1 Ergänzungsgleichheit von Polytopen

Wir wollen uns nun dem zweiten Teil von Hilberts Problem widmen und zwar der Ergänzungsgleichheit von Polytopen. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit gleichbedeutend sind. Der Beweis hierzu ist nicht gerade trivial, weswegen wir vorweg noch einige Kenntnisse über Polytope benötigen. Das Kapitel richtet sich nach [1]. Im Folgenden meinen wir mit Polytopen wieder d-Polytope.

1.1 Ein wenig Polyedertheorie

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie wir Polytope vervielfältigen, sowie über eine Dilation stauchen und strecken können.

- *Dilation:* Unter einer Dilation mit einem Faktor $\lambda > 0$ verstehen wir eine Streckung bzw. Stauchung aller Punkte im Koordinatensystem. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^d$ wird also auf sein skalares Vielfaches $\lambda \cdot p$ abgebildet. Im Zusammenhang mit Polytopen erhalten wir mit dem Faktor λ das dilatierte Polytop λP.
  Wir bemerken, dass wenn wir diese Abbildungen auf Polytope anwenden wir wieder Polytope erhalten, da Halbräume auf Halbräume abgebildet werden.

- *Vervielfältigung:* Eine ganze Vervielfachung eines Polytop P, mit einer natürlichen Zahl n, ist ein Polytop Q, das sich in n viele Polytope zerlegen lässt, die alle kongruent zu P sind. Wir schreiben für das Polytop Q auch $n \cdot P$. Formal bedeutet dies, dass es Polytope $P_1, \ldots, P_n$ gibt, sd.
  $$n \cdot P = P_1 + \ldots + P_n,$$
  wobei $P_i \cong P$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
  Wir bemerken, dass die Lage der Polyeder P_i nicht eindeutig festgelegt ist, was jedoch beim eigentlichen zerlegen keine Rolle spielt.

Es ergeben sich beim Vervielfältigen, wie man leicht sieht folgende Eigenschaften.

Folgerung 1.1. Seien P und Q zwei Polytope und n eine natürliche Zahl, dann gilt

$$n \cdot (P + Q) \sim n \cdot P + n \cdot Q.$$

Beweis. Wir finden also n viele Polytope $R_1, \ldots, R_n$ mit $R_i \cong (P + Q)$ für alle $i = 1, \ldots, n$, sd. $n \cdot (P + Q) = R_1 + \ldots + R_n$. Das heißt aber auch, dass sich jedes R_i darstellen lässt durch

Polytope P_i und Q_i für alle $i = 1, \ldots, n$, wobei $P_i \cong P$ und $Q_i \cong Q$. Ebenso finden wir aber auch jeweils n viele Polytope $P'_1, \ldots, P'_n$ und $Q'_1, \ldots, Q'_n$ mit $P'_i \cong P$ und $Q'_i \cong Q$ für alle $i = 1, \ldots, n$, sd. $n \cdot P = P'_1 + \ldots + P'_n$ und $n \cdot Q = Q'_1 + \ldots + Q'_n$. Mit der Transitivität der Kongruenz gilt also auch $P_i \cong P'_i$ und $Q_i \cong Q'_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir erhalten also die Zerlegungen

$$n \cdot (P+Q) = R_1 + \ldots + R_n = P_1 + Q_1 + \ldots + P_n + Q_n \qquad \text{und}$$
$$n \cdot P + n \cdot Q = P'_1 + \ldots + P'_n + Q'_1 + \ldots + Q'_n = P'_1 + Q'_1 + \ldots + P'_n + Q'_n.$$

Damit sind $n \cdot (P+Q)$ und $n \cdot P + n \cdot Q$ zerlegungsgleich. □

Definition 1.2 (Minkowski-Summe)**.** Seien A und B Mengen, dann ist die Minkowski-Summe $A \times B$ von A und B mit der vektoriellen Addition definiert als

$$A \times B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Die Minkowski-Addition ist offensichtlich kommutativ und assoziativ.

Definition 1.3 (i-stufiger Zylinder)**.** Ein Polytop P ist ein i-stufiger Zylinder, falls es eine Darstellung der Form

$$P = P_1 \times \ldots \times P_i$$

gibt, wobei P_i hier konvexe Polytope sind, die jeweils in einer d_i-dimensionalen Ebene E_{d_i} liegen. Hierbei soll $\sum_1^i d_i = d$ gelten und die Ebenen E_{d_i} befinden sich paarweise in allgemeiner Lage.

Definition 1.4 (Zylinderklassen)**.** Ein Polytop P ist ein i-stufiges Zylinderpolytop, falls es endlich viele i-stufige Polytope $P_1, \ldots, P_n$ gibt, sd.

$$P = P_1 + \ldots + P_n.$$

Wir wollen mit der Zylinderklasse $\mathfrak{B}_i$ die Menge aller Polytope, die zu einem i-stufigen Zylinderpolytop zerlegungsgleich sind, wobei $\emptyset \in \mathfrak{B}_i$. Die Stufenzahl i, mit $1 \leq i \leq d$, ist die Ordnung der Zylinderklasse $\mathfrak{B}_i$.

Besonders interessant sind hierbei die erste und die d-te Zylinderklasse. Es lässt sich nämlich feststellen, dass die erste Zylinderklasse gerade der Menge aller Polytope entspricht. Jedes Polytop lässt sich nach in endlich viele Simplizes zerlegen und jedes Simplex ist ein 1-stufiger Zylinder.

Die $d$te Zylinderklasse entspricht gerade Polytopen, welche mit einem Parallelotop zerlegungsgleich sind. Es gilt sogar die folgende Eigenschaft.

Bemerkung 1.5. Sei $P \in \mathfrak{B}_d$ ein Polytop, dann gibt es ein $\lambda > 0$, sd. P zerlegungsgleich mit λW_d ist. W_d ist hierbei der d-dimensionale Einheitswürfel.

Wir stellen fest, dass jeder i-stufige Zylinder auch ein j-stufiger Zylinder für ein $j < i$ ist und damit erhalten wir

$$\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_d.$$

Die Zylinderklassen sind vor allem deswegen für uns interessant, da sie Beweisverfahren nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ermöglichen. So können wir Aussagen für alle Polytope mittels Induktion über die Zylinderklassen beweisen. Wir werden dieses Verfahren beim Beweis zu Satz 1.9 verwenden.

1.2 Ergänzungsgleich und Zerlegungsgleichheit

Wir wollen noch einmal kurz die Definition der Zerlegungsgleichheit wiederholen.

Definition 1.6 (Zerlegungsgleichheit)**.** Zwei d-Polytope P und Q heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele d-Polytope $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ mit $P = P_1 + \ldots + P_n$, $Q = Q_1 + \ldots + Q_n$ gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir schreiben $P \sim Q$.

Nun können wir die Ergänzungsgleichheit definieren.

Definition 1.7 (Ergänzungsgleich)**.** Zwei d-Polytope P und Q heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele d-Polytope $P_1, \ldots, P_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$ gibt, wobei gilt $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \ldots + P_n, \qquad Q' = Q + Q_1 + \ldots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Alternativ ist auch die schreibweise üblich, dass zwei Poltope P und Q ergänzungsgleich sind, falls es zwei zerlegungsgleiche Polytope A und B gibt, sd. $P + A \sim Q + B$ gilt.
Man sieht leicht, dass die Folgende Aussage gilt.

Proposition 1.8. Seien P und Q zwei ergänzungsgleiche Polytope, dann gilt $vol(P) = vol(Q)$.

Beweis. Seien P und Q ergänzungsgleich, d. h. es gibt endlich viele Polytope $P_1, \ldots, P_n, Q_1 \ldots, Q_n$ mit $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in 1, \ldots, n$, sd. $P' = P + P_1 + \ldots + P_n$ und $Q' = Q + Q_1 + \ldots + Q_n$ zerlegungsgleich sind. Nach Proposition **??** gilt dann also auch $vol(P') = vol(Q')$. Damit folgt

$$vol(P) + vol(P_1) + \ldots + vol(P_n) = vol(P') = vol(Q') = vol(Q) + vol(Q_1) + \ldots + vol(Q_n)$$

und da mit $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in 1, \ldots, n$ nach Proposition **??** auch $vol(P_i) = vol(Q_i)$ gilt, folgt $vol(P) = vol(Q)$. □

Satz 1.9. Zwei Polyeder P und Q sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie ergänzungsgleich sind.

Der Beweis richtet sich nach [1, Satz III].

Beweis.

"$\Rightarrow$": Haben wir zwei zerlegungsgleiche Polytope, so müssen wir kein weiteres Polytop ergänzen, damit die Ergänzungen zerlegungsgleich sind, also folgt bereits die Ergänzungsgleichheit.

"$\Leftarrow$": Die Rückrichtung funktioniert per Induktion über die Zylinderklassen. Seien also Polytope P, Q, A, B gegeben, sd.

$$P + A \sim Q + B \tag{1}$$

und

$$A \sim B. \tag{2}$$

Falls nun $P, Q \in \mathfrak{B}_d$ gilt, dann gibt es mit Bemerkung 1.5 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, sd. $P \sim \lambda_1 W_d$ und $Q \sim \lambda_2 W_d$, wobei mit hier W_d der d-dimensionale Einheitswürfel gemeint ist. Da mit Folgerung 1.8 folgt, dass $vol(P) = vol(Q)$, muss $\lambda_1 = \lambda_2$ und damit $P \sim Q$.
Wir nehmen nun also induktiv an, dass die Aussage bereits für alle Polytope $P, Q \in \mathfrak{B}_{i+1}$ gilt. Es sei nun also $P, Q \in \mathfrak{B}_i$ für ein beliebiges $1 \leq i \leq d-1$. Da $d-i > 0$ und o.B.d.A.

$vol(A) > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, sd.

$$n^{d-i} > 1 + \frac{vol(A)}{vol(P)}. \tag{3}$$

Weiterhin gilt mit 1 und

$$nP + nA \sim nQ + nB \tag{4}$$

und

$$nA \sim nB. \tag{5}$$

Mit

gibt es nun ein Polytop $P_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$, sd.

$$nP \sim P_0 + n^i \cdot P \tag{6}$$

und mit

folgt dann

$$vol(nP) = vol(P_0 + n^i \cdot P) = vol(P_0) + vol(n^i \cdot P) = vol(P_0) + n^i \cdot vol(P).$$

Nach

gilt $vol(nP) = n^d vol(P)$ und damit

$$vol(P_0) = (n^d - n^i)vol(P). \tag{7}$$

Weiter folgt mit der Ungleichung 3, dass $n^d > n^i + n^i \frac{vol(A)}{vol(P)}$ und damit

$$vol(P_0) = (n^d - n^i)vol(P) > n^i vol(A) = vol(n^i \cdot A). \tag{8}$$

Mit

ist $n^i \cdot A$ nun also zerlegungsgleich zu einem Teilpolytop von P_0, dh. es gibt Polytope

$C, D \subset P_0$ mit $P + Q = P_0$ und $n^i \cdot A \sim C$, sd.

$$P_0 = C + D \sim n^i \cdot A + D. \tag{9}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} nP &\overset{9}{\sim} P_0 + n^i \cdot P \\ &\sim n^i A + D + n^i \cdot P \\ &\overset{1.1}{\sim} D + n^i \cdot (A + P) \\ &\overset{1}{\sim} D + n^i \cdot (Q + B) \\ &\overset{2}{\sim} D + n^i \cdot (Q + A) \\ &\overset{1.1}{\sim} Q + n^i \cdot Q + n^i \cdot A \\ &\overset{9}{\sim} P_0 + n^i \cdot Q. \end{aligned} \tag{10}$$

Analog zu 6 finden wir für Q ebenso ein $Q_0 \in \mathfrak{B}_{i+1}$ mit $nQ \sim Q_0 + n^i \cdot Q$. Wir erhalten

$$P_0 + n^i \cdot Q + nA \overset{10}{\sim} nP + nA \overset{4}{\sim} nQ + nB \sim Q_0 + n^i \cdot Q + nB.$$

Wegen 5 gilt $n^i \cdot Q + nA \sim n^i \cdot Q + nB$ und mit der Induktionsvoraussetzung folgt für $P_0, Q_0 \mathfrak{B}$, dass $P_0 \sim Q_0$ und damit folgt mit 10 und der analogen Folgerung, dass

$$nP \sim nQ$$

gilt. Mit

gilt also

$$P \sim Q.$$

□

Literatur

[1] Hugo Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, volume 93. Springer-Verlag, 2013.