

# Funktionentheorie

Jannis Klingler

11. Juni 2019

# 1 Holomorphe und analytische Funktionen

## 1.1 Analytische Funktionen

*Wiederholung.* Setze  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Für  $z = (x, y)$ ,  $w = (u, v)$  definiere:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) && \text{Vektoraddition} \\ z \cdot w &= (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \\ 0 &= (0, 0) && \text{neutrales Element } (+) \\ 1 &= (1, 1) && \text{neutrales Element } (\cdot) \\ i &= (0, 1) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation:  $z \rightarrow \bar{z} = (x, -y)$  ist ein Automorphismus, dh.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ \overline{0} &= 0 \\ \overline{1} &= 1 \\ \overline{i} &= (0, 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist  $\mathbb{C}$  ein Körper.

$$-z = (-x, -y) \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

wir definieren einen Absolutbetrag  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$ , denn  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$

Jetzt können wir schreiben  $z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$

Graphische Darstellung ("Gaußsche Zahlenebene").

### Zur Erinnerung:

**Definition 1.1** (Topologischer Raum). Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, offener Teilmengen geschrieben werden kann.

**Definition 1.2** (Wegzusammenhängend). Ein topologischer Raum  $X$  heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten  $p, q \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  gibt.

**Satz 1.3.** Eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

*Beweis.* " $\Leftarrow$ ": Sei  $X$  wegzusammenhängend. Seien  $U, V \subset X$  offen,  $X = U \cup V$ ,  $p \in U$ ,  $q \in V$  (also  $U, V$  nicht leer). Dann existiert  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  stetig mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ . Dann sind  $\gamma^{-1}(U)$ ,  $\gamma^{-1}(V) \subset [0, 1]$  offen. Da  $[0, 1]$  zusammenhängend ist und  $0 \in \gamma^{-1}(U)$ ,  $1 \in \gamma^{-1}(V)$ ,  $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(X) = [0, 1]$  folgt  $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$ .

Also existiert  $t \in \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V)$  und  $\gamma(t) \in U \cap V$ . Da das für alle offenen, nichtleeren Teilmengen  $U, V$  mit  $U \cup V = X$  gilt, ist  $X$  zusammenhängend.

Einfacher:

Angenommen  $X$  ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene, nicht-leere Teilmengen  $U, V \subset X$  mit  $U \cup V = X$ ,  $U \cap V = \emptyset$ . Dann existiert eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

Wähle jetzt  $p \in U$ ,  $q \in V$ . Gäbe es einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ , dann wäre  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, im Widerspruch zum Zwischenwertsatz.

"  $\Rightarrow$  ": Sei  $X \subset \mathbb{C}$  (offen) zusammenhängend.

Sei  $p \in X$  und sei  $U = \{q \in X \mid \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ stetig} : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$

Behauptung:  $U$  ist offen, also existiert  $\varepsilon > 0$ , sd.  $B_\varepsilon(q) \subset X$ . Sei  $q' \in B_\varepsilon(q)$ . Dann existiert  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow X$ , sd.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)q + (2t-1)q' & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_\varepsilon(q) \subset U \Rightarrow U$  offen.

Behauptung:  $X \setminus U$  ist offen:

Sei  $q \in X \setminus U$ . Da  $X$  offen, existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(q) \subset X$ . Wäre  $B_\varepsilon(q) \cap U \neq \emptyset$ , so existiert  $q' \in B_\varepsilon(q) \cap U$ , ein Weg  $\gamma$  von  $p$  nach  $q'$  in  $X$  und mit einer ähnlichen Konstruktion auch eine Kurve  $\gamma'$  von  $p$  nach  $q$ . Also auch  $X \setminus U = \emptyset$ .

$\Rightarrow X$  ist wegzusammenhängend. □

**Definition 1.4** (Gebiet). Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

*Erinnerung.* Eine (komplexe) Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form  $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  mit  $a_n \in \mathbb{C}$  für alle  $n$ . Sie hat den Konvergenzradius  $\rho = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$ . Dann:

$R(z)$  konvergiert für alle  $z$  mit  $|z| < \rho$

$R(z)$  divergiert für alle  $z$  mit  $|z| > \rho$

wenn  $\rho > 0$  ist, heißt  $R(z)$  konvergent und  $B_\rho(0) \subset \mathbb{C}$  der Konvergenzkreis.

**Definition 1.5** (Analytische Funktion). Es sei  $\Omega \in \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  eine analytische Funktion (auf  $\Omega$ ), wenn es zu jedem Punkt  $z_0 \in \Omega$  eine Potenzreihe  $R(z)$  mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  existiert, sd.  $f(z) = R(z - z_0)$  für alle  $z \in \Omega \cap B_\rho(z_0)$ .

**Beispiel 1.6.** Betrachte die Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = 0 \Rightarrow$  Konvergenzradius ist  $\rho = \infty$ . Mit dem Umordnungssatz zeigt man

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Da die Exponentialreihe reelle Koeffizienten hat, gilt

$$\overline{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}$$

Sei jetzt  $z = x + iy$ , dann gilt

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

und  $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^0 = 1$ .

Also definiere  $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$ .

Jetzt kann man komplexe Multiplikation in Polarkoordinaten verstehen.

Schreibe  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ ,  $w = s \cdot e^{i\psi}$  dann heißt  $r = |z|$  der Absolutbetrag und  $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  das Argument.

Wir repräsentieren  $\varphi$  durch die Funktion  $\arg : \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ .

$$z \cdot w = r \cdot e^{i\varphi} \cdot s \cdot e^{i\psi} = (rs) \cdot e^{i(\varphi+\psi)}.$$

**Satz 1.7** (Identitätssatz für Potenzreihen). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  Gebiet und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Falls es  $z_0 \in \Omega$  und eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega \setminus \{z_0\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  gibt, sd.  $f(z_n) = 0$  für alle  $n$ , dann ist  $f = 0$  konstant.

**Folgerung 1.8.** Seien  $f, g$  zwei analytische Funktionen auf  $\Omega$ ,  $z_0, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie oben, aber mit  $f(z_n) = g(z_n)$  für alle  $n$ , dann folgt  $f = g$  auf ganz  $\Omega$ .

**Definition 1.9.**  $f$  heißt analytisch auf  $\Omega$ , wenn es zu jedem Punkt  $z \in \Omega$  eine Umgebung  $U \subset \Omega$  von  $z$  und eine Potenzreihe  $R$  um  $z$  gibt, die auf ganz  $U$  konvergiert, sd.  $R(\omega) = f(\omega)$  für alle  $\omega \in U$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $U$  Umgebung von  $z$ , auf der  $f$  mit einer Potenzreihe  $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)$  übereinstimmt.

Ohne Einschränkung sei  $z_0 = 0$ . Da  $R$  konvergiert, gilt  $\rho > 0$ , also  $\infty > \frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Also existiert  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $C > \frac{1}{\rho}$ , sd.  $|a_n| < C^n$  für alle  $n \geq n_0$ . Da nur endlich viele  $n \leq n_0$  existieren, können wir  $C$  ggf. etwas größer wählen, sd.  $|a_n| < C^n$  für alle  $n$ . Wir beweisen indirekt, dass alle  $a_n = 0$  sind, dh. wir nehmen an, es gäbe  $n$  mit  $a_n \neq 0$ . Es sei  $n_0$  das kleinste  $n$  mit  $a_{n_0} \neq 0$ , dh.  $a_n = 0$  für  $n < n_0$ . Wir suchen  $r > 0$ , sd.  $|a_n z^{n_0}| > \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n|$  ( $\geq |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n|$ ) für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $0 < |z| < r$ . Denn dann folgt  $R(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n \neq 0$  für  $z$  wie oben, also auch für unendlich viele der Folgenglieder  $z_n$  aus unserer Annahme.

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C^n |z^n| \stackrel{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{C^{n_0+1} |z|^{n_0+1}}{1 - C|z|}$$

Wir suchen also  $r > 0$ , sd.

$$\begin{aligned} |a_{n_0}| r^{n_0} &> \underbrace{\frac{C^{n_0+1} |z|^{n_0+1}}{1 - C|z|}}_{> 0, \text{ für } r > \frac{1}{C}} \Leftrightarrow |a_{n_0}| (r^{n_0} - C r^{n_0+1}) > C^{n_0+1} r^{n_0+1} \\ &\Leftrightarrow |a_{n_0}| > r (C^{n_0+1} + |a_{n_0}| C) \\ &\Leftrightarrow r > \frac{|a_{n_0}|}{C^{n_0+1} + |a_{n_0}| C} \end{aligned}$$

Jetzt folgt für alle  $z$  mit  $0 < |z| < r$ , dass  $R(z) \neq 0$  wie gewünscht, Widerspruch!

Also folgt  $R = 0$  und somit  $f|_U = 0$ . Definiere  $W = \{z \in \Omega \mid z \text{ hat Umgebung } U \text{ mit } f|_U = 0\}$   
 $\Rightarrow W$  ist offen und nichtleer.

Behauptung:  $W$  ist auch abgeschlossen. Falls nicht, existiert ein Häufungspunkt  $z_0$  von  $W$  in  $\Omega$  mit  $z_0 \in W$ . Dann existiert  $(z_n)_n$  Folge in  $W \setminus \{z_0\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  und  $f(z_n) = 0$  für alle  $n$ . Mit den obigen Argumenten folgt:  $z_0$  hat Umgebung  $U \subset \Omega$  mit  $f|_U = 0$ , somit  $z_0 \in W$ .

$W$  offen, abgeschlossen und nichtleer  $\Rightarrow$  (da  $\Omega$  zusammenhängend ist)  $\Omega = W$ , also  $f = 0$ .  $\square$

(Proposition im Kurzschrift zum Rechnen mit Potenzreihen)...

## 1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

**Definition 1.10.** Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $\mathbb{C}$ -antilinear, wenn

$$A(zw) = \bar{z} \cdot A(w) \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung lässt sich zerlegen als  $A = A' + A''$  mit  $A'(z) = a' \cdot z$  und  $A''(z) = a'' \cdot \bar{z}$ , dabei heißen  $A'$  der Linearteil und  $A''$  der Antilinearteil von  $A$ .

Insbesondere ist  $A$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear, wenn  $A'' = 0$ .

*Beweis.* Setze  $A'(z) = \frac{A(z) - i \cdot A(iz)}{2}$ ,  $A''(z) = \frac{A(z) + i \cdot A(iz)}{2}$ . Daraus folgt

$$A'(z) + A''(z) = \frac{A(z) - i \cdot A(iz)}{2} + \frac{A(z) + i \cdot A(iz)}{2} = A(z)$$

$$\begin{aligned} A'((u + iv) \cdot z) &= \frac{A(uz) + A(ivz) - iA(iuz) - iA(-vz)}{2} \\ &= \frac{uA(z) \overbrace{-iviA(iz)}^{=+vA(iz)} - iuA(iz) + ivA(z)}{2} \\ &= \frac{(u + iv)(A(z) - iA(iz))}{2} \\ &= (u + iv)A'(z) \end{aligned}$$

Analog dazu ist  $A''$   $\mathbb{C}$ -antilinear. Es folgt  $A'(z) = A'(z \cdot 1) = z \cdot \underbrace{A'(1)}_{a'}$ ,

$$A''(z) = A''(z \cdot 1) = \bar{z} \cdot \underbrace{A''(1)}_{a''}. \quad \square$$

*Wiederholung.* Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$  eine Funktion.  $f$  heißt total differenzierbar bei  $z_0 \in U$ , falls eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  existiert, sd.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Dann ist  $f$  auch partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind gerade die Einträge der reellen  $2 \times 2$ -Matrix  $A$ .

**Definition 1.11** (Komplexe Differenzierbarkeit). Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt komplex differenzierbar bei  $z_0 \in U$ , falls  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die komplexe Ableitung  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ . Wenn  $f$  auf ganz  $U$  differenzierbar ist, heißt  $f$  auch holomorph auf  $U$ .

**Definition 1.12.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion,  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Schreibe  $f = u + iv$  für Funktionen  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie  $z = x + iy$ .

Definiere die Wirtinger-Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

**Beispiel 1.13.**  $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$

**Lemma 1.14** (Definition). Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion,  $z_0 \in U$ . Dann sind äquivalent

1.  $f$  ist komplex differenzierbar bei  $z_0$
2. Es existiert eine stetige Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = f(z_0) + \varphi(z) \cdot (z - z_0)$
3.  $f$  ist bei  $z_0$  reell, total differenzierbar mit  $\mathbb{C}$ -linearer Ableitung
4.  $f$  ist bei  $z_0$  reell, total differenzierbar und  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|_{z_0} = 0$

5.  $f$  ist bei  $z_0$  reell, total differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann- Differentialgleichungen (C-R-DGL):  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{z_0} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{z_0}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{z_0} = -\frac{\partial v}{\partial x}|_{z_0}$ , wobei wieder  $f = u + iv$  gelte.

Insbesondere ist  $f$  dann auch bei  $z_0$  stetig.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2): Setze

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Stetigkeit bei  $z_0$  folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit.

(2) $\Rightarrow$ (3): Schreibe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \varphi(z_0) \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{(\varphi(z) - \varphi(z_0))}_{\rightarrow 0, \text{ da } \varphi \text{ stetig in } z_0.} \underbrace{\frac{z - z_0}{|z - z_0|}}_{\text{beschränkt (Norm 1)}} = 0$$

$\Rightarrow f$  ist bei  $z_0$  total-reell-differenzierbar. Die Ableitung ist die  $\mathbb{C}$ - lineare Abbildung  $\omega \mapsto \varphi(z_0) \cdot \omega$ .

(3) $\Rightarrow$ (4): Da die reelle Ableitung  $\mathbb{C}$ -linear ist, folgt  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  ( was nach Definition gerade der Antilinearteil der Ableitung ist)

(4) $\Rightarrow$ (5):

$$0 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)}_{\in \mathbb{C}} \stackrel{\text{Def. 1.12}}{=} \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{Realteil}}(z_0) + \underbrace{\frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\text{Imaginärteil}}(z_0)$$

hieraus lassen sich die C-R-DGL direkt ablesen.

(5) $\Rightarrow$ (1): Schreibe  $z = z_0 + x + iy$  dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial v}{\partial x}ix + \frac{\partial v}{\partial y}iy + R(x, y) \\ &\stackrel{\text{C-R-DGL}}{=} f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) - \frac{\partial v}{\partial x}(y - ix) + R(x, y) \\ &= f(z_0) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot (x + iy) + R(x, y) \end{aligned}$$

mit  $R(x, y) = o(|(x, y)|)$ , das heißt  $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{|(x, y)|} = 0$  (der Restterm geht schneller gegen Null als  $(x, y)$ ). Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}) \cdot (z - z_0) + R(x, y)}{z - z_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{R(x, y)}{|z - z_0|}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{|z - z_0|}{z - z_0}}_{\text{beschränkt}} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.15.** Die komplexe Exponentialfunktion ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  (Begründung folgt)

**Proposition 1.16.** Es gelten folgende Differentiationsregeln:

1. Linearität: Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $a, b \in \mathbb{C}$ , dann ist  $a \cdot f + b \cdot g$  holomorph mit  $(a \cdot f + b \cdot g)'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$ .

2. Kettenregel: Sei  $f : \Omega \rightarrow \Omega', g : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann ist  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $(g \circ f)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ .
3. Produktregel: Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann ist  $f \cdot g$  holomorph mit Ableitung  $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ .

*Beweis.* (1): Additivität ist klar. Multiplikativität siehe (3)

(2): Übung

(3): Schreibe  $f = u + iv, g = r + is, u, v, r, s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $f \cdot g = (u \cdot r - v \cdot s) + i \cdot (u \cdot s + v \cdot r)$ . Jetzt setzen wir mit den reellen Produktregeln fort und sind fertig.  $\square$

**Satz 1.17.** Es sei  $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$  konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ , dann ist  $R(z)$  auf  $B_\rho(0)$  holomorph mit Ableitung

$$R'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+1)z^m, \quad n-1 = m.$$

*Beweis.* Siehe Analysis, beruht auf folgendem Satz: Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge differenzierbarer Funktionen auf  $U$ , sd.  $(f_n)_n$  punktweise und  $(f'_n)_n$  lokal-gleichmäßig konvergiert.

$$\Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \quad \square$$

### 1.3 Das komplexe Kurvenintegral

**Definition 1.18.** Eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine stetige Abbildung, sd.  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  existieren, für die  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Für  $t \neq t_i, t \in [a, b]$ , sei  $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$  der Geschwindigkeitsvektor.  $\gamma$  heißt geschlossen, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

**Definition 1.19** (Kurvenintegral). Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  stückweise  $C^1$ , sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Definiere das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \in \mathbb{C}.$$

Dazu bilden wir rechts Real- und Imaginärteil des Integranden und integrieren diese separat mit dem Riemann-/ Regel-/ Lebesgueintegral.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \underbrace{(u(\gamma(t)) + i \cdot v(\gamma(t)))}_{f(z)} \cdot \underbrace{(\dot{x}(t) + i \cdot \dot{y}(t))}_{dz} dt$$

,wobei  $f = u + iv, u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\gamma = x + iy, x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (ausmultiplizieren vgl Kurzschrift). Mithin ist  $f(z) = f(\gamma(t))$  der "Integrand" und  $dz = d(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)dt$  das "Tangentenelement" des Kurvenintegrals.

**Bemerkung 1.**

$$\stackrel{\text{ausmult.}}{=} \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) - v(\gamma(t)) \cdot \dot{y}(t)) dt + i \cdot \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \dot{y}(t) + v(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t)) dt$$

Der Realteil ist das Kurvenintegral über  $\bar{f} = u - iv$  aus der Analysis (aufgefasst als Vektorfeld  $\begin{pmatrix} \text{Re } f \\ \text{Im } f \end{pmatrix}$ ) und der Imaginärteil das entsprechende "normale" Kurvenintegral.

**Proposition 1.20.** Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve und  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  ein stückweiser  $C^1$ -Diffeomorphismus, dann ist  $\gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \Omega$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve.  $\text{sign}(\dot{\varphi})$  lässt sich zu einer konstanten Funktion auf  $[c, d]$  fortsetzen und für alle stetigen Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \text{sign}(\dot{\varphi}) \int_{\gamma \circ \varphi} f(\omega) d\omega$$

*Beweis.* Übung mit Substitutionsformel.

(Ein stückweise  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  ist ein Homomorphismus, sd. ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$  existieren mit  $\varphi|_{[s_{i-1}, s_i]} \in C^1([s_{i-1}, s_i])$  für  $i = 1, \dots, m$ )  $\square$

**Folgerung 1.21** (aus Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(t))|_{t=a}^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

*Beweis.* Es sei  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , sd.  $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1([t_{i-1}, t_i])$  für  $i = 1, \dots, n$ .

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\gamma_i} \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} f'(z) dz &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\gamma_i(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f \circ \gamma_i)'(t) dt \\ &= (f \circ \gamma_i)(t_i) - (f \circ \gamma_i)(t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f'(z) dz &= (f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))) + (f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1))) + \dots + (f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_{n-1}))) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung 2.** Wir möchten uns das komplexe Kurvenintegral als Umkehrung der komplexen Ableitung vorstellen. Wir sehen im nächsten Abschnitt, für welche Funktionen das geht.

## 1.4 Der Cauchy-Integralsatz

**Definition 1.22** (stückweise  $C^1$ -Homotopie). Eine stückweise  $C^1$ -Homotopie, in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , zwischen zwei stückweisen  $C^1$ -Kurven  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$ ,  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$  ist eine stetige Abbildung  $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ , sd.  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$  existieren, sd.  $h|_{[t_{j-1}, t_j] \times [s_{k-1}, s_k]} \in C^1$  ist (auch auf den jeweiligen Randstücken) und  $h(t, l) = \gamma_l(t)$  für  $l \in [0, 1]$ ,  $t \in [a, b]$  und  $h(a, s) = p$ ,  $h(b, s) = q$  für alle  $s \in [0, 1]$ .

**Definition 1.23** (homotope Kurve). Eine (stückweise  $C^1$ -) Kurve  $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega$  heißt zu einer (stückweisen  $C^1$ -) Kurve  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ , mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, (stückweise  $C^1$ -) homotop in  $\Omega$ , wenn es eine stückweise  $C^1$ -Homotopie zwischen ihnen in  $\Omega$  gibt.

**Definition 1.24** (nullhomotope Kurve). Eine geschlossene (stückweise  $C^1$ -) Kurve  $\gamma$  heißt (stückweise  $C^1$ -) nullhomotop in  $\Omega$ , wenn sie  $C^1$ -homotop zu einer konstanten Kurve ist.

**Definition 1.25** (einfach zusammenhängend). Das Gebiet  $\Omega$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene (stückweise  $C^1$ -) Kurve in  $\Omega$  (stückweise  $C^1$ -) nullhomotop in  $\Omega$  ist.



**Bemerkung 3** (Einschub zu Kurvenintegral). Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve, dann definieren wir die Bogenlänge (bzw. Länge) als

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \sup_{n, a=t_0 < \dots < t_n=b} \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

**Satz 1.26** (Cauchy-Integralsatz). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve, die in  $\Omega$  stückweise  $C^1$ -nullhomotop ist. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass für jede stückweise  $C^1$ -Abbildung  $h : \underbrace{[a, b] \times [0, 1]}_R \rightarrow \Omega$  gilt

$$\int_{h(\partial R)} f(z) dz = 0.$$

Dabei ist  $\int_{h(\partial R)}$  eine Abkürzung für  $\int_{h(\partial R)} = \int_{h_1} + \int_{h_2} + \int_{h_3} + \int_{h_4}$ , wobei  $h_1(t) = h(t, 0)$ ,  $h_2(s) = h(b, s)$ ,  $h_3(t) = h(a + b - t, 1)$ ,  $h_4(s) = h(a, 1 - s)$ .

Setze das zu einer stückweisen  $C^1$ -Kurve mit Namen  $h(\partial R)$  zusammen.

Annahme: Es gebe eine solche Abbildung  $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ , sd.  $\int_{h(\partial R)} f(z) dz \neq 0$ .

Wir zerlegen das Rechteck  $R$  in vier gleich große Teile  $R_1, \dots, R_4$  und sehen, dass

$$\int_{h(\partial R)} f(z) dz = \int_{h(\partial R_1)} f(z) dz + \dots + \int_{h(\partial R_4)} f(z) dz.$$

Da sich die zusätzlichen Integrale über Strecken im Inneren von  $R$  wegen Proposition 1.21 wegheben.

Jetzt wählen wir das Teilrechteck aus, für den das jeweilige Kurvenintegral über den Rand den größten Absolutbetrag hat, nenne es  $R_1$ . Es folgt

$$\left| \int_{h(\partial R_1)} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{h(\partial R)} f(z) dz \right|$$

Wir zerlegen weiter und erhalten so eine Folge von Rechtecken  $R_1 \supset R_2 \supset \dots, R_n$  mit Seitenlängen von  $R_n$  proportional zu  $2^{-n}$ , sd.

$$\left| \int_{h(\partial R_n)} f(z) dz \right| \geq 2^{-n} \left| \int_{h(\partial R)} f(z) dz \right|.$$

Nach dem Satz über die Intervallverschachtelung (Analysis) existiert ein eindeutiger Punkt  $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(t_0, s_0) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ .

Es sei  $z_0 = h(t_0, s_0) \in \Omega$ .

Beachte: Da  $h$  stückweise  $C^1$  ist, erhalten wir für jedes der endlich vielen Rechtecke aus Definition

1.22 eine obere Schranke für  $|\frac{\partial h}{\partial t}|, |\frac{\partial h}{\partial s}|$  (wegen der Kompaktheit). Da es nur endlich viele dieser Rechtecke gibt, folgt  $|\frac{\partial h}{\partial t}| \leq C, |\frac{\partial h}{\partial s}| \leq C$  auf ganz  $R = R_0$ , für ein festes  $C > 0$ .

Schreibe nahe  $z_0$  die Funktion  $f$  als  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + r(z - z_0)$ , wobei

$\lim_{z \rightarrow z_0} |\frac{r(z - z_0)}{z - z_0}| = 0$ , da  $f$  holomorph ist (vgl. Lemma 1.14).

Da  $f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)$  das Differential der holomorphen Funktion  $z \mapsto f(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0) \cdot (z - z_0)^2$  ist, folgt mit Bemerkung 2, dass das Integral von  $f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)$  über die geschlossenen Kurven  $h(\partial R_n)$  verschwindet. Die Länge  $L$  von  $h(\partial R_n)$ ,  $L(h(\partial R_n))$  können wir abschätzen durch  $4 \cdot 2^{-n} \cdot C$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{h(\partial R)} f(z) dz \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left| \int_{h(\partial R_n)} f(z) dz \right| \\
&\stackrel{(I)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left| \int_{h(\partial R_n)} r(z - z_0) dz \right| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{2n} \cdot \sup_{h(\partial R_n)} |r(z - z_0)| \cdot \underbrace{L(h(\partial R_n))}_{\leq 4 \cdot C \cdot 2^{-n}} \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \cdot 4 \cdot C \cdot \sup_{h(\partial R_n)} |r(z - z_0)| \cdot \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} \right) \\
&\stackrel{|z - z_0| \leq 2^{-n} \cdot 2 \cdot C}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 8 \cdot C^2 \cdot \sup_{h(\partial R_n)} \frac{|r(z - z_0)|}{|z - z_0|} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{|r(z - z_0)|}{|z - z_0|}}_{=0} \cdot 8 \cdot C^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also gilt  $|\int_{h(\partial R)} f(z) dz| = 0$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Folgerung 1.27.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  Gebiet,  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei stückweise  $C^1$ -Kurven in  $\Omega$  von  $p$  nach  $q$ , die stückweise  $C^1$ -homotop sind. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

*Beweis.* Sei  $h$  eine stückweise  $C^1$ -Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  in  $\Omega$ .

Betrachte  $k : [0, 1]^2 \rightarrow [a, b] \times [0, 1]$  mit

$$k(u, v) = \begin{cases} (a + (1 - v)4u(b - a), 0) & u \in [0, \frac{1}{4}] \\ (a + (1 - v)(b - a), 4u - 1) & u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (a + (1 - v)(3 - 4u)(b - a), 1) & u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (a, 4 - 4u) & u \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Die Kurve  $(h \circ k)(\cdot, 0) : [0, 1] \rightarrow \Omega$  ist geschlossen und wegen der Invarianz des Kurvenintegrals unter Umparametrisierung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{(h \circ k)(\cdot, 0)} f(z) dz &= \int_{\gamma_0} f(z) dz + \underbrace{\int_q f(z) dz}_0 + \int_{\gamma_1(-\cdot)} f(z) dz + \int_p f(z) dz \\
&= \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz
\end{aligned}$$

$(h \circ k)$  ist eine Nullhomotopie dieser Kurve. also verschwindet der obige Ausdruck.  $\square$

**Satz 1.28** (erweiterter Cauchy-Integralsatz). Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  umlaufe eine einfach zusammenhängende Teilmenge  $A \subset \Omega$  im mathematischen Drehsinn. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i \int_A \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \underbrace{dA(z)}_{\text{Flächenelement}}$$

(Vergleiche mit dem Satz von Stokes oder dem Gaußschen Divergenzsatz)

*Beweis.* Beweisskizze: Da  $A$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\gamma$  in  $A$  nullhomotop.

Sei  $h : [0, 1]^2 \rightarrow A \subset \Omega$  eine Nullhomotopie. Annahme:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - 2i \int_A \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dA(z) \right| = \varepsilon > 0.$$

Zerlege  $[0, 1]^2$  in vier gleich große Quadrate  $R', \dots, R''''$ . Dann gilt für eins der Quadrate:

$$\left| \int_{h(\partial R^?) } f(z) dz - 2i \int_{h(R^?) } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dA(z) \right| \geq \frac{\varepsilon}{4}$$

Nenne es  $R_1$  und zerlege weiter. Erhalte eine Intervallverschachtelung mit Grenzpunkt  $(t_0, s_0) \in [0, 1]^2$ ; sei  $h(t_0, s_0) =: z_0 \in \Omega$ . Schreibe

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} + r(z - z_0).$$

mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$ . Wir wissen, dass

$$\int_{h(\partial R^n)} \left( f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) \right) dz = 0.$$

In einer Übung berechnen wir

$$\int_{h(\partial R^n)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \overline{(z - z_0)} dz = 2i \cdot A(h(R^n))$$

(falls  $h(R^n)$  ein Parallelogramm ist — da  $h$  stückweise  $C^1$  ist, ist  $h(R^n)$  "fast" ein Parallelogramm, sd. die obige Behauptung bis auf einen ausreichend kleinen Rest stimmt.) Außerdem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{h(R^n)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dA(z) - \int_{h(R^n)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) dA(z) \right| \cdot 2^{2n} = 0$$

da  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  stetig ist.  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot A(h(R^n))$  Also erhalten wir einen Widerspruch genau wie im Beweis des Integralsatzes.  $\square$

## 1.5 Die Potenzreihendarstellung

Ziel:

- "holomorph" und "analytisch" sind gleichbedeutend.
- Man kann Ableitungen als Integrale schreiben.
- Funktionen haben Stammfunktionen genau dann, wenn sie holomorph sind.

**Satz 1.29** (Cauchy-Formel). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  sei so gewählt, dass  $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ .  $\gamma$  beschreibe den Rand von  $B_r(z_0)$  im mathematische Drehsinn. Dann gilt für all  $z \in B_r(z_0)$ , dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Beweis.*  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  ist in  $\zeta$  holomorph in  $\Omega \setminus \{z\}$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, sd.  $B_\varepsilon(z) \subset B_r(z_0)$ . Dann lässt sich eine in  $\Omega \setminus \{z\}$  nullhomotope Kurve  $\varphi$  finden, sd.

$$0 = \int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Berechne jetzt für  $\varepsilon > 0$  klein

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_0^1 f(\underbrace{z + \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}}_{\zeta}) \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot e^{2\pi i t}} \underbrace{2\pi i \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}}_{=\dot{\varphi}(t)} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 f(\underbrace{f(z) + R(\varepsilon e^{2\pi i t})}_{\text{da } f \text{ stetig ist, gilt } R \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0}) dt \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z). \quad \square$$

**Folgerung 1.30** (Mittelwertsatz). Es seien  $\Omega$ ,  $f$ ,  $z_0$ ,  $r$  wie oben, dann gilt

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r \cdot e^{2\pi i t}) dt$$

Kein Kurvenintegral und das hier ist nicht der Mittelwertsatz aus Ana 1.

*Beweis.* Setze  $z = z_0$  in der Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 f(z_0 + r \cdot e^{2\pi i t}) \cdot \frac{1}{r e^{2\pi i t}} r \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i t} dt$$

□

**Beispiel 1.31.** Wähle  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^z$ ,  $z_0 = 0$ ,  $r = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= e^0 = \int_0^1 e^{\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)} dt \quad \varphi = 2\pi t \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\cos(\varphi)} \cdot \cos(\sin(\varphi)) d\varphi}_{2\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{\cos(\varphi)} \cdot \sin(\sin(\varphi)) d\varphi}_0 \end{aligned}$$

**Satz 1.32** (Potenzreihenentwicklung). Es sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in \Omega$ . Dann konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$  mit  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$  (für ein  $r > 0$ , sd.  $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ ) mit Konvergenzradius  $\varphi \geq \sup\{r | \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega\}$  und stellt auf  $B_r(z_0)$  die Funktion  $f$  dar.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{\frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Wir dürfen Summation und Integration vertauschen, falls  $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = r$ , da dann Summe und Integral absolut konvergieren. Der Konvergenzradius ist daher mindestens  $r$ . Und zwar für jedes  $r$  mit  $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ .  $\square$

**Folgerung 1.33.** Holomorphe Funktionen sind (komplex) analytisch, insbesondere  $C^\infty$ .

*Beweis.* Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$ , sd.  $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ . Dann können wir  $f$  auf  $B_r(z_0)$  durch eine Potenzreihe darstellen. Insbesondere ist  $f$  auf  $B_r(z_0)$  analytisch (und  $C^\infty$ ). Da das für alle  $z_0 \in \Omega$  geht, folgt die Behauptung.  $\square$

Somit: "holomorph" und "analytisch" sind gleichbedeutend.

Grund: "Holomorphie" ist gleichbedeutend mit den Cauchy-Rieman-Differentialgleichungen (Lemma 1.14). Diese sind "elliptisch" und Lösungen elliptischer Differentialgleichungen sind mindestens so oft differenzierbar, wie ihre Koeffizienten und ihre rechte Seite.

Zur Erinnerung: Wir haben die Rechenregeln für Potenzreihen aus Proposition 1.7 (Kurzschrift) nicht bewiesen. Mit Folgerung 1.33 und Proposition 1.16 geht der Beweis recht einfach.

**Folgerung 1.34.** Es sei  $\Omega$  einfach zusammenhängend. Dann ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann holomorph, wenn  $f$  eine Stammfunktion  $F$  besitzt (das heißt  $F$  ist holomorph mit  $F' = f$ ).

*Beweis.* "  $\Leftarrow$  " Sei  $F$  Stammfunktion. Da  $F$  holomorph ist, ist  $F$  beliebig oft komplex differenzierbar, siehe Folgerung 1.33. Also ist auch  $f = F'$  beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere auch holomorph.

"  $\Rightarrow$  " Da  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, sind je zwei Kurven  $\gamma_0, \gamma_1$  von  $z_0 \in \Omega$  nach  $z \in \Omega$  homotop. Somit gilt

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta \quad \text{nach Folgerung 1.27}$$

Fixiere also  $z_0$  und definiere  $F = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$  für eine Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = z_0$  und  $\gamma(1) = z$ . Um  $F'(z)$  zu berechnen, betrachte  $\omega$  nahe  $z$  und eine Kurve  $\gamma$  von  $z_0$  nach  $\omega$  der Form (siehe Skizze Skriptum Niklas)

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow z} \frac{F(\omega) - F(z)}{\omega - z} &= \lim_{\omega \rightarrow z} \frac{1}{\omega - z} \left( \int_{\gamma_\omega} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow z} \frac{1}{\omega - z} \int_{\gamma_{\omega-z}} f(\zeta) d\zeta \\ &= \lim_{\omega \rightarrow z} \frac{1}{\omega - z} \int_0^1 f(\gamma_{\omega-z}(t)) \underbrace{\omega - z}_{=\dot{\gamma}_{\omega-z}(t)} dt \\ &= f(z). \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$  ist eine Stammfunktion.  $\square$

Zur Erinnerung: Identitätssatz für Potenzreihen.

**Folgerung 1.35** (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Falls eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  mit Häufungspunkt  $z \in \Omega$  existiert, sd.  $f|_A = g|_A$ , dann gilt  $f = g$  auf ganz  $\Omega$ .

*Beweis.* Nach Folgerung 1.33 sind  $f$  und  $g$  analytisch.

" $A$  hat Häufungspunkt  $z$ "  $\Leftrightarrow$  Es existiert eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{z\}$ , sd.  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ .

Es folgt  $(g - f)(z_n) = 0$  für alle  $n$  und nach dem Identitätssatz für Potenzreihen bzw. analytische Funktionen gilt somit  $g - f = 0$  auf ganz  $\Omega$ .  $\square$

Der Identitätssatz ermöglicht es manche aus dem reellen bekannten Funktionen auf  $\mathbb{C}$  zu übertragen und ihre Eigenschaften zu verstehen.

**Beispiel 1.36.** Es gilt für  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Wir können  $z \in \mathbb{C}$  in die Potenzreihenentwicklung einsetzen. Da der Konvergenzradius  $\infty$  ist, erhalten wir eine Funktion  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Da die Identitäten

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \sin''(z) &= -\sin(z) \end{aligned} \tag{1}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gelten, gelten sie nach dem Identitätssatz für alle  $z, w$  aus  $\mathbb{C}$ .

Zu (1) [Additionstheorem]: Nehme zunächst  $w \in \mathbb{R}$  als Konstante an, dann folgt das Additionstheorem für alle  $z \in \mathbb{C}$ ,  $w \in \mathbb{R}$ . Nehme nun  $z \in \mathbb{C}$  konstant an, erhalte Additionstheorem für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Definiere die Hyperbelfunktion  $\cosh, \sinh$  durch

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} \\ \sinh(z) &= \frac{\sin(iz)}{i} = \frac{e^{-z} - e^z}{-2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite verhindert der Identitätssatz die Existenz holomorpher Fortsetzungen von reellen Funktionen mit bestimmten Eigenschaften.

**Beispiel 1.37.** 1. Es gibt kein Gebiet  $\Omega$  mit  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \Omega$  und sich die Funktion  $x \mapsto |x|$  auf  $\Omega$  fortsetzen ließe.

Denn: wäre  $f$  eine Fortsetzung, dann wäre  $f(z) = z$  auf  $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$  und daher auf ganz  $\Omega$ .

2. Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist  $C^\infty$  und bei  $x = 0$  verschwinden alle Ableitungen. Sie ist nicht analytisch bei  $x = 0$  und hat daher keine holomorphe Fortsetzung.

**Satz 1.38** (Morera). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, sd. das Kurvenintegral von  $f$  über den Rand eines jeden Dreiecks, das ganz in  $\Omega$  liegt verschwindet. Dann ist  $f$  holomorph.

*Beweis.* Benutze Folgerung 1.34 auf kleinen Bällen  $B_r(z_0) \subset \Omega$  für  $z_0 \in \Omega$  und  $r > 0$  ausreichend klein.

Definiere jetzt  $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$ , wobei  $z \in B_r(z_0)$  und  $\gamma(t) = z + t(\omega - z)$ . Argumentiere wie in Folgerung 1.34, dass  $F'(z) = f(z)$ , allerdings benutzen wir diesmal:

$$\int_{\gamma_\omega} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{\omega-z}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{\omega-z}} f(\zeta) d\zeta.$$

$\Rightarrow F' = f$  auf  $B_r(z_0)$ .

Da  $z_0 \in \Omega$  und  $r > 0$  beliebig waren, ist  $f$  auf  $\Omega$  holomorph. □

**Satz 1.39** (Schwarzsches Spiegelungsprinzip). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  symmetrisch bezüglich  $\mathbb{R}$  (dh.  $z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega$ ). Schreibe  $\Omega_+ = \{z \in \Omega | \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}$  und  $\Omega_- = \{z \in \Omega | \operatorname{Im} z < 0\}$ . Sei  $f : \Omega_+ \cup \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, sd.  $f|_{\Omega_+}$  holomorph und  $f|_{\Omega_0}$  reellwertig ist. Dann existiert eine holomorphe Fortsetzung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ .

*Beweis.* Definiere  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$  für  $z \in \Omega$ , dann ist  $f$  auf ganz  $\Omega$  stetig. Zeige jetzt, dass die Voraussetzungen des Satzes von Morera gelten.

1. Für jedes Dreieck in  $\Omega_+$  stimmt die Behauptung
2. Sei  $\Delta \subset \Omega_+ \cup \Omega_0$  ein Dreieck. Dann betrachte Dreiecke  $\Delta_n \subset \Omega_+$ , die dagegen konvergieren. Da das Integral stetig vom Integranden abhängt (glm. stetig gilt, da  $\Delta$ -Fläche kompakt ist), ist auch das Integral über den Rand von  $\Delta$  gleich 0.
3. Falls  $\Delta \subset \Omega \subset \Omega_- \cup \Omega_0$  liegt, berechne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \overline{f(\overline{\gamma(t)})} \overline{\dot{\gamma}(t)} dt \\ &= \overline{\int_a^b f(\overline{\gamma(t)}) \dot{\gamma}(t) dt} = 0, \end{aligned}$$

falls  $\gamma$  den Rand von  $\Delta$  beschreibt.

4.  $\Delta$  erstreckt sich über alle Dreiecke. Dann zerfällt  $\Delta$  in höchstens 3 Dreiecke vom Typ (1)-(3). Jetzt folgt Homotopie aus Satz 1.38.

□

**Beispiel 1.40.** sin aus Beispiel 1.36.

**Bemerkung 4.** Es sei  $g$  auf  $\partial B_r(z_0)$  stetig. Dann können wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle  $z \in B_r(z_0)$  definieren.

Frage: Setzt  $f$  die Funktion  $g$  stetig fort?

(Beachte:  $\partial B_r(z_0)$  ist im schlimmsten Fall der Rand des Konvergenzkreises...)

Falls ja, wäre auch  $f(z) \cdot (z - z_0)^k$  holomorph für alle  $k \geq 0$  und somit hätten wir nach dem Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \underbrace{(\zeta - z_0)^k}_{z_0 + re^{it}} d\zeta = 0.$$

Das bedeutet, dass "ungefähr die Hälfte" der Fourierzerlegung von  $t \mapsto g(z_0 + r \cdot e^{it})$  verschwindet.

## 2 Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen

Aus der reellen Analysis: Zwischenwertsatz (Bilder von Intervallen sind Intervalle) lokaler Umkehrsatz für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$

1. Funktionen auf  $\Omega \subset \mathbb{C}$
2. Maximumprinzip & Satz von Liouville
3. lokaler Umkehrsatz / Blättersatz

$\Omega$  ist stets ein Gebiet in  $\mathbb{C}$  und  $f$  (falls nicht anders gesagt) stets holomorph.

## 2.1 Nullstellen und isolierte Singularitäten

**Definition 2.1** (Nullstellen-Ordnung). Für  $z_0 \in \Omega$  wende  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  in einer Umgebung  $U \subset \Omega$  von  $z_0$  dargestellt durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die (Nullstellen-) Ordnung von  $f$  bei  $z_0$  ist die kleinste Natürliche  $n_0 = \text{ord}_{z_0}(f)$ , sd.  $a_{n_0} \neq 0$  und  $a_n = 0$  für alle  $0 \leq n < n_0$ .

Falls  $\text{ord}_{z_0}(f) > 0$  ist, hat  $f$  bei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $\text{ord}_{z_0}(f)$ .

**Beispiel 2.2.** 1. Die Sinus-Funktion hat um 0 die Entwicklung

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ also } \text{ord}_0(\sin) = 1.$$

also  $\text{ord}_0(\sin) = 1$ . Da  $\sin(\pi - z) = \sin(z)$  folgt  $\text{ord}_{\pi}(\sin) = 1$ .

Da  $\sin(2\pi + z) = \sin(z)$  folgt  $\text{ord}_{k\pi}(\sin) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  (Ansonsten hat der Sinus keine Nullstellen – siehe Übung zu cos).

2. Der Cosinus hat Nullstellen der Ordnung 1 bei  $(k + \frac{1}{2}) \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 2.3** (isolierte bzw. hebbare/, wesentliche Singularität). Es sei  $z_0 \in \Omega$  und  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann heißt  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ .

1. Wenn sich  $f$  zu einer holomorphen Funktion auf ganz  $\Omega$  forsetzen lässt, heißt  $z_0$  eine hebbare Singularität.

2. Wenn es  $m > 1$  und Zahlen  $a_n, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  mit  $a_m \neq 0$  gibt, sd.

$$f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{(z - z_0)^n}$$

bei  $z_0$  eine hebbare Singularität hat, dann hat  $f$  bei  $z_0$  eine Polstelle der Ordnung  $m$  mit Hauptteil  $\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{(z - z_0)^n}$ . Wir setzen  $\text{ord}_{z_0}(f) = -m$ .

3. Wenn für alle  $r > 0$  mit  $B_r(z_0) \subset \Omega$  das Bild  $\text{im}(f|_{B_r(z_0) \setminus \{z_0\}})$  dicht in  $\mathbb{C}$  liegt, heißt  $z_0$  eine wesentliche Singularität von  $f$  und wir setzen  $\text{ord}_{z_0}(f) = -\infty$ .

(Der Vollständigkeit halber sei  $\text{ord}_{z_0}(0) = \infty$ ).

**Beispiel 2.4.** 1. Der Tangens  $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$  hat Nullstellen der Ordnung 1 bei  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Bei  $z_0 = \frac{\pi}{2}$  schreiben wir

$$-\sin(z - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z) = -(z - \frac{\pi}{2}) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n+1)!}}_{=f(z) \text{ holom. } f(\frac{\pi}{2}) \neq 0}$$

Da  $\tan(z + \pi) = \tan(z)$ , hat  $\tan$  bei  $(k + \frac{1}{2})\pi$  ebenfalls einen Pol der Ordnung 1.

$$\tan(z) = -\frac{\sin(z)}{(z - \frac{\pi}{2}) - f(z)} = -\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{f(z) - \sin(z)}{(z - \frac{\pi}{2}) \cdot f(z)}}_{g(z)}$$



Da  $f(z) - \sin(z)$  bei  $z = \frac{\pi}{2}$  den Wert 0 hat, gilt

$$f(z) - \sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^n$$

und den obigen Bruch kürzen, somit hat  $g(z)$  bei  $\frac{\pi}{2}$  eine hebbare Singularität. Also hat  $\tan(z)$  bei  $z = \frac{\pi}{2}$  einen Pol der Ordnung 1 mit Hauptteil  $-\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}}$  und daher  $\text{ord}_{\frac{\pi}{2}}(\tan) = 1$ .

2. Die Funktion  $z \mapsto e^{-\frac{1}{z}}$  hat bei  $z = 0$  eine wesentliche Singularität. Sei etwa  $r > 0$ , dann ex.  $n \in \mathbb{N}$  sd.  $\frac{1}{2\pi n} < r$ . Dann betrachte  $U = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\omega) \in (2\pi n, 2\pi(n+1))\}$ . Aus  $\omega \in U$  folgt  $|\frac{1}{\omega}| < r$ . Auf  $U$  nimmt die Exponentialfunktion alle Werte in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  an: jeder der Werte hat die Form  $s \cdot e^{i\varphi} = e^{\log s + i\varphi}$ , ( $\varphi \in (2\pi n, 2\pi(n+1))$ ). Da  $-\frac{1}{\omega} \in B_r(0)$  für alle  $\omega \in U$  nimmt  $e^{-\frac{1}{z}}$  auf  $B_r^\times(0) = B_r(0) \setminus \{0\}$  alle Werte in  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  an. Also ist 0 wesentliche Singularität.

3. Das gleiche gilt für  $e^{-\frac{1}{z^2}}$ , obwohl diese Funktion auf  $\mathbb{R}$  eine hebbare Singularität bei 0 hat.

**Satz 2.5** (Riemannscher Hebbarkeitssatz). Wenn  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  die Eigenschaft

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0$$

hat, dann hat  $f$  bei  $z_0$  eine hebbare Singularität.

*Beweis.* Betrachte die Funktion  $g(z) = (z - z_0)^2 \cdot f(z)$  auf  $\Omega \setminus \{z_0\}$ . Dann ist  $g$  stetig auf  $\Omega$  fortsetzbar durch  $g(z_0) = 0$ . Außerdem ist  $g$  auf  $\Omega \setminus \{z_0\}$  holomorph und sogar bei  $z_0$  mit  $g'(z_0) = 0$ , denn:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0.$$

Also ist  $g$  holomorph und hat daher bei  $z_0$  eine Potenzreihendarstellung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit  $a_0 = a_1 = 0$ . Somit lässt sich  $f$  bei  $z_0$  zu einer holomorphen Funktion mit Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n$$

fortsetzen. □

**Beispiel 2.6.** Es sei  $r > 0$ . Dann gibt es keine holomorphe Funktion  $f$  auf  $B_r^\times(0)$  mit  $f(z)^2 = z$ . Denn wäre  $f$  eine solche Funktion, dann wäre  $|f(z)| = \sqrt{|z|}$ , also

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0.$$

Das heißt  $f$  müsste sich holomorph auf  $B_r(0)$  fortsetzen lassen, aber das geht nicht, da die reelle Wurzelfunktion bei  $x = 0$  bereits nicht differenzierbar ist.

**Bemerkung 5.** Wir können  $\text{ord}_{z_0}(f)$  wie folgt charakterisieren:  $n = \text{ord}_{z_0}(f)$  ist die kleinste ganze Zahl, sd.

$$g(z) = (z - z_0)^{-n} f(z)$$

bei  $z_0$  eine hebbare Singularität hat.

1.  $f$  hat hebbare Singularität  $\Rightarrow \text{ord}_{z_0}(f) \geq 0$  und  $g$  ist nahe  $z_0$  beschränkt für  $n = \text{ord}_{z_0}(f)$ , (siehe Potenzreihenentwicklung), hat also hebbare Singularität, wohingegen für  $n = \text{ord}_{z_0}(f) + 1$  die Funktion  $g$  nahe  $z_0$  nicht einmal beschränkt ist.
2. Wenn  $f$  einen Pol hat, habe

$$h(z) = f(z) - \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{(z - z_0)^n}$$

mit  $m = -\text{ord}_{z_0}(f)$  und  $a_m \neq 0$  eine hebbare Singularität. Also hat  $(z - z_0)^m \cdot f(z)$  bei  $z_0$  hebbare Singularität,  $(z - z_0)^{m-1} \cdot f(z)$  jedoch nicht.

**Satz 2.7** (Casorati-Weierstraß). Sei  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann trifft genau eine der folgenden Aussagen zu.

1.  $f$  hat eine hebbare Singularität bei  $z_0$
2.  $f$  hat eine Polstelle bei  $z_0$
3.  $f$  hat eine wesentliche Singularität bei  $z_0$

*Beweis.* Klar: (1) und (2) schließen einander aus.

(3) schließt (1) und (2) aus:

(1) $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$  existiert, zu jedem  $\delta > 0$  existiert also ein  $\varepsilon > 0$ , sd.  $\text{im}(f|_{B_\varepsilon^\times(z_0)}) \subset B_\delta(a)$  Insbesondere liegt dieses Bild nicht dicht in  $\mathbb{C}$ .

(2) $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ , dh. zu jedem  $\delta > 0$  ex.  $\varepsilon > 0$ , sd.  $\text{im}(f|_{B_\varepsilon^\times(z_0)}) \subset \mathbb{C} \setminus B_{\frac{1}{\delta}}(0)$  Insbesondere liegt das Bild nicht dicht in  $\mathbb{C}$ .

Noch zeigen: Wenn das Bild von  $f|_{B_r^\times(z_0)}$  nicht dicht liegt, hat  $f$  einen Pol oder eine hebbare Singularität. Wenn  $\text{im}(f|_{B_r^\times(z_0)})$  nicht dicht in  $\mathbb{C}$  ist, ex.  $b \in \mathbb{C} \setminus \overline{\text{im}(f|_{B_r^\times(z_0)})}$ , dh. es ex.  $\varepsilon > 0$ , sd.  $B_\varepsilon(b) \cap \text{im}(f|_{B_r^\times(z_0)}) = \emptyset$ . Betrachte die Funktion  $g : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

Dann ist  $|g(z)| < \frac{1}{\varepsilon}$  auf  $B_r^\times(z_0)$ , somit hat  $g$  eine holomorphe Fortsetzung auf ganz  $B_r(z_0)$ . Also hat  $f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$  einen Pol oder eine hebbare Singularität. □

## 2.2 Das Maximumprinzip und der Satz von Liouville

Frage: Kann  $|f(z)|$  lokale Maxima haben? auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt sein?

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  geht das, z. B.  $\cos, \sin$ .

**Satz 2.8** (Maximumprinzip). Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Wenn  $z_0 \in \Omega$  existiert, sd.

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

für alle  $z \in B_r(z_0) \subset \Omega$  ( $r > 0$  klein genug), dann ist  $f$  auf ganz  $\Omega$  konstant.

*Beweis.* Nach dem Identitätssatz reicht es zu zeigen, dass  $f$  auf  $S_r(z_0)$  konstant ist.

Wir nehmen an, dass  $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ . Nach dem Mittelwertsatz gilt dann:

$$f(z_0) = \int_0^1 \underbrace{f(z_0 + re^{2\pi it})}_{|f(z)| \leq |f(z_0)|} dt$$

Schreibe  $f(z_0) = re^{i\varphi}$ , dann gilt

$$|f(z_0)| = \operatorname{Re}(e^{i\varphi} f(z_0))$$

Aus  $|\omega| \leq |f(z_0)|$  folgt also

$$\operatorname{Re}(\underbrace{e^{i\varphi}\omega}_{|\omega| \leq |f(z_0)|}) \leq |f(z_0)| \quad (2)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |f(z_0)| = \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} \cdot f(z_0)) &= \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} \cdot \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi it}) dt\right) \\ &= \int_0^1 \underbrace{\operatorname{Re}(e^{-i\varphi} \cdot f(z_0 + re^{2\pi it}))}_{\leq |f(z_0)|} dt \leq |f(z_0)| \end{aligned}$$

Da Gleichheit gilt und der Integrand stetig ist, folgt

$$\operatorname{Re}(e^{-i\varphi} \cdot f(z_0 + re^{2\pi it})) = |f(z_0)|$$

für alle  $t$ . Gleichheit in 2 gilt genau dann, wenn  $|\omega| = |f(z_0)|$  und das Argument (die Phase) von  $\omega$  gerade  $\varphi$  ist. Das heißt, wenn  $\omega = f(z_0)$ . Also gilt  $f(z_0 + re^{2\pi it}) = f(z_0)$  für alle  $t$  und somit ist  $f$  nach dem Identitätssatz konstant.  $\square$

**Beispiel 2.9.**  $\cos$  hat zwar auf  $\mathbb{R}$  ein lokales Maximum bei 0, aber da  $\cos(iy) = \cosh(iy)$  hat  $\cos$  kein lokales Maximum in  $\mathbb{C}$ .

**Folgerung 2.10** (Schwarz Lemma). Es sei  $f : B_r(0) \rightarrow B_r(0)$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt

1.  $|f(z)| \leq |z|$  für alle  $z$
2.  $|f'(0)| \leq 1$

Wenn in 1 für  $z \neq 0$  oder in 2 Gleichheit gilt, existiert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$ , sd.  $f(z) = \lambda \cdot z$ .

*Beweis.* Betrachte  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ ,  $g : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ . Da  $f(0) = 0$ , hat  $g$  bei 0 eine hebbare Singularität,  $g$  ist also auf ganz  $B_r(0)$  holomorph mit

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0).$$

Sei  $s < r$ . Da  $|f(z)| \leq r$  für alle  $z$  mit  $|z| = s$ , folgt nach dem Maximumprinzip

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{r}{s}$$

für alle  $z$  mit  $|z| = s$ . (Denn stetige Funktionen auf einem Kompaktum haben stets ein Maximum.) Wegen des Maximumprinzips muss das Maximum auf dem Rand liegen. Für  $s \rightarrow r$  erhalten wir  $|g(z)| \leq 1$  für alle  $z \in B_r(0)$ . Es folgen 1 & 2. Falls Gleichheit gilt, hat  $|g|$  ein lokales Maximum  $|g(z)| = 1$  bei  $z \neq 0$  (im Falle 1) oder bei 0 (im Falle 2), ist also konstant. Setze  $\lambda = g(z)$ .  $\square$

**Definition 2.11** (biholomorphe Funktion). Es seien  $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{C}$  Gebiete. Eine holomorphe, bijektive Abbildung  $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1$  heißt biholomorph.

Wir sehen später (Satz 2.23

), dass auch die Umkehrabbildung holomorph ist. Im reellen hingegen haben wir z. B.  $x \mapsto x^3$ , die bijektiv und differenzierbar, aber kein Diffeomorphismus ist.

**Beispiel 2.12.** Ziel: Finde alle biholomorphen Abbildungen  $B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ .

Es sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  mit  $(c, d) \neq (0, 0)$ , dann definieren wir die Möbiustransformation  $M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  für alle  $z$  mit  $cz+d \neq 0$  (siehe Übung).

Es gilt  $M_A \cdot M_B = M_{A \cdot B}$  (siehe Übung).

Insbesondere hat  $M_A$  eine Umkehrabbildung, wenn  $A$  invertierbar ist (denn  $M_{E_2}(z) = z$ ). Sei  $A \in U(1, 1) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = 1 \wedge a\bar{b} - c\bar{d} = 0\}$ . Die Inverse matrix  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$  liegt ebenfalls in  $U(1, 1)$

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 - |c|^2 & \bar{a}b - \bar{c}d \\ -\bar{a}b + \bar{c}d & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $A \in U(1, 1)$  gilt  $M_A : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ . Sei also  $|z| < 1$ .

$$\begin{aligned} |az+b|^2 &= (az+b)(\overline{az+b}) = |a|^2|z|^2 + |b|^2 + a\bar{z}\bar{b} + \bar{a}zb \\ &= |c|^2|z|^2 + |d|^2 + cz\bar{d} + \bar{c}z\bar{d} + (|a|^2 - |c|^2) \cdot |z|^2 - (|d|^2 - |b|^2) \\ &= |cz+d|^2 + |z|^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |M_A(z)|^2 = \frac{|az+b|^2}{|cz+d|^2} = 1 - \overbrace{\frac{1-|z|^2}{|cz+d|^2}}^{>0} < 1$$

Beachte:  $|z| < 1 \Rightarrow |cz|^2 < |c|^2 = |d|^2 - 1 \Rightarrow cz+d \neq 0$ . Dazu benutze die Behauptung

$$(|a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = 1 \wedge a\bar{b} = c\bar{d}) \Leftrightarrow (|a|^2 - |b|^2 = |d|^2 - |c|^2 = 1 \wedge a\bar{c} = b\bar{d})$$

Also ist  $M_A$  eine holomorphe Abbildung von  $B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ . Sie ist biholomorph mit Umkehrabbildung  $M_{A^{-1}}$ .

**Folgerung 2.13** (aus dem Schwarz-Lemma). Es sei  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  biholomorph. Dann gilt  $f = M_A$  für ein  $A \in U(1, 1)$ . ( $U(1, 1)$  ist reell dreidimensional)

**Definition 2.14.**  $U(1, 1) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = 1 \wedge a\bar{b} - c\bar{d} = 0\}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(1, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \in U(1, 1)$$

**Bemerkung 6.**  $U(1, 1)$  ist die Menge der linearen Abbildungen von  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , die die hermitesche Form  $\langle \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle = \bar{z}u - \bar{w}v$  erfüllt.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(1, 1)$ , dann folgt  $|a|, |d| \geq 1$ , also existiert  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sd.  $d = \lambda\bar{a}$ . Aus  $a\bar{b} = c\bar{d} = c\bar{\lambda}a$  folgt  $b = \lambda\bar{c}$   $1 = |d|^2 - |b|^2 = |\lambda|^2(|a|^2 - |c|^2) = |\lambda|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$ . Also gilt  $|a|^2 - |b|^2 = |a|^2 - |c|^2 = 1$  und  $|d|^2 - |c|^2 = |a|^2 - |c|^2 = 1$  und  $a\bar{c} - b\bar{d} = a\bar{c} - \lambda\bar{c}\lambda a = a\bar{c} - \bar{c}a = 0$ . Hieraus folgt, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \in U(1, 1)$$

Analog zeige, dass  $U(1, 1)$  unter Multiplikation abgeschlossen ist.

*Wiederholung.*  $M_A^{-1} = M_{A^{-1}} \Rightarrow M_A : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  biholomorph.

**Folgerung 2.15.** Es sei  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  biholomorph. Dann gilt  $f = M_A$  für ein  $A \in U(1, 1)$ .

*Beweis.* Idee: Benutze Schwarzlemma.

Dazu brauchen wir eine Abbildung  $f$ , sd.  $f(0) = 0$ . Sei zunächst  $f$  wie in der Beh.  $z_0 = f(0) = r \cdot e^{i\varphi}$ . Es gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \in U(1, 1) \text{ und } (M_B \circ f)(0) = \frac{1 \cdot f(0) + 0}{0 + e^{i\varphi}} = r \in \mathbb{R}.$$

Da  $M_B$  und  $f$  biholomorph sind, ist auch  $M_B \circ f$  biholomorph. Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$C_t = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \in U(1, 1),$$

denn  $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$ , da für  $s \in \mathbb{R}$  gilt  $1 = \cos(s)^2 + \sin(s)^2 = \cosh(is)^2 + (\pm i \cdot \sinh(is))^2 = \cosh(is)^2 - \sinh(is)^2$ , für alle  $t \in \mathbb{C}$ .

$$M_{C_t}(r) = \frac{r \cosh(t) + \sinh(t)}{r \sinh(t) + \cosh(t)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = -\tanh(t)$$

$$\tanh' = \frac{\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2}{\cosh(t)^2} = \frac{1}{\cosh(t)^2} > 0$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Also ist  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow I$  umkehrbar mit Bildbereich  $I = (\lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(t), \lim_{t \rightarrow -\infty} \tanh(t)) = (-1, 1)$ , denn

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \pm 1.$$

Also existiert ein  $t_0$ , sd.  $r = -\tanh(t_0)$ , denn  $r \in (-1, 1)$ . Es folgt

$$(M_{C_{t_0}} \circ M_B \circ f)(0) = \frac{r \cosh(t_0) + \sinh(t_0)}{r \sinh(t_0) + \cosh(t_0)} = 0$$

und  $M_{C_{t_0}} \circ M_B \circ f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  ist biholomorph.

Umgekehrt erhalten wir  $f$  zurück als  $M_{B^{-1}} \circ M_{C_{t_0}^{-1}} \circ (M_{C_{t_0}} \circ M_B \circ f) = f$ . Also sei ohne Einschränkung  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  biholomorph mit  $f(0) = 0$ . Es sei  $g : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  die Umkehrfunktion, dann gilt auch  $g(0) = 0$ . Wir leiten  $f \circ g = id$  bei  $z = 0$  ab und erhalten  $f'(0) = g'(0) = 1$ . Aus dem Schwarzlemma folgt  $1 \geq |f'(0)| \cdot |g'(0)| = 1$ . Also existiert ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$ , sd.  $f(z) = \lambda \cdot z$  für alle  $z \in B_1(0)$ . Also ist  $f = M_A$  mit  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(1, 1)$ , denn  $M_A = \frac{\lambda z + 0}{0 + 1} = \lambda z$ .

$$M_{B^{-1}} \circ M_{C_{t_0}^{-1}} \circ M_A \stackrel{\text{Übung}}{=} M_{B^{-1}C_{t_0}^{-1}A}$$

$$\begin{aligned} B^{-1}C_{t_0}^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(t_0) & -\sinh(t_0) \\ -\sinh(t_0) & \cosh(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cosh(t_0) & -\sinh(t_0) \\ -e^{-i\varphi} \lambda \sinh(t_0) & e^{-i\varphi} \cosh(t_0) \end{pmatrix} \in U(1, 1) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 7.** Im Gegensatz dazu gibt es sehr viele Diffeomorphismen  $f : (0, 1) \xrightarrow{\sim} (0, 1)$  z. B. alle Polynome  $P$  mit  $P(0) = 0$ ,  $P(1) = 1$ , sd.  $P'$  auf  $(0, 1)$  keine Nullstelle hat.

**Satz 2.16** (Satz von Liouville). Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und beschränkt, dann ist  $f$  konstant.

*Beweis.*  $f$  beschränkt, das heißt es existiert  $C \in \mathbb{R}$ , sd.  $|f(z)| \leq C$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Schreibe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Für  $r > 0$  gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r^1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\varphi})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi \\ &\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\varphi})|}{r^{n+1}} r d\varphi \leq C \cdot \frac{1}{r^n} \end{aligned}$$

Für  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir  $a_n = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Somit ist  $f(z) = a_0$  konstant.

□

*Wiederholung.* Ein Polynom  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  hat höchstens  $n = \deg P$  viele Nullstellen.

**Folgerung 2.17** (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes nichtkonstante Polynom über  $\mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ . (Daraus folgt induktiv, dass jedes normierte Polynom in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt.)

*Beweis.* Es sei  $P = a_n z^n + \dots + a_0$  ein Polynom ohne Nullstellen in  $\mathbb{C}$ . Es gelte  $a_n \neq 0$ . Dann ist  $f = \frac{1}{P}$  eine holomorphe Funktion.

*Behauptung:*  $f$  ist beschränkt.

Schreibe dazu  $P(z) = a_n z^n \cdot (1 + \dots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n})$ . Sei  $b = |\frac{a_{n-1}}{a_n}| + \dots + |\frac{a_0}{a_n}|$ . Für  $|z| > 2b$  folgt dann

$$|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot z^{-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n}| \geq \frac{1}{2}$$

Somit ist  $f = \frac{1}{P}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{2b}(0)}$  durch  $\frac{2}{a_n \cdot (2b)^n}$  beschränkt. Da  $\overline{B_{2b}(0)}$  kompakt ist und  $|f|$  stetig ist, ist  $|f|$  auch auf  $\overline{B_{2b}(0)}$  beschränkt, also auf ganz  $\mathbb{C}$ . Nach dem Satz von Liouville ist  $f$  und  $P = \frac{1}{f}$  konstant.  $\square$

**Bemerkung 8.** Es ist durchaus legitim, den "Fundamentalsatz der Algebra" mit analytischen Methoden zu beweisen, denn  $\mathbb{C}$  wurde aus  $\mathbb{R}$  konstruiert und  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$  durch Vervollständigung. Dadurch sind die reellen Zahlen kein algebraisches, sondern ein analytisches Konstrukt.

## 2.3 Das lokale Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen

*Wiederholung.* Es sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine  $C^1$ -Funktion,  $U \subset \mathbb{R}^N$  offen, bei  $x_0 \in U$  sei  $dF(x_0) \in M_N(\mathbb{R})$  invertierbar. Dann gibt es Umgebungen  $V \subset U$  von  $x_0$  und  $W \subset \mathbb{R}^N$  von  $y_0 = F(x_0)$ , sd.  $F|_V : V \rightarrow W$  ein Diffeomorphismus ist. Sei  $G : W \rightarrow V$  die Umkehrabbildung, dann gilt  $dF(G(y)) \cdot dG(y) = E_N$  für alle  $y \in W$ .

**Satz 2.18** (lokaler Umkehrsatz). Es sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann existieren Umgebungen  $U \subset \Omega$  von  $z_0$  und  $V \subset \mathbb{C}$  von  $w_0 = f(z_0)$ , sd.  $f|_U : U \rightarrow V$  biholomorph ist.

*Beweis.* Schreibe  $f' = u + iv \neq 0$  nach Voraussetzung mit  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist als  $2 \times 2$  Matrix die reelle Ableitung von  $f$  bei  $z_0$  gegeben durch

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u(z_0) & -v(z_0) \\ v(z_0) & u(z_0) \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist invertierbar, denn ihre Determinante ist  $u^2 + v^2 = |f'|^2$ . Der lokale Umkehrsatz aus Analysis II liefert  $U, V$  und eine  $C^1$ -Umkehrfunktion  $g : V \rightarrow U$ . Da gilt

$$dg(w) = df(g(w))^{-1} = \frac{1}{|f'(g(w))|^2} \begin{pmatrix} u(g(w)) & v(g(w)) \\ -v(g(w)) & u(g(w)) \end{pmatrix},$$

ist  $g$  komplex differenzierbar mit Ableitung  $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$ .  $\square$

## 3 Der Residuensatz

*Frage:* Was passiert mit dem Kurvenintegral über einer geschlossenen Kurve, die ein Gebiet umläuft, wenn der Integrand im Inneren isolierte Singularitäten hat?

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i} \underbrace{n_{\gamma}(z_j)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \text{Res}_{z_j}(f)$$

Mit diesem Satz lassen sich viele reelle Integrale bestimmen.

### 3.1 Umlaufzahl und Homologie

*Ziel:* Verstehe die Zahl  $n_\gamma(z)$ , die Umlaufzahl von  $\gamma$  um  $z$ .

*Motivation:* Das Kurvenintegral ist invariant unter Umparametrisierung und man kann Integrationsbereiche zerstückeln und neu zusammensetzen.

**Definition 3.1** (formale Linearkombination). Sei  $M$  eine Menge. Eine formale- $(\mathbb{Z})$ -Linearkombination von Elementen aus  $M$  ist ein Ausdruck der Form  $\sum_{m \in M} a_m \cdot m$ , wobei  $a_m = 0$  für alle bis auf endlich  $m \in M$ . Diese bilden eine abelsche Gruppe unter Addition und lassen sich mit  $n \in \mathbb{Z}$  multiplizieren.

**Definition 3.2.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.

1. Zwei formale Linearkombinationen von stückweisen ( $C^1$ -Kurven) in  $\Omega$  heißen als Kette äquivalent, wenn ihre Differenz eine formale  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von Ausdrücken der Formen

$$\begin{aligned} \gamma - \text{sign}(\dot{\varphi})(\gamma \circ \varphi) \\ \gamma - \gamma|_{[a,b]} - \gamma|_{[c,d]} \end{aligned}$$

ist, wobei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  stückweise  $C^1$ -Kurve sei,  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stückweiser  $C^1$ -Diffeomorphismus ist und  $c \in (a, b)$ . Eine Äquivalenzklasse von stückweisen  $C^1$ -Kurven heißt (ganzzahlige 1-)Kette in  $\Omega$ , die Menge aller Ketten bezeichnen wir mit  $C(\Omega)$ .

2. Der Rand einer Kette  $c = n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k$  ist die formale Linearkombination von Punkten in  $\Omega$

$$\partial c = n_1[\gamma_1(b_1)] - n_1[\gamma_1(a_1)] \pm \dots + n_k[\gamma_k(b_k)] - n_k[\gamma_k(a_k)],$$

wobei  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$  stückweise  $C^1$ -Kurve ist. Eine Kette heißt geschlossen oder Zykel, wenn  $\partial c = 0$ . Die Menge aller (ganzzahligen 1-)Zykel in  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $Z(\Omega)$ .

**Beispiel 3.3.** 1. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  geschlossene Kurve, sei  $[\gamma]$  die zugehörige Kette, damit ist  $c = [\gamma]$  ein Zykel, denn  $\partial c = [\gamma(b)] - [\gamma(a)] = 0$ .

*Beachte:* Wir rechnen hier nicht in  $\mathbb{C}$ , das heißt es ist z. B.  $2[i] \neq [2i]$ .

2. Betrachte  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\gamma_1(t) = e^{2\pi it}, \quad \gamma_2(t) = -e^{2\pi it}, \quad \gamma_3(t) = e^{-2\pi it}.$$

Dann gilt

$$[\gamma_1] = [\gamma_2] = -[\gamma_3]$$

(werden später wichtig)

**Bemerkung 9.** 1.  $\partial c$  hängt nicht von den Repräsentanten von  $c$  ab. Dazu betrachte die Ränder der Ketten in Definition 3.2 in 1, z. B.:

Sei  $\tilde{\gamma}$  die rückwärts durchlaufende Kurve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega, \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t), \quad \tilde{\gamma} : [-b, -a] \rightarrow \Omega$$

Dann gilt

$$\partial([\gamma] + [\tilde{\gamma}]) = [\gamma(b)] - [\gamma(a)] + [\tilde{\gamma}(-a)] - [\tilde{\gamma}(-b)] = 0$$

2. Äquivalent sind:

(a) die Kette  $c$  ist geschlossen

(b)  $c$  wird durch eine Linearkombination geschlossene Kurve repräsentiert

(c)  $c$  wird durch eine geschlossene Kurve repräsentiert

*Begründung:* Es sei  $c = n_1[\gamma_1] + \dots + n_k[\gamma_k]$

(a) $\Rightarrow$ (b): Wir wollen  $\gamma_1$  zu einer geschlossenen Kurve ergänzen. Da  $\partial c = 0$  gilt entweder  $\gamma_1(a_1) = \gamma_1(b_1)$  und wir können induktiv mit der Kette  $n_2[\gamma_2] + \dots + n_k[\gamma_k]$  weitermachen. Falls  $\gamma_1(b_1) \neq \gamma_1(a_1)$ , existieren weitere Kurven, die  $\gamma_1(b_1)$  als Anfangs- oder Endpunkt haben. Zeige jetzt, dass sich an diesen und weiteren Kurven unter den  $\gamma_2, \dots, \gamma_k$   $n_1$  geschlossene Kurven bilden lassen. Danach bleibt wie oben eine Linearkombination  $c'$  der Kurven  $\gamma_2, \dots, \gamma_k$  mit  $\partial c' = 0$ . Da sich die Zahl der verfügbaren Kurven Schritt für Schritt verringert, ist nach endlich vielen Schritten Schluss.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei  $c = n_1[\gamma_1] + \dots + n_k[\gamma_k]$  und  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$  sei geschlossen für alle  $i$ . Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, dürfen wir  $z_0 \in \Omega$  und Kurven  $\alpha_i$  von  $z_0$  nach  $\gamma_i(a_i) = \gamma_i(b_i)$  wählen. Dann wird  $c$  durch eine geschlossene Kurve  $\gamma$  repräsentiert, wobei  $\gamma$  von  $z_0$  entlang  $\alpha_1$  zum Punkt  $\gamma_1(a_1)$  läuft, dann  $\gamma_1$   $n_1$  durchläuft ( $|n_1|$ -mal rückwärts, falls  $n_1 < 0$ ), dann entlang  $\alpha_1$  rückwärts zu  $z_0$  zurück, dann entlang  $\alpha_2$  zu  $\gamma_2(a_2)$  usw.

(c) $\Rightarrow$ (a): klar.

**Definition 3.4.** Es sei  $c = n_1[\gamma_1] + \dots + n_k[\gamma_k]$  eine Kette in  $\Omega$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann definieren wir

$$\int_c f(z)dz = n_1 \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + n_k \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

**Bemerkung 10.** 1. Das ist wohldefiniert, denn: Da das Kurvenintegral parametrisierungsunabhängig ist, verschwindet  $\int f(z)dz$  über der Kette in Definition 1.

2. Sei analog  $b = m_1[z_1] + \dots + m_l[z_l]$  eine formale Linearkombination von Punkten in  $\Omega$ , dann definiere

$$f(b) = m_1 f(z_1) + \dots + m_l f(z_l)$$

Falls  $f$  holomorph mit Ableitung  $f'$  ist, folgt mit Folgerung 1.21, dass

$$\int_c f'(z)dz = f(\partial c)$$

**Definition 3.5** (Umlaufzahl, nullhomolog, homolog). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $c$  geschlossene Kette (Zykel) in  $\Omega$  und  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ . Dann definiere die Umlaufzahl von  $c$  um  $w$  durch

$$n_w = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z - w} dz.$$

Ein Zykel  $c$  heißt nullhomolog, falls  $n_w(c) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ .

Zwei Zyklen heißen homolog, wenn ihre Differenz nullhomolog ist. Die Menge aller, zu einer gegebenen Kette  $c$ , homologen Ketten bildet die Homologieklassse von  $c$ . Die Menge der Homologieklassen bildet die (1.) Homologie von  $\Omega$ .

**Bemerkung 11.** Die Umlaufzahl ist additiv, das heißt

$$\begin{aligned} n_w(c_0 + c_1) &= n_w(c_0) + n_w(c_1) \\ n_w(l \cdot c) &= l \cdot n_w(c) \end{aligned}$$

Es folgt, dass wir Homologieklassen addieren und mit ganzen Zahlen multiplizieren können. Also ist  $H(\Omega)$  eine abelsche Gruppe.

**Beispiel 3.6.** Sei  $\Omega = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $w = 0$ ,  $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ ,  $t \in [0, 1]$  dann ist  $c = [\gamma]$  geschlossen in  $\Omega$  und

$$n_0(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - 0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i \cdot e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}} dt = 1.$$

Sei jetzt  $\Omega = B_2^\times(0)$ ,  $\gamma$  wie oben, dann ist  $n_2(c) = 0$ , denn  $\frac{1}{z-2}$  ist sogar auf  $B_2(0)$  holomorph, also gilt der Cauchy-Integralsatz.



**Proposition 3.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet

1. Die Umlaufzahl ist ganzzahlig.
2. Sie ist lokal konstant auf  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .
3. Wenn  $c$  eine formale Linearkombination nullhomotoper Kurven ist, gilt  $n_w(c) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ , d. h.  $c$  ist nullhomolog.

*Beweis.* Zu 1: Sei ohne Einschränkung  $w = 0$ . Zerlege  $\Omega$  in offene Teilmengen

$$\Omega_+ = \Omega \setminus \{x | x \in (-\infty, 0]\}, \quad \Omega_- = \Omega \setminus \{x | x \in [0, \infty)\}.$$

Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve (keine Einschränkung nach Bemerkung 9 (2)) in  $\Omega$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ . Dann bilden die Zusammenhangskomponenten von  $\gamma^{-1}(\Omega_{\pm})$  eine offene Überdeckung von  $[a, b]$ , also existiert nach Heine-Borel eine endliche Teilüberdeckung von  $[a, b]$ . Also existieren  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , sd.  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subset \Omega_+$  oder  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subset \Omega_-$  für alle  $1 \leq i \leq k$ . Auf  $\Omega_+$  und  $\Omega_-$  hat  $\frac{1}{z}$  eine Stammfunktion (auf  $\Omega_+$  ist das der Hauptzweig des Logarithmus,  $\log$ , auf  $\Omega_-$  nennen wir sie  $\tilde{\log}$ )

Wir wählen  $\tilde{\log}$  so, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\log}(z) &= \log(z), \text{ falls } \operatorname{Im}(z) > 0 \\ \tilde{\log}(z) &= \log(z) + 2\pi i, \text{ falls } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{aligned}$$

wir berechnen

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

einzeln auf  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  mit dem Hauptsatz (Folgerung 1.21). An  $t_i$  unterscheiden sich die Beträge um  $\pm 2\pi i$  (oder 0). Dito unterscheiden sich die Werte bei  $a$  und  $b$  um 0 oder  $\pm 2\pi i$ , da  $\gamma$  geschlossen ist. Da

$$n_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

folgt  $n_0(\gamma) \in \mathbb{Z}$ .

Zu 2: Nach Analysis I hängt das Integral stetig vom Integranden ab (unter Voraussetzungen, die hier erfüllt sind), also hängt  $n_w(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z-w} dz$  stetig von  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  ab. Da die Wertemenge  $\mathbb{Z}$  diskret ist, ist  $w \mapsto n_w(c)$  lokal konstant.

Zu 3: Da der Integrand  $\frac{1}{z-w}$  auf  $\Omega$  holomorph ist und das Kurvenintegral homotopieunabhängig ist, folgt

$$n_w([\gamma]) = 0$$

für nullhomotope Kurven  $\gamma$ . Das das für alle Punkte  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  gilt, ist  $[\gamma]$  nullhomolog. □

Wir wollen erhalten

$$" \int_{\sum_{j=1}^l b_j [\gamma_j]} f(z) dz " = \sum_{j=1}^l b_j \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Zwei formale Linearkombinationen sind als Ketten äquivalent, wenn die Integrale für jeden (stetigen) Integranden gleich sind.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \operatorname{sign}(\dot{\varphi}) \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  Diffeomorphismus. Möchte also  $[\gamma] = \text{sign}(\dot{\varphi}) \cdot [\gamma \circ \varphi]$ .

**Beispiel 3.8.** 1.  $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$ ,  $\gamma_2(t) = 2e^{2\pi it}$  Kurven in  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $[\gamma_1]$  ist homolog zu  $[\gamma_2]$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (aber nicht in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1+i\}$ )

$$n_{1+i}(\gamma_1) = 0, \quad n_{1+i}(\gamma_2) = 1.$$

2. Es gibt Kurven, die in gewissen  $\Omega$  nullhomolog, aber nicht nullhomotop sind (Übung).

**Bemerkung 12.** "Homologie" (Äquivalenzklassen homologer Ketten) zählt "Löcher" in Gebieten mit algebraischer Topologie.

### 3.2 Der Cauchy-Integralsatz in der Umlaufzahlversion

*Ziel:* Zykel  $c_1, c_2$  sind genau dann homolog in  $\Omega$ , wenn alle Integrale holomorpher Funktionen auf  $\Omega$  über  $c_1$  den gleichen Wert wie über  $c_2$  haben.

**Satz 3.9** (Cauchy-Integralsatz; Umlaufzahlversion). Es sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $c$  nullhomologer Zykel in  $\Omega$ , dann gilt

$$\int_c f(z) dz = 0$$

Der Satz folgt aus dem Cauchy-Integralsatz 1.26 und dem folgenden Lemma.

**Lemma 3.10** (Artin). Es sei  $c$  Zykel in  $\Omega$ . Dann sind äquivalent

1.  $c$  ist nullhomolog in  $\Omega$ ;
2.  $c$  lässt sich als Linearkombination nullhomotoper, geschlossener Kurven schreiben;
3.  $c$  wird durch eine geschlossene, nullhomotope Kurve in  $\Omega$  dargestellt.

(vergleiche Bemerkung 9; Literatur: z. B. [Jänich], Beweis unseres Satzes 3.9)

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2):

1. *Schritt:* Ersetze  $c$  durch eine geschlossene Kurve  $\gamma$ .
2. *Schritt:* "Ersetze"  $\gamma$  durch einen "Kantenweg".
3. *Schritt:* Ersetze diesen Kantenweg durch einen Weg, der keinen Punkt außerhalb des Gitters durchläuft.
4. *Schritt:* Zeige, dass dieser Zykel 0 ist.

Zu 2.: Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  geschlossene, nullhomologe Kurve. Zu jedem  $t$  existiert  $r(t) > 0$ , sd.  $B_{r(t)}(\gamma(t)) \subset \Omega$ , da  $\Omega$  offen ist.  $r$  hängt stetig von  $t$  ab. Da  $[0, 1]$  kompakt ist, existiert  $r_0 > 0$  mit  $r(t) > r_0$ , d. h. der  $r_0$ -Ball um  $\gamma(t)$  liegt stets in  $\Omega$ . Wähle  $0 < \varepsilon < \frac{r_0}{3}$  und lege ein Gitternetz der Machenweite  $\varepsilon$  über  $\mathbb{C}$ . Das heißt wir schreiben  $\mathbb{C}$  als Vereinigung abgeschlossener Quadrate der Seitenlänge  $\varepsilon$ , die sich höchstens in einer Kante oder einer Ecke überschneiden. Wähle  $n \in \mathbb{Z}$  so, dass jedes Teilstück  $\gamma|_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}$  Länge  $< \varepsilon$  hat für alle  $1 \leq k \leq n$ . Zu jedem  $k$  sei  $z_k$  die linke untere Ecke des Quadrates, in dem  $\gamma(\frac{k}{n})$  liegt. Es bezeichne  $\tilde{\gamma}$  einen möglichst kurzen Kantenweg durch die Punkte  $z_k$ . Nach Wahl von  $\varepsilon$  liegt  $\tilde{\gamma}$  in  $\Omega$  (denn Punkte von  $\tilde{\gamma}$  haben maximal den Abstand  $d(\gamma(\frac{k}{n}), z_k) + d(\tilde{\gamma}(t), z_k) < 2 \cdot \sqrt{2}\varepsilon < 3\varepsilon$  zur Kurve  $\gamma$ , für alle  $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ ). Die Homotopie  $h(t, s) = (1-s) \cdot \gamma(t) + s \cdot \tilde{\gamma}(t)$  zwischen  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  verläuft ebenfalls in ganz  $\Omega$ . Der Einfachheit

halber nehmen wir an, dass  $z_0 = \gamma(0) = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$  eine Gitterecke ist. Dann ist die Kurve

$$t \mapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

nullhomotop in  $\Omega$ . Also ist  $[\gamma]$  homolog zu  $[\gamma] + ([\tilde{\gamma}] - [\gamma]) = [\tilde{\gamma}]$  und die Differenz  $[\tilde{\gamma}] - [\gamma]$  wird durch eine in  $\Omega$  nullhomotope Kurve dargestellt.

Zu 3.: Zu jedem Quadrat  $Q$ , das in  $\Omega$  liegt, konstruieren wir einen Kantenweg in  $\Omega$  von  $z_0$  zur linken unteren Ecke. Dann umlaufen wir  $Q$  einmal im mathematischen Drehsinn und laufen über  $-\alpha_Q$  zurück zum Punkt  $z_0$ . Der so entstandene Kantenweg  $\gamma_Q$  ist nullhomotop in  $\Omega$ ; die zugehörige Homotopie  $H_Q(t, s)$  zieht für  $s \leq \frac{1}{2}$  zunächst das Quadrat  $Q$  auf seine linke untere Ecke. Für  $s \geq \frac{1}{2}$  zieht sie den Weg  $\alpha_Q(-\alpha_Q)$  auf  $z_0$  zusammen. Betrachte die Kette

$$[\tilde{\gamma}] - \sum_Q n_Q(\tilde{\gamma}) \cdot \underbrace{[\gamma_Q]}_{\text{nullhomotop}}$$

Diese Linearkombination ist endlich, da nur Quadrate zwischen  $\min_t \operatorname{Re}(\tilde{\gamma}(t))$ ,  $\max_t \operatorname{Re}(\tilde{\gamma}(t))$  in  $\lambda$ -Richtung sowie zur  $\min_t \operatorname{Im}(\gamma(t))$  und  $\max_t \operatorname{Im}(\gamma(t))$  umlaufen werden; dabei sei  $n_Q(\tilde{\gamma})$  die Umlaufzahl um einen Punkt im Inneren von  $Q$ , z. B. um den Mittelpunkt (dazu ersetze für den Moment  $\Omega$  durch  $Q$  ohne all diese Mittelpunkte). Es folgt, dass  $n_Q(c_3) = n_Q(\tilde{\gamma}) - n_Q(\tilde{\gamma}) = 0$ .

Zu 4: *Behauptung*:  $c_3$  durchläuft jede Kante im Gitternetz genau so oft vorwärts wie rückwärts, d. h.  $c_3 = 0$ . Sei dazu  $\gamma_0$  Teil einer Kurve durch eine Kante und  $\gamma_1$  ein Kantenweg, der stattdessen das benachbarte Quadrat  $Q$  umläuft.

$\Rightarrow n_Q(\gamma_0) + 1 = n_Q(\gamma_1)$  (falls die Kante positiv durchlaufen wird) beziehungsweise  $n_Q(\gamma_0) - 1 = n_Q(\gamma_1)$  (falls die Kante negativ durchlaufen wird). Sei  $Q'$  das Quadrat auf der anderen Seite der betrachteten Kante.

$\Rightarrow n_{Q'}(\gamma_0) = n_Q(\gamma_0) + (\text{Koeffizient der Kante in } \gamma_0)$ .

Somit gilt

$$[\gamma] = \underbrace{[\gamma] - [\tilde{\gamma}]}_{\text{nullhomotop}} + \sum_Q n_Q(\tilde{\gamma}) \underbrace{[\tilde{\gamma}]}_{\text{nullhomotop}}$$

Das zeigt  $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$  wie in Bemerkung 9 und  $3 \Rightarrow 1$

□