Funktionentheorie

Jannis Klingler

16. Mai 2019

1 Holomorphe und analytische Funktionen

1.1 Analytische Funktionen

Wiederholung. Setze $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ definiere:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) \quad \text{Vektoraddition} \\ z \cdot w &= (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \\ 0 &= (0, 0) \qquad \text{neutrales Element } (+) \\ 1 &= (1, 1) \qquad \text{neutrales Element } (\cdot) \\ i &= (0, 1) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation: $z \to \overline{z} = (x, -y)$ ist ein Automorphismus, dh.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{0} &= 0 \\ \overline{1} &= 1 \\ \overline{i} &= (0, 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.

$$-z = (-x, -y) \qquad\qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

wir definieren einen Absolutbetrag $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$, denn $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$
Jetzt können wir schreiben $z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
Graphische Darstellung ("Gaußsche Zahlenebene").

Zur Erinnerung:

Definition 1.1 (Topologischer Raum)**.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, offener Teilmengen geschrieben werden kann.

Definition 1.2 (Wegzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ gibt.

Satz 1.3. Eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis. " $\Leftarrow$ ": Sei X wegzusammenhängend. Seien $U, V \subset X$ offen, $X = U \cup V$, $p \in U$, $q \in V$ (also U, V nicht leer). Dann existiert $\gamma : [0, 1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Dann sind $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V) \subset [0, 1]$ offen. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist und $0 \in \gamma^{-1}(U)$, $1 \in \gamma^{-1}(V)$, $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(X) = [0, 1]$ folgt $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$.
Also existiert $t \in \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V)$ und $\gamma(t) \in U \cap V$. Da das für alle offenen, nichtleeren Teilmengen U, V mit $U \cup V = X$ gilt, ist X zusammenhängend.
Einfacher:
Angenommen X ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene, nicht-leere Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

Wähle jetzt $p \in U$, $q \in V$. Gäbe es einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, dann wäre $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, im Widerspruch zum Zwischenwertsatz.
" $\Rightarrow$ ": Sei $X \subset \mathbb{C}$ (offen) zusammenhängend.
Sei $p \in X$ und sei $U = \{q \in X \mid \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} : \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}$
Behauptung: U ist offen, also existiert $\varepsilon > 0$, sd. $B_\varepsilon(q) \subset X$. Sei $q' \in B_\varepsilon(q)$. Dann existiert $\gamma' : [0,1] \to X$, sd.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)q + (2t-1)q' & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_\varepsilon(q) \subset U \Rightarrow U$ offen.
Behauptung: $X \setminus U$ ist offen:
Sei $q \in X \setminus U$. Da X offen, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subset X$. Wäre $B_\varepsilon(q) \cap U \neq \emptyset$, so existiert $q' \in B_\varepsilon(q) \cap U$, ein Weg γ von p nach q in X und mit einer ähnlichen Konstruktion auch eine Kurve γ' von p nach q. Also auch $X \setminus U = \emptyset$.
$\Rightarrow X$ ist wegzusammenhängend. $\square$

Definition 1.4 (Gebiet)**.** Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine (komplexe) Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form $R(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle n. Sie hat den Konvergenzradius $\rho = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0, \infty]$. Dann:

$$R(z) \text{ konvergiert für alle } z \text{ mit } |z| < \rho$$
$$R(z) \text{ divergiert für alle } z \text{ mit } |z| > \rho$$

wenn $\rho > 0$ ist, heißt $R(z)$ konvergent und $B_\rho(0) \subset \mathbb{C}$ der Konvergenzkreis.

Definition 1.5 (Analytische Funktion)**.** Es sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine analytische Funktion (auf Ω), wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Potenzreihe $R(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ existiert, sd. $f(z) = R(z - z_0)$ für alle $z \in \Omega \cap B_\rho(z_0)$.

Beispiel 1.6. Betrachte die Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$$

$\limsup \sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|} = 0 \quad \Rightarrow$ Konvergenzradius ist $\rho = \infty$. Mit dem Umordnungssatz zeigt man

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Da die Exponentialreihe reelle Koeffizienten hat, gilt

$$\overline{e^z} = \sum_{n=0}^\infty \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$$

Sei jetzt $z = x + iy$, dann gilt

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

und $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^0 = 1$.
Also definiere $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$.
Jetzt kann man komplexe Multiplikation in Polarkoordinaten verstehen.
Schreibe $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\varphi}$ dann heißt $r = |z|$ der Absolutbetrag und $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ das Argument.
Wir repräsentieren φ durch die Funktion $arg : \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$.
$z \cdot w = r \cdot e^{i\varphi} \cdot s \cdot e^{i\psi} = (rs) \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$.

Satz 1.7 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls es $z_0 \in \Omega$ und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gibt, sd. $f(z_n) = 0$ für alle n, dann ist $f = 0$ konstant.

Folgerung 1.8. Seien f, g zwei analytische Funktionen auf Ω, z_0, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, aber mit $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n, dann folgt $f = g$ auf ganz Ω.

Definition 1.9. f heißt analytisch auf Ω, wenn es zu jedem Punkt $z \in \Omega$ eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z und eine Potenzreihe R um z gibt, die auf ganz U konvergiert, sd. $R(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Sei zunächst U Umgebung von z, auf der f mit einer Potenzreihe $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)$ übereinstimmt.
Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Da R konvergiert, gilt $\rho > 0$, also $\infty > \frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $C > \frac{1}{\rho}$, sd. $|a_n| < C^n$ für alle $n \geq n_0$. Da nur endlich viele $n \leq n_0$ existieren, können wir C ggf. etwas größer wählen, sd. $|a_n| < C^n$ für alle n. Wir beweisen indirekt, dass alle $a_n = 0$ sind, dh. wir nehmen an, es gäbe n mit $a_n \neq 0$. Es sei n_0 das kleinste n mit $a_{n_0} \neq 0$, dh. $a_n = 0$ für $n < n_0$. Wir suchen $r > 0$, sd. $|a_n z^{n_0}| > \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \left(\geq |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n|\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < r$. Denn dann folgt $R(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{a_n}^{z^n} \neq 0$ für z wie oben, also auch für unendlich viele der Folgenglieder z_n aus unserer Annahme.

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C^n |z^n| \underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{C^{n+1}|z|^{n+1}}{1 - C|z|}$$

Wir suchen also $r > 0$, sd.

$$\begin{aligned} |a_{n_0}| r^{n_0} > \underbrace{\frac{C^{n+1}|z|^{n+1}}{1 - Cr}}_{> 0,\ \text{für } r > \frac{1}{C}} \quad &\Leftrightarrow \quad |a_n|(r^{n_0} - Cr^{n_0+1}) > C^{n_0+1} r^{n_0+1} \\ &\Leftrightarrow \quad |a_{n_0}| > r(C^{n_0+1} + |a_{n_0}|C) \\ &\Leftrightarrow \quad r > \frac{|a_{n_0}|}{C^{n_0+1} + |a_{n_0}|C} \end{aligned}$$

Jetzt folgt für alle z mit $0 < |z| < r$, dass $R(z) \neq 0$ wie gewünscht, Widerspruch!
Also folgt $R = 0$ und somit $f|_U = 0$. Definiere $W = \{z \in \Omega \mid z \text{ hat Umgebung } U \text{ mit } f|_U = 0\}$
$\Rightarrow W$ ist offen und nichtleer.
Behauptung: W ist auch abgeschlossen. Falls nicht, existiert ein Häufungspunkt z_0 von W in Ω mit $z_0 \in W$. Dann existiert $(z_n)_n$ Folge in $W \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $f(z_n) = 0$ für alle n. Mit den obigen Argumenten folgt: z_0 hat Umgebung $U \subset \Omega$ mit $f|_U = 0$, somit $z_0 \in W$.
W offen, abgeschlossen und nichtleer $\Rightarrow$ (da Ω zusammenhängend ist) $\Omega = W$, also $f = 0$. □

(Proposition im Kurzskript zum Rechnen mit Potenzreihen)...

1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 1.10. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$- antilinear, wenn

$$A(zw) = \overline{z} \cdot A(w) \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung lässt sich zerlegen als $A = A' + A''$ mit $A'(z) = a' \cdot z$ und $A''(z) = a'' \cdot \overline{z}$, dabei heißen A' der Linearteil und A'' der Antilinearteil von A.
Insbesondere ist A genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $A'' = 0$.

Beweis. Setze $A'(z) = \frac{A(z)-i\cdot A(iz)}{2}$, $A''(z) = \frac{A(z)+i\cdot A(iz)}{2}$. Daraus folgt

$$A'(z) + A''(z) = \frac{A(z) - i \cdot A(iz)}{2} + \frac{A(z) + i \cdot A(iz)}{2} = A(z)$$

$$\begin{aligned}
A'((u+iv)\cdot z) &= \frac{A(uz) + A(ivz) - iA(iuz) - iA(-vz)}{2} \\
&= \frac{uA(z) \overbrace{-iviA(iz)}^{=+vA(iz)} -iuA(iz) + ivA(z)}{2} \\
&= \frac{(u+iv)(A(z) - iA(iz))}{2} \\
&= (u+iv)A'(z)
\end{aligned}$$

Analog dazu ist A'' $\mathbb{C}$-antilinear. Es folgt $A'(z) = A'(z \cdot 1) = z \cdot \underbrace{A'(1)}_{a'}$,

$A''(z) = A''(z \cdot 1) = \overline{z} \cdot \underbrace{A''(1)}_{a''}$. ☐

Wiederholung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ eine Funktion. f heißt total differenzierbar bei $z_0 \in U$, falls eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert, sd.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Dann ist f auch partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind gerade die Einträge der reellen 2×2-Matrix A.

Definition 1.11 (Komplexe Differenzierbarkeit)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar bei $z_0 \in U$, falls $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die komplexe Ableitung $f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Wenn f auf ganz U differenzierbar ist, heißt f auch holomorph auf U.

Definition 1.12. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Schreibe $f = u + iv$ für Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$, sowie $z = x + iy$.
Definiere die Wirtinger-Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Beispiel 1.13. $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$

Lemma 1.14 (Definition)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in U$. Dann sind äquivalent

1. f ist komplex differenzierbar bei z_0
2. Es existiert eine stetige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \varphi(z) \cdot (z - z_0)$
3. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung
4. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}|_{z_0} = 0$

5. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann- Differentialgleichungen (C-R-DGL): $\frac{\partial u}{\partial x}|_{z_0} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{z_0}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}|_{z_0} = -\frac{\partial v}{\partial x}|_{z_0}$, wobei wieder $f = u + iv$ gelte.

Insbesondere ist f dann auch bei z_0 stetig.

Beweis. (1)⇒(2): Setze

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Stetigkeit bei z_0 folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit.
(2)⇒(3): Schreibe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \varphi(z_0)\cdot(z - z_0)}{|z - z_0|} = \lim_{z\to z_0} \underbrace{(\varphi(z) - \varphi(z_0))}_{\to\, 0, \text{ da } \varphi \text{ stetig in } z_0.} \underbrace{\frac{z - z_0}{|z - z_0|}}_{\text{beschränkt (Norm 1)}} = 0$$

⇒ f ist bei z_0 total-reell-differenzierbar. Die Ableitung ist die $\mathbb{C}$- lineare Abbildung $\omega \mapsto \varphi(z_0)\cdot\omega$.
(3)⇒(4): Da die reelle Ableitung $\mathbb{C}$-linear ist, folgt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ (was nach Definition gerade der Antilinearteil der Ableitung ist)
(4)⇒(5):

$$0 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)}_{\in\mathbb{C}} \underset{\text{Def. 1.12}}{=} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(z_0)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(z_0)}_{\text{Imaginärteil}}$$

hieraus lassen sich die C-R-DGL direkt ablesen.
(5)⇒(1): Schreibe $z = z_0 + x + iy$ dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial v}{\partial x}ix + \frac{\partial v}{\partial y}iy + R(x,y) \\ &\overset{\text{C-R-DGL}}{=} f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) - \frac{\partial v}{\partial x}(y - ix) + R(x,y) \\ &= f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot(x + iy) + R(x,y) \end{aligned}$$

mit $R(x,y) = o(|(x,y)|)$, das heißt $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{R(x,y)}{|(x,y)|} = 0$ (der Restterm geht schneller gegen Null als (x,y)). Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot(z - z_0) + R(x,y)}{z - z_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{z\to z_=} \underbrace{\frac{R(x,y)}{|z - z_0|}}_{\to\, 0} \cdot \underbrace{\frac{|z - z_0|}{z - z_=}}_{\text{beschränkt}} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.15. Die komplexe Exponentialfunktion ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ (Begründung folgt)

Proposition 1.16. Es gelten folgende Differentiationsregeln:

1. <u>Linearität:</u> Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $a, b \in \mathbb{C}$, dann ist $a \cdot f + b \cdot g$ holomorph mit $(a \cdot f + b \cdot g)'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$.

2. Kettenregel: Sei $f : \Omega \to \Omega'$, $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $(g \circ f)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

3. Produktregel: Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f \cdot g$ holomorph mit Ableitung $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.

Beweis. (1): Additivität ist klar. Multiplikativität siehe (3)
(2): Übung
(3): Schreibe $f = u+iv$, $g = r+is$, $u, v, r, s : \Omega \to \mathbb{R}$, dann ist $f \cdot g = (u \cdot r - v \cdot s) + i \cdot (u \cdot s + v \cdot r)$. Jetzt setzen wir mit den reellen Produktregeln fort und sind fertig. □

Satz 1.17. Es sei $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, dann ist $R(z)$ auf $B_\rho(0)$ holomorph mit Ableitung

$$R'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+1)z^m, \quad n-1 = m.$$

Beweis. Siehe Analysis, beruht auf folgendem Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge differenzierbarer Funktionen auf U, sd. $(f_n)_n$ punktweise und $(f_n')_n$ lokal-gleichmäßig konvergiert.
$\Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ □

1.3 Das komplexe Kurvenintegral

Definition 1.18. Eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung, sd. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ existieren, für die $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \in C^1$ für $i = 1, \ldots, n$.
Für $t \neq t_i$, $t \in [a, b]$, sei $\dot\gamma(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor. γ heißt geschlossen, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

Definition 1.19 (Kurvenintegral)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ stückweise C^1, sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$

Dazu bilden wir rechts Real- und Imaginärteil des Integranden und integrieren diese seperat mit dem Riemann-/ Regel-/ Lesegueintegral.

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b \underbrace{(u(\gamma(t)) + i \cdot v(\gamma(t)))}_{f(z)} \cdot \underbrace{(\dot x(t) + i \cdot \dot y(t))\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}z}$$

,wobei $f = u+iv$, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\gamma = x+iy$, $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ausmultiplizieren vgl Kurzskript). Mithin ist $f(z) = f(\gamma(t))$ der "Integrand" und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)\mathrm{d}t$ das "Tangentenelement" des Kurvenintegrals.

Bemerkung 1.

$$\overset{\text{ausmult.}}{=} \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \dot x(t) - v(\gamma(t)) \cdot \dot y(t)\mathrm{d}t + i \cdot \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \dot y(t) + v(\gamma(t)) \cdot \dot x(t))\mathrm{d}t$$

Der Realteil ist das Kurvenintegral über $\overline{f} = u - iv$ aus der Analysis (aufgefasst als Vektorfeld $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ f \\ \mathrm{Im}\ f \end{pmatrix}$) und der Imaginärteil das entsprechende "normale" Kurvenintegral.

Proposition 1.20. Es sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ ein stückweiser C^1-Diffeomorphismus, dann ist $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve. $sign(\dot{\varphi})$ lässt sich zu einer konstanten Funktion auf $[c,d]$ fortsetzen und für alle stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = sign(\dot{\varphi}) \int_{\gamma\circ\varphi} f(\omega)\mathrm{d}\omega$$

Beweis. Übung mit Substitutionsformel.
(Ein stückweise C^1-Diffeomorphismus $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ ist ein Homomorphismus, sd. ein $m \in \mathbb{N}$ und $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = d$ existieren mit $\varphi|_{[s_{i-1},s_i]} \in C^1([s_{i-1},s_i])$ für $i = 1,\ldots,m$) □

Folgerung 1.21 (aus Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(\gamma(t))|_{t=a}^{b} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis. Es sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, sd. $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \in C^1([t_{i-q},t_i])$ für $i = 1,\ldots,n$.

$$[t_{i-1},t_i] \xrightarrow{\gamma_i} \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} f'(z)\mathrm{d}z = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\gamma_i(t)) \cdot \dot{\gamma_i}(t)\mathrm{d}t &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f\circ\gamma_i)'(t)\mathrm{d}t \\ &= (f\circ\gamma_i)(t_i) - (f\circ\gamma_i)(t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z &= (f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))) + (f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1))) + \ldots + (f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_{n-1}))) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2. Wir möchten uns das komplexe Kurvenintegral als Umkehrung der komplexen Ableitung vorstellen. Wir sehen im nächsten Abschnitt, für welche Funktionen das geht.

1.4 Der Cauchy-Integralsatz

Definition 1.22 (stückweise C^1-Homotopie)**.** Eine stückweise C^1-Homotopie, in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, zwischen zwei stückweisen C^1-Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$ ist eine stetige Abbildung $h : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, sd. $m,n \in \mathbb{N}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $0 = s_0 < \ldots < s_m = 1$ existieren, sd. $h|_{[t_{j-1},t_j]\times[s_{k-1},s_k]} \in C^1$ ist (auch auf den jeweiligen Randstücken) und $h(t,l) = \gamma_l(t)$ für $l \in [0,1]$, $t \in [a,b]$ und $h(a,s) = p$, $h(b,s) = q$ für alle $s \in [0,1]$.

Definition 1.23 (homotope Kurve)**.** Eine (stückweise C^1-) Kurve $\gamma_0 : [a,b] \to \Omega$ heißt zu einer (stückweisen C^1-) Kurve $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, (stückweise C^1-) homotop in Ω, wenn es eine stückweise C^1-Homotopie zwischen ihnen in Ω gibt.

Definition 1.24 (nullhomotope Kurve)**.** Eine geschlossene (stückweise C^1-) Kurve γ heißt (stückweise C^1-) nullhomotop in Ω, wenn sie C^1-homotop zu einer konstanten Kurve ist.

Definition 1.25 (einfach zusammenhängend)**.** Das Gebiet Ω heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene (stückweise C^1-) Kurve in Ω (stückweise C^1-) nullhomotop in Ω ist.

Bemerkung 3 (Einschub zu Kurvenintegral)**.** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise C^1-Kurve, dann definieren wir die Bogenlänge (bzw. Länge) als

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| \mathrm{d}t = \sup_{n, a=t_0<\ldots<t_n=b} \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\left| \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \mathrm{d}t \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)| \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot \dot\gamma(t) \mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).\end{aligned}$$

Satz 1.26 (Cauchy-Integralsatz)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve, die in Ω stückweise C^1-nullhomotop ist. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für jede stückweise C^1-Abbildung $h : \underbrace{[a,b] \times [0,1]}_{R} \to \Omega$ gilt

$$\int_{h(\partial R)} f(z) \mathrm{d}z = 0.$$

Dabei ist $\int_{h(\partial R)}$ eine Abkürzung für $\int_{h(\partial R)} = \int_{h_1} + \int_{h_2} + \int_{h_3} + \int_{h_4}$, wobei $h_1(t) = h(t,0)$, $h_2(s) = h(b,s)$, $h_3(t) = h(a+b-t,1)$, $h_4(s) = h(a,1-s)$.
Setze das zu einer stückweisen C^1-Kurve mit Namen $h(\partial R)$ zusammen.
<u>Annahme:</u> Es gebe eine solche Abbildung $h : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, sd. $\int_{h(\partial R)} f(z) \mathrm{d}z \neq 0$.
Wir zerlegen das Rechteck R in vier gleich große Teile $R_1, \ldots, R_4$ und sehen, dass

$$\int_{h(\partial R)} f(z) \mathrm{d}z = \int_{h(\partial R_1)} f(z) \mathrm{d}z + \ldots + \int_{h(\partial R_4)} f(z) \mathrm{d}z.$$

Da sich die zusätzlichen Integrale über Strecken im Inneren von R wegen Proposition **??** wegheben.
Jetzt wählen wir das Teilrechteck aus, für den das jeweilige Kurvenintegral über den Rand den größten Absolutbetrag hat, nenne es R_1. Es folgt

$$\left| \int_{h(\partial R_1)} f(z) \mathrm{d}z \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{h(\partial R)} f(z) \mathrm{d}z \right|$$

Wir zerlegen weiter und erhalten so eine Folge von Rechtecken $R_1 \supset R_2 \supset \ldots, R_n$ mit Seitenlängen von R_n proportional zu 2^{-n}, sd.

$$\left| \int_{h(\partial R_n)} f(z) \mathrm{d}z \right| \geq 2^{-n} \left| \int_{h(\partial R)} f(z) \mathrm{d}z \right|.$$

Nach dem Satz über die Invervallverschachtelung (Analysis) existiert ein eindeutiger Punkt $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $(t_0, s_0) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$.
Es sei $z_0 = h(t_0, s_0) \in \Omega$.
<u>Beachte:</u> Da h stückweise C^1 ist, erhalten wir für jedes der endlich vielen Rechtecke aus Definition

1.22 eine obere Schranke für $|\frac{\partial h}{\partial t}|$, $|\frac{\partial h}{\partial s}|$ (wegen der Kompaktheit). Da es nur endlich viele dieser Rechtecke gibt, folgt $|\frac{\partial h}{\partial t}| \leq C$, $|\frac{\partial h}{\partial s}| \leq C$ auf ganz $R = R_0$, für ein festes $C > 0$.
Schreibe nahe z_0 die Funktion f als $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + r(z - z_0)$, wobei $\lim_{z\to z_0} |\frac{r(z-z_0)}{z-z_0}| = 0$, da f holomorph ist (vgl. Lemma 1.14).
Da $f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ das Differential der holomorphen Funktion $z \mapsto f(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2} f'(z_0) \cdot (z - z_0)^2$ ist, folgt mit Bemerkung 2, dass das Integral von $f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ über die geschlossenen Kurven $h(\partial R_n)$ verschwindet. Die Länge L von $h(\partial R_n)$, $L(h(\partial R_n))$ können wir abschätzen durch $4 \cdot 2^{-n} \cdot C$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{h(\partial R)} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq \lim_{n\to\infty} 2^{2n} \left|\int_{h(\partial R_n)} f(z)\mathrm{d}z\right| \\
&\overset{(I)}{=} \lim_{n\to\infty} 2^{2n} \left|\int_{h(\partial R_n)} r(z-z_0)\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(2^{2n} \cdot \sup_{h(\partial R_n)} |r(z-z_0)| \cdot \underbrace{L(h(\partial R_n))}_{\leq 4\cdot C\cdot 2^{-n}}\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(2^n \cdot 4 \cdot C \cdot \sup_{h(\partial R_n)} |r(z-z_0)| \cdot \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|}\right) \\
&\underset{|z-z_0|\leq 2^{-n}\cdot 2\cdot C}{\leq} \lim_{n\to\infty} \left(8 \cdot C^2 \cdot \sup_{h(\partial R_n)} \frac{|r(z-z_0)|}{|z-z_0|}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{z\to z_0} \frac{|r(z-z_0)|}{|z-z_0|}}_{=0} \cdot 8 \cdot C^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $|\int_{h(\partial R)} f(z)\mathrm{d}z| = 0$ im Widerspruch zur Annahme. □

Folgerung 1.27. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, γ_0, γ_1 zwei stückweise C^1-Kurven in Ω von p nach q, die stückweise C^1-homotop sind. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

Beweis. Sei h eine stückweise C^1-Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in Ω.
Betrachte $k : [0,1]^2 \to [a,b] \times [0,1]$ mit

$$k(u,v) = \begin{cases} (a + (1-v)4u(b-a), 0) & u \in [0, \frac{1}{4}] \\ (a + (1-v)(b-a), 4u-1) & u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (a + (1-v)(3-4u)(b-a), 1) & u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (a, 4-4u) & u \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Die Kurve $(h \circ k)(\cdot, 0) : [0,1] \to \Omega$ ist geschlossen und wegen der Invarianz des Kurvenintegrals unter Umparametrisierung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{(h\circ k)(\cdot,0)} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z + \underbrace{\int_q f(z)\mathrm{d}z}_{0} + \int_{\gamma_1(-\cdot)} f(z)\mathrm{d}z + \int_p f(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$(h \circ k)$ ist eine Nullhomotopie dieser Kurve. also verschwindet der obige Ausdruck. $\square$

Satz 1.28 (erweiterter Cauchy-Integralsatz)**.** Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\gamma : [0,1] \to \Omega$ umlaufe eine einfach zusammenhängende Teilmenge $A \subset \Omega$ im mathematischen Drehsinn. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i \int_A \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) \underbrace{\mathrm{d}A(z)}_{\text{Flächenelement}}$$

(Vergleiche mit dem Satz von Stokes oder dem Gaußschen Divergenzsatz)

Beweis. Beweisskizze: Da A einfach zusammenhängend ist, ist γ in A nullhomotop.
Sei $h : [0,1]^2 \to A \subset \Omega$ eine Nullhomotopie. Annahme:

$$\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - 2i \int_A \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \mathrm{d}A(z) \right| = \varepsilon > 0.$$

Zerlege $[0,1]^2$ in vier gleich große Quadrate $R', \dots, R''''$. Dann gilt für eins der Quadrate:

$$\left| \int_{h(\partial R^?)} f(z)\mathrm{d}z - 2i \int_{h(R^?)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \mathrm{d}A(z) \right| \geq \frac{\varepsilon}{4}$$

Nenne es R_1 und zerlege weiter. Erhalte eine Intervallverschachtelung mit Grenzpunkt $(t_0, s_0) \in [0,1]^2$; sei $h(t_0, s_0) =: z_0 \in \Omega$. Schreibe

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} + r(z - z_0).$$

mit $\lim_{z \to z_0} \frac{r(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0$. Wir wissen, dass

$$\int_{h(\partial R^n)} \left(f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) \right) \mathrm{d}z = 0.$$

In einer Übung berechnen wir

$$\int_{h(\partial R^n)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)}\mathrm{d}z = 2i \cdot A(h(R^n))$$

(falls $h(R^n)$ ein Parallelogramm ist — da h stückweise C^1 ist, ist $h(R^n)$ "fast" ein Parallelogramm, sd. die obige Behauptung bis auf einen ausreichend kleinen Rest stimmt.) Außerdem gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{h(R^n)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \mathrm{d}A(z) - \int_{h(R^n)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\mathrm{d}A(z) \right| \cdot 2^{2n} = 0$$

da $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ stetig ist. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot A(h(R^n))$ Also erhalten wir einen Widerspruch genau wie im Beweis des Integralsatzes. $\square$

1.5 Die Potenzreihendarstellung

Ziel:

- "holomorph" und " analytisch" sind gleichbedeutend.
- Man kann Ableitungen als Integrale schreiben.
- Funktionen haben Stammfunktionen genau dann, wenn sie holomorph sind.

Satz 1.29 (Cauchy-Formel)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ sei so gewählt, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. γ beschreibe den Rand von $B_r(z_0)$ im mathematische Drehsinn. Dann gilt für all $z \in B_r(z_0)$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Beweis. $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist in ζ holomorph in $\Omega \setminus \{z\}$. Wähle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sd. $B_\varepsilon(z) \subset B_r(z_0)$. Dann lässt sich eine in $\Omega \setminus \{z\}$ nullhomotope Kurve φ finden, sd.

$$0 = \int_\varphi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Berechne jetzt für $\varepsilon > 0$ klein

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta &= \int_0^1 f(\underbrace{z + \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}}_{\zeta}) \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot e^{2\pi i t}} \underbrace{2\pi i \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}}_{=\dot\varphi(t)} \mathrm{d}t \\ &= 2\pi i \int_0^1 f(\qquad \underbrace{f(z) + R(\varepsilon e^{2\pi i t})}_{\text{da } f \text{ stetig ist, gilt } R \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0} \qquad)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = 2\pi i f(z)$. ☐

Folgerung 1.30 (Mittelwertsatz)**.** Es seien Ω, f, z_0, r wie oben, dann gilt

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r \cdot e^{2\pi i t}) \mathrm{d}t$$

Kein Kurvenintegral und das hier ist nicht der Mittelwertsatz aus Ana 1.

Beweis. Setze $z = z_0$ in der Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 f(z_0 + r \cdot e^{2\pi i t}) \cdot \frac{1}{r e^{2\pi i t}} r \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i t} \mathrm{d}t$$

☐

Beispiel 1.31. Wähle $\Omega = \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ $z_0 = 0$, $r = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= e^0 = \int_0^1 e^{\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)} \mathrm{d}t \quad \varphi = 2\pi t \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\cos(\varphi)} \cdot \cos(\sin(\varphi)) \mathrm{d}\varphi}_{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\cos(\varphi)} \cdot \sin(\sin(\varphi)) \mathrm{d}\varphi}_{0} \end{aligned}$$

Satz 1.32 (Potenzreihenentwicklung)**.** Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n \cdot (z - z_0)^n$ mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$ (für ein $r > 0$, sd. $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$) mit Konvergenzradius $\varphi \geq \sup\{r | \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega\}$ und stellt auf $B_r(z_0)$ die Funktion f dar.

Beweis.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^\infty \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{\frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^\infty (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

Wir dürfen Summation und Integration vertauschen, falls $|z-z_0| < |\zeta - z_0| = r$, da dann Summe und Integral absolut konvergieren. Der Konvergenzradius ist daher mindestens r. Und zwar für jedes r mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. $\square$

Folgerung 1.33. Holomorphe Funktionen sind (komplex) analytisch, insbesondere C^∞.

Beweis. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, sd. $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann können wir f auf $B_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe darstellen. Insbesondere ist f auf $B_r(z_0)$ analytisch (und C^∞). Da das für alle $z_0 \in \Omega$ geht, folgt die Behauptung. $\square$

Somit: "holomorph" und "analytisch" sind gleichbedeutend.
Grund: "Holomorphie" ist gleichbedeutend mit den Cauchy-Rieman-Differentialgleichungen (Lemma 1.14). Diese sind "elliptisch" und Lösungen elliptischer Differentialgleichungen sind mindestens so oft differenzierbar, wie ihre Koeffizienten und ihre rechte Seite.
Zur Erinnerung: Wir haben die Rechenregeln für Potenzreihen aus Proposition 1.7 (Kurzskript) nicht bewiesen. Mit Folgerung 1.33 und Proposition 1.16 geht der Beweis recht einfach.

Folgerung 1.34. Es sei Ω einfach zusammenhängend. Dann ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn f eine Stammfunktion F besitzt (das heißt F ist holomorph mit $F' = f$).

Beweis. " $\Leftarrow$ " Sei F Stammfunktion. Da F holomorph ist, ist F beliebig oft komplex differenzierbar, siehe Folgerung 1.33. Also ist auch $f = F'$ beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere auch holomorph.
" $\Rightarrow$ " Da Ω einfach zusammenhängend ist, sind je zwei Kurven γ_0, γ_1 von $z_0 \in \Omega$ nach $z \in \Omega$ homotop. Somit gilt

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad \text{nach Folgerung 1.27}$$

Fixiere also z_0 und definiere $F = \int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ für eine Kurve $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$. Um $F'(z)$ zu berechnen, betrachte ω nahe z und eine Kurve γ von z_0 nach ω der Form (siehe Skizze Skriptum Niklas)
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \to z} \frac{F(\omega) - F(z)}{\omega - z} &= \lim_{\omega \to z} \frac{1}{\omega - z} \left(\int_{\gamma_\omega} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \right) \\
&= \lim_{\omega \to z} \frac{1}{\omega - z} \int_{\gamma_{\omega - z}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&= \lim_{\omega \to z} \frac{1}{\omega - z} \int_0^1 f(\gamma_{\omega - z}(t)) \underbrace{\omega - z}_{=\dot\gamma_{\omega - z}(t)} \mathrm{d}t \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ F ist eine Stammfunktion. $\square$

Zur Erinnerung: Identitätssatz für Potenzreihen.

Folgerung 1.35 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls eine Teilmenge $A \subset \Omega$ mit Häufungspunkt $z \in \Omega$ existiert, sd. $f|_A = g|_A$, dann gilt $f = g$ auf ganz Ω.

Beweis. Nach Folgerung 1.33 sind f und g analytisch.
Ä hat Häufungspunkt z" $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{z\}$, sd. $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z$.
Es folgt $(g-f)(z_n) = 0$ für alle n und nach dem Identitätssatz für Potenzreihen bzw. analytische Funktionen gilt somit $g - f = 0$ auf ganz Ω. $\square$

Der Identitätssatz ermöglicht es manche aus dem reellen bekannten Funktionen auf $\mathbb{C}$ zu übertragen und ihre Eigenschaften zu verstehen.

Beispiel 1.36. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Wir können $z \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihenentwicklung einsetzen. Da der Konvergenzradius ∞ ist, erhalten wir eine Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Da die Identitäten

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \qquad (1) \\ \sin''(z) &= -\sin(z) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, gelten sie nach dem Identitätssatz für alle z, w aus $\mathbb{C}$.
Zu (1) [Additionstheorem]: Nehme zunächst $w \in \mathbb{R}$ als Konstante an, dann folgt das Additionstheorem für alle $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{R}$. Nehme nun $z \in \mathbb{C}$ konstant an, erhalte Additionstheorem für alle z, $w \in \mathbb{C}$.
Definiere die Hyperbelfunktion cosh, sinh durch

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} \\ \sinh(z) &= \frac{\sin(iz)}{i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{-2} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite verhindert der Identitätssatz die Existenz holomorpher Fortsetzungen von reellen Funktionen mit bestimmten Eigenschaften.

Beispiel 1.37.
1. Es gibt kein Gebiet Ω mit $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \Omega$ und sich die Funktion $x \mapsto |x|$ auf Ω fortsetzen ließe.
   Denn: wäre f eine Fortsetzung, dann wäre $f(z) = z$ auf $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und daher auf ganz Ω.
2. Betrachte
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$
   Diese Funktion ist C^∞ und bei $x = 0$ verschwinden alle Ableitungen. Sie ist nicht analytisch bei $x = 0$ und hat daher keine holomorphe Fortsetzung.

Satz 1.38 (Morera)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, sd. das Kurvenintegral von f über den Rand eines jeden Dreiecks, das ganz in Ω liegt verschwindet. Dann ist f holomorph.

Beweis. Benutze Folgerung 1.34 auf kleinen Bällen $B_r(z_0) \subset \Omega$ für $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ ausreichend klein.
Definiere jetzt $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$, wobei $z \in B_r(z_0)$ und $\gamma(t) = z + t(\omega - z)$. Argumentiere wie in Folgerung 1.34, dass $F'(z) = f(z)$, allerdings benutzen wir diesmal:

$$\int_{\gamma_\omega} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{\gamma_{\omega - z}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_{\omega - z}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

$\Rightarrow F' = f$ auf $B_r(z_0)$.
Da $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ beliebig waren, ist f auf Ω holomorph. $\square$

Satz 1.39 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ symmetrisch bezüglich $\mathbb{R}$ (dh. $z \in \Omega \;\Leftrightarrow\; \overline{z} \in \Omega$). Schreibe $\Omega_+ = \{z \in \Omega | \text{Im } z > 0\}$, $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}$ und $\Omega_- = \{z \in \Omega | \text{Im } z < 0\}$. Sei $f : \Omega_+ \cup \Omega_0 \to \mathbb{C}$ stetig, sd. $f|_{\Omega_+}$ holomorph und $f|_{\Omega_0}$ reellwertig ist. Dann existiert eine holomorphe Fortsetzung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Beweis. Definiere $f(z) = \overline{f(z)}$ für $z \in \Omega$, dann ist f auf ganz Ω stetig. Zeige jetzt, dass die Voraussetzungen des Satzes von Morera gelten.

1. Für jedes Dreieck in Ω_+ stimmt die Behauptung

2. Sei $\triangle \subset \Omega_+ \cup \Omega_0$ ein Dreieck. Dann betrachte Dreiecke $\triangle_n \subset \Omega_+$, die dagegen konvergieren. Da das Integral stetig vom Integranden abhängt (glm. stetig gilt, da $\triangle$-Fläche kompakt ist), ist auch das Integral über den Rand von $\triangle$ gleich 0.

3. Falls $\triangle \subset \Omega \subset \Omega_- \cup \Omega_0$ liegt, berechne

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f(\overline{\gamma(t)})}\;\overline{\dot{\overline{\gamma}}(t)}\mathrm{d}t \\ &= \overline{\int_a^b f(\overline{\gamma(t)})\dot{\overline{\gamma}}(t)\mathrm{d}t} = 0, \end{aligned}$$

   falls γ den Rand von $\triangle$ beschreibt.

4. $\triangle$ erstreckt sich über alle Dreiecke. Dann zerfällt $\triangle$ in höchstens 3 Dreiecke vom Typ (1)-(3). Jetzt folgt Homotopie aus Satz 1.38.

$\square$

Beispiel 1.40. sin aus Beispiel 1.36.

Bemerkung 4. Es sei g auf $\partial B_r(z_0)$ stetig. Dan können wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

für alle $z \in B_r(z_0)$ definieren.
Frage: Setzt f die Funktion g stetig fort?
(Beachte: $\partial B_r(z_0)$ ist im schlimmsten Fall der Rand des Konvergenzkreises...)
Falls ja, wäre auch $f(z) \cdot (z - z_0)^k$ holomorph für alle $k \geq 0$ und somit hätten wir nach dem Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \underbrace{(\zeta - z_0)^k}_{z_0 + re^{it}} \mathrm{d}\zeta = 0.$$

Das bedeutet, dass "ungefähr die Hälte" der Fourierzerlegung von $t \mapsto g(z_0 + r \cdot e^{it})$ verschwindet.