Funktionentheorie

Jannis Klingler

24. April 2019

1 Holomorphe und analytische Funktionen

1.1 Analytische Funktionen

Wiederholung. Setze $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ definiere:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) \quad \text{Vektoraddition} \\ z \cdot w &= (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \\ 0 &= (0, 0) \qquad \text{neutrales Element } (+) \\ 1 &= (1, 1) \qquad \text{neutrales Element } (\cdot) \\ i &= (0, 1) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation: $z \to \overline{z} = (x, -y)$ ist ein Automorphismus, dh.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{0} &= 0 \\ \overline{1} &= 1 \\ \overline{i} &= (0, 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.

$$-z = (-x, -y) \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

wir definieren einen Absolutbetrag $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$, denn $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$
Jetzt können wir schreiben $z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
Graphische Darstellung ("Gaußsche Zahlenebene").

Zur Erinnerung:

Definition 1.1 (Topologischer Raum)**.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, offener Teilmengen geschrieben werden kann.

Definition 1.2 (Wegzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ gibt.

Satz 1.3. Eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis. " $\Leftarrow$ ": Sei X wegzusammenhängend. Seien $U, V \subset X$ offen, $X = U \cup V$, $p \in U$, $q \in V$ (also U, V nicht leer). Dann existiert $\gamma : [0, 1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Dann sind $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V) \subset [0, 1]$ offen. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist und $0 \in \gamma^{-1}(U)$, $1 \in \gamma^{-1}(V)$, $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(X) = [0, 1]$ folgt $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$.
Also existiert $t \in \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V)$ und $\gamma(t) \in U \cap V$. Da das für alle offenen, nichtleeren Teilmengen U, V mit $U \cup V = X$ gilt, ist X zusammenhängend.
" $\Rightarrow$ ": Sei $X \subset \mathbb{C}$ (offen) zusammenhängend.
Sei $p \in X$ und sei $U = \{q \in X \mid \exists \gamma : [0, 1] \to X \text{ stetig} : \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}$
Behauptung: U ist offen, also existiert $\varepsilon > 0$, sd. $B_\varepsilon(q) \subset X$. Sei $q' \in B_\varepsilon(q)$. Dann existiert $\gamma' : [0, 1] \to X$, sd.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2 - 2t)q + (2t - 1)q' & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_\varepsilon(q) \subset U \Rightarrow U$ offen.
Behauptung: $X \setminus U$ ist offen:
Sei $q \in X \setminus U$. Da X offen, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subset X$. Wäre $B_\varepsilon(q) \cap U \neq \emptyset$, so existiert $q' \in B_\varepsilon(q) \cap U$, ein Weg γ von p nach q in X und mit einer ähnlichen Konstruktion auch eine Kurve γ' von p nach q. Also auch $X \setminus U = \emptyset$.
$\Rightarrow X$ ist wegzusammenhängend. □

Definition 1.4 (Gebiet)**.** Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine (komplexe) Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle n. Sie hat den Konvergenzradius $\rho = \left(limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$. Dann:

$$R(z) \text{ konvergiert für alle } z \text{ mit } |z| < \rho$$
$$R(z) \text{ divergiert für alle } z \text{ mit } |z| > \rho$$

wenn $\rho > 0$ ist, heißt $R(z)$ konvergent und $B_\rho(0) \subset \mathbb{C}$ der Konvergenzkreis.

Definition 1.5 (Analytische Funktion)**.** Es sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine analytische Funktion (auf Ω), wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Potenzreihe $R(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ existiert, sd. $f(z) = R(z - z_0)$ für alle $z \in \Omega \cap B_\rho(z_0)$.