# Blatt 9: Taylorentwicklung

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

**Aufgabe 1:**

(a) Berechnen Sie $T_{f,2}\left(x, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ von $f(x) = \cos(x^2)$ und skizzieren Sie beide Funktionen.

(b) Berechnen Sie mit dem Taylorpolynom $T_{f,2}\left(x, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ aus (a) eine Näherungsfunktion der Stammfunktion

$$\tilde{F} \approx \int \cos(x^2)\, dx\,.$$

(c) Berechnen Sie mit der genäherten Stammfunktion $\tilde{F}$ aus (b) einen Näherungswert des besitmmten Integrals

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \cos(x^2)\, dx$$

und schätzen Sie ob der Wert, den Sie erhalten ungefähr sinnvoll ist. Vergleichen Sie dazu die entsprechende Fläche uner dem Graphen in Ihrer Skizze aus (a).

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

**Aufgabe 2:**

Es sei $f(x) = \ln x$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{f,3}(x)$ 3-ten Grades mit Mittelpunkt $x_0 = 1$ von der Funktion $f$.

(b) Berechnen Sie alle Ableitung bis zur 3-ten Ordnung von $T_{f,3}(x)$ und vergleichen Sie die Werte bei $x = 1$ mit denen der entsprechenden Ableitungsfunktionen von $f$.

(c) Berechnen Sie die $n$-te Ableitung der Funktion $f$.

(d) Stellen Sie nun die Taylorreihe von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0$ auf.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

**Aufgabe 3:**

Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \cos x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

**Aufgabe 4:** Konvergenzradius

Berechnen Sie jeweils den Konvergenzbereich folgender Potenzreihen:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2\,k+1}}\, x^k \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\,(x-3)^k \qquad (c)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2\,k+1}}\,(2\,x-3)^{3\,k-1}$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 7

**Aufgabe 5:** Eine Taylorreihe mit all ihren Facetten

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)\,.$$

Funktion (a) Was ist der **Definitionsbereich** $\mathbb{D}_f$ der Funktion $f$? Machen Sie eine **Skizze**.

Taylorreihe (b) Berechnen Sie die **$n$-te Ableitung** von $f$ an der Stelle $x_0$.

(c) Stellen Sie die **Taylorreihe** $T_f(x, x_0)$ auf.

(d) Berechnen Sie **Konvergenzradius** und **Konvergenzbereich** von $T_f(x, x_0)$. Untersuchen Sie beim Konvergenzbereich auch die Intervallgrenzen.

Taylorpolynom (e) Stellen Sie das **Taylorpolynom** $T_{f,2}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ von $f$ vom Grad 2 mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$ auf und plotten Sie die Graphen $f$ und $T_{f,2}$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$.

(f) Berechnen Sie für das Taylorpolynom $T_{f,2}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$ eine **Restgliedabschätzung** und plotten Sie die Fehlerfunktion $|R_{f,2}\left(x, \frac{1}{2}\right)| = |f(x) - T_{f,2}\left(x, \frac{1}{2}\right)|$.

Integration (g) Eine **Stammfunktion** von $f$ ist gegeben durch

$$F(x) = \left(\ln\left(\frac{2}{2-x}\right) + 1\right)(x-2)\,,$$

so die Behauptung.

(1) Überzeugen Sie sich davon.

(2) Versuchen Sie die Stammfunktion selbst zu berechnen. Im ersten Schritt führen Sie eine partielle Integration durch, angewandt auf das Produkt $1 \cdot \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$. Das Integral, das Sie durch die pI erhalten kriegen Sie mit der Substitution $g = 2 - x$ in den Griff. Viel Spaß damit! :)

(3) Berechnen Sie den **exakten Integralwert** des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)\, dx\,.$$

Geben Sie ihr Ergebnis im %.5e-Format, d.h. %e-Format mit fünf Nachkommastellen, an.

(h) Bestimmen Sie den **Näherungswert des Integrals** $\int_0^1 f(x)\, dx$ durch das Integral des Taylorpolynoms $T_{f,2}\left(x, \frac{1}{2}\right)$. Geben Sie ihr Ergebnis im %.5e-Format an und Berechnen Sie den Fehler des approximierten Integralwertes zum exakten Wert aus Teilaufgabe (g,3). Geben Sie den Fehler im %.2e-Format an.

**a-priori Fehlerangabe**

(i) Für welchen Polynomgrad $n$ ist der Fehler $\left|R_{f,n}\left(x, \frac{1}{2}\right)\right|$ sicher kleiner als $10^{-3}$?

Achtung: Hier müssen Sie eine Nullstelle berechnen, was Ihnen "zu Fuß" eher nicht gelingen wird. Suchen Sie graphisch oder mit dem Newton-Verfahren.

(j) Und welchen Fehler machen wir, wenn wir den Polynomgrad aus Teil (i)verwenden, um das Integral von $f$ durch das Integral von $T_{f,n}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ über $[0, 1]$ zu berechnen, d.h.

$$\left|\int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 T_{f,n}\left(x, \frac{1}{2}\right)\, dx\right| \leq ?$$

**Verständnisfrage**

(k) Diskutieren Sie, ob der Ausdruck

$$\int_{-1}^0 T_{f,2}(x, 1)\, dx$$

sinnvoll ist oder nicht.

Selbsteinschätzung: ☐

Lösung auf Seite 9