

# Hilberts drittes Problems

Jannis Klingler

30. Dezember 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen</b>	<b>2</b>
1.1	Polytope . . . . .	2
1.2	Bolyai-Gerwien Theorem . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante</b>	<b>7</b>
2.1	Tensoren . . . . .	8
2.2	Die Dehn-Invariante . . . . .	8

# 1 Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen

## 1.1 Polytope

*Wiederholung* (Dual-Raum). Der Dualraum  $V^*$  eines  $k$ -Vektorraums  $V$  ist die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  in den Körper  $k$ .

**Definition 1.1** (Halbraum). Ein Halbraum in einem reellen Vektorraum ist eine Teilmenge der Form

$$H = \{v \in V \mid \alpha(v) \leq r\},$$

wobei  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  und  $r \in \mathbb{R}$ .

**Definition 1.2** (konvexes Polytop). Ein konvexes  $d$ -Polytop  $P$  in einem  $d$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  ist der Schnitt endlich vieler Halbräume.  $P$  ist beschränkt, falls für jedes  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$  ein  $r \in \mathbb{R}$  existiert, sd.  $\alpha(x) \leq r$  für alle  $x \in P$  gilt.

Für  $d = 0$  ist  $P$  eine Ecke, für  $d = 1$  ist  $P$  eine Strecke, für  $d = 2$  ist  $P$  ein Polygon und für  $d = 3$  ist  $P$  ein Polyeder.

Wir werden im Folgenden immer beschränkte konvexe  $d$ -Polytope betrachten. Wir stellen außerdem fest, dass der Schnitt konvexer Polytope wieder ein konvexes Polytop ist. Hierbei kann der Schnitt auch niedrigerdimensional sein. Wir sagen zwei Polytope  $P_1$  und  $P_2$  sind disjunkt, wenn  $\dim(P_1 \cap P_2) < d$ . Wir schreiben dann für die Vereinigung zweier disjunkter Polytope  $P_1 + P_2$ .

Wir definieren  $\dim(P_1 \cap P_2) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \exists p_0, \dots, p_k \in P_1 \cap P_2 : (p_0 - p_1), \dots, (p_{k-1} - p_k) \text{ linear unabhängige}\}$ .

**Definition 1.3** (Kongruenz). Wir nennen zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  *kongruent*, wenn es eine Isometrie  $g$  gibt, sd.  $g(P) = Q$ . Eine Isometrie ist hierbei eine Abbildung, die die Abstände zweier beliebiger Punkte erhält. Wir schreiben dann  $P \cong Q$ .

**Definition 1.4** (Zerlegungsgleichheit). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P = P_1 + \dots + P_n$ ,  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir schreiben  $P \sim Q$ .

**Definition 1.5** (Ergänzungsgleich). Zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  gibt, wobei gilt  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \dots + P_n, \quad Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

**Proposition 1.6.** Zerlegungsgleiche Polytope sind ergänzungsgleich.

*Beweis.* Haben wir zwei zerlegungsgleiche Polytope, so müssen wir kein weiteres Polytop ergänzen, damit die Ergänzungen zerlegungsgleich sind, also folgt bereits die Ergänzungsgleichheit.  $\square$

Wir wollen uns anschauen, wie sich das Volumen von Polytopen verhält. Dabei ist vor allem die Invarianz des Volumens unter Zerschneidung von Polytopen, die wir in Proposition 1.9 beweisen werden, ein wichtiges Resultat. Mit dem Volumen eines Polytops meinen wir im Folgenden das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß.

**Proposition 1.7.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei  $d$ -Polytope, sd.  $P \cong Q$ , dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Da sich eine Isometrie darstellen lässt als  $f(x) = Ux + a$  für eine orthogonale Matrix  $U \in O(d)$  und ein  $a \in \mathbb{R}^d$  ergibt sich die Aussage mit der Transformationsformel.  $\square$

**Lemma 1.8.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei disjunkte Polytope, dann gilt

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

*Beweis.* Sei  $\mathbb{R}^d$  der zugrundeliegende Vektorraum und  $\text{vol} = \text{vol}_d$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß. Mit der Siebformel erhalten wir nun

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q) - \text{vol}(P \cap Q).$$

Wir wollen also zeigen, dass der Schnitt von niedrigerdimensionalen Mengen eine Nullmenge bezüglich unseres Maßes ist.  $P$  und  $Q$  sind nun zwei Polytope in  $\mathbb{R}^d$  mit  $k := \dim(P \cap Q) < d$ . Wir definieren  $\mathfrak{L} := P \cap Q \subset \mathbb{R}^k$ . Sei nun  $M := \mathfrak{L} \times [0, 1]^{d-k} \subset \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler Quader, der  $\mathfrak{L}$  einschließt. Für die Aufzählung  $\mathfrak{L}_q := \mathfrak{L} + (0, q)$ , wobei  $q \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^{d-k}$ , gilt dann mit der  $\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Maßes

$$\text{vol}_d \left( \bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q), \quad (1)$$

da diese Aufzählung abzählbar ist und die einzelnen  $\mathfrak{L}_q$  jeweils einen leeren Schnitt haben. Es gilt also mit der Monotonie und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\infty > \text{vol}_d(M) \geq \text{vol}_d \left( \bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) \stackrel{1}{=} \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}).$$

Also muss gelten  $\text{vol}_d(\mathfrak{L}) = 0$ , da wir eine abzählbar große Summe haben. Damit ergibt sich also

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

$\square$

Wir stellen fest, dass dieser Beweis über eine beliebige abzählbare Anzahl von disjunkten Polytopen funktioniert. Mit diesem Resultat ergibt sich die folgende Proposition.

**Proposition 1.9.** Seien  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche  $d$ -Polytope, dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  die Zerlegungen von  $P$  und  $Q$ , also  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir erhalten mit Proposition 1.7 und Lemma ??

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(P_i) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(Q_i) = \text{vol}(Q_1 + \dots + Q_n) = \text{vol}(Q).$$

$\square$

**Proposition 1.10.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei ergänzungsgleiche Polytope, dann gilt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  ergänzungsgleich, d. h. es gibt endlich viele Polytope  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$  mit  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in 1, \dots, n$ , sd.  $P' = P + P_1 + \dots + P_n$  und  $Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$  zerlegungsgleich sind. Nach Proposition 1.9 gilt dann also auch  $\text{vol}(P') = \text{vol}(Q')$ . Damit folgt

$$\text{vol}(P) + \text{vol}(P_1) + \dots + \text{vol}(P_n) = \text{vol}(P') = \text{vol}(Q') = \text{vol}(Q) + \text{vol}(Q_1) + \dots + \text{vol}(Q_n)$$

und da mit  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in 1, \dots, n$  nach Proposition 1.7 auch  $\text{vol}(P_i) = \text{vol}(Q_i)$  gilt, folgt  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .  $\square$

## 1.2 Bolyai-Gerwien Theorem

Im Folgenden setzen wir  $d = 2$  und betrachten also Polygone.

**Lemma 1.11.** Seien  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Polygone und es gilt  $P \sim Q$  und  $Q \sim R$ . Dann folgt  $P \sim R$ .

*Beweis.* Seien die Zerlegungen der Polygone wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \dots + P_n \\ Q &= Q_1 + \dots + Q_n = Q'_1 + \dots + Q'_m \\ R &= R_1 + \dots + R_m, \end{aligned}$$

wobei  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $Q'_j \cong R_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Seien  $f_1, \dots, f_n$  die Isometrien, die alle  $Q_i$  in  $P_i$  überführen (d. h.  $f_i(Q_i) = P_i$ ) und  $g_1, \dots, g_m$  die Isometrien, die alle  $R_j$  in  $Q'_j$  überführen (d. h.  $g_j(R_j) = Q'_j$ ). Wir definieren

$$F_{ij} := Q_i \cap Q'_j,$$

für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$  (Beachte, dass  $F_{ij}$  leer sein kann). Zwei verschiedene  $F_{ij}$  sind disjunkt, denn für  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 \neq i_2$  gilt

$$F_{i_1 j} \cap F_{i_2 j} = (Q_{i_1} \cap Q'_j) \cap (Q_{i_2} \cap Q'_j) = (Q_{i_1} \cap Q_{i_2}) \cap Q'_j.$$

Da  $Q_{i_1}$  und  $Q_{i_2}$  disjunkt sind, d. h. der Schnitt niedrigerdimensional ist, ist auch dieser Schnitt mit  $Q'_j$  niedrigerdimensional, also sind  $F_{i_1 j}$  und  $F_{i_2 j}$  disjunkt. Außerdem gilt

$$\bigcup_{j=1}^m F_{ij} = \bigcup_{j=1}^m (Q_i \cap Q'_j) = Q_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^m Q'_j \right) = Q_i \cap Q = Q_i. \quad (2)$$

Also lässt sich  $P$  folgendermaßen darstellen

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{i=1}^n f_i(Q_i) \stackrel{2}{=} \bigcup_{i=1}^n f_i \left( \bigcup_{j=1}^m F_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m f_i(F_{ij}),$$

und für  $R$  gilt analog

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m g_j(F_{ij}).$$

Damit haben wir sowohl für  $P$ , als auch für  $R$  eine Zerlegung in disjunkte Polygone gefunden. Als letztes überlegen wir uns, dass gilt  $f_i(F_{ij}) \cong g_j(F_{ij})$ . Betrachte hierzu die Isometrie  $g_j \circ f_i^{-1}$ , dann gilt  $g_j(f_i^{-1}(f_i(F_{ij}))) = g_j(F_{ij})$ . Also finden wir für  $P$  und  $R$  jeweils eine Zerlegung aus kongruenten Polygonen und damit sind auch  $P$  und  $R$  zerlegungsgleich bzw.  $P \sim R$ .  $\square$

**Lemma 1.12.** Sei  $P$  ein beliebiges Polygon, dann lässt sich  $P$  in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegen.

*Beweis.* Kommt noch.  $\square$

**Lemma 1.13.** Sei  $P$  ein Dreieck, dann gibt es ein Rechteck  $Q$ , sd.  $P \sim Q$ .

*Beweis.* Sei  $P$  das Dreieck mit den Ecken  $a, b, c$  und sei o.B.d.A  $\overline{ab}$  die längste Seite. Wir zeichnen nun die Lotstrecke auf der Strecke  $\overline{ab}$  durch den Punkt  $c$  ein und nennen den Lotfußpunkt  $d$ . Der Punkt  $d$  liegt auf der Strecke  $\overline{ab}$ , da sonst  $\overline{ab}$  nicht die längste Seite war. Nun halbieren wir die Lotstrecke  $\overline{cd}$  und zeichnen die Lotgerade durch die Punkte  $m$  und  $n$  auf dem Mittelpunkt  $e$  der Strecke  $\overline{cd}$  ein ( $m$  und  $n$  sind hierbei die Schnittpunkte dieser Lotgeraden mit dem Dreieck

$P$ ). Da  $\overline{cd}$  senkrecht auf  $\overline{ab}$  und die Lotgerade durch die Punkte  $m$  und  $n$  senkrecht auf  $\overline{cd}$  ist, sind  $\overline{ab}$  und die Lotgerade parallel. Wir bilden erneut die Lotgeraden auf  $\overline{ab}$  durch die Punkte  $a$  und  $b$  und nennen den Schnittpunkt der Lotgerade durch  $a$  mit der Lotgerade, die durch  $m$  und  $n$  verläuft,  $f$  und den Schnittpunkt der Lotgerade durch  $b$  mit der Lotgerade, die durch  $m$  und  $n$  verläuft,  $g$ . Dadurch erhalten wir ein Rechteck  $Q$  mit den Eckpunkten  $a, b, g, f$ . Wir stellen fest, dass die Dreiecke mit den Eckpunkten  $m, e, c$  und  $a, m, f$ , welche in Abbildung 1 grau hinterlegt sind, kongruent sind, da mit dem Strahlensatz der Winkel an dem Punkt  $m$  in den beiden Dreiecken gleich ist und somit beiden Dreiecke gleiche Basis und Höhe haben. Weiterhin sind mit dem gleichen Argument die Dreiecke mit den Eckpunkten  $e, n, c$  und  $b, g, n$ , welche weiß hinterlegt sind, kongruent. Damit lassen sich  $P$  und  $Q$  in die beiden kongruenten Dreiecke und den schraffierten Trapezoid, mit den Eckpunkten  $a, b, n, m$ , zerlegen und sind somit zerlegungsgleich.  $\square$

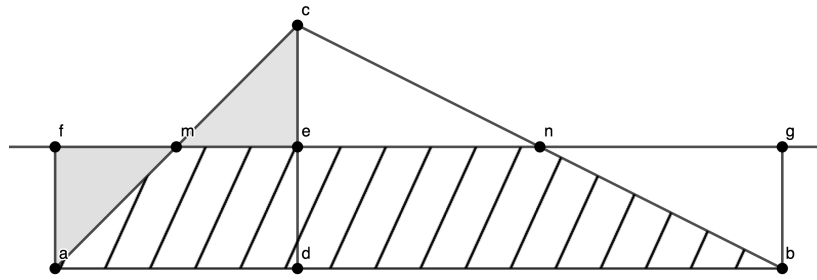


Abbildung 1: Zerlegung eines Dreiecks in ein Rechteck

**Lemma 1.14.** Zwei beliebige Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, sind zerlegungsgleich.

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  zwei Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, d. h. falls  $h_P$  die Höhe und  $b_P$  die Breite des Rechtecks  $P$  und  $h_Q$  die Höhe und  $b_Q$  die Breite des Rechtecks  $Q$  sind, dann soll gelten  $h_P \cdot b_P = h_Q \cdot b_Q$  also auch

$$\frac{b_P}{h_Q} = \frac{b_Q}{h_P}. \quad (3)$$

Seien  $o, a, b, c$  die Eckpunkte des Dreiecks  $P$  und  $o, m, n, p$  die Eckpunkte des Dreiecks  $Q$ , siehe

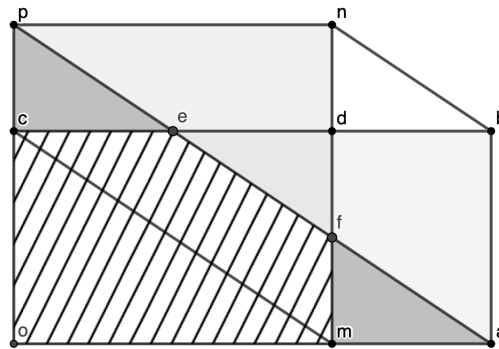


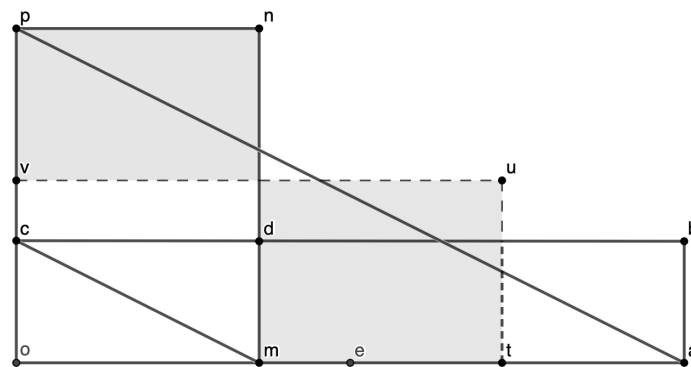
Abbildung 2: Zerlegung zweier Rechtecke

Abbildung 2. Wir verschieben hier  $Q$  so auf auf  $P$ , dass beide eine gemeinsame Ecke  $o$  mit rechtem Winkel haben. Dies ändert nichts am Resultat. Die Höhe  $h_P$  soll also der Länge der Strecken  $\overline{co}$  und  $\overline{ab}$  entsprechen. Die Breite  $b_P$  soll der Länge der Strecken  $\overline{oa}$  und  $\overline{bc}$  entsprechen. Analog soll  $h_Q$  der Länge der Strecken  $\overline{po}$  und  $\overline{mn}$  und  $b_Q$  der Länge der Strecken  $\overline{om}$  und  $\overline{np}$

$$(b_P - b_Q)h_P = b_P h_P - b_Q h_P = h_Q b_Q - b_Q h_P = b_Q(h_Q - h_P)$$
$$\frac{b_P - b_Q}{h_Q - h_P} = \frac{b_Q}{h_P}.$$

1. *Fall:* Die Verbindungsstrecke  $\overline{ap}$  der Eckpunkte schneidet das Rechteck  $omdc$  in den Punkten  $e$ , mit der Seite  $\overline{dc}$  und  $f$ , mit der Seite  $\overline{md}$ , siehe Abbildung 2. Es gilt  $2b_Q \geq b_P$ . Also sind die beiden in der Abbildung grau hinterlegten Dreiecke  $maf$  und  $cep$  und die beiden in der Abbildung hellgrau hinterlegten Dreiecke  $abe$  und  $fnp$  kongruent. Mit dem übrig gebliebenen in der Abbildung schraffierten Fünfeck  $omfec$  ist unsere Zerlegung komplett.
2. *Fall:* Die Verbindungsstrecke  $\overline{ap}$  der Eckpunkte schneidet das Rechteck  $omdc$  nicht, siehe Abbildung 3. Es gilt also  $2b_Q < b_P$ . Sei nun  $e$  hierbei der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{oa}$  und  $k$  die kleinste natürliche Zahl, wie oft man die Strecke  $\overline{om}$  entlang der Strecke  $\overline{oa}$  legen muss, sd. wir einen Punkt  $t$  erhalten der nicht mehr auf der Strecke  $\overline{oe}$  liegt sondern auf der Strecke  $\overline{ea}$ . Nun zerlegen wir das Rechteck  $Q$  in  $k$  Rechtecke, deren Basis parallel ist zur Strecke  $\overline{om}$ , die wir nun entlang der neu entstandenen Strecke  $\overline{ot}$  legen. Wir erhalten, somit das zu  $Q$  zerlegungsgleiche Rechteck  $otuv$ . Sei die Breite dieses Rechtecks nun  $b'$ , die offensichtlich die Bedingung

erfüllt. Damit können wir nach dem ersten Fall sagen, dass die Rechtecke  $P$  und  $otuv$  zerlegungsgleich sind. Nach Lemma 1.11 sind also auch  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich.



*Beweis.* Sei  $P$  ein Polygon. Dann kann  $P$  in endlich viele disjunkte Dreiecke zerlegt werden und jedes dieser Dreiecke ist nach Lemma 1.13 zerlegungsgleich zu einem Rechteck. Wir finden also für  $P$  die Darstellung

6

wobei  $P_1, \dots, P_n$  Rechtecke sind. Nun nehmen wir eine beliebige Kante  $\overline{a_0 b_0}$  und stellen die Lotgeraden auf den Eckpunkten  $a_0$  und  $b_0$  durch die Strecke  $\overline{a_0 b_0}$  auf. Anschließend ziehen wir  $n$  parallele Strecken zu  $\overline{a_0 b_0}$ , sd. der Flächeninhalt des Rechtecks  $a_{i-1} b_{i-1} b_i a_i$ , welches wir  $R_i$  nennen, dem Flächeninhalt des Rechtecks  $P_i$  entspricht, wobei  $i = 1, \dots, n$ . Nach Lemma 1.14 gilt also  $P_i \sim R_i$  für alle  $i$  und damit

$$P_1 + \dots + P_n \sim R_1 + \dots + R_n.$$

Da  $P \sim P_1 + \dots + P_n$  gilt also mit Lemma 1.11

$$P \sim R_1 + \dots + R_n$$

und damit zum Rechteck  $a_0 b_0 b_n a_n$ . Damit ist jedes Polygon zerlegungsgleich zu einem Rechteck. Seien nun  $P$  und  $Q$  zwei Polygone mit gleichem Flächeninhalt, dann finden wir wie oben gezeigt Rechtecke  $R_1$  und  $R_2$ , sd.

$$P \sim R_1, \quad Q \sim R_2.$$

Nach Lemma 1.14 gilt also nun auch  $R_1 \sim R_2$  und damit folgt mit Lemma 1.11  $P \sim Q$ .  $\square$

Wir haben also nun gesehen, dass sich jedes beliebige Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Diese Dreiecke sind nach Lemma 1.13 zerlegungsgleich zu Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt. Zuletzt können wir mit Satz 1.15 die Rechtecke zerlegen zu Rechtecken mit gleicher Grundseite. Dieses Verfahren können wir nun auf beliebige Polygone mit gleichem Flächeninhalt anwenden. Da diese Rechtecke nach Lemma 1.14 zerlegungsgleich sind folgt mit der Transitivität der Zerlegungsgleichheit aus Lemma 1.11 die Zerlegungsgleichheit der Polygone und mit Proposition 1.6 auch die Ergänzungsgleichheit. Dies führt uns zu der Frage, ob das gleiche auch für dreidimensionale Polytope, also Polyeder, möglich ist.

*Motivation:* Als Hilbert 1900 diese Frage auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris als sein drittes von 23 Problemen stellte, vermutete er wohl schon, dass die Antwort 'Nein' ist. Im Folgenden wollen wir uns zwei Beweise anschauen, die zeigen, dass es Polyeder gibt, die nicht zerlegungs- und ergänzungsgleich sind. Der erste bezieht sich auf die Arbeit Max Dehn's, ein Schüler Hilberts, der ein Jahr später in seiner Habilitationsarbeit die Aussage mithilfe der von ihm erfundenen Dehn-Invariante widerlegte. Der zweite Beweis...

## 2 Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante

Im Folgenden setzen wir  $d = 3$  und betrachten Polyeder.

Wir müssen uns zunächst überlegen, was mit den Kanten eines Polyeders  $P$  passiert, wenn wir diesen in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  zerlegen. Sei  $k$  also eine Kante des Polyeders  $P$ . Diese Kante hat die Länge  $\ell(k) = l$ . Außerdem ist die Kante  $k$  die Schnittmenge der zwei anliegenden Seitenflächen. Den Winkel zweier solcher Flächen nennt man Diederwinkel. Sei also  $w(k) = \varphi$  der zu  $k$  gehörige Diederwinkel. Dann können beim zerschneiden folgende Fälle eintreten

1. Wir schneiden durch die Kante: Also entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Kantenlängen sich zu der von  $k$  addieren lassen und deren Winkel gleich dem von  $k$  bleibt. D. h. für  $\ell(k_1) = l_1$  und  $\ell(k_2) = l_2$  gilt  $l = l_1 + l_2$ .
2. Wir schneiden entlang der Kante: Also entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Kantenlänge gleich der von  $k$  ist und deren Winkel sich zu dem von  $k$  addieren lassen. D. h. für  $w(k_1) = \varphi_1$  und  $w(k_2) = \varphi_2$  gilt  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .
3. Wir schneiden nicht durch die Kante: Die Kante  $k$  lässt sich also entweder in  $P_1$  oder  $P_2$  wiederfinden und sowohl Kantenlänge, als auch Diederwinkel bleiben gleich.



4. Bleibt nur noch der Sonderfall, wenn wir durch eine der Flächen von  $P$  schneiden. Hierbei entstehen aus dem nichts zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Länge der Länge des Schnitts entsprechen und deren Winkel sich zu  $\pi$  addieren lässt. D. h. für  $w(k_1) = \varphi_1$  und  $w(k_2) = \varphi_2$  gilt  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ .

Wir wollen also eine Operation, die in beiden Argumenten, sowohl in Länge als auch Diederwinkel, linear ist und bei der wir einen Diederwinkel  $\pi$  mit 0 identifizieren. Dies führt uns auf das Tensorprodukt.

## 2.1 Tensoren

Wir kennen Tensoren bereits aus der linearen Algebra. Deshalb wiederholen wir noch einmal die universelle Eigenschaft dieser.

**Proposition 2.1** (Universelle Eigenschaft). Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und seien  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln. Dann ist das *Tensorprodukt*  $M \otimes_R N$  genau derjenige  $R$ -Modul zu dem es eine bilineare Abbildung  $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  gibt, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Sei  $L$  ein weiterer  $R$ -Modul und  $\phi : M \times N \rightarrow L$  eine bilineare Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\eta : M \otimes_R N \rightarrow L$ , sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \otimes \downarrow & \searrow \exists! \eta & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

Gibt ein solches  $R$ -Modul  $M \otimes_R N$ , dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Für den Beweis sei auf Proposition 2.12 in Atiyah verwiesen. □

Also wissen wir nun, dass das Tensorprodukt folgende Eigenschaften erfüllt. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $R$ -Moduln  $M$  und  $N$ , dann gilt für alle  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  und  $r, r' \in R$

$$\begin{aligned} (mr + m'r' \otimes n) &= (m \otimes n) \cdot r + (m' \otimes n) \cdot r' \\ (m \otimes nr + n'r') &= (m \otimes n) \cdot r + (m \otimes n') \cdot r'. \end{aligned}$$

Damit ist der bilineare Operator gefunden. Wir wollen für unser Problem den Spezialfall  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z}$  betrachten. Hierbei identifizieren wir die Länge einer Kante mit dem ersten Argument und tensorieren dies mit einem Winkel, wobei wir den Winkel  $\pi$  mit 0 identifizieren.

## 2.2 Die Dehn-Invariante

**Definition 2.2** (Dehn-Invariante). Sei  $P$  ein dreidimensionaler beschränkter Polyeder mit den Kanten  $k_1, \dots, k_n$ . Dann definieren wir die *Dehn-Invariante*  $D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z}$  durch

$$\sum_{i=1}^n \ell(k_i) \otimes [w(k_i)].$$

**Bemerkung 2.3.** Wir stellen fest, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z}$  gilt

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} \pi y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y \in \mathbb{Q},$$

denn für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  und  $y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , wobei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , gilt

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} \pi y = x \otimes_{\mathbb{Z}} \pi \frac{p}{q} = xp \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\pi}{q} = q \frac{xp}{q} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\pi}{q} = \frac{xp}{q} \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \frac{xp}{q} \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Dabei haben wir  $x \in \mathbb{Z}$  zuerst nach links und danach  $y \in \mathbb{N}$  nach rechts bewegt. Folglich ist die Dehn-Invariante eines Polyeders 0, falls dessen Diederwinkel alle in  $\pi\mathbb{Q}$  liegen.

Zusätzlich können wir folgern, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  gilt

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Dehn-Invariante sich beim Zerschneiden eines Polyeders sich nicht verändert und somit eine Invariante ist.

**Proposition 2.4** (Invarianz). Sei  $P$  ein Polyeder und  $P = P_1 + P_2$  eine Zerlegung von  $P$  in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$ , dann gilt  $D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$ .

*Beweis.* Sei  $P$  ein beschränkter Polyeder, den wir in zwei Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  zerschneiden. Die Summe der Dehn-Invarianten der einzelnen Polyeder soll also gerade der Dehn-Invariante von  $P$  entsprechen. Dazu betrachten wir die Kanten der Polyeder und überlegen was für die Summanden gilt. Es reicht die Fälle zu betrachten, die wir am Anfang des Kapitels erwähnt haben.

- Zu 1: Beim schneiden durch eine Kante  $k$  von  $P$  entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , wobei die Längen sich addieren und der Winkel gleich bleibt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) + \ell(k_2) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = (\ell(k_1) + \ell(k_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 2: Beim schneiden entlang einer Kante  $k$  von  $P$  entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , wobei die Längen gleich bleiben und die Winkel sich addieren. Es gilt

$$\ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich auch hier die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 3: Wir schneiden nicht durch die Kante  $k$  von  $P$ , also ändert sich auch der Summand nicht und damit die Dehn-Invariante.
- Zu 4: Beim Schneiden durch eine Fläche entstehen zwei neue Kanten  $k_1$  von  $P_1$  und  $k_2$  von  $P_2$ , deren Länge gleich ist und Winkel sich zu  $\pi$  addieren lässt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Also ändert auch dies nichts an der Dehn-Invariante.

Im Beweis haben wir lediglich die Bilinearität des Tensorprodukts ausgenutzt. □

**Proposition 2.5.** Seien  $P$  und  $Q$  zwei Polyeder, sd.  $P \cong Q$ , dann gilt  $D(P) = D(Q)$ .

*Beweis.* Isometrien erhalten sowohl Kantenlängen, als auch Diederwinkel der Polyeder und damit bleibt auch die Dehn-Invariante unverändert. □

**Satz 2.6** (Dehn). Seien  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche Polyeder, dann gilt  $D(P) = D(Q)$  und  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ .

*Beweis.* Seien  $P = P_1 + \dots + P_n$  und  $Q = Q_1 + \dots + Q_n$  die Zerlegungen von  $P$  und  $Q$ , also  $P_i \cong Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann folgt mit Proposition 1.9 dass  $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$ . Außerdem gilt mit Proposition 2.5 und mit Proposition 2.4

$$D(P) = D(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n D(P_i) = \sum_{i=1}^n D(Q_i) = D(Q_1 + \dots + Q_n) = D(Q).$$

□

Wir können nun die Dehn-Invarianten einiger Polyeder berechnen.

**Beispiel 2.7** (Quader). Sei  $P$  ein dreidimensionaler Quader. Dann gilt für alle Kanten  $k$  von  $P$ , dass  $w(k) = \frac{\pi}{2}$ . Also gilt  $w(k) \in \pi\mathbb{Q}$  für alle Kanten  $k$  und nach Bemerkung 2.3 folgt

$$D(P) = 0.$$

**Beispiel 2.8** (regulärer Tetraeder). Sei  $P$  ein dreidimensionaler regulärer Tetraeder, also haben alle Kanten von  $P$  die gleiche Länge  $l$  und den gleichen Diederwinkel  $\alpha$ . Seien  $A, B, C, D$  die Ecken von  $P$  wie in Abbildung 4. Sei  $F$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ , also  $|BF| = \frac{l}{2}$  und damit ist nach Pythagoras  $|AF| = \frac{\sqrt{3}}{2}l = |DF|$ . Der Mittelpunkt  $E$  des Dreiecks  $ABC$  hat gerade den Abstand  $\frac{\sqrt{3}}{3}l = \frac{l}{\sqrt{3}}$  zu  $F$  und schließlich gilt mit Pythagoras

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{l}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{3} \quad \text{also} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Damit können wir die Dehn-Invariante berechnen. Es gibt sechs Kanten der Länge  $l$ , die alle den Diederwinkel  $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  haben, also

$$D(P) = \sum_{i=1}^6 l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

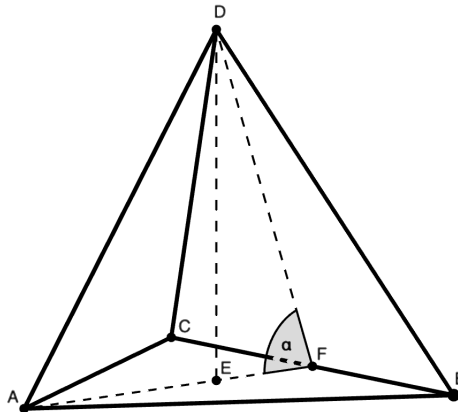


Abbildung 4: Ein regulärer Tetraeder

**Proposition 2.9.** Für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt,  $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  ist irrational.

*Beweis.* Zuerst stellen wir fest, dass mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$



**Folgerung 2.10** (Dehns Lösung). Sei  $Q$  ein Quader und  $T$  ein regulärer Tetraeder mit Kantenlänge  $l$ . Angenommen  $Q$  und  $T$  sind zerlegungsgleich, dann gilt mit Satz 2.6 sowohl  $\text{vol}(Q) = \text{vol}(T)$ , als auch  $D(Q) = D(T)$ . Nach Beispiel 2.7 gilt  $D(Q) = 0$  und nach Beispiel 2.8 gilt

$$D(T) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Da nach Proposition 2.9  $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  irrational ist, liegt  $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  nicht in  $\pi\mathbb{Q}$  und damit ist nach Bemerkung 2.3 mit  $l \neq 0$  auch  $6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$ . Also gilt

$$D(Q) = 0 \neq 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = D(T).$$

Was ein Widerspruch ist.

Damit sind  $Q$  und  $T$  nicht zerlegungsgleich.