Funktionentheorie

Jannis Klingler

7. Mai 2019

1 Holomorphe und analytische Funktionen

1.1 Analytische Funktionen

Wiederholung. Setze $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ definiere:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) \quad \text{Vektoraddition} \\ z \cdot w &= (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \\ 0 &= (0, 0) \qquad \text{neutrales Element } (+) \\ 1 &= (1, 1) \qquad \text{neutrales Element } (\cdot) \\ i &= (0, 1) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation: $z \to \overline{z} = (x, -y)$ ist ein Automorphismus, dh.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{0} &= 0 \\ \overline{1} &= 1 \\ \overline{i} &= (0, 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.

$$-z = (-x, -y) \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

wir definieren einen Absolutbetrag $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$, denn $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$
Jetzt können wir schreiben $z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
Graphische Darstellung ("Gaußsche Zahlenebene").

Zur Erinnerung:

Definition 1.1 (Topologischer Raum)**.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, offener Teilmengen geschrieben werden kann.

Definition 1.2 (Wegzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ gibt.

Satz 1.3. Eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis. " $\Leftarrow$ ": Sei X wegzusammenhängend. Seien $U, V \subset X$ offen, $X = U \cup V$, $p \in U$, $q \in V$ (also U, V nicht leer). Dann existiert $\gamma : [0, 1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Dann sind $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V) \subset [0, 1]$ offen. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist und $0 \in \gamma^{-1}(U)$, $1 \in \gamma^{-1}(V)$, $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(X) = [0, 1]$ folgt $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$.
Also existiert $t \in \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V)$ und $\gamma(t) \in U \cap V$. Da das für alle offenen, nichtleeren Teilmengen U, V mit $U \cup V = X$ gilt, ist X zusammenhängend.
Einfacher:
Angenommen X ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene, nicht-leere Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

Wähle jetzt $p \in U$, $q \in V$. Gäbe es einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, dann wäre $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, im Widerspruch zum Zwischenwertsatz.
" $\Rightarrow$ ": Sei $X \subset \mathbb{C}$ (offen) zusammenhängend.
Sei $p \in X$ und sei $U = \{q \in X \mid \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} : \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}$
Behauptung: U ist offen, also existiert $\varepsilon > 0$, sd. $B_\varepsilon(q) \subset X$. Sei $q' \in B_\varepsilon(q)$. Dann existiert $\gamma' : [0,1] \to X$, sd.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (2-2t)q + (2t-1)q' & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_\varepsilon(q) \subset U \Rightarrow U$ offen.
Behauptung: $X \setminus U$ ist offen:
Sei $q \in X \setminus U$. Da X offen, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subset X$. Wäre $B_\varepsilon(q) \cap U \neq \emptyset$, so existiert $q' \in B_\varepsilon(q) \cap U$, ein Weg γ von p nach q in X und mit einer ähnlichen Konstruktion auch eine Kurve γ' von p nach q. Also auch $X \setminus U = \emptyset$.
$\Rightarrow X$ ist wegzusammenhängend. □

Definition 1.4 (Gebiet)**.** Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine (komplexe) Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle n. Sie hat den Konvergenzradius $\rho = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0,\infty]$. Dann:

$$R(z) \text{ konvergiert für alle } z \text{ mit } |z| < \rho$$
$$R(z) \text{ divergiert für alle } z \text{ mit } |z| > \rho$$

wenn $\rho > 0$ ist, heißt $R(z)$ konvergent und $B_\rho(0) \subset \mathbb{C}$ der Konvergenzkreis.

Definition 1.5 (Analytische Funktion)**.** Es sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine analytische Funktion (auf Ω), wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Potenzreihe $R(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ existiert, sd. $f(z) = R(z - z_0)$ für alle $z \in \Omega \cap B_\rho(z_0)$.

Beispiel 1.6. Betrachte die Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\limsup \sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|} = 0 \quad \Rightarrow$ Konvergenzradius ist $\rho = \infty$. Mit dem Umordnungssatz zeigt man

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Da die Exponentialreihe reelle Koeffizienten hat, gilt

$$\overline{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$$

Sei jetzt $z = x + iy$, dann gilt

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

und $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^0 = 1$.
Also definiere $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$.
Jetzt kann man komplexe Multiplikation in Polarkoordinaten verstehen.
Schreibe $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\varphi}$ dann heißt $r = |z|$ der Absolutbetrag und $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ das Argument.
Wir repräsentieren φ durch die Funktion $arg : \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$.
$z \cdot w = r \cdot e^{i\varphi} \cdot s \cdot e^{i\psi} = (rs) \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$.

Satz 1.7 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls es $z_0 \in \Omega$ und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gibt, sd. $f(z_n) = 0$ für alle n, dann ist $f = 0$ konstant.

Folgerung 1.8. Seien f, g zwei analytische Funktionen auf Ω, z_0, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, aber mit $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n, dann folgt $f = g$ auf ganz Ω.

Definition 1.9. f heißt analytisch auf Ω, wenn es zu jedem Punkt $z \in \Omega$ eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z und eine Potenzreihe R um z gibt, die auf ganz U konvergiert, sd. $R(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Sei zunächst U Umgebung von z, auf der f mit einer Potenzreihe $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)$ übereinstimmt.
Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Da R konvergiert, gilt $\rho > 0$, also $\infty > \frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $C > \frac{1}{\rho}$, sd. $|a_n| < C^n$ für alle $n \geq n_0$. Da nur endlich viele $n \leq n_0$ existieren, können wir C ggf. etwas größer wählen, sd. $|a_n| < C^n$ für alle n. Wir beweisen indirekt, dass alle $a_n = 0$ sind, dh. wir nehmen an, es gäbe n mit $a_n \neq 0$. Es sei n_0 das kleinste n mit $a_{n_0} \neq 0$, dh. $a_n = 0$ für $n < n_0$. Wir suchen $r > 0$, sd. $|a_n z^{n_0}| > \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \left(\geq |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n|\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < r$. Denn dann folgt $R(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{a_n}^{z^n} \neq 0$ für z wie oben, also auch für unendlich viele der Folgenglieder z_n aus unserer Annahme.

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C^n |z^n| \underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{C^{n+1}|z|^{n+1}}{1 - C|z|}$$

Wir suchen also $r > 0$, sd.

$$\begin{aligned} |a_{n_0}| r^{n_0} > \underbrace{\frac{C^{n+1}|z|^{n+1}}{1 - Cr}}_{> 0, \text{ für } r > \frac{1}{C}} \quad &\Leftrightarrow \quad |a_n|(r^{n_0} - Cr^{n_0+1}) > C^{n_0+1} r^{n_0+1} \\ &\Leftrightarrow \quad |a_{n_0}| > r(C^{n_0+1} + |a_{n_0}|C) \\ &\Leftrightarrow \quad r > \frac{|a_{n_0}|}{C^{n_0+1} + |a_{n_0}|C} \end{aligned}$$

Jetzt folgt für alle z mit $0 < |z| < r$, dass $R(z) \neq 0$ wie gewünscht, Widerspruch!
Also folgt $R = 0$ und somit $f|_U = 0$. Definiere $W = \{z \in \Omega \mid z \text{ hat Umgebung } U \text{ mit } f|_U = 0\}$
$\Rightarrow W$ ist offen und nichtleer.
Behauptung: W ist auch abgeschlossen. Falls nicht, existiert ein Häufungspunkt z_0 von W in Ω mit $z_0 \in W$. Dann existiert $(z_n)_n$ Folge in $W \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $f(z_n) = 0$ für alle n. Mit den obigen Argumenten folgt: z_0 hat Umgebung $U \subset \Omega$ mit $f|_U = 0$, somit $z_0 \in W$.
W offen, abgeschlossen und nichtleer $\Rightarrow$ (da Ω zusammenhängend ist) $\Omega = W$, also $f = 0$. □

(Proposition im Kurzskript zum Rechnen mit Potenzreihen)...

1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 1.10. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$- antilinear, wenn

$$A(zw) = \overline{z} \cdot A(w) \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung lässt sich zerlegen als $A = A' + A''$ mit $A'(z) = a' \cdot z$ und $A''(z) = a'' \cdot \overline{z}$, dabei heißen A' der Linearteil und A'' der Antilinearteil von A.
Insbesondere ist A genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $A'' = 0$.

Beweis. Setze $A'(z) = \frac{A(z) - i \cdot A(iz)}{2}$, $A''(z) = \frac{A(z) + i \cdot A(iz)}{2}$. Daraus folgt

$$A'(z) + A''(z) = \frac{A(z) - i \cdot A(iz)}{2} + \frac{A(z) + i \cdot A(iz)}{2} = A(z)$$

$$\begin{aligned} A'((u+iv) \cdot z) &= \frac{A(uz) + A(ivz) - iA(iuz) - iA(-vz)}{2} \\ &= \frac{uA(z) \overbrace{-iviA(iz)}^{=+vA(iz)} - iuA(iz) + ivA(z)}{2} \\ &= \frac{(u+iv)(A(z) - iA(iz))}{2} \\ &= (u+iv)A'(z) \end{aligned}$$

Analog dazu ist A'' $\mathbb{C}$-antilinear. Es folgt $A'(z) = A'(z \cdot 1) = z \cdot \underbrace{A'(1)}_{a'}$,

$A''(z) = A''(z \cdot 1) = \overline{z} \cdot \underbrace{A''(1)}_{a''}$. □

Wiederholung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ eine Funktion. f heißt total differenzierbar bei $z_0 \in U$, falls eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert, sd.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Dann ist f auch partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind gerade die Einträge der reellen 2×2-Matrix A.

Definition 1.11 (Komplexe Differenzierbarkeit)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar bei $z_0 \in U$, falls $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die komplexe Ableitung $f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Wenn f auf ganz U differenzierbar ist, heißt f auch holomorph auf U.

Definition 1.12. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Schreibe $f = u + iv$ für Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$, sowie $z = x + iy$.
Definiere die Wirtinger-Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Beispiel 1.13. $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$

Lemma 1.14 (Definition)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in U$. Dann sind äquivalent

1. f ist komplex differenzierbar bei z_0
2. Es existiert eine stetige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \varphi(z) \cdot (z - z_0)$
3. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung
4. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}|_{z_0} = 0$

5. f ist bei z_0 reell, total differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann- Differentialgleichungen (C-R-DGL): $\frac{\partial u}{\partial x}|_{z_0} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{z_0}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}|_{z_0} = -\frac{\partial v}{\partial x}|_{z_0}$, wobei wieder $f = u + iv$ gelte.

Insbesondere ist f dann auch bei z_0 stetig.

Beweis. (1)⇒(2): Setze

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Stetigkeit bei z_0 folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit.
(2)⇒(3): Schreibe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \varphi(z_0) \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0} \underbrace{(\varphi(z) - \varphi(z_0))}_{\to 0, \text{ da } \varphi \text{ stetig in } z_0.} \underbrace{\frac{z - z_0}{|z - z_0|}}_{\text{beschränkt (Norm 1)}} = 0$$

⇒ f ist bei z_0 total-reell-differenzierbar. Die Ableitung ist die $\mathbb{C}$- lineare Abbildung $\omega \mapsto \varphi(z_0) \cdot \omega$.
(3)⇒(4): Da die reelle Ableitung $\mathbb{C}$-linear ist, folgt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ (was nach Definition gerade der Antilinearteil der Ableitung ist)
(4)⇒(5):

$$0 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)}_{\in \mathbb{C}} \underset{\text{Def. 1.12}}{=} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(z_0)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(z_0)}_{\text{Imaginärteil}}$$

hieraus lassen sich die C-R-DGL direkt ablesen.
(5)⇒(1): Schreibe $z = z_0 + x + iy$ dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial v}{\partial x} ix + \frac{\partial v}{\partial y} iy + R(x, y) \\ &\overset{\text{C-R-DGL}}{=} f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) - \frac{\partial v}{\partial x}(y - ix) + R(x, y) \\ &= f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (x + iy) + R(x, y) \end{aligned}$$

mit $R(x, y) = o(|(x, y)|)$, das heißt $\lim_{(x,y) \to 0} \frac{R(x,y)}{|(x,y)|} = 0$ (der Restterm geht schneller gegen Null als (x, y)). Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (z - z_0) + R(x, y)}{z - z_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{z \to z_=} \underbrace{\frac{R(x, y)}{|z - z_0|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|z - z_0|}{z - z_=}}_{\text{beschränkt}} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.15. Die komplexe Exponentialfunktion ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ (Begründung folgt)

Proposition 1.16. Es gelten folgende Differentiationsregeln:

1. Linearität: Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $a, b \in \mathbb{C}$, dann ist $a \cdot f + b \cdot g$ holomorph mit $(a \cdot f + b \cdot g)'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$.

2. Kettenregel: Sei $f : \Omega \to \Omega'$, $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $(g \circ f)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

3. Produktregel: Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f \cdot g$ holomorph mit Ableitung $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.

Beweis. (1): Additivität ist klar. Multiplikativität siehe (3)
(2): Übung
(3): Schreibe $f = u+iv$, $g = r+is$, $u, v, r, s : \Omega \to \mathbb{R}$, dann ist $f \cdot g = (u \cdot r - v \cdot s) + i \cdot (u \cdot s + v \cdot r)$. Jetzt setzen wir mit den reellen Produktregeln fort und sind fertig. □

Satz 1.17. Es sei $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, dann ist $R(z)$ auf $B_\rho(0)$ holomorph mit Ableitung

$$R'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+1)z^m, \quad n-1 = m.$$

Beweis. Siehe Analysis, beruht auf folgendem Satz: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge differenzierbarer Funktionen auf U, sd. $(f_n)_n$ punktweise und $(f_n')_n$ lokal-gleichmäßig konvergiert.
$\Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ □

1.3 Das komplexe Kurvenintegral

Definition 1.18. Eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung, sd. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ existieren, für die $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1$ für $i = 1, \ldots, n$.
Für $t \neq t_i$, $t \in [a, b]$, sei $\dot\gamma(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor. γ heißt geschlossen, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

Definition 1.19 (Kurvenintegral)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ stückweise C^1, sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$

Dazu bilden wir rechts Real- und Imaginärteil des Integranden und integrieren diese seperat mit dem Riemann-/ Regel-/ Lesegueintegral.

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b \underbrace{(u(\gamma(t)) + i \cdot v(\gamma(t)))}_{f(z)} \cdot \underbrace{(\dot x(t) + i \cdot \dot y(t))\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}z}$$

,wobei $f = u+iv$, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\gamma = x+iy$, $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ausmultiplizieren vgl Kurzskript). Mithin ist $f(z) = f(\gamma(t))$ der "Integrand" und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)\mathrm{d}t$ das "Tangentenelement" des Kurvenintegrals.

Bemerkung 1.

$$\overset{\text{ausmult.}}{=} \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \dot x(t) - v(\gamma(t)) \cdot \dot y(t)\mathrm{d}t + i \cdot \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \dot y(t) + v(\gamma(t)) \cdot \dot x(t))\mathrm{d}t$$

Der Realteil ist das Kurvenintegral über $\overline{f} = u - iv$ aus der Analysis (aufgefasst als Vektorfeld $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ f \\ \mathrm{Im}\ f \end{pmatrix}$) und der Imaginärteil das entsprechende "normale" Kurvenintegral.

Bemerkung 2. Wir möchten uns das komplexe Kurvenintegral als Umkehrung der komplexen Ableitung vorstellen. Wir sehen im nächsten Abschnitt, für welche Funktionen das geht.