

Hilberts drittes Problems

Jannis Klingler

31. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen	2
1.1	Polytope	2
1.2	Bolyai-Gerwien Theorem	4
2	Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante	7
2.1	Tensoren	8
2.2	Die Dehn-Invariante	8

1 Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polytopen

1.1 Polytope

Wiederholung (Dual-Raum). Der Dualraum V^* eines k -Vektorraums V ist die Menge aller linearen Abbildungen von V in den Körper k .

Definition 1.1 (Halbraum). Ein Halbraum in einem reellen Vektorraum ist eine Teilmenge der Form

$$H = \{v \in V \mid \alpha(v) \leq r\},$$

wobei $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{R}$.

Definition 1.2 (konvexes Polytop). Ein konvexes d -Polytop P in einem d -dimensionalen reellen Vektorraum V ist der Schnitt endlich vieler Halbräume. P ist beschränkt, falls für jedes $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ ein $r \in \mathbb{R}$ existiert, sd. $\alpha(x) \leq r$ für alle $x \in P$ gilt.

Für $d = 0$ ist P eine Ecke, für $d = 1$ ist P eine Strecke, für $d = 2$ ist P ein Polygon und für $d = 3$ ist P ein Polyeder.

Wir werden im Folgenden immer beschränkte konvexe d -Polytope betrachten. Wir stellen außerdem fest, dass der Schnitt konvexer Polytope wieder ein konvexes Polytop ist. Hierbei kann der Schnitt auch niedrigerdimensional sein. Wir sagen zwei Polytope P_1 und P_2 sind disjunkt, wenn $\dim(P_1 \cap P_2) < d$. Wir schreiben dann für die Vereinigung zweier disjunkter Polytope $P_1 + P_2$.

Wir definieren $\dim(P_1 \cap P_2) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \exists p_0, \dots, p_k \in P_1 \cap P_2 : (p_0 - p_1), \dots, (p_{k-1} - p_k) \text{ linear unabhängige}\}$.

Definition 1.3 (Kongruenz). Wir nennen zwei d -Polytope P und Q *kongruent*, wenn es eine Isometrie g gibt, sd. $g(P) = Q$. Eine Isometrie ist hierbei eine Abbildung, die die Abstände zweier beliebiger Punkte erhält. Wir schreiben dann $P \cong Q$.

Definition 1.4 (Zerlegungsgleichheit). Zwei d -Polytope P und Q heißen *zerlegungsgleich*, wenn es endlich viele d -Polytope $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ mit $P = P_1 + \dots + P_n$, $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ gibt, sd.

$$P_i \cong Q_i$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir schreiben $P \sim Q$.

Definition 1.5 (Ergänzungsgleich). Zwei d -Polytope P und Q heißen *ergänzungsgleich*, wenn es endlich viele d -Polytope $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ gibt, wobei gilt $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, sd. die Polytope

$$P' = P + P_1 + \dots + P_n, \quad Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$$

zerlegungsgleich sind.

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

Proposition 1.6. Zerlegungsgleiche Polytope sind ergänzungsgleich.

Beweis. Haben wir zwei zerlegungsgleiche Polytope, so müssen wir kein weiteres Polytop ergänzen, damit die Ergänzungen zerlegungsgleich sind, also folgt bereits die Ergänzungsgleichheit. \square

Wir wollen uns anschauen, wie sich das Volumen von Polytopen verhält. Dabei ist vor allem die Invarianz des Volumens unter Zerschneidung von Polytopen, die wir in Proposition 1.9 beweisen werden, ein wichtiges Resultat. Mit dem Volumen eines Polytops meinen wir im Folgenden das d -dimensionale Lebesgue-Maß.

Proposition 1.7. Seien P und Q zwei d -Polytope, sd. $P \cong Q$, dann gilt $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$.

Beweis. Da sich eine Isometrie darstellen lässt als $f(x) = Ux + a$ für eine orthogonale Matrix $U \in O(d)$ und ein $a \in \mathbb{R}^d$ ergibt sich die Aussage mit der Transformationsformel. \square

Lemma 1.8. Seien P und Q zwei disjunkte Polytope, dann gilt

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

Beweis. Sei \mathbb{R}^d der zugrundeliegende Vektorraum und $\text{vol} = \text{vol}_d$ das d -dimensionale Lebesgue-Maß. Mit der Siebformel erhalten wir nun

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q) - \text{vol}(P \cap Q).$$

Wir wollen also zeigen, dass der Schnitt von niedrigerdimensionalen Mengen eine Nullmenge bezüglich unseres Maßes ist. P und Q sind nun zwei Polytope in \mathbb{R}^d mit $k := \dim(P \cap Q) < d$. Wir definieren $\mathfrak{L} := P \cap Q \subset \mathbb{R}^k$. Sei nun $M := \mathfrak{L} \times [0, 1]^{d-k} \subset \mathbb{R}^d$ ein d -dimensionaler Quader, der \mathfrak{L} einschließt. Für die Aufzählung $\mathfrak{L}_q := \mathfrak{L} + (0, q)$, wobei $q \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^{d-k}$, gilt dann mit der σ -Additivität des Lebesgue-Maßes

$$\text{vol}_d \left(\bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q), \quad (1)$$

da diese Aufzählung abzählbar ist und die einzelnen \mathfrak{L}_q jeweils einen leeren Schnitt haben. Es gilt also mit der Monotonie und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\infty > \text{vol}_d(M) \geq \text{vol}_d \left(\bigcup_q \mathfrak{L}_q \right) \stackrel{1}{=} \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}_q) = \sum_q \text{vol}_d(\mathfrak{L}).$$

Also muss gelten $\text{vol}_d(\mathfrak{L}) = 0$, da wir eine abzählbar große Summe haben. Damit ergibt sich also

$$\text{vol}(P + Q) = \text{vol}(P) + \text{vol}(Q).$$

\square

Wir stellen fest, dass dieser Beweis über eine beliebige abzählbare Anzahl von disjunkten Polytopen funktioniert. Mit diesem Resultat ergibt sich die folgende Proposition.

Proposition 1.9. Seien P und Q zerlegungsgleiche d -Polytope, dann gilt $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$.

Beweis. Seien $P = P_1 + \dots + P_n$ und $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ die Zerlegungen von P und Q , also $P_i \cong Q_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir erhalten mit Proposition 1.7 und Lemma ??

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(P_i) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(Q_i) = \text{vol}(Q_1 + \dots + Q_n) = \text{vol}(Q).$$

\square

Proposition 1.10. Seien P und Q zwei ergänzungsgleiche Polytope, dann gilt $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$.

Beweis. Seien P und Q ergänzungsgleich, d. h. es gibt endlich viele Polytope $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ mit $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in 1, \dots, n$, sd. $P' = P + P_1 + \dots + P_n$ und $Q' = Q + Q_1 + \dots + Q_n$ zerlegungsgleich sind. Nach Proposition 1.9 gilt dann also auch $\text{vol}(P') = \text{vol}(Q')$. Damit folgt

$$\text{vol}(P) + \text{vol}(P_1) + \dots + \text{vol}(P_n) = \text{vol}(P') = \text{vol}(Q') = \text{vol}(Q) + \text{vol}(Q_1) + \dots + \text{vol}(Q_n)$$

und da mit $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in 1, \dots, n$ nach Proposition 1.7 auch $\text{vol}(P_i) = \text{vol}(Q_i)$ gilt, folgt $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$. \square

1.2 Bolyai-Gerwien Theorem

Im Folgenden setzen wir $d = 2$ und betrachten also Polygone.

Lemma 1.11. Seien P , Q und R Polygone und es gilt $P \sim Q$ und $Q \sim R$. Dann folgt $P \sim R$.

Beweis. Seien die Zerlegungen der Polygone wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \dots + P_n \\ Q &= Q_1 + \dots + Q_n = Q'_1 + \dots + Q'_m \\ R &= R_1 + \dots + R_m, \end{aligned}$$

wobei $P_i \cong Q_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $Q'_j \cong R_j$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Seien f_1, \dots, f_n die Isometrien, die alle Q_i in P_i überführen (d. h. $f_i(Q_i) = P_i$) und g_1, \dots, g_m die Isometrien, die alle R_j in Q'_j überführen (d. h. $g_j(R_j) = Q'_j$). Wir definieren

$$F_{ij} := Q_i \cap Q'_j,$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ (Beachte, dass F_{ij} leer sein kann). Zwei verschiedene F_{ij} sind disjunkt, denn für $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 \neq i_2$ gilt

$$F_{i_1 j} \cap F_{i_2 j} = (Q_{i_1} \cap Q'_j) \cap (Q_{i_2} \cap Q'_j) = (Q_{i_1} \cap Q_{i_2}) \cap Q'_j.$$

Da Q_{i_1} und Q_{i_2} disjunkt sind, d. h. der Schnitt niedrigerdimensional ist, ist auch dieser Schnitt mit Q'_j niedrigerdimensional, also sind $F_{i_1 j}$ und $F_{i_2 j}$ disjunkt. Außerdem gilt

$$\bigcup_{j=1}^m F_{ij} = \bigcup_{j=1}^m (Q_i \cap Q'_j) = Q_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m Q'_j \right) = Q_i \cap Q = Q_i. \quad (2)$$

Also lässt sich P folgendermaßen darstellen

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{i=1}^n f_i(Q_i) \stackrel{2}{=} \bigcup_{i=1}^n f_i \left(\bigcup_{j=1}^m F_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m f_i(F_{ij}),$$

und für R gilt analog

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m g_j(F_{ij}).$$

Damit haben wir sowohl für P , als auch für R eine Zerlegung in disjunkte Polygone gefunden. Als letztes überlegen wir uns, dass gilt $f_i(F_{ij}) \cong g_j(F_{ij})$. Betrachte hierzu die Isometrie $g_j \circ f_i^{-1}$, dann gilt $g_j(f_i^{-1}(f_i(F_{ij}))) = g_j(F_{ij})$. Also finden wir für P und R jeweils eine Zerlegung aus kongruenten Polygonen und damit sind auch P und R zerlegungsgleich bzw. $P \sim R$. \square

Lemma 1.12. Sei P ein beliebiges Polygon, dann lässt sich P in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegen.

Beweis. Kommt noch. \square

Lemma 1.13. Sei P ein Dreieck, dann gibt es ein Rechteck Q , sd. $P \sim Q$.

Beweis. Sei P das Dreieck mit den Ecken a, b, c und sei o.B.d.A \overline{ab} die längste Seite. Wir zeichnen nun die Lotstrecke auf der Strecke \overline{ab} durch den Punkt c ein und nennen den Lotfußpunkt d . Der Punkt d liegt auf der Strecke \overline{ab} , da sonst \overline{ab} nicht die längste Seite war. Nun halbieren wir die Lotstrecke \overline{cd} und zeichnen die Lotgerade durch die Punkte m und n auf dem Mittelpunkt e der Strecke \overline{cd} ein (m und n sind hierbei die Schnittpunkte dieser Lotgeraden mit dem Dreieck

P). Da \overline{cd} senkrecht auf \overline{ab} und die Lotgerade durch die Punkte m und n senkrecht auf \overline{cd} ist, sind \overline{ab} und die Lotgerade parallel. Wir bilden erneut die Lotgeraden auf \overline{ab} durch die Punkte a und b und nennen den Schnittpunkt der Lotgerade durch a mit der Lotgerade, die durch m und n verläuft, f und den Schnittpunkt der Lotgerade durch b mit der Lotgerade, die durch m und n verläuft, g . Dadurch erhalten wir ein Rechteck Q mit den Eckpunkten a, b, g, f . Wir stellen fest, dass die Dreiecke mit den Eckpunkten m, e, c und a, m, f , welche in Abbildung 1 grau hinterlegt sind, kongruent sind, da mit dem Strahlensatz der Winkel an dem Punkt m in den beiden Dreiecken gleich ist und somit beiden Dreiecke gleiche Basis und Höhe haben. Weiterhin sind mit dem gleichen Argument die Dreiecke mit den Eckpunkten e, n, c und b, g, n , welche weiß hinterlegt sind, kongruent. Damit lassen sich P und Q in die beiden kongruenten Dreiecke und den schraffierten Trapezoid, mit den Eckpunkten a, b, n, m , zerlegen und sind somit zerlegungsgleich. \square

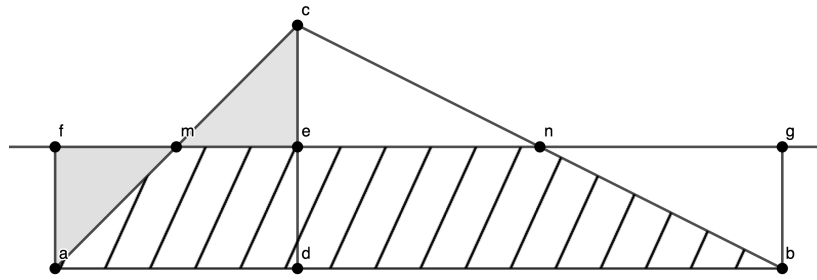


Abbildung 1: Zerlegung eines Dreiecks in ein Rechteck

Lemma 1.14. Zwei beliebige Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, sind zerlegungsgleich.

Beweis. Seien P und Q zwei Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt, d. h. falls h_P die Höhe und b_P die Breite des Rechtecks P und h_Q die Höhe und b_Q die Breite des Rechtecks Q sind, dann soll gelten $h_P \cdot b_P = h_Q \cdot b_Q$ also auch

$$\frac{b_P}{h_Q} = \frac{b_Q}{h_P}. \quad (3)$$

Seien o, a, b, c die Eckpunkte des Dreiecks P und o, m, n, p die Eckpunkte des Dreiecks Q , siehe

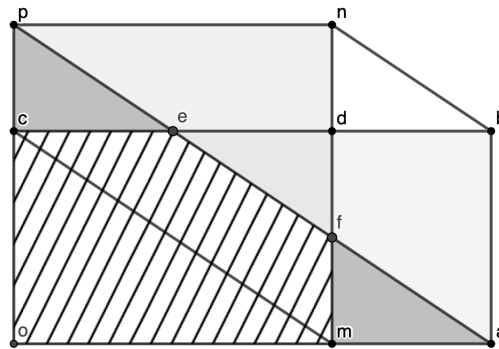


Abbildung 2: Zerlegung zweier Rechtecke

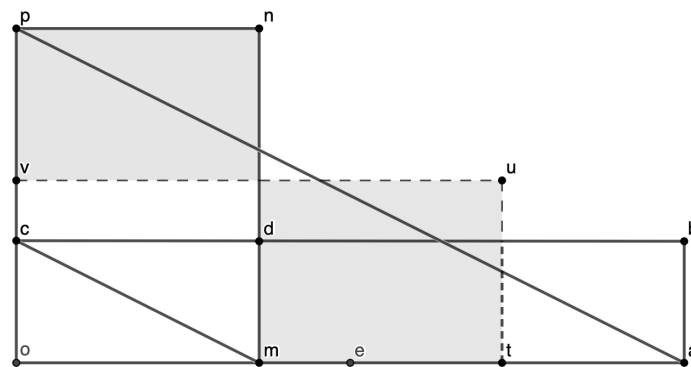
Abbildung 2. Wir verschieben hier Q so auf auf P , dass beide eine gemeinsame Ecke o mit rechtem Winkel haben. Dies ändert nichts am Resultat. Die Höhe h_P soll also der Länge der Strecken \overline{co} und \overline{ab} entsprechen. Die Breite b_P soll der Länge der Strecken \overline{oa} und \overline{bc} entsprechen. Analog soll h_Q der Länge der Strecken \overline{po} und \overline{mn} und b_Q der Länge der Strecken \overline{om} und \overline{np}

$$(b_P - b_Q)h_P = b_P h_P - b_Q h_P = h_Q b_Q - b_Q h_P = b_Q(h_Q - h_P)$$
$$\frac{b_P - b_Q}{h_Q - h_P} = \frac{b_Q}{h_P}.$$

1. *Fall:* Die Verbindungsstrecke \overline{ap} der Eckpunkte schneidet das Rechteck $omdc$ in den Punkten e , mit der Seite \overline{dc} und f , mit der Seite \overline{md} , siehe Abbildung 2. Es gilt $2b_Q \geq b_P$. Also sind die beiden in der Abbildung grau hinterlegten Dreiecke maf und cep und die beiden in der Abbildung hellgrau hinterlegten Dreiecke abe und fnp kongruent. Mit dem übrig gebliebenen in der Abbildung schraffierten Fünfeck $omfec$ ist unsere Zerlegung komplett.
2. *Fall:* Die Verbindungsstrecke \overline{ap} der Eckpunkte schneidet das Rechteck $omdc$ nicht, siehe Abbildung 3. Es gilt also $2b_Q < b_P$. Sei nun e hierbei der Mittelpunkt der Strecke \overline{oa} und k die kleinste natürliche Zahl, wie oft man die Strecke \overline{om} entlang der Strecke \overline{oa} legen muss, sd. wir einen Punkt t erhalten der nicht mehr auf der Strecke \overline{oe} liegt sondern auf der Strecke \overline{ea} . Nun zerlegen wir das Rechteck Q in k Rechtecke, deren Basis parallel ist zur Strecke \overline{om} , die wir nun entlang der neu entstandenen Strecke \overline{ot} legen. Wir erhalten, somit das zu Q zerlegungsgleiche Rechteck $otuv$. Sei die Breite dieses Rechtecks nun b' , die offensichtlich die Bedingung

$$2b' > b_P$$

Damit sind P und Q zerlegungsgleich.



Beweis. Sei P ein Polygon. Dann kann P in endlich viele disjunkte Dreiecke zerlegt werden und jedes dieser Dreiecke ist nach Lemma 1.13 zerlegungsgleich zu einem Rechteck. Wir finden also für P die Darstellung

$$P \sim P_1 + \dots + P_n,$$

wobei P_1, \dots, P_n Rechtecke sind. Nun nehmen wir eine beliebige Kante $\overline{a_0 b_0}$ und stellen die Lotgeraden auf den Eckpunkten a_0 und b_0 durch die Strecke $\overline{a_0 b_0}$ auf. Anschließend ziehen wir n parallele Strecken zu $\overline{a_0 b_0}$, sd. der Flächeninhalt des Rechtecks $a_{i-1} b_{i-1} b_i a_i$, welches wir R_i nennen, dem Flächeninhalt des Rechtecks P_i entspricht, wobei $i = 1, \dots, n$. Nach Lemma 1.14 gilt also $P_i \sim R_i$ für alle i und damit

$$P_1 + \dots + P_n \sim R_1 + \dots + R_n.$$

Da $P \sim P_1 + \dots + P_n$ gilt also mit Lemma 1.11

$$P \sim R_1 + \dots + R_n$$

und damit zum Rechteck $a_0 b_0 b_n a_n$. Damit ist jedes Polygon zerlegungsgleich zu einem Rechteck. Seien nun P und Q zwei Polygone mit gleichem Flächeninhalt, dann finden wir wie oben gezeigt Rechtecke R_1 und R_2 , sd.

$$P \sim R_1, \quad Q \sim R_2.$$

Nach Lemma 1.14 gilt also nun auch $R_1 \sim R_2$ und damit folgt mit Lemma 1.11 $P \sim Q$. \square

Wir haben also nun gesehen, dass sich jedes beliebige Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Diese Dreiecke sind nach Lemma 1.13 zerlegungsgleich zu Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt. Zuletzt können wir mit Satz 1.15 die Rechtecke zerlegen zu Rechtecken mit gleicher Grundseite. Dieses Verfahren können wir nun auf beliebige Polygone mit gleichem Flächeninhalt anwenden. Da diese Rechtecke nach Lemma 1.14 zerlegungsgleich sind folgt mit der Transitivität der Zerlegungsgleichheit aus Lemma 1.11 die Zerlegungsgleichheit der Polygone und mit Proposition 1.6 auch die Ergänzungsgleichheit. Dies führt uns zu der Frage, ob das gleiche auch für dreidimensionale Polytope, also Polyeder, möglich ist.

Motivation: Als Hilbert 1900 diese Frage auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris als sein drittes von 23 Problemen stellte, vermutete er wohl schon, dass die Antwort 'Nein' ist. Im Folgenden wollen wir uns zwei Beweise anschauen, die zeigen, dass es Polyeder gibt, die nicht zerlegungs- und ergänzungsgleich sind. Der erste bezieht sich auf die Arbeit Max Dehn's, ein Schüler Hilberts, der ein Jahr später in seiner Habilitationsarbeit die Aussage mithilfe der von ihm erfundenen Dehn-Invariante widerlegte. Der zweite Beweis...

2 Zerlegungsgleichheit von Polyedern; Dehn-Invariante

Im Folgenden setzen wir $d = 3$ und betrachten Polyeder.

Wir müssen uns zunächst überlegen, was mit den Kanten eines Polyeders P passiert, wenn wir diesen in zwei Polyeder P_1 und P_2 zerlegen. Sei k also eine Kante des Polyeders P . Diese Kante hat die Länge $\ell(k) = l$. Außerdem ist die Kante k die Schnittmenge der zwei anliegenden Seitenflächen. Den Winkel zweier solcher Flächen nennt man Diederwinkel. Sei also $w(k) = \varphi$ der zu k gehörige Diederwinkel. Dann können beim zerschneiden folgende Fälle eintreten

1. Wir schneiden durch die Kante: Also entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Kantenlängen sich zu der von k addieren lassen und deren Winkel gleich dem von k bleibt. D. h. für $\ell(k_1) = l_1$ und $\ell(k_2) = l_2$ gilt $l = l_1 + l_2$.
2. Wir schneiden entlang der Kante: Also entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Kantenlänge gleich der von k ist und deren Winkel sich zu dem von k addieren lassen. D. h. für $w(k_1) = \varphi_1$ und $w(k_2) = \varphi_2$ gilt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
3. Wir schneiden nicht durch die Kante: Die Kante k lässt sich also entweder in P_1 oder P_2 wiederfinden und sowohl Kantenlänge, als auch Diederwinkel bleiben gleich.

4. Bleibt nur noch der Sonderfall, wenn wir durch eine der Flächen von P schneiden. Hierbei entstehen aus dem nichts zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Länge der Länge des Schnitts entsprechen und deren Winkel sich zu π addieren lässt. D. h. für $w(k_1) = \varphi_1$ und $w(k_2) = \varphi_2$ gilt $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Wir wollen also eine Operation, die in beiden Argumenten, sowohl in Länge als auch Diederwinkel, linear ist und bei der wir einen Diederwinkel π mit 0 identifizieren. Dies führt uns auf das Tensorprodukt.

2.1 Tensoren

Wir kennen Tensoren bereits aus der linearen Algebra. Deshalb wiederholen wir noch einmal die universelle Eigenschaft dieser.

Proposition 2.1 (Universelle Eigenschaft). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien M und N zwei R -Moduln. Dann ist das *Tensorprodukt* $M \otimes_R N$ genau derjenige R -Modul zu dem es eine bilineare Abbildung $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ gibt, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Sei L ein weiterer R -Modul und $\phi : M \times N \rightarrow L$ eine bilineare Abbildung. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\eta : M \otimes_R N \rightarrow L$, sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! \eta & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

Gibt ein solches R -Modul $M \otimes_R N$, dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Für den Beweis sei auf Proposition 2.12 in Atiyah verwiesen. \square

Also wissen wir nun, dass das Tensorprodukt folgende Eigenschaften erfüllt. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und R -Moduln M und N , dann gilt für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r, r' \in R$

$$\begin{aligned} (mr + m'r' \otimes n) &= (m \otimes n) \cdot r + (m' \otimes n) \cdot r' \\ (m \otimes nr + n'r') &= (m \otimes n) \cdot r + (m \otimes n') \cdot r'. \end{aligned}$$

Damit ist der bilineare Operator gefunden. Wir wollen für unser Problem den Spezialfall $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z}$ betrachten. Hierbei identifizieren wir die Länge einer Kante mit dem ersten Argument und tensorieren dies mit einem Winkel, wobei wir den Winkel π mit 0 identifizieren.

2.2 Die Dehn-Invariante

Definition 2.2 (Dehn-Invariante). Sei P ein dreidimensionaler beschränkter Polyeder mit den Kanten k_1, \dots, k_n . Dann definieren wir die *Dehn-Invariante* $D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi \mathbb{Z}$ durch

$$\sum_{i=1}^n \ell(k_i) \otimes [w(k_i)].$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Dehn-Invariante sich beim Zerschneiden eines Polyeders nicht verändert und somit eine Invariante ist.

Proposition 2.3 (Invarianz). Sei P ein Polyeder und $P = P_1 + P_2$ eine Zerlegung von P in zwei Polyeder P_1 und P_2 , dann gilt $D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$.

Beweis. Sei P ein beschränkter Polyeder, den wir in zwei Polyeder P_1 und P_2 zerschneiden. Die Summe der Dehn-Invarianten der einzelnen Polyeder soll also gerade der Dehn-Invariante von P entsprechen. Dazu betrachten wir die Kanten der Polyeder und überlegen was für die Summanden gilt. Es reicht die Fälle zu betrachten, die wir am Anfang des Kapitels erwähnt haben.

- Zu 1: Beim schneiden durch eine Kante k von P entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , wobei die Längen sich addieren und der Winkel gleich bleibt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) + \ell(k_2) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = (\ell(k_1) + \ell(k_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 2: Beim schneiden entlang einer Kante k von P entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , wobei die Längen gleich bleiben und die Winkel sich addieren. Es gilt

$$\ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k).$$

Also verändert sich auch hier die Dehn-Invariante nicht.

- Zu 3: Wir schneiden nicht durch die Kante k von P , also ändert sich auch der Summand nicht und damit die Dehn-Invariante.
- Zu 4: Beim Schneiden durch eine Fläche entstehen zwei neue Kanten k_1 von P_1 und k_2 von P_2 , deren Länge gleich ist und Winkel sich zu π addieren lässt. Es gilt

$$\ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_1) + \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} w(k_2) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} (w(k_1) + w(k_2)) = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = \ell(k_1) \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Also ändert auch dies nichts an der Dehn-Invariante.

Im Beweis haben wir lediglich die Bilinearität des Tensorprodukts ausgenutzt. \square

Proposition 2.4. Seien P und Q zwei Polyeder, sd. $P \cong Q$, dann gilt $D(P) = D(Q)$.

Beweis. Isometrien erhalten sowohl Kantenlängen, als auch Diederwinkel der Polyeder und damit bleibt auch die Dehn-Invariante unverändert. \square

Satz 2.5 (Dehn). Seien P und Q zerlegungsgleiche Polyeder, dann gilt $D(P) = D(Q)$ und $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$.

Beweis. Seien $P = P_1 + \dots + P_n$ und $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ die Zerlegungen von P und Q , also $P_i \cong Q_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann folgt mit Proposition 1.9 dass $\text{vol}(P) = \text{vol}(Q)$. Außerdem gilt mit Proposition 2.4 und mit Proposition 2.3

$$D(P) = D(P_1 + \dots + P_n) = \sum_{i=1}^n D(P_i) = \sum_{i=1}^n D(Q_i) = D(Q_1 + \dots + Q_n) = D(Q).$$

\square

Wir wollen uns nun zur Berechnung der Dehn-Invariante einiger Polyeder ein paar Eigenschaften des Tensorprodukts $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ anschauen. Dazu wollen wir zeigen, dass unser Tensorprodukt isomorph zum Tensorprodukt $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ ist, hierzu benötigen wir ein paar Resultate aus der Kommutativen Algebra.

Sei nun R ein Integritätsring, wir wollen nun Brüche einführen. Sei dazu S eine multiplikative Teilmenge von R , das heißt $1 \in S$ und S ist unter Multiplikation abgeschlossen, also ein Monoid. Wir definieren die Relation \equiv auf $R \times S$ durch

$$(r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2) \iff r_1 s_2 = r_2 s_1$$

für Elemente $r_1, r_2 \in R$ und $s_1, s_2 \in S$.

Wir stellen fest, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität und Symmetrie ist klar, wir zeigen also noch die Transitivität. Es gelte also $(r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2)$ und $(r_2, s_2) \equiv (r_3, s_3)$ für $r_1, r_2, r_3 \in R$ und $s_1, s_2, s_3 \in S$, also gilt $r_1 s_2 = r_2 s_1$ und $r_2 s_3 = r_3 s_2$ und damit $r_1 s_2 r_2 s_3 = r_2 s_1 r_3 s_2$. Falls $r_2 = 0$ ist klar, dass $(r_1, s_1) \equiv (r_3, s_3)$ gilt, falls $r_2 \neq 0$ können wir r_2 aus der Gleichung streichen und es folgt $r_1 s_3 = r_3 s_1$ und damit $(r_1, s_1) \equiv (r_3, s_3)$. Wir schreiben $\frac{r}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (r, s) und $S^{-1}R$ für die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir können $S^{-1}R$ nun eine Ringstruktur geben, indem wir die Addition und Multiplikation wie folgt definieren

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_1}{s_1} \right) + \left(\frac{r_2}{s_2} \right) &= \left(\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \right) \\ \left(\frac{r_1}{s_1} \right) \cdot \left(\frac{r_2}{s_2} \right) &= \left(\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \right) \end{aligned}$$

für alle $r_1, r_2 \in R$ und $s_1, s_2 \in S$. Wir stellen fest, dass $S^{-1}R$ sogar ein kommutativer Ring mit Eins ist. Außerdem ist $S^{-1}R$ gerade der Quotientenkörper von R , falls $S = R \setminus \{0\}$ ist. Betrachten wir also beispielweise den Ring \mathbb{Z} mit der multiplikativen Teilmenge $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so ist $S^{-1}\mathbb{Z}$ gerade der Quotientenkörper von \mathbb{Z} , also \mathbb{Q} . Wir können diese Konstruktion nun auch auf Moduln fortführen. Haben wir ein R -Modul M , dann definieren wir die Äquivalenzrelation wie oben, nur auf M , und erhalten die Äquivalenzklassen $\frac{m}{s}$ für Elemente $m \in M$ und $s \in S$. Dann ist $S^{-1}M$ gerade die Menge solcher Brüche und wir erhalten mit $S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$ -Modul mit der natürlichen Definition der Addition und skalaren Multiplikation.

Nun zurück zu unserem Problem. Wir wollen nun wissen, was passiert wenn wir in dem \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ Brüche einführen. Um das zu verstehen, hilft uns das folgende Resultat.

Folgerung 2.6. Sei R ein Integritätsring, M ein R -Modul und N ein R -Untermodul von M . Weiter sei S eine multiplikative Teilmenge von R , dann sind die $S^{-1}R$ -Moduln $S^{-1}(M/N)$ und $S^{-1}M/S^{-1}N$ isomorph.

Beweis. Wir wenden hierfür S^{-1} auf die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

an. □

Wenden wir das nun auf das \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ mit $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ an, dann sind die $\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}\mathbb{Z}$ -also \mathbb{Q} -Moduln $\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ und $\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}\pi\mathbb{Z}$ isomorph. Wir bemerken, dass $\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}\pi\mathbb{Z} = \pi\mathbb{Q}$. Damit gilt also

$$\mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

Es lässt sich nun folgendes Resultat zeigen, siehe dazu auch

Proposition 2.7. Seien M und N zwei R -Moduln, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus

$$f : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \rightarrow S^{-1}(M \otimes_R N)$$

zwischen den $S^{-1}R$ -Moduln, sd.

$$f \left(\frac{m}{s_1} \otimes \frac{n}{s_2} \right) = \frac{m \otimes n}{s_1 s_2}.$$

Dies lässt sich nun auf unser Tensorprodukt $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ anwenden, indem wir $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ setzen und mit $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und dem obigen Resultat ergibt sich dann

$$S^{-1}R \simeq \mathbb{Q}, \quad S^{-1}M \simeq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad S^{-1}N \simeq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

Weiterhin gilt

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},$$

denn mit der Bilinearität des Tensorprodukt gilt für

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) &\simeq \left\langle \left\{ \frac{r \otimes s}{z} \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1} \right\} \right\rangle \\ &\simeq \left\langle \left\{ \frac{r}{z} \otimes s \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1} \right\} \right\rangle \\ &\simeq \mathbb{Z} \setminus \{0\}^{-1} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wobei wir mit $\langle \cdot \rangle$ hier das Erzeugnis meinen. Insgesamt erhalten wir also mit der Proposition

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}. \quad (4)$$

Wir können die Dehn-Invariante also auch auf dem \mathbb{Q} -Vektorraum $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ betrachten, was uns zu der folgenden Tatsache führt.

Satz 2.8. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ Elemente, dann gilt

$$x \otimes y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y \in \pi\mathbb{Q}.$$

Beweis. Die Rückrichtung ist schnell gezeigt, denn für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $y = \pi \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, gilt

$$x \otimes y = x \otimes \pi \frac{p}{q} = xp \otimes \frac{\pi}{q} = q \frac{xp}{q} \otimes \frac{\pi}{q} = \frac{xp}{q} \otimes \pi = \frac{xp}{q} \otimes 0 = 0.$$

Dabei haben wir p zuerst nach links und danach q nach rechts bewegt.

Zur Hinrichtung: □

Wir erhalten also auch:

Folgerung 2.9. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ Elemente, dann gilt

$$x \otimes y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \notin \pi\mathbb{Q}.$$

Folglich ist die Dehn-Invariante eines Polyeders 0, falls dessen Diederwinkel alle in $\pi\mathbb{Q}$ liegen.

Wir können nun die Dehn-Invarianten einiger Polyeder berechnen.

Beispiel 2.10 (Quader). Sei P ein dreidimensionaler Quader. Dann gilt für alle Kanten k von P , dass $w(k) = \frac{\pi}{2}$. Also gilt $w(k) \in \pi\mathbb{Q}$ für alle Kanten k und nach Bemerkung 2.8 folgt

$$D(P) = 0.$$

Beispiel 2.11 (regulärer Tetraeder). Sei P ein dreidimensionaler regulärer Tetraeder, also haben alle Kanten von P die gleiche Länge l und den gleichen Diederwinkel α . Seien A, B, C, D die Ecken von P wie in Abbildung 4. Sei F der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} , also $|BF| = \frac{l}{2}$ und damit ist nach Pythagoras $|AF| = \frac{\sqrt{3}}{2}l = |DF|$. Der Mittelpunkt E des Dreiecks ABC hat gerade den Abstand $\frac{\sqrt{3}}{3}l = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ zu F und schließlich gilt mit Pythagoras

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{l}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{3} \quad \text{also} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

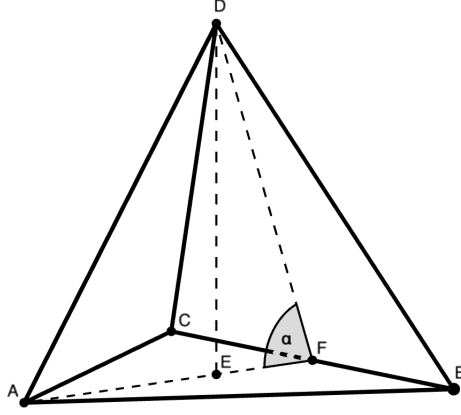


Abbildung 4: Ein regulärer Tetraeder

Damit können wir die Dehn-Invariante berechnen. Es gibt sechs Kanten der Länge l , die alle den Diederwinkel $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ haben, also

$$D(P) = \sum_{i=1}^6 l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Proposition 2.12. Für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt, $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist irrational.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

für $\alpha = (k+1)\varphi$ und $\beta = (k-1)\varphi$ gilt

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi) + \cos((k-1)\varphi) &= 2 \cos\left(\frac{(k+1)\varphi + (k-1)\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{(k+1)\varphi - (k-1)\varphi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\cos((k+1)\varphi) = 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) - \cos((k-1)\varphi). \quad (5)$$

Wir definieren uns nun $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ für $n = 2l+1$ mit $l \in \mathbb{N}$. Dann ist $\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $0 \leq \varphi_n \leq \pi$.

Mit Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir, dass gilt

$$\cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}, \quad (6)$$

wobei A_k eine ganze Zahl ist, die nicht durch n teilbar ist. Wir beginnen und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \text{für } k=0 \quad 1 &= \cos(0 \cdot \varphi_n) = \frac{A_0}{\sqrt{n}^0} = A_0 \\ \text{für } k=1 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} &= \cos(1 \cdot \varphi_n) = \frac{A_1}{\sqrt{n}^1} = \frac{A_0}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

und damit $A_0 = A_1 = 1$ ist. Weiterhin gilt mit 5

$$\begin{aligned}\cos((k+1)\varphi_n) &= 2\cos(k\varphi_n)\cos(\varphi_n) - \cos((k-1)\varphi_n) \\ &= 2\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} \\ &\quad \quad \quad =: \overbrace{A_k}^{A_{k+1}} \\ &= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}.\end{aligned}$$

Da A_k nicht durch n teilbar ist und $n \geq 3$ ungerade, ist die Zahl $2A_k$ auch nicht durch n teilbar und damit auch nicht $A_{k+1} := 2A_k - nA_{k-1}$. Wir haben also eine konkrete Darstellung für A_{k+1} gefunden und sind mit der Induktion fertig.

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis. Angenommen $\frac{1}{\pi}\varphi_n$ ist rational mit

$$\frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{m}{k}$$

für $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit $k\varphi_n = m\pi$ und 6

$$\pm 1 = \cos(m\pi) = \cos(k\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n^k}}.$$

Also auch $\sqrt[n]{n} = \pm A_k$ und da A_k eine ganze Zahl ist, ist $\sqrt[n]{n}$ auch eine und somit $k \geq 2$. Damit ist jedoch n ein Teiler von $\sqrt[n]{n}^k$ und da $\sqrt[n]{n}^k | A_k$, teilt n auch A_k , was ein Widerspruch ist. \square

Damit folgt also für $n = 9$, dass $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ nicht in $\pi\mathbb{Q}$ liegt. Wir erhalten unser folgendes Resultat.

Folgerung 2.13 (Dehns Lösung). Sei Q ein Quader und T ein regulärer Tetraeder mit Kantenlänge l . Angenommen Q und T sind zerlegungsgleich, dann gilt mit Satz 2.5 sowohl $\text{vol}(Q) = \text{vol}(T)$, als auch $D(Q) = D(T)$. Nach Beispiel 2.10 gilt $D(Q) = 0$ und nach Beispiel 2.11 gilt

$$D(T) = 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Da nach Proposition 2.12 $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ irrational ist, liegt $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ nicht in $\pi\mathbb{Q}$ und damit ist nach Bemerkung 2.8 mit $l \neq 0$ auch $6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$. Also gilt

$$D(Q) = 0 \neq 6l \otimes_{\mathbb{Z}} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = D(T).$$

Was ein Widerspruch ist.

Damit sind Q und T nicht zerlegungsgleich.