Übungsblatt 4

Diskrete Zufallsvariablen

Stochastik@AIN2
Prof. Dr. Barbara Staehle
Sommersemester 2021
HTWG Konstanz

|Einfache und mittelschwere Aufgaben|

Aufgabe 4.1 Glücksoktaeder

Wir besuchen das Casino „Glückauf". Dort gibt es zwei Typen von Laplace-Oktaedern (Würfeln mit 8 Seiten, deren Seiten jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden):

- Typ1 ist beschriftet mit den Ziffern $1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3$
- Typ2 ist beschriftet mit den Ziffern $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$

Für ein Spiel wird mit je einem Oktaeder vom Typ1 und einem Oktaeder vom Typ2 gewürfelt. Wir definieren die folgenden Zufallsvariablen:

- X_1 bildet ab auf die Zahl, die der Oktaeder vom Typ1 zeigt,
- X_2 bildet ab auf die Zahl, die der Oktaeder vom Typ2 zeigt.

Teilaufgabe 4.1.1 3 Punkte

a) Geben Sie für beide Zufallsvariablen jeweils die (Wahrscheinlichkeits)verteilung und die Verteilungsfunktion an.

b) Stellen Sie in einem Diagramm die (Wahrscheinlichkeits)verteilungen von X_1 und X_2 dar.

c) Stellen Sie in einem Diagramm die Verteilungsfunktion von X_1 und X_2 dar.

Teilaufgabe 4.1.2 3 Punkte

a) Berechnen Sie für X_1 und X_2 jeweils den Erwartungswert.

b) Berechnen Sie für X_1 und X_2 jeweils die Varianz.

c) Berechnen Sie für X_1 und X_2 jeweils die Standardabweichung.

Aufgabe 4.2 4 Punkte

Betrachten Sie die Zufallsvariable X, welche folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung hat:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.25	0.35	0.2	0.1

a) Zeichnen Sie ein Diagramm der (Wahrscheinlichkeits)verteilung.

b) Zeichnen Sie ein Diagramm der Verteilungsfunktion.

c) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$

d) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$

Aufgabe 4.3 Würfeln bis die 1 kommt

Im Casino „Glückauf“ kann man auch „normalen“ Würfeln spielen. Hierfür wird mit einem fairen Laplace W6 folgendes Spiel gespielt: Der Würfel wird so lange geworfen, bis eine 1 fällt, höchstens jedoch 5 Mal. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der hierfür nötigen Würfe an.

Beispiele: Für die Würfelfolge $(5, 6, 3, 1)$ gilt $X = 4$, für $(4, 1)$ gilt $X = 2$, für $(5, 6, 3, 3, 2)$ gilt $X = 5$, ebenso wie für $(5, 4, 3, 2, 1)$.

Teilaufgabe 4.3.1 2 Punkte

a) Geben Sie (andeutungsweise) den Ereignisraum Ω des Experiments an.

b) Geben Sie den Träger (= Wertebereich) von X an.

Teilaufgabe 4.3.2 2 Punkte

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X

Teilaufgabe 4.3.3 2 Punkte

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 mal gewürfelt werden muss.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 5 mal gewürfelt werden muss.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 mal gewürfelt werden muss.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 4 mal gewürfelt werden muss.

Aufgabe 4.4 Zufallsbits, 3 Punkte

Für eine Test-Übertragung werden Bitfolgen der Länge 3 zufällig generiert. Betrachten Sie die Zufallsvariable $X =$ *Anzahl der Einsen in einer Bitfolge der Länge 3*. Geben Sie an

a) den Ereignisraum Ω

b) den Wertebereich von X

c) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

d) den Erwartungswert von X

e) die Varianz von X

f) die Standardabweichung von X

Aufgabe 4.5 Losen!, 3 Punkte

Bei einem Glücksspiel können Sie jeweils mit der selben Wahrscheinlichkeit eines von drei Losen ziehen.

a) Bei **Variante A** sind die zugehörigen Gewinne sind jeweils 0, 1 und 99 €. Wie groß ist der erwartete durchschnittliche Gewinn?

b) Bei **Variante B** sind die zu den Losen gehörenden Gewinne 25, 30 und 45 €. Wie groß ist hier der erwartete durchschnittliche Gewinn?

c) Berechnen Sie für beide Spielvarianten die Varianz.

Aufgabe 4.6 Twitter Bots, 3 Punkte

Alice steigt als Social-Media-Managerin bei einem großen Unternehmen ein und bekommt die Aufgaben einen Twitter Bot (siehe Twitter bot bei Wikipedia)zu programmieren, der in unregelmäßigen Abständen einen Tweet über ein Produkt des Unternehmens absetzt. Ihr Bot soll möglichst menschenähnlich wirken, daher verwendete sie eine **Zufallsvariable, für die Zeit in Stunden, die zwischen zwei Tweets liegt**.

In Absprache mit ihren Vorgesetzten testet sie zwei Modelle für die Verteilung dieser Zufallsvariablen. Die Verteilung der entsprechenden Zufallsvariablen T_1, T_2 sind wie folgt:

t	0.5	1	4	12	24
$P(T_1 = t)$	0	0.25	0.75	0	0
$P(T_2 = t)$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

Tabelle 1: Verteilung von T_1 und T_2

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung jeder Zufallsvariable.

b) Würden Sie eine der beiden Zufallsverteilung als Grundlage für einen Twitter Bot einsetzen, der menschenähnlich wirken soll? Wenn ja, welchen? Wenn nein, warum nicht?
Hier gibt es keine richtige Lösung, kommt auf die Begründung an!!

|Mittelschwere und schwere Aufgaben|

Aufgabe 4.7 Ein spezielles Roulettespiel, 4 Punkte

Beim Roulette im Casino „Glückauf“ gibt es 18 schwarze Felder, 18 rote Felder und zwei grüne Null-Felder. Sie spielen ein spezielles Spiel: Sie setzen jede Runde auf „‘schwarz“. Rollt die Kugel in einer Runde auf ein schwarzes Feld, so erhalten Sie den doppelten Einsatz, ansonsten verlieren Sie den Einsatz.

Es werden zwei Spiele gespielt:

- Spiel 1: Sie setzen in einer Runde 100 €.
- Spiel 2: Sie setzen in hundert Runden 1 €.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen für die Zufallsvariablen
   - G_1: Gewinn in Spiel 1
   - G_2: Gewinn in **einer Runde von** Spiel 2

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von G_1.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von G_2.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable
   G_3: Gewinn in Spiel 2 (das sich über 100 Runden zieht)

Aufgabe 4.8 Rote und blaue Würfel (Achtung: aufwändig!)

Wir würfeln mit einem roten und einem blauen fünfseitigen Würfel, die mit der gleichen Wahrscheinlichkeit jeweils die Zahlen 1,2,3,4 oder 5 zeigen.

Basierend auf den Ergebnissen dieses Experiments betrachten wir die folgenden Zufallsvariablen:

- X_1 bildet ab auf die Zahl, die der rote Würfel zeigt,
- X_2 bildet ab auf die Zahl, die der blaue Würfel zeigt,
- X_3 bildet ab auf die Differenz der roten und der blauen gewürfelten Zahl: $X_3 = X_1 - X_2$.
- X_4 bildet ab auf die Summe der roten und der blauen gewürfelten Zahl: $X_4 = X_1 + X_2$.

Teilaufgabe 4.8.1 2 Punkte

Geben Sie für die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4 ihren Wertebereich und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

Teilaufgabe 4.8.2 2 Punkte

Berechnen Sie

a) den Erwartungswert von X_1, X_2, X_3 und X_4

b) die Varianz von X_1, X_2, X_3 und X_4