die Minkowski-Addition ist offensichtlich kommutativ und assoziativ, d. h. es gilt

$$A \times B = B \times A \quad \text{und} \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

2. Weiter gelten auch die Distributivgesetze, also

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

und mit der Kommutativität das Zweite. Wenden wir dies nun auf Polytope  $P, Q, R$  an, dann gilt

$$(P + Q) \times R = (P \times R) + (Q \times R) \quad \text{und} \quad P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R). \quad (10)$$

3. In Verbindung mit der Dilatation ergibt sich für Polytope  $P$  und  $Q$  und ein  $\lambda > 0$ , dass

$$\lambda P \times \lambda Q = \lambda(P \times Q)$$

gilt.

4. Wir hatten im Zusammenhang mit der Definition der Kongruenz 2.4 bereits die Translationsgruppe erwähnt, die Untergruppe der Isometriegruppe, welche ausschließlich aus Translationen besteht. Wir stellen fest, dass für zwei Translationen  $f, g$  im Zusammenhang mit der Minkowski-Summe

$$f(A) \times g(B) = (f \circ g)(A \times B)$$

gilt.

**Definition 5.13** (Parallelotop). Seien  $p_1, \dots, p_d$  linear unabhängige Vektoren und  $S_1, \dots, S_d$  die Strecken, die die Richtung und Länge der Vektoren  $p_1, \dots, p_d$  haben  
. Dann ist das Parallelotop  $P$  definiert durch

$$P = S_1 \times \dots \times S_d.$$

Wir sagen, das Parallelotop wird durch die Vektoren  $p_1, \dots, p_d$  erzeugt.

**Definition 5.14** (Gramsches Funktional). Sei  $P$  das durch die Vektoren  $p_1, \dots, p_d$  erzeugte Parallelotop, dann ordnen wir dem Parallelotop  $P$  das Gramsche Funktional  $\mathfrak{D}(P) > 0$  zu, das definiert ist durch

$$\mathfrak{D}(P) = \left( \det \begin{pmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \cdots & \langle p_1, p_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p_d, p_1 \rangle & \cdots & \langle p_d, p_d \rangle \end{pmatrix} \right)^{1/2}.$$

Wir meinen mit  $\langle p_i, p_j \rangle$  hier das Standardskalarprodukt.

**Bemerkung 5.15.** Wir stellen fest, dass das Gramsche Funktional folgende Eigenschaften erfüllt.

1. Sind  $P$  und  $Q$  zwei kongruente Parallelotope, dann gilt mit der Invarianz des Skalarprodukts unter Isometrien

$$\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{D}(Q).$$

2. Sei  $P$  ein Parallelotop und  $\lambda > 0$  gegeben, dann gilt

$$\mathfrak{D}(\lambda P) = \lambda^d \mathfrak{D}(P).$$

**Satz 5.16.** Die Parallelotope  $P$  und  $Q$  sind zerlegungsgleich, falls ihre Gramschen Funktional übereinstimmen, dh.  $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{D}(Q)$ .

*Beweis.* Beweisskizze: Der Beweis des Satzes ergibt sich auch zwei Resultaten. Es lässt sich feststellen, dass zwei Parallelotope scherungsäquivalent sind, falls ihre Gramschen Funktional übereinstimmen. Vergleiche mit [4][Kapitel 1, Satz III]. Mit scherungsäquivalent meinen wir hier, dass wir die Vektoren, die die Parallelotope erzeugen so verändern, dass wir in endlich vielen Scherungen die Parallelotope ineinander überführen können. Bei einer Scherung addieren wir auf einen dieser Vektoren ein Vielfaches eines anderen Vektors von diesen. Weiter kann man dann aus der Scherungsäquivalenz der Parallelotope folgern, dass diese auch zerlegungsgleich sind. Siehe dazu [4][Kapitel 1, Satz IV].  $\square$

**Definition 5.17** ( $i$ -stufiger Zylinder). Ein Polytop  $P$  ist ein  $i$ -stufiger Zylinder, falls es eine Darstellung der Form

$$P = P_1 \times \dots \times P_i$$

gibt, wobei  $P_k$  für alle  $k = 1, \dots, i$  hier konvexe Polytope sind, die jeweils in einer  $d_k$ -dimensionalen Ebene  $E_{d_k}$  liegen. Hierbei soll  $\sum_{k=1}^i d_k = d$  und  $d_k \geq 1$  für alle  $k = 1, \dots, i$  gelten. Die Ebenen  $E_{d_i}$  befinden sich paarweise in allgemeiner Lage.

Wir bemerken, dass die konvexen Polytope in der Minkowski-Summe uneigentliche Polytope sind. Dennoch gibt es die Möglichkeit diese in ihrer Ebene  $E_{d_k}$  als ein eigentliches Polytop aufzufassen.

Jedes Simplex ist also offensichtlich ein 1-stufiger Zylinder. Genauso ist jedes Parallelotop ein  $k$ -stufiger Zylinder.

**Definition 5.18** (Zylinderklassen). Ein Polytop  $P$  ist ein  $i$ -stufiges Zylinderpolytop, falls es endlich viele  $i$ -stufige Zylinder  $P_1, \dots, P_n$  gibt, sd.

$$P = P_1 + \dots + P_n.$$

Die  $i$ -te Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_i$  ist die Menge aller Polytope, die zu einem  $i$ -stufigen Zylinderpolytop zerlegungsgleich sind, wobei  $\emptyset \in \mathfrak{B}_i$ . Die Stufenzahl  $i$ , mit  $1 \leq i \leq d$ , ist die Ordnung der Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_i$ .

Es ist klar, dass für zwei Polytope  $P, Q \in \mathfrak{B}_i$  auch  $P + Q \in \mathfrak{B}_i$  gilt. Besonders interessant sind hierbei die erste und die  $d$ -te Zylinderklasse. Es lässt sich nämlich feststellen, dass die erste Zylinderklasse gerade der Menge aller Polytope entspricht. Jedes Polytop lässt sich nach Satz 5.2 in endlich viele Simplizes zerlegen und jedes Simplex ist ein 1-stufiger Zylinder. Die  $d$ -te Zylinderklasse entspricht gerade Polytopen, welche mit endlich vielen Parallelotopen zerlegungsgleich sind. Es gilt sogar die folgende Eigenschaft.

**Proposition 5.19.** Sei  $P \in \mathfrak{B}_d$  ein Polytop, dann gibt es ein  $\lambda > 0$ , sd.

$$P \sim \lambda W.$$

Hierbei ist  $W$  der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel, den wir erhalten, indem wir die Minkowski-Summe der Strecken  $S_1, \dots, S_n$ , die die Richtung und Länge der Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_d$  des  $\mathbb{R}^d$  haben, bilden.

*Beweis.* Da  $P$  ein Polytop aus der  $d$ -ten Zylinderklasse ist, finden wir endlich viele Parallelo-

tope  $P_1, \dots, P_n$ , sd.  $P = P_1 + \dots + P_n$ . Wir definieren  $\lambda$  durch

$$\lambda^d = \sum_{i=1}^n \mathfrak{D}(P_i).$$

Weiter definieren wir

$$\lambda_i = \frac{\mathfrak{D}(P_i)}{\lambda^d} \quad (11)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann lässt der Einheitswürfel in  $n$  viele Parallelotope  $W_1, \dots, W_n$  zerlegen, wobei

$$W_i := (S_1 \times \dots \times S_{d-1} \times \lambda_i S_d) + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_i e_d$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt. Der Einheitswürfel  $W$  wird hierbei sozusagen in  $n$  viele Scheiben der Länge  $\lambda_i$  geschnitten. Es gilt

$$\mathfrak{D}(\lambda W_i) = \lambda^d \mathfrak{D}(W_i) = \lambda^d \left( \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \right)^{1/2} = \lambda^d \lambda_i \stackrel{11}{=} \mathfrak{D}(P_i)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ . Mit Satz 5.16 sind also  $P_i$  und  $\lambda W_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  zerlegungsgleich und mit dem Additionssatz (Satz 5.9) sind auch  $P$  und  $\lambda W$  zerlegungsgleich.  $\square$

Wir stellen fest, dass jeder  $i$ -stufige Zylinder auch ein  $j$ -stufiger Zylinder für ein  $j < i$  ist und damit erhalten wir

$$\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{B}_d.$$

Die Zylinderklassen sind vor allem deswegen für uns interessant, da sie Beweisverfahren nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ermöglichen. So können wir Aussagen für alle Polytope mittels Induktion über die Zylinderklassen beweisen. Wir werden dieses Verfahren beim Beweis zu Satz 5.25 verwenden. Der folgende Satz bringt die Dilatation und die Vervielfachung von Polytopen in Verbindung und ist damit sehr hilfreich, wenn wir Polytope darstellen wollen.

**Satz 5.20.** Sei  $P$  ein Polytop, das in der  $i$ -ten Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_i$  ist und  $n$  eine natürliche Zahl, dann gilt

$$nP \sim n^i \cdot P + P_0,$$



wobei  $P_0 \in \mathfrak{B}i + 1$  ein (von  $n$  abhängiges) Polytop ist. Falls  $i = d$  ist  $P_0 = \emptyset$ .

Wir wollen für den Beweis noch die Translationsgleichheit von Polytopen einführen. Dazu erinnern wir uns an die Translationsgruppe, die Untergruppe der Isometriegruppe, die ausschließlich aus Translationen besteht. Hierbei wollen wir zwei Polytope translationsgleich nennen, falls diese sich durch eine Translation ineinander überführen lassen, analog zur Kongruenz von Polytopen. Wir schreiben  $P \cong_t Q$ . Da wir im Beweis der Aussage lediglich die Streckung und Vervielfachung von Polytopen betrachten, haben wir an einigen Stellen sogar die Translationsgleichheit von Polytopen.

*Beweis.* 1. Fall: Es gilt  $i = 1$  dann reicht es, aufgrund der Simplicialzerlegung eines Polytops, die Behauptung für ein Simplex  $P$  nachzuweisen. Man kann jedes Simplex in einer kanonischen Simplexzerlegung in endlich viele Simplexe zerlegen, siehe dazu auch [4][Abschnitt 1.2.6], dadurch erhält man die Relationen

$$(n - j + 1)P \sim (n - j)P + P_k + P_{j,0}$$

für alle  $j = 1, \dots, n$ , wobei  $P_j \cong_t P$  und  $P_{j,0} \in \mathfrak{B}_2$  gilt. Wir schreiben die Relationen aus als

$$\begin{aligned} nP &\sim (n - 1)P + P_1 + P_{1,0} \\ (n - 1)P &\sim (n - 2)P + P_2 + P_{2,0} \\ &\vdots \\ 2P &\sim P + P_{n-1} + P_{n-1,0} \\ P &\sim P_n P_{n,0}. \end{aligned}$$

Es lässt sich also durch sukzessives Einsetzen erkennen, dass wir schreiben können

$$nP \sim (P_1 + \dots + P_n) + (P_{1,0} + \dots + P_{n,0}).$$

Wir können die Summe der  $P_j$  also zusammenfassen zu  $n \cdot P$  und da alle  $P_{j,0}$  in  $\mathfrak{B}_2$  liegen, liegt auch die Summe darin und wir erhalten

$$nP \sim n \cdot P + P_0 \tag{12}$$

für ein  $P_0 \in \mathfrak{B}_2$ . Damit sind wir mit dem ersten Fall fertig.

2. Fall: Es gilt  $i > 1$ , also reicht es die Behauptung für einen  $i$ -stufigen Zylinder  $P$  nachzuweisen. Sei also  $P = P_1 \times \dots \times P_i$  für konvexe Polytope  $P_1, \dots, P_i$  die in  $d_k$ -dimensionalen Ebenen  $E_{d_k}$  liegen, mit  $\sum_{k=1}^i d_k = d$  und  $d_k \geq 1$  ist, wobei  $k = 1, \dots, i$  gilt. Es gilt also mit Bemerkung 5.12 Eigenschaft 3 auch

$$nP = nP_1 \times \dots \times nP_i.$$

Betrachten wir Zylinderklassen in den Räumen  $\mathbb{R}^{d_k}$ , in denen die Ebenen  $E_{d_k}$  liegen. Dann sind die konvexen Polytope  $P_1, \dots, P_i$ , die im Raum  $\mathbb{R}^d$  uneigentliche Polytope sind, im Raum  $\mathbb{R}^{d_k}$  wieder eigentliche Polytope, die wir als Polytope der Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_1^{(d_k)}$  auffassen können. Mit  $\mathfrak{B}_i^{(d_k)}$  meinen wir also die  $i$ -te Zylinderklasse der  $d_k$ -dimensionalen Polytope, die in der Ebene  $E_{d_k}$  liegen. Mit dem ersten Fall (Relation 12) folgt also für die Polytope, dass für alle  $k = 1, \dots, i$  gilt

$$nP_k \sim P_{k,0} + n \cdot P_k = P_{k,0} + P_{k,1} + \dots + P_{k,n},$$

wobei  $P_{k,0} \in \mathfrak{B}_2^{(d_k)}$  und  $P_{k,j} \cong_t P_k$  für alle  $j = 1, \dots, n$  ist. Wir erhalten also die Relation

$$nP = nP_1 \times \dots \times nP_i \sim (P_{1,0} + P_{1,1} + \dots + P_{1,n}) \times \dots \times (P_{i,0} + P_{i,1} + \dots + P_{i,n}),$$

die wir mit den Distributivgesetzen aus Bemerkung 5.12 2 umformen können zu

$$nP \sim \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_i) \\ \mu_k \in \{0, 1, \dots, n\}}} \times_{k=1}^i P_{k, \mu_k}.$$

Hierbei läuft der Vektor  $\mu$  in  $i$  Koordinaten alle Kombinationen von 0 bis  $n$  durch, es gibt also  $(n+1)^i$  unterschiedlich viele Kombinationen die  $\mu$  annehmen kann. Jeder Summand hat also die Form  $P_{1, \mu_1} \times \dots \times P_{i, \mu_i}$  mit einer jeweiligen Kombination. Betrachten wir zunächst die Summanden, in denen kein Eintrag von  $\mu$  verschwindet und somit  $\mu_k \neq 0$  für alle  $k = 1, \dots, i$  gilt. Dies sind insgesamt  $n^i$  viele Kombinationen, da in diesem Fall  $\mu \in \{1, \dots, n\}^i$  ist. Dann gilt

$$P_{k, \mu_k} \cong_t P_k$$

für alle  $\mu_k = 1, \dots, n$  und damit erhalten wir mit Bemerkung 5.12 Eigenschaft 4

$$\bigtimes_{k=1}^i P_{k,\mu_k} = P_{1,\mu_1} \times \dots \times P_{i,\mu_i} \cong_t P_1 \times \dots \times P_i = P.$$

Wir haben also  $n^i$  viele Summanden die kongruent zu  $P$  sind, also können wir diese zu  $n^i \cdot P$  zusammenfassen.

Betrachten wir nun also die übrigen Summanden, in denen mindestens ein Eintrag von  $\mu$  verschwindet. Dann stellen wir fest, dass  $P_{k,0}$  entweder leer ist oder in  $\mathfrak{B}_2^{(d_k)}$  ist. Falls also ein  $P_{k,0}$  leer ist gilt für den Summand

$$\bigtimes_{k=1}^i A_{k,\mu_k} = \emptyset$$

Falls  $P_{k,0}$  stattdessen in  $\mathfrak{B}_2^{(d_k)}$  liegt ist  $P_{k,0}$  bezogen auf die Ebene  $E_{d_k}$  ein 2-stufiger Zylinder, also gibt es zwei konvexe Polytope  $P'_{k,0}$  und  $P''_{k,0}$ , die in zwei Ebenen  $E'$  und  $E''$  liegen, sd.  $P_{k,0} = P'_{k,0} \times P''_{k,0}$  gilt. Das wiederum bedeutet, dass unser Summand  $\bigtimes_{k=1}^i P_{k,\mu_k}$  in  $\mathfrak{B}_{i+1}$  liegt. Die Summanden in diesem Fall sind also entweder leer oder sie liegen in  $\mathfrak{B}_{i+1}$ . Also erhalten wir insgesamt

$$nP \sim n^i \cdot P + P_0,$$

wobei  $P_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$  ist.

Damit ist die Aussage gezeigt. □

### 5.3 Ergänzungsgleich und Zerlegungsgleichheit

Wir wollen noch einmal kurz die Definition der Zerlegungsgleichheit wiederholen.

**Definition 5.21** (Zerlegungsgleichheit). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P = P_1 + \dots + P_n$ ,  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir schreiben  $P \sim Q$ .

**Proposition 5.22.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei Polytope, dann ist  $\text{vol}(P) < \text{vol}(Q)$  genau dann, wenn  $P$  zerlegungsgleich zu einem Teilpolytop von  $Q$  ist.

Anders ausgedrückt gibt es also Polytope  $Q_1, Q_2 \subset Q$  mit  $Q_1 + Q_2 = Q$ , sd.  $P \sim Q_1$ . Wir werden diese Proposition per Induktion über die Zylinderklassen beweisen.

*Beweis.*

"  $\Rightarrow$  ": Ist also  $P$  zerlegungsgleich zu einem Teilpolytop von  $Q$ , dann ist auch das Volumen von  $P$  gleich dem des Teilpolytops und mit der Monotonie des Maßes folgt die Aussage.

"  $\Leftarrow$  ": Sei also  $vol(P) < vol(Q)$ , dann gibt es ein  $\lambda > 0$ , sd.  $vol(Q) - vol(P) = \lambda^d$ . Wir beginnen mit dem Induktionsanfang. Für  $P, Q \in \mathfrak{B}_d$  gibt es nach Bemerkung 5.19  $alpha, beta > 0$ , sd.  $P \sim alpha W_d$  und  $Q \sim beta W_d$ . Es ergibt sich also

$$\lambda^d = vol(P) = vol(Q) = vol(alpha W_d) - vol(beta W_d) = alpha^d - beta^d$$

und damit  $beta > alpha$ , da  $\lambda > 0$ . Der Würfel  $alpha W_d$  ist also ein Teilpolyeder des Würfels  $beta W_d$  und damit folgt die Aussage. Wir nehmen nun also an, dass die Aussage bereits für alle Polytope der Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_{i+1}$  gilt, wobei  $1 \leq i \leq d - 1$ . Seien also  $P, Q \in \mathfrak{B}_i$ .

□

Nun können wir die Ergänzungsgleichheit definieren.

**Definition 5.23** (Ergänzungsgleich). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  gibt, wobei gilt  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \dots + P_n, \quad Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Alternativ ist auch die Schreibweise üblich, dass zwei Polytope  $P$  und  $Q$  ergänzungsgleich sind, falls es zwei zerlegungsgleiche Polytope  $A$  und  $B$  gibt, sd.  $P + A \sim Q + B$  gilt.

Man sieht leicht, dass die Folgende Aussage gilt.

**Proposition 5.24.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei ergänzungsgleiche Polytope, dann gilt  $vol(P) = vol(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  ergänzungsgleich, d. h. es gibt endlich viele Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in 1, \dots, n$ , sd.  $P' = P + P_1 + \dots + P_n$  und  $Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$  zerlegungsgleich sind. Nach Proposition 2.9 gilt dann also auch  $\text{vol}(P') = \text{vol}(Q')$ . Damit folgt

$$\text{vol}(P) + \text{vol}(P_1) + \dots + \text{vol}(P_n) = \text{vol}(P') = \text{vol}(Q') = \text{vol}(Q) + \text{vol}(Q_1) + \dots + \text{vol}(Q_n)$$

und da mit  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in 1, \dots, n$  nach Proposition 2.7 auch  $\text{vol}(P_i) = \text{vol}(Q_i)$  gilt, folgt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .  $\square$

**Satz 5.25.** Zwei Polyeder  $P$  und  $Q$  sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie ergänzungsgleich sind.

Um den Satz zu Beweisen benötigen wir noch eine Aussage. Dazu wollen wir, dass ein Polytop  $P$  zerlegungsgleich zu einem Teilpolytop des Polytops  $Q$  ist. Also soll es ein Polytop gegeben zu dem  $P$  zerlegungsgleich ist und das in  $Q$  enthalten ist. Wir schreiben

$$P \sim_{\subset} Q$$

hierfür.

**Lemma 5.26.** Seien  $P$  und  $Q$  Polytope, dann ist  $P$  genau dann zu einem Teilpolytop von  $Q$  zerlegungsgleich, d. h.  $P \sim_{\subset} Q$ , wenn  $\text{vol}(P) < \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.*

"  $\Rightarrow$  ": Die Hinrichtung ist klar, denn wenn  $P$  zu einem Teilpolytop von  $Q$  zerlegungsgleich ist, ist mit Proposition 2.9 auch das Volumen dieser Polytope gleich und da wir ein Teilpolytop von  $Q$  haben, folgt die Aussage mit der Monotonie des Maßes.

"  $\Leftarrow$  ": Betrachten wir also die Rückrichtung. Es gelte  $\text{vol}(P) < \text{vol}(Q)$ , dann gibt es ein  $\gamma > 0$ , sd.  $\text{vol}(Q) - \text{vol}(P) = \gamma^d$  gilt. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Zylinderklassen. Seien also  $P, Q \in \mathfrak{B}_d$ , dann gibt es nach Proposition 5.19  $\alpha, \beta > 0$ , sd.  $P \sim \alpha W$  und  $Q \sim \beta W$ , wobei  $W$  der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel ist. Also gilt mit Proposition 2.9 und Bemerkung 5.4 auch

$$0 < \gamma^d = \text{vol}(Q) - \text{vol}(P) = \text{vol}(\beta W) - \text{vol}(\alpha W) = \beta^d - \alpha^d.$$

Damit folgt  $\beta > \alpha$  also ist der Würfel  $\alpha W$  in dem Würfel  $\beta W$  enthalten und damit finden wir das gesuchte Teilpolytop von  $Q$ , nämlich gerade das dilatierte Polytop  $\frac{\alpha}{\beta} Q$ .

Denn mit  $\beta W \sim Q$  erhalten wir mit Proposition 5.7 auch  $\alpha W \sim \frac{\alpha}{\beta} Q$  und mit der Transitivität der Zerlegungsgleichheit gilt dann auch  $P \sim \frac{\alpha}{\beta} Q$ . Damit ist die Aussage für die letzte Zylinderklasse bewiesen und wir nehmen an, dass die Aussage für alle Polytope der Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_{i+1}$  gilt. Seien also  $P, Q \in \mathfrak{B}_i$ . Es gibt ein  $\delta > 0$  für das  $P \sim_{\subset} \alpha W$  gilt. Diese  $\delta$  existiert, wir können es einfach so groß wählen, dass das Polytop  $P$  in diesem Würfel enthalten ist. Weiter sei eine natürliche Zahl  $n$  so gewählt, dass wenn wir  $\lambda$  definieren durch

$$\lambda = \left(\frac{\gamma}{2}\right) (n^{d-i} - 1)^{1/d} \quad (13)$$

dann  $\lambda > \delta$  gilt. Wir sehen, dass dann auch  $P \sim_{\subset} \lambda W$  gilt und mit dem Multiplikationssatz ( ) gilt weiter

$$n^i \cdot P \sim_{\subset} n^i \cdot \lambda W. \quad (14)$$

Wir stellen fest, dass das Polytop  $n^i \cdot \lambda W$  in der Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_d$  ist, da es sich aus  $n^i$  vielen Würfeln  $\lambda W_1 \dots, \lambda W_{n^i}$ , die alle kongruent zu  $\lambda W$  sind, zusammensetzt und diese Würfel natürlich  $d$ -stufige Zylinder sind. Mit Proposition 5.19 gibt es also ein  $\mu$ , sd.  $n^i \cdot \lambda W \sim \mu W$ , wobei das  $\mu$  definiert ist durch

$$\mu^d = \sum_{j=1}^{n^i} \mathfrak{D}(\lambda W_j) = \sum_{j=1}^{n^i} \lambda^d \mathfrak{D}(W) = n^i \lambda^d. \quad (15)$$

Wir haben hierbei die Eigenschaft Bemerkung 5.15 genutzt. Also gilt mit 14 auch

$$n^i \cdot P \sim_{\subset} \mu W. \quad (16)$$

Weiter erhalten wir für die Dilatation der Polytope  $P$  und  $Q$  mit  $n$  aus Satz 5.20 die Relationen

$$\begin{aligned} nP &\sim P_0 + n^i \cdot P \\ nQ &\sim Q_0 + n^i \cdot Q, \end{aligned} \quad (17)$$

wobei  $P_0$  und  $Q_0$  Polytope der Zylinderklasse  $\mathfrak{B}_{i+1}$  sind. Es gilt also für das Volumen mit

$$n^d \text{vol}(P) = \text{vol}(nP) = \text{vol}(P_0 + n^i P) = \text{vol}(P_0) + \text{vol}(n^i \cdot P) = \text{vol}(P_0) + n^i \text{vol}(P).$$

Also gilt

$$\text{vol}(P_0) = \text{vol}(P)(n^d - n^i).$$

Analog erhalten wir also auch

$$\text{vol}(Q_0) = \text{vol}(Q)(n^d - n^i).$$

Zusammengesetzt ergibt das also

$$\text{vol}(Q_0) - \text{vol}(P_0) = (\text{vol}(Q) - \text{vol}(P))(n^d - n^i) = \gamma^d(n^d - n^i). \quad (18)$$

Mit den Relationen 16 und 17 gilt also

$$nP \sim P_0 + n^i \cdot P \sim_{\subset} P_0 + \mu W. \quad (19)$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \text{vol}(P_0 + \mu W) &= \text{vol}(P_0) + \mu^d \\ &\stackrel{15}{=} \text{vol}(P_0) + n^i \lambda^d \\ &\stackrel{13}{=} \text{vol}(P_0) + n^i \left( \left( \frac{\gamma}{2} (n^{d-i} - 1)^{1/d} \right)^d \right) \\ &= \text{vol}(P_0) + \left( \frac{\gamma}{2} \right)^d (n^d - n^i). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(Q_0) - \text{vol}(P_0 + \mu W) &= \text{vol}(Q_0) - \text{vol}(A_0) - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^d (n^d - n^i) \\ &\stackrel{18}{=} \gamma^d (n^d - n^i) - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^d (n^d - n^i) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir  $\text{vol}(Q_0) > \text{vol}(P_0 + \mu W)$ . Wir stellen fest, dass  $Q_0, P_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$  und  $\mu W \in \mathfrak{B}_d$ , also auch  $\mu W \in \mathfrak{B}_{i+1}$  und damit auch  $P_0 + \mu W \in \mathfrak{B}_{i+1}$  gilt. Mit der

Induktionsvoraussetzung folgt also nun, dass

$$P_0 + \mu W \sim_{\subset} Q_0$$

gilt und mit 19 also auch  $nP \sim_{\subset} Q_0$  also erst recht auch

$$nP \sim_{\subset} nQ$$

und mit Proposition 5.7

$$P \sim_{\subset} Q.$$

Damit sind wir fertig. □

Nun haben wir alle Voraussetzungen um den Satz 5.25 zu beweisen. Der Beweis richtet sich nach [4, Satz III].

*Beweis.*

- ”  $\Rightarrow$  ”: Haben wir zwei zerlegungsgleiche Polytope, so müssen wir kein weiteres Polytop ergänzen, damit die Ergänzungen zerlegungsgleich sind, also folgt bereits die Ergänzungsgleichheit.
- ”  $\Leftarrow$  ”: Die Rückrichtung funktioniert per Induktion über die Zylinderklassen. Seien also Polytope  $P, Q, R, S$  gegeben, sd.

$$P + R \sim Q + S \tag{20}$$

und

$$R \sim S. \tag{21}$$

Falls nun  $P, Q \in \mathfrak{B}_d$  gilt, dann gibt es mit Proposition 5.19  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , sd.  $P \sim \lambda_1 W_d$  und  $Q \sim \lambda_2 W_d$ , wobei mit hier  $W_d$  der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel gemeint ist. Da mit Folgerung 5.24 folgt, dass  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ , muss  $\lambda_1 = \lambda_2$  und damit  $P \sim Q$ .

Wir nehmen nun also induktiv an, dass die Aussage bereits für alle Polytope  $P, Q \in \mathfrak{B}_{i+1}$  gilt. Es sei nun also  $P, Q \in \mathfrak{B}_i$  für ein beliebiges  $1 \leq i \leq d-1$ . Da  $d-i > 0$  und o.B.d.A.



$\text{vol}(R) > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , sd.

$$n^{d-i} > 1 + \frac{\text{vol}(R)}{\text{vol}(P)}. \quad (22)$$

Betrachten wir nun Gleichung 20, dann erhalten wir mit Lemma 5.5, dass  $n(P + R) = nP + nR$  und  $n(Q + S) = nQ + nS$  gilt. Mit Proposition 5.7 erhalten wir also

$$nP + nR \sim nQ + nS \quad (23)$$

und

$$nR \sim nS. \quad (24)$$

Mit

gibt es nun ein Polytop  $P_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$ , sd.

$$nP \sim P_0 + n^i \cdot P \quad (25)$$

und mit Proposition 2.9 folgt dann

$$\text{vol}(nP) = \text{vol}(P_0 + n^i \cdot P) = \text{vol}(P_0) + \text{vol}(n^i \cdot P) = \text{vol}(P_0) + n^i \cdot \text{vol}(P).$$

Nach Bemerkung 5.4 gilt  $\text{vol}(nP) = n^d \text{vol}(P)$  und damit

$$\text{vol}(P_0) = (n^d - n^i) \text{vol}(P). \quad (26)$$

Weiter folgt mit der Ungleichung 22, dass  $n^d > n^i + n^i \frac{\text{vol}(R)}{\text{vol}(P)}$  und damit

$$\text{vol}(P_0) = (n^d - n^i) \text{vol}(P) > n^i \text{vol}(R) = \text{vol}(n^i \cdot R). \quad (27)$$

Mit

ist  $n^i \cdot R$  nun also zerlegungsgleich zu einem Teilpolytop von  $P_0$ , dh. es gibt Polytope  $C, D \subset P_0$  mit  $P + Q = P_0$  und  $n^i \cdot R \sim C$ , sd.

$$P_0 = C + D \sim n^i \cdot R + D. \quad (28)$$

Wir erhalten mit Folgerung 5.10 also

$$\begin{aligned}
nP &\stackrel{25}{\sim} P_0 + n^i \cdot P \\
&\stackrel{28}{\sim} n^i \cdot R + D + n^i \cdot P \\
&\sim D + n^i \cdot (R + P) \\
&\stackrel{20}{\sim} D + n^i \cdot (Q + S) \\
&\stackrel{21}{\sim} D + n^i \cdot (Q + R) \\
&\sim Q + n^i \cdot Q + n^i \cdot R \\
&\stackrel{28}{\sim} P_0 + n^i \cdot Q.
\end{aligned} \tag{29}$$

Analog zu 25 finden wir für  $Q$  ebenso ein  $Q_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$  mit  $nQ \sim Q_0 + n^i \cdot Q$ . Wir erhalten

$$P_0 + n^i \cdot Q + nR \stackrel{29}{\sim} nP + nR \stackrel{23}{\sim} nQ + nS \sim Q_0 + n^i \cdot Q + nS.$$

Wegen 24 gilt  $n^i \cdot Q + nR \sim n^i \cdot Q + nS$  und mit der Induktionsvoraussetzung folgt für  $P_0, Q_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$ , dass  $P_0 \sim Q_0$  und damit folgt mit 29 und der analogen Folgerung, dass

$$nP \sim nQ$$

gilt. Mit Proposition 5.7 erhalten wir also insgesamt

$$P \sim Q.$$

□

[2, def 3.1]

## Literatur

- [1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016. For the 1969 original see [ MR0242802].
- [2] Vladimir G. Boltianskiĭ. *Hilbert's third problem*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto-London, 1978. Translated from the Russian by Richard A. Silverman, With a foreword by Albert B. J. Novikoff, Scripta Series in Mathematics.
- [3] Kuwert Ernst. Skript zur vorlesung analysis iii ws 2016/17. page 117, 2017.
- [4] Hugo Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, volume 93. Springer-Verlag, 2013.
- [5] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8. Cambridge university press, 1989.
- [6] Goette Sebastian. Skript zur vorlesung lineare algebra ws 2016/17. page 271, 2017.