Funktionentheorie

Jannis Klingler

29. April 2019

1 Holomorphe und analytische Funktionen

1.1 Analytische Funktionen

Wiederholung. Setze $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ definiere:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) \quad \text{Vektoraddition} \\ z \cdot w &= (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \\ 0 &= (0, 0) \qquad \text{neutrales Element } (+) \\ 1 &= (1, 1) \qquad \text{neutrales Element } (\cdot) \\ i &= (0, 1) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation: $z \to \overline{z} = (x, -y)$ ist ein Automorphismus, dh.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{0} &= 0 \\ \overline{1} &= 1 \\ \overline{i} &= (0, 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.

$$-z = (-x, -y) \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

wir definieren einen Absolutbetrag $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$, denn $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$

Jetzt können wir schreiben $z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$

Graphische Darstellung ("Gaußsche Zahlenebene").

Zur Erinnerung:

Definition 1.1 (Topologischer Raum)**.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, offener Teilmengen geschrieben werden kann.

Definition 1.2 (Wegzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ gibt.

Satz 1.3. Eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis. " $\Leftarrow$ ": Sei X wegzusammenhängend. Seien $U, V \subset X$ offen, $X = U \cup V$, $p \in U$, $q \in V$ (also U, V nicht leer). Dann existiert $\gamma : [0, 1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Dann sind $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V) \subset [0, 1]$ offen. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist und $0 \in \gamma^{-1}(U)$, $1 \in \gamma^{-1}(V)$, $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(X) = [0, 1]$ folgt $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$.

Also existiert $t \in \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V)$ und $\gamma(t) \in U \cap V$. Da das für alle offenen, nichtleeren Teilmengen U, V mit $U \cup V = X$ gilt, ist X zusammenhängend.

Einfacher:

Angenommen X ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene, nicht-leere Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

Wähle jetzt $p \in U$, $q \in V$. Gäbe es einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, dann wäre $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, im Widerspruch zum Zwischenwertsatz.
" $\Rightarrow$ ": Sei $X \subset \mathbb{C}$ (offen) zusammenhängend.
Sei $p \in X$ und sei $U = \{q \in X \mid \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} : \gamma(0) = p, \ \gamma(1) = q\}$
Behauptung: U ist offen, also existiert $\varepsilon > 0$, sd. $B_\varepsilon(q) \subset X$. Sei $q' \in B_\varepsilon(q)$. Dann existiert $\gamma' : [0,1] \to X$, sd.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)q + (2t-1)q' & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_\varepsilon(q) \subset U \Rightarrow U$ offen.
Behauptung: $X \setminus U$ ist offen:
Sei $q \in X \setminus U$. Da X offen, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subset X$. Wäre $B_\varepsilon(q) \cap U \neq \emptyset$, so existiert $q' \in B_\varepsilon(q) \cap U$, ein Weg γ von p nach q in X und mit einer ähnlichen Konstruktion auch eine Kurve γ' von p nach q. Also auch $X \setminus U = \emptyset$.
$\Rightarrow X$ ist wegzusammenhängend. □

Definition 1.4 (Gebiet)**.** Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine (komplexe) Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle n. Sie hat den Konvergenzradius $\rho = \left(limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0, \infty]$. Dann:

$$R(z) \text{ konvergiert für alle } z \text{ mit } |z| < \rho$$
$$R(z) \text{ divergiert für alle } z \text{ mit } |z| > \rho$$

wenn $\rho > 0$ ist, heißt $R(z)$ konvergent und $B_\rho(0) \subset \mathbb{C}$ der Konvergenzkreis.

Definition 1.5 (Analytische Funktion)**.** Es sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine analytische Funktion (auf Ω), wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Potenzreihe $R(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ existiert, sd. $f(z) = R(z - z_0)$ für alle $z \in \Omega \cap B_\rho(z_0)$.

Beispiel 1.6. Betrachte die Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\limsup \sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|} = 0 \quad \Rightarrow$ Konvergenzradius ist $\rho = \infty$. Mit dem Umordnungssatz zeigt man

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Da die Exponentialreihe reelle Koeffizienten hat, gilt

$$\overline{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$$

Sei jetzt $z = x + iy$, dann gilt

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

und $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^0 = 1$.
Also definiere $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$.
Jetzt kann man komplexe Multiplikation in Polarkoordinaten verstehen.
Schreibe $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\varphi}$ dann heißt $r = |z|$ der Absolutbetrag und $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ das Argument.
Wir repräsentieren φ durch die Funktion $arg : \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$.
$z \cdot w = r \cdot e^{i\varphi} \cdot s \cdot e^{i\psi} = (rs) \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$.

Satz 1.7 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls es $z_0 \in \Omega$ und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gibt, sd. $f(z_n) = 0$ für alle n, dann ist $f = 0$ konstant.

Folgerung 1.8. Seien f, g zwei analytische Funktionen auf Ω, z_0, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, aber mit $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n, dann folgt $f = g$ auf ganz Ω.

Definition 1.9. f heißt analytisch auf Ω, wenn es zu jedem Punkt $z \in \Omega$ eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z und eine Potenzreihe R um z gibt, die auf ganz U konvergiert, sd. $R(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Sei zunächst U Umgebung von z, auf der f mit einer Potenzreihe $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)$ übereinstimmt.
Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Da R konvergiert, gilt $\rho > 0$, also $\infty > \frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $C > \frac{1}{\rho}$, sd. $|a_n| < C^n$ für alle $n \geq n_0$. Da nur endlich viele $n \leq n_0$ existieren, können wir C ggf. etwas größer wählen, sd. $|a_n| < C^n$ für alle n. Wir beweisen indirekt, dass alle $a_n = 0$ sind, dh. wir nehmen an, es gäbe n mit $a_n \neq 0$. Es sei n_0 das kleinste n mit $a_{n_0} \neq 0$, dh. $a_n = 0$ für $n < n_0$. Wir suchen $r > 0$, sd. $|a_n z^{n_0}| > \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \left(\geq |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n|\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < r$. Denn dann folgt $R(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{a_n}^{z^n} \neq 0$ für z wie oben, also auch für unendlich viele der Folgenglieder z_n aus unserer Annahme.

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C^n |z^n| \underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{C^{n+1}|z|^{n+1}}{1 - C|z|}$$

Wir suchen also $r > 0$, sd.

$$\begin{aligned} |a_{n_0}| r^{n_0} > \underbrace{\frac{C^{n+1}|z|^{n+1}}{1 - Cr}}_{> 0,\text{ für } r > \frac{1}{C}} \quad &\Leftrightarrow \quad |a_n|(r^{n_0} - Cr^{n_0+1}) > C^{n_0+1} r^{n_0+1} \\ &\Leftrightarrow \quad |a_{n_0}| > r(C^{n_0+1} + |a_{n_0}|C) \\ &\Leftrightarrow \quad r > \frac{|a_{n_0}|}{C^{n_0+1} + |a_{n_0}|C} \end{aligned}$$

Jetzt folgt für alle z mit $0 < |z| < r$, dass $R(z) \neq 0$ wie gewünscht, Widerspruch!
Also folgt $R = 0$ und somit $f|_U = 0$. Definiere $W = \{z \in \Omega \mid z \text{ hat Umgebung } U \text{ mit } f|_U = 0\}$ $\Rightarrow$ W ist offen und nichtleer.
Behauptung: W ist auch abgeschlossen. Falls nicht, existiert ein Häufungspunkt z_0 von W in Ω mit $z_0 \in W$. Dann existiert $(z_n)_n$ Folge in $W \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $f(z_n) = 0$ für alle n. Mit den obigen Argumenten folgt: z_0 hat Umgebung $U \subset \Omega$ mit $f|_U = 0$, somit $z_0 \in W$.
W offen, abgeschlossen und nichtleer $\Rightarrow$ (da Ω zusammenhängend ist) $\Omega = W$, also $f = 0$. □

(Proposition im Kurzskript zum Rechnen mit Potenzreihen)...

1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 1.10. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$- antilinear, wenn

$$A(zw) = \overline{z} \cdot A(w) \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung lässt sich zerlegen als $A = A' + A''$ mit $A'(z) = a' \cdot z$ und $A''(z) = a'' \cdot \overline{z}$, dabei heißen A' der Linearteil und A'' der Antilinearteil von A.
Insbesondere ist A genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $A'' = 0$.

Beweis. Setze $A'(z) = \frac{A(z)-i\cdot A(iz)}{2}$, $A''(z) = \frac{A(z)+i\cdot A(iz)}{2}$. Daraus folgt

$$A'(z) + A''(z) = \frac{A(z) - i \cdot A(iz)}{2} + \frac{A(z) + i \cdot A(iz)}{2} = A(z)$$

$$\begin{aligned} A'((u+iv)\cdot z) &= \frac{A(uz) + A(ivz) - iA(iuz) - iA(-vz)}{2} \\ &= \frac{uA(z) \overbrace{-iviA(iz)}^{=+vA(iz)} -iuA(iz) + ivA(z)}{2} \\ &= \frac{(u+iv)(A(z) - iA(iz))}{2} \\ &= (u+iv)A'(z) \end{aligned}$$

Analog dazu ist A'' $\mathbb{C}$-antilinear. Es folgt $A'(z) = A'(z \cdot 1) = z \cdot \underbrace{A'(1)}_{a'}$,

$A''(z) = A''(z \cdot 1) = \overline{z} \cdot \underbrace{A''(1)}_{a''}$. □

Erinnerung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ eine Funktion. f heißt total differenzierbar bei $z_0 \in U$, falls eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert, sd.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Dann ist f auch partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind gerade die Einträge der reellen 2×2-Matrix A.

Definition 1.11 (Komplexe Differenzierbarkeit)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar bei $z_0 \in U$, falls $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die komplexe Ableitung $f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Wenn f auf ganz U differenzierbar ist, heißt f auch holomorph auf U.

Definition 1.12. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Schreibe $f = u+iv$ für Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$, sowie $z = x + iy$.
Definiere die Wirtinger-Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Beispiel 1.13. $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$

Lemma 1.14. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in U$. Dann sind äquivalent

1. f ist komplex differenzierbar bei z_0
2. Es existiert eine stetige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \varphi(z) \cdot (z - z_0)$
3. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung
4. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}|_{z_0} = 0$
5. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann- Differentialgleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x}|_{z_0} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{z_0}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}|_{z_0} = -\frac{\partial v}{\partial x}|_{z_0}$, wobei wieder $f = u + iv$ gelte.

Insbesondere ist f dann auch bei z_0 stetig.