

Dehn-Invariante

Jannis Klingler

16. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen	2
1.1	Polytope	2
1.2	Bolyai-Gerwien Theorem	2
2	Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante	4
2.1	Tensoren	5
3	Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Bricard	9
4	Ausblicke	9
4.1	Zerlegungsgleichheit im Sphärischen	9
4.2	Zerlegungsgleichheit im Hyperbolischen	9

1 Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen

1.1 Polytope

Wiederholung (Dual-Raum). Der Dualraum V^* eines k -Vektorraums V ist die Menge aller linearen Abbildungen von V in den Körper k .

Definition 1.1 (Halbraum). Ein Halbraum in einem reellen Vektorraum ist eine Teilmenge der Form

$$H = \{v \in V \mid \alpha(v) \leq r\},$$

wobei $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{R}$.

Definition 1.2 (Polytop). Ein d -Polytop P in einem d -dimensionalen reellen Vektorraum V ist der Schnitt endlich vieler Halbräume. P ist beschränkt, falls für jedes $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ ein $r \in \mathbb{R}$ existiert, sd. $\alpha(x) \leq r$ für alle $x \in P$ gilt.

Für $d = 0$ ist P eine Ecke, für $d = 1$ ist P eine Strecke, für $d = 2$ ist P ein Polytop und für $d = 3$ ist P ein Polyeder.

Definition 1.3 (Kongruenz). Wir nennen zwei Polytope P und Q *kongruent*, wenn es eine Isometrie g gibt, sd. $g(P) = Q$. Eine Isometrie ist hierbei eine Abbildung, die die Abstände zweier beliebiger Punkte erhält. Wir schreiben dann $P \cong Q$.

Im folgenden meinen wir mit $P_1 + \dots + P_n$ die disjunkte Vereinigung.

Definition 1.4 (Zerlegungsgleichheit). Zwei d -Polytope P und Q heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele d -Polytope $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ mit $P = P_1 + \dots + P_n$, $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir schreiben $P \sim Q$.

Definition 1.5 (Ergänzungsgleich). Zwei d -Polytope P und Q heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele d -Polytope $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ gibt, wobei gilt $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \dots + P_n, \quad Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

Proposition 1.6. Zerlegungsgleiche Polytope sind ergänzungsgleich.

Beweis. Klar. □

1.2 Bolyai-Gerwien Theorem

Lemma 1.7. Seien P, Q und R Polygone und es gilt $P \sim Q$ und $Q \sim R$. Dann folgt $P \sim R$.

Beweis. Seien die Zerlegungen der Polygone wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \dots + P_n \\ Q &= Q_1 + \dots + Q_n = Q'_1 + \dots + Q'_m \\ R &= R_1 + \dots + R_m, \end{aligned}$$

wobei $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $Q'_j \cong R_j$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Seien f_1, \dots, f_n die Isometrien, die alle P_i in Q_i überführen (d. h. $f_i(P_i) = Q_i$) und g_1, \dots, g_m die Isometrien, die alle Q'_j in R_j überführen (d. h. $g_j(Q'_j) = R_j$). Wir definieren

$$F_{ij} := Q_i \cap Q'_j,$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ (Beachte, dass F_{ij} leer sein kann). Zwei verschiedene F_{ij} sind disjunkt, denn für $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 \neq i_2$ gilt $F_{i_1 j} \subset Q_{i_1}$, $F_{i_2 j} \subset Q_{i_2}$ und da Q_{i_1} und Q_{i_2} disjunkt sind folgt, dass $F_{i_1 j}$ und $F_{i_2 j}$ disjunkt sind. Außerdem gilt

$$\bigcup_{j=1}^m F_{ij} = \bigcup_{j=1}^m (Q_i \cap Q'_j) = Q_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m Q'_j \right) = Q_i \cap Q = Q_i.$$

Also lassen sich P und R folgendermaßen darstellen

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{i=1}^n f_i(Q_i) = \bigcup_{i=1}^n f_i \left(\bigcup_{j=1}^m F_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m f_i(F_{ij}),$$

und

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m g_j(F_{ij}).$$

Als letztes überlegen wir uns, dass gilt $f_i(F_{ij}) \cong g_j(F_{ij})$. Betrachte hierzu die Isometrie $g_j \circ f_i^{-1}$, dann gilt $g_j(f_i^{-1}(f_i(F_{ij}))) = g_j(F_{ij})$. Also finden wir für P und R jeweils eine Zerlegung aus kongruenten Polygonen und damit sind auch P und R zerlegungsgleich bzw. $P \sim R$. \square

Lemma 1.8. Sei P ein beliebiges Polygon, dann lässt sich P in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegen.

Beweis. Kommt noch. \square

Lemma 1.9. Sei P ein Dreieck, dann gibt es ein Rechteck Q , sd. $P \sim Q$.

Beweis. Sei P das Dreieck mit den Ecken a, b, c und sei o.B.d.A \overline{ab} die längste Seite. Wir zeichnen nun die Lotstrecke auf der Strecke \overline{ab} durch den Punkt c ein und nennen den Lotfußpunkt d . Der Punkt d liegt auf der Strecke \overline{ab} , da sonst \overline{ab} nicht die längste Seite war. Nun halbieren wir die Lotstrecke \overline{cd} und zeichnen die Lotgerade \overline{mn} auf der Strecke \overline{cd} durch den Mittelpunkt e der Strecke (m und n sind hierbei die Schnittpunkte dieser Lotgeraden mit dem Dreieck P). Da \overline{cd} senkrecht auf \overline{ab} und \overline{mn} senkrecht auf \overline{cd} ist, sind \overline{ab} und \overline{mn} parallel. Wir bilden erneut die Lotgeraden auf \overline{ab} durch die Punkte a und b und nennen den Schnittpunkt der Lotgerade durch a mit der Gerade, die durch m und n verläuft, f und den Schnittpunkt der Lotgerade durch b mit der Gerade, die durch m und n verläuft, g . Dadurch erhalten wir ein Rechteck Q mit den Eckpunkten a, b, f, g . Wir stellen fest, dass die Dreiecke mit den Eckpunkten m, e, c und a, m, f , welche in Abbildung 1 grau hinterlegt sind, kongruent sind. Weiterhin sind die Dreiecke mit den Eckpunkten e, n, c und b, g, n , welche weiß hinterlegt sind, kongruent. Damit lassen sich P und Q in die beiden kongruenten Dreiecke und den schraffierten Trapezoid, mit den Eckpunkten a, b, n, m , zerlegen und sind somit zerlegungsgleich. \square

Lemma 1.10. Zwei beliebige Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, sind zerlegungsgleich.

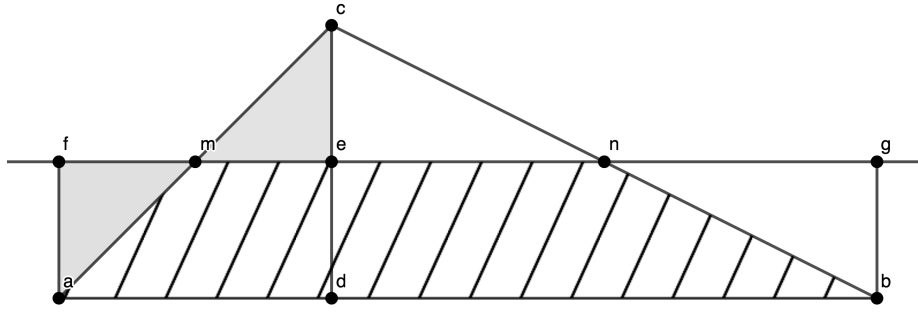


Abbildung 1: Zerlegung eines Dreiecks in ein Rechteck

Beweis. Seien P und Q zwei Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, d. h. falls h_P die Höhe und b_P die Breite des Rechtecks P und h_Q die Höhe und b_Q die Breite des Rechtecks Q sind, dann soll gelten $h_P \cdot b_P = h_Q \cdot b_Q$ also auch

$$\frac{b_P}{h_Q} = \frac{b_Q}{h_P}. \quad (1)$$

Seien o, a, b, c die Eckpunkte des Dreiecks P und o, m, n, p die Eckpunkte des Dreiecks Q . Wir hierbei nehmen o.B.d.A an, dass o hier eine gemeinsame Ecke von P und Q ist, denn das verschieben eines der Dreiecke auf das andere würde nichts am Resultat verändern. ...

□

Satz 1.11 (Bolyai-Gerwien Theorem). Zwei beliebige Polygone mit dem gleichen Flächeninhalt sind zerlegungsgleich.

Beweis. Kommt noch.

□

Wir haben also nun gesehen, dass sich jedes beliebige Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Diese Dreiecke sind nach Lemma 1.9 zerlegungsgleich Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt. Zuletzt können wir mit Satz 1.11 die Rechtecke in normierte Rechtecke (d. h. Rechtecke mit Höhe 1) zerlegen. Haben wir nun zwei beliebige Polygone P und Q mit gleichem Flächeninhalt a gegeben, so sind beide Polygone nach Lemma 1.7 zerlegungsgleich mit einem normierten Rechteck R , das die Breite a hat und wiederum folgt mit der Transitivität der Zerlegungsgleichheit, dass P und Q zerlegungsgleich sind. Damit sind zwei beliebige Polygone zerlegungsgleich und mit Proposition 1.6 auch ergänzungsgleich. Dies führt uns zu der Frage, ob das gleiche auch für 3-dimensionale Polytope, also Polyeder, möglich ist.

Motivation: Als Hilbert 1900 diese Frage auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris als sein drittes von 23 Problemen stellte, vermutete er wohl schon, dass die Antwort 'Nein' ist. Im folgenden wollen wir uns zwei Beweise anschauen, die zeigen, dass es Polyeder gibt, die nicht zerlegungs- und ergänzungsgleich sind. Der erste bezieht sich auf die Arbeit Max Dehn's, ein Schüler Hilberts, der ein Jahr später in seiner Habilitationsarbeit die Aussage mithilfe der von ihm erfundenen Dehn-Invariante widerlegte. Der zweite Beweis...

2 Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante

Wir müssen uns zunächst überlegen, was mit den Kanten eines Polyeders P passiert, wenn wir diesen in zwei Polyeder P_1 und P_2 zerlegen. Sei k also eine Kante des Polyeders P . Diese Kante hat die Länge $\ell(k) = l$. Außerdem ist die Kante k die Schnittmenge der zwei anliegenden Seitenflächen. Den Winkel zweier solcher Flächen nennt man Diederwinkel. Sei also $w(k) = \varphi$ der zu k gehörige Diederwinkel. Dann können beim zerschneiden folgende Fälle eintreten

1. Wir schneiden durch die Kante: Also entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Kantenlängen sich zu der von k addieren lassen und deren Winkel gleich dem von k bleibt. D. h. für $\ell(k_1) = l_1$ und $\ell(k_2) = l_2$ gilt $l = l_1 + l_2$.
2. Wir schneiden entlang der Kante: Also entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Kantenlänge gleich der von k ist und deren Winkel sich zu dem von k addieren lassen. D. h. für $w(k_1) = \varphi_1$ und $w(k_2) = \varphi_2$ gilt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
3. Wir schneiden nicht durch die Kante: Die Kante k lässt sich also entweder in P_1 oder P_2 wiederfinden und sowohl Kantenlänge, als auch Diederwinkel bleiben gleich.
4. Bleibt nur noch der Sonderfall, wenn wir durch eine der Flächen von P schneiden. Hierbei entstehen aus dem nichts zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Länge der Länge des Schnitts entsprechen und deren Winkel sich zu π addieren lässt. D. h. für $w(k_1) = \varphi_1$ und $w(k_2) = \varphi_2$ gilt $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Wir wollen also eine Operation, die in beiden Argumenten, sowohl in Länge als auch Diederwinkel, linear ist und bei der wir einen Diederwinkel π mit 0 identifizieren. Dies führt uns auf das Tensorprodukt.

2.1 Tensoren

Wir kennen Tensoren bereits aus der linearen Algebra. Deshalb wiederholen wir noch einmal die universelle Eigenschaft dieser.

Proposition 2.1 (Universelle Eigenschaft). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien M und N zwei R -Moduln. Dann gilt

1. Die Abbildung $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ ist R -bilinear.
2. Sei nun L ein weiterer R -Modul und $\phi : M \times N \rightarrow L$ eine bilineare Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\eta : M \otimes_R N \rightarrow L$, sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! \eta & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

Der R -Modul $M \otimes N$ ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Proposition 2.2 (Universelle Eigenschaft). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien M und N zwei R -Moduln. Dann ist das *Tensorprodukt* $M \otimes_R N$ genau derjenige R -Modul zu dem es eine bilineare Abbildung $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ gibt, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Sei L ein weiterer R -Modul und $\phi : M \times N \rightarrow L$ eine bilineare Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\eta : M \otimes_R N \rightarrow L$, sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! \eta & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

Gibt ein solches R -Modul $M \otimes_R N$, dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Für den Beweis sei auf Proposition 2.12 in Atiyah verwiesen. \square

Also wissen wir nun, dass das Tensorprodukt folgende Eigenschaften erfüllt. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und R -Moduln M und N , dann gilt für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r, r' \in R$

$$\begin{aligned}(mr + m'r' \otimes n) &= (m \otimes n) \cdot r + (m' \otimes n) \cdot r' \\ (m \otimes nr + n'r') &= (m \otimes n) \cdot r + (m \otimes n') \cdot r'.\end{aligned}$$

Damit ist der bilineare Operator gefunden. Wir wollen für unser Problem den Spezialfall $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ betrachten. Hierbei identifizieren wir die Länge einer Kante mit dem ersten Argument und tensorieren dies mit einem Winkel, wobei wir den Winkel π mit 0 identifizieren.

Definition 2.3 (Dehn-Invariante). Sei P ein dreidimensionaler beschränkter Polyeder mit den Kanten k_1, \dots, k_n . Dann definieren wir die *Dehn-Invariante* $D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ durch

$$\sum_{i=1}^n \ell(k_i) \otimes [w(k_i)].$$

Bemerkung 2.4. Wir stellen fest, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ gilt

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} \pi y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y \in \mathbb{Q},$$

denn für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, gilt

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} \pi y = x \otimes_{\mathbb{Z}} \pi \frac{p}{q} = xp \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\pi}{q} = q \frac{xp}{q} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\pi}{q} = \frac{xp}{q} \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \frac{xp}{q} \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Dabei haben wir $x \in \mathbb{Z}$ zuerst nach links und danach $y \in \mathbb{N}$ nach rechts bewegt. Folglich ist die Dehn-Invariante eines Polyeders 0, falls dessen Diederwinkel alle in $\pi\mathbb{Q}$ liegen.

Zusätzlich können wir folgern, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ gilt

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \wedge y \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Dehn-Invariante sich beim Zerschneiden eines Polyeders nicht verändert und somit eine Invariante ist.

Proposition 2.5 (Invarianz). Die Dehn-Invariante verändert sich beim Zerschneiden oder Zusammensetzen eines Polyeders nicht. Sie ist invariant unter euklidischen Isometrien.

Beweis. Sei P ein beschränkter Polyeder, den wir in zwei Polyeder P_1 und P_2 zerschneiden. Dann reicht es die Fälle zu betrachten, die wir am Anfang des Kapitels erwähnt haben.

- Zu 1: Beim schneiden durch eine Kante k von P entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , wobei die Längen sich addieren und der Winkel gleich bleibt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) + \ell(k_2) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = (\ell(k_1) + \ell(k_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 2: Beim schneiden entlang einer Kante k von P entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , wobei die Längen gleich bleiben und die Winkel sich addieren. Es gilt

$$\ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich auch hier die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 3: Wir schneiden nicht durch die Kante k von P , also ändert sich auch der Summand nicht und damit die Dehn-Invariante.
- Zu 4: Beim Schneiden durch eine Fläche entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Länge gleich ist und Winkel sich zu π addieren lässt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Also ändert auch dies nichts an der Dehn-Invariante.

Im Beweis haben wir lediglich die Bilinearität des Tensorprodukts ausgenutzt. \square

Wir können nun die Dehn-Invarianten einiger Polyeder berechnen.

Beispiel 2.6 (Quader). Sei P ein dreidimensionaler Quader. Dann gilt für alle Kanten k von P , dass $w(k) = \frac{\pi}{2}$. Also gilt $w(k) \in \pi\mathbb{Q}$ für alle Kanten k und nach Bemerkung 2.4 folgt

$$D(P) = 0.$$

Beispiel 2.7 (regulärer Tetraeder). Sei P ein dreidimensionaler regulärer Tetraeder, also haben alle Kanten von P die gleiche Länge l und den gleichen Diederwinkel α . Seien A, B, C, D die Ecken von P wie in Abbildung 2. Sei F der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} , also $|BC| = \frac{l}{2}$ und damit ist nach Pythagoras $|AF| = \frac{\sqrt{3}}{2}l = |DF|$. Der Mittelpunkt E des Dreiecks ABC hat gerade den Abstand $\frac{\sqrt{3}}{3}l = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ zu F und schließlich gilt mit Pythagoras

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{l}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{3} \quad \text{also} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Damit können wir die Dehn-Invariante berechnen. Es gibt sechs Kanten der Länge l , die alle den Diederwinkel $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ haben, also

$$D(P) = \sum_{i=1}^6 l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

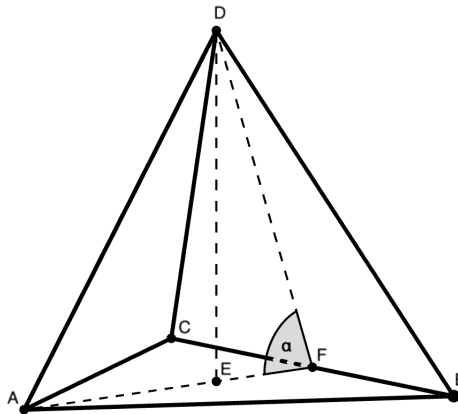


Abbildung 2: Ein regulärer Tetraeder

Proposition 2.8. Für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt, $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist irrational.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

für $\alpha = (k+1)\varphi$ und $\beta = (k-1)\varphi$ gilt

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi) + \cos((k-1)\varphi) &= 2 \cos\left(\frac{(k+1)\varphi + (k-1)\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{(k+1)\varphi - (k-1)\varphi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\cos((k+1)\varphi) = 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) - \cos((k-1)\varphi). \quad (2)$$

Wir definieren uns nun $\varphi_n = \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$ für $n = 2m+1$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $0 \leq \varphi_n \leq \pi$.

Mit Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir, dass gilt

$$\cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}, \quad (3)$$

wobei A_k eine ganze Zahl ist, die nicht durch n teilbar ist. Wir beginnen und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \text{für } k=0 \quad 1 &= \cos(0 \cdot \varphi_n) = \frac{A_0}{\sqrt{n}^0} = A_0 \\ \text{für } k=1 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} &= \cos(1 \cdot \varphi_n) = \frac{A_1}{\sqrt{n}^1} = \frac{A_0}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

und damit $A_0 = A_1 = 1$ ist. Weiterhin gilt mit 2

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi_n) &= 2 \cos(k\varphi_n) \cos(\varphi_n) - \cos((k-1)\varphi_n) \\ &= 2 \frac{A_k}{\sqrt{n}^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} \\ &\quad \stackrel{=: A_{k+1}}{=} \\ &= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}. \end{aligned}$$

Da A_k nicht durch n teilbar ist und $n \geq 3$ ungerade, ist die Zahl $2A_k$ auch nicht durch n teilbar und damit auch nicht $A_{k+1} := 2A_k - nA_{k-1}$. Wir haben also eine konkrete Darstellung für A_{k+1} gefunden und sind mit der Induktion fertig.

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis. Angenommen $\frac{1}{\pi}\varphi_n$ ist rational mit

$$\frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{m}{k}$$

für $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit $k\varphi_n = m\pi$ und 3

$$\pm 1 = \cos(m\pi) = \cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}.$$

Also auch $\sqrt{n}^k = \pm A_k$ und da A_k eine ganze Zahl ist, ist \sqrt{n}^k auch eine und somit $k \geq 2$. Damit ist jedoch n ein Teiler von \sqrt{n}^k und da $\sqrt{n}^k | A_k$, teilt n auch A_k , was ein Widerspruch ist. \square

Damit folgt also für $n = 9$, dass $\arccos(\frac{1}{3})$ nicht in $\pi\mathbb{Q}$ liegt. Wir erhalten unser folgendes Resultat.

Folgerung 2.9 (Dehns Lösung). Sei Q ein Quader und T ein regulärer Tetraeder mit gleichem Volumen und Kantenlänge l . Dann gilt nach Beispiel 2.6 $D(Q) = 0$ und nach Beispiel 2.7

$$D(T) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Da nach Proposition 2.8 $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ irrational ist, liegt $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ nicht in $\pi\mathbb{Q}$ und damit ist nach Bemerkung 2.4 mit $l \neq 0$ auch $6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$. Also gilt

$$D(Q) = 0 \neq 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = D(T).$$

Also sind Q und T nicht zerlegungsgleich.

3 Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Bricard

4 Ausblicke

Im folgenden wollen wir uns anschauen, ob es ähnliche Resultate auch im sphärischen oder hyperbolischen Raum gibt.

4.1 Zerlegungsgleichheit im Sphärischen

4.2 Zerlegungsgleichheit im Hyperbolischen