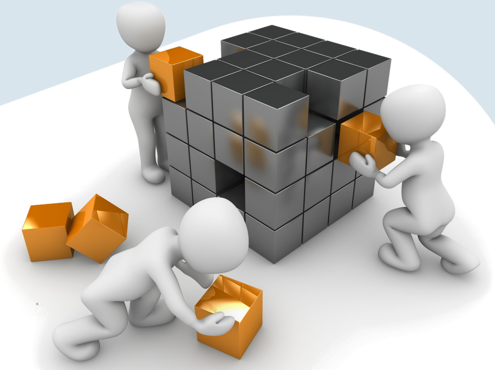
Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik



3 Lineare Algebra

3.1 Lösen linearer Gleichungssysteme

Mathe I

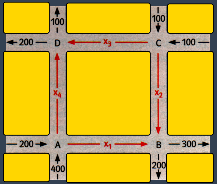
HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

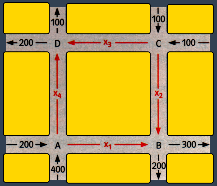
Lineare Algebra

Lösen linearer Gleichungssysteme

Motivation



Straßen-Geviert, Teil 1/3



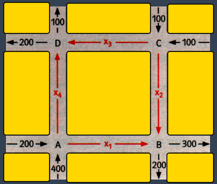
Straßen-Geviert, Teil 1/3

Fragestellung:

(a) Ist eine Sperrung des Straßenstücks AD ohne Drosselung des Zuflusses möglich?

(b) Welches ist die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB?

(c) Welches ist die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD?



Straßen-Geviert, Teil 1/3

Fragestellung:

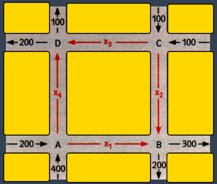
(a) Ist eine Sperrung des Straßenstücks AD ohne Drosselung des Zuflusses möglich?

(b) Welches ist die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB?

(c) Welches ist die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD?

mathematische Beschreibung:

$$\begin{aligned} A &: \quad x_1 + x_4 = 600 \\ B &: \quad x_1 + x_2 = 500 \\ C &: \quad x_2 + x_3 = 200 \\ D &: \quad x_3 + x_4 = 300\,. \end{aligned}$$



Straßen-Geviert, Teil 1/3

Fragestellung:

(a) Ist eine Sperrung des Straßenstücks AD ohne Drosselung des Zuflusses möglich?
(b) Welches ist die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB?
(c) Welches ist die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD?

mathematische Beschreibung:

$$
\begin{aligned}
A &: \quad x_1 + x_4 = 600 \\
B &: \quad x_1 + x_2 = 500 \\
C &: \quad x_2 + x_3 = 200 \\
D &: \quad x_3 + x_4 = 300\,.
\end{aligned}
$$

Matrizenschreibweise:
Bevor wir uns der Lösung des Problems widmen sorgen wir für eine “handlichere” Darstellung des Problems. Damit erhalten wir allgemeingültige Methoden und Aussagen wie Lösbarkeit des Problems und Eindeutigkeit der Lösung.

Rechenregeln für Matrizen

Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{M\times N}$. Die *Summe von Matrizen* ist definiert als

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{ij}\,.$$

Die *skalare Multiplikation von Matrizen* mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\alpha\, A = (\alpha\, A_{ij})_{ij}\,.$$

Das *Matrixprodukt* $C \cdot D \in \mathbb{K}^{N\times L}$ ist definiert durch

$$C \cdot D = \left(\sum_{m=1}^{M} C_{nm} D_{ml}\right)_{1\leq n\leq N\,,\; 1\leq l\leq L}\,, \quad C \in \mathbb{K}^{N\times M}\,,\;\; D \in \mathbb{K}^{M\times L}$$

Beispiele

1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

Beispiele

1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

2.

$$\underbrace{(3,4)}_{1\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 38, 33 \end{pmatrix}}_{1\times 2}$$

Beispiele

3.

$$\underbrace{(2,4)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}_{2\times 1}=\underbrace{14}_{1\times 1}$$

Beispiele

3.

$$\underbrace{(2,4)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}_{2\times 1}=\underbrace{14}_{1\times 1}$$

4.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{(1,3)}_{1\times 2}=\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 6\\4 & 12\end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Saalaufgabe

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Multiplikationen sind erlaubt?

(i)	$A \cdot B$	☐	(ii)	$B \cdot A$	☐	(iii)	$A \cdot C$	☐
(iv)	$D \cdot C$	☐	(v)	$C \cdot D^T$	☐	(vi)	$C \cdot D$	☐
(vii)	$C \cdot F$	☐	$(viii)$	$F \cdot B$	☐	(ix)	$B \cdot F$	☐

Saalaufgabe

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \underset{\text{2x1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \; B = \underset{\text{3x2}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}, \; C = \underset{\text{2x4}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}},$$

$$D = \underset{\text{1x4}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}} \text{ und } F = \underset{\text{4x3}}{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}}.$$

Welche der folgenden Multiplikationen sind erlaubt?

(i)	$A \cdot B$	☐	(ii)	$B \cdot A$	☒	(iii)	$A \cdot C$	☐
(iv)	$D \cdot C$	☐	(v)	$C \cdot D^T$	☒	(vi)	$C \cdot D$	☐
(vii)	$C \cdot F$	☒	$(viii)$	$F \cdot B$	☒	(ix)	$B \cdot F$	☐

HTWG IN

Definition: Transponierte einer Matrix

Die *Transponierte* einer Matrix A ist die Matrix

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}\,.$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heitßt *symmetrisch* wenn

$$A = A^T\,.$$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heitßt *hermitesch* wenn

$$A = \bar{A}^T =: A^\star\,.$$

Definition: Transponierte einer Matrix

Die *Transponierte* einer Matrix A ist die Matrix

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji} \,.$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heitßt *symmetrisch* wenn

$$A = A^T \,.$$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heitßt *hermitesch* wenn

$$A = \bar{A}^T =: A^\star \,.$$

Beispiele:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Beispiele

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2\,i \\ -i & 8 \end{pmatrix}^{\star} = \overline{\begin{pmatrix} 1+i & 2\,i \\ -i & 8 \end{pmatrix}}^{T} = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{2\,i} \\ \overline{-i} & \overline{8} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1-i & -2\,i \\ i & 8 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2\,i & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiele

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2\,i \\ -i & 8 \end{pmatrix}^{\star} = \overline{\begin{pmatrix} 1+i & 2\,i \\ -i & 8 \end{pmatrix}}^{T} = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{2\,i} \\ \overline{-i} & \overline{8} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1-i & -2\,i \\ i & 8 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2\,i & 8 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}^{\star} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist hermitesch}$$

Satz

Seien A, B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

Satz

Seien A, B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

Beweis:

$$(A\,B)^T_{ki}$$

Satz

Seien A, B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

<u>Beweis:</u>

$$(A\,B)^T_{ki} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk}$$

Satz

Seien A, B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

<u>Beweis:</u>

$$(A\,B)^T_{ki} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} B_{jk} A_{ij}$$

Satz

Seien A, B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

Beweis:

$$(A\,B)^T_{ki} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} B_{jk} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} B^T_{kj} A^T_{ji}$$

Satz

Seien A, B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

Beweis:

$$(A\,B)^T_{ki} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} B_{jk} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} B^T_{kj} A^T_{ji} = (B^T\,A^T)_{ki}$$

Hirnjogging

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_i$$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \ldots, x_n)\, A$$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \ldots, x_n)\,A = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i\,, \quad \cdots \quad , \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \right)$$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \ldots, x_n)\, A = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \,, \quad \cdots \quad , \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \right)$$

$A\,x$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \dots, x_n)\, A = \left(\; \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i \,, \quad \cdots \quad , \sum_{i=1}^{n} a_{in} x_i \; \right)$$

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

Hirnjogging

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \ldots, x_n)\, A = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} x_i \,, \quad \cdots \quad , \sum_{i=1}^n a_{in} x_i \right)$$

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = (a_{i1})_i\, x_1 + \cdots + (a_{in})_i\, x_n$$

Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \ldots, x_n)\, A = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} x_i \,, \quad \cdots \quad , \sum_{i=1}^n a_{in} x_i \right)$$

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = (a_{i1})_i\, x_1 + \cdots + (a_{in})_i\, x_n = \sum_{k=1}^n (a_{ik})_i\, x_k$$

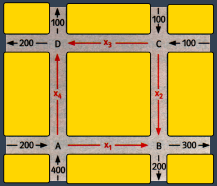
Auch Matrixmultiplikationen, nur anders hingeschrieben:

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)_i$$

$$x^T A = (x_1, \ldots, x_n)\,A = \left(\ \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \ , \quad \cdots \quad , \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \ \right)$$

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = (a_{i1})_i\, x_1 + \cdots + (a_{in})_i\, x_n = \sum_{k=1}^n (a_{ik})_i\, x_k = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right)_i$$

Motivation

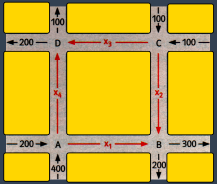


Straßen-Geviert, Teil 2/3

Memo:

$$
\begin{aligned}
A &: \quad x_1 + x_4 = 600 \\
B &: \quad x_1 + x_2 = 500 \\
C &: \quad x_2 + x_3 = 200 \\
D &: \quad x_3 + x_4 = 300\,.
\end{aligned}
$$

Motivation



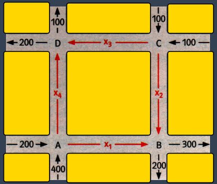
Straßen-Geviert, Teil 2/3

Memo:

$$\begin{aligned} A &: \quad x_1 + x_4 = 600 \\ B &: \quad x_1 + x_2 = 500 \\ C &: \quad x_2 + x_3 = 200 \\ D &: \quad x_3 + x_4 = 300\,. \end{aligned}$$

Das LGS des Gevierts in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$



Straßen-Geviert, Teil 2/3

Memo:

$$\begin{aligned} A &: \quad x_1 + x_4 = 600 \\ B &: \quad x_1 + x_2 = 500 \\ C &: \quad x_2 + x_3 = 200 \\ D &: \quad x_3 + x_4 = 300\,. \end{aligned}$$

Das LGS des Gevierts in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Problemstellung:

Zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht mit

$$A\,x = y\,.$$

Memo: Zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht mit

$$A\,x = y\,.$$

Frage: Gibt es zu dieser Art Problemstellung eine Lösung und wenn ja wieviele? Können wir diese berechnen und wenn nein, warum nicht?

Memo: Zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht mit

$$A\,x = y\,.$$

Frage: Gibt es zu dieser Art Problemstellung eine Lösung und wenn ja wieviele? Können wir diese berechnen und wenn nein, warum nicht?

Vorgehensweise:

- Lösungsmethode (Berechnung)
- Interpretation der Lösungsmengen (Anzahl Lösungen)
- Matrixeigenschaften (geben Auskunft über die Lösbarkeit)

Definition: Stufenform und Zeilenumformungen

Zeilenumformungen beinhalten zwei Operationen:

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Addition einer Zeile zu einer anderen.

Eine obere Dreiecksmatrix, die aus $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mittels Zeilenumformungen aus A entstanden ist heißt *Stufenform* von A.

Die erweiterte Matrix von A und den Spaltenvektor y:

$$(A, y) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right)$$

Zeilenumformungen von (A, y) ändern die Lösungesmenge des LGS $A\,x = y$ nicht.

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ziel:</u> erweiterte Matrix (A, y) mittels Zeilenumformungen in Stufenform bringen

Beispiel

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ziel:</u> erweiterte Matrix (A, y) mittels Zeilenumformungen in Stufenform bringen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ziel: erweiterte Matrix (A, y) mittels Zeilenumformungen in Stufenform bringen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{III} - 2\,\mathrm{I})/2]{\mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}}$$

Beispiel

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ziel:</u> erweiterte Matrix (A, y) mittels Zeilenumformungen in Stufenform bringen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{III} - 2\,\mathrm{I})/2]{\mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

Beispiel

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ziel:</u> erweiterte Matrix (A, y) mittels Zeilenumformungen in Stufenform bringen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{III} - 2\,\mathrm{I})/2]{\mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} - \mathrm{II}}$$

Das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ziel: erweiterte Matrix (A, y) mittels Zeilenumformungen in Stufenform bringen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{III} - 2\,\mathrm{I})/2]{\mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel

Memo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Memo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

In der 3-ten Zeile steht:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2\,.$$

Das ist ein Widerspruch. Es gibt also kein x, welches auch nur die dritte Zeile erfüllt, insbesondere auch nicht das ganze LGS. Damit hat dieses LGS keine Lösung.

Memo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

In der 3-ten Zeile steht:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2\,.$$

Das ist ein Widerspruch. Es gibt also kein x, welches auch nur die dritte Zeile erfüllt, insbesondere auch nicht das ganze LGS. Damit hat dieses LGS keine Lösung.
Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L} = \emptyset$$

Wir sagen:

Das LGS hat keine Lösung.

Tja.
Nehmen wir ein anderes Beispiel.

ein anderes Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{(\mathrm{III}-2\,\mathrm{I})/2}{\overset{\mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{III}-2\,\mathrm{I})/2]{\mathrm{II}-2\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Das kann man nun wieder als LGS umformulieren (in Gedanken eigentlich nur) zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

$$x_3 = -2$$

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

$$\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7 + x_3) = -\tfrac{9}{5} \end{aligned}$$

ein anderes Beispiel

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

$$\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7 + x_3) = -\tfrac{9}{5} \\ x_1 &= 6 + x_2 - 2\,x_3 = 6 - \tfrac{9}{5} + 4 = \tfrac{41}{5} \end{aligned}$$

ein anderes Beispiel

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7 + x_3) = -\tfrac{9}{5} \\ x_1 &= 6 + x_2 - 2\,x_3 = 6 - \tfrac{9}{5} + 4 = \tfrac{41}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{41}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7 + x_3) = -\tfrac{9}{5} \\ x_1 &= 6 + x_2 - 2\,x_3 = 6 - \tfrac{9}{5} + 4 = \tfrac{41}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{41}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Also lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -41 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

Memo:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rekursives Auflösen führt auf

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7 + x_3) = -\tfrac{9}{5} \\ x_1 &= 6 + x_2 - 2\,x_3 = 6 - \tfrac{9}{5} + 4 = \tfrac{41}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{41}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Also lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -41 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Lösungsmenge beinhaltet genau einen Vektor, bzw. genau einen Punkt im $\mathbb{R}^3$. Wir sagen:

Das LGS ist eindeutig lösbar.

noch ein anderes Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{III}-2\,\mathrm{I})/2]{\mathrm{II}-2\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 6 \\ 5\,x_2 - x_3 &= -7 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

noch ein anderes Beispiel

In der dritten Zeile: "Welches $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllt $0 \cdot x_3 = 0$?" - "Alle Zahlen x_3 in $\mathbb{R}$ tun das." Wähle: $x_3 = t$ Damit weiterrechnen

noch ein anderes Beispiel

In der dritten Zeile: "Welches $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllt $0 \cdot x_3 = 0$?" - "Alle Zahlen x_3 in $\mathbb{R}$ tun das." Wähle: $x_3 = t$ Damit weiterrechnen
Rekursives Auflösen:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7+t) \\ x_1 &= 6 + x_2 - 2\,x_3 = 6 + \tfrac{1}{5}(-7+t) - 2\,t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{37}{5} - \frac{9}{5}\,t \\ -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\,t \\ t \end{pmatrix}$$

noch ein anderes Beispiel

In der dritten Zeile: "Welches $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllt $0 \cdot x_3 = 0$?" - "Alle Zahlen x_3 in $\mathbb{R}$ tun das." Wähle: $x_3 = t$ Damit weiterrechnen

Rekursives Auflösen:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(-7+t) \\ x_1 &= 6 + x_2 - 2\,x_3 = 6 + \tfrac{1}{5}(-7+t) - 2\,t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{37}{5} - \frac{9}{5}\,t \\ -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\,t \\ t \end{pmatrix}$$

Also lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 37 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t\,,\;\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Da wir für t beliebig viele Werte einsetzen dürfen hat diese Lösungsmenge unendlich viele Elemente. Wir sagen:

Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Übersicht: Anzahl Lösungen

Matrix	Stufenform	Lösungsmenge	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$	$\mathbb{L} = \emptyset$	Das LGS hat keine Lösung
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$	$\mathbb{L} = \left\{ \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -41 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$	Das LGS hat genau eine Lösung
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 37 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t\,,\; t \in \mathbb{R} \right\}$	Das LGS hat unendlich viele Lösungen

inhomogenes LGS:

$$A\,x = y$$

Fall 1 unendlich viele Lösungen

Fall 2 genau eine Lösung

Fall 3 keine Lösung

homogenes LGS:

$$A\,x = 0$$

Da $x = 0$ auf jeden Fall eine Lösung ist, gilt hier

$$\mathbb{L} \neq \emptyset\,.$$

Fall 1 unendlich viele Lösungen

Fall 2 genau eine Lösung

inhomogenes LGS:

$$A\,x = y$$

Fall 1 unendlich viele Lösungen

Fall 2 genau eine Lösung

Fall 3 keine Lösung

homogenes LGS:

$$A\,x = 0$$

Da $x = 0$ auf jeden Fall eine Lösung ist, gilt hier

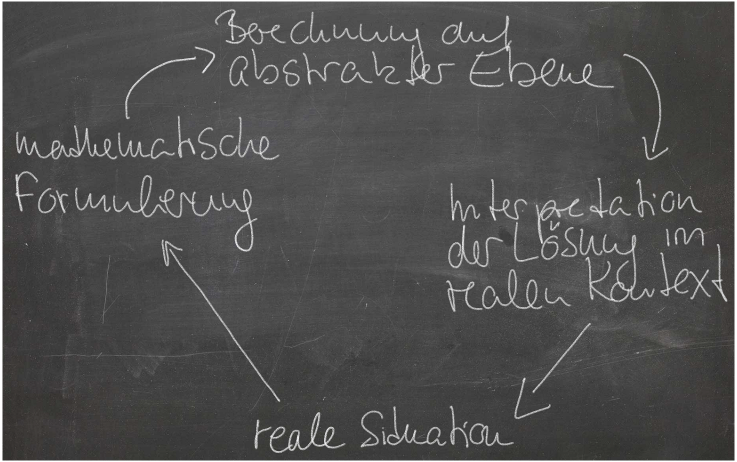
$$\mathbb{L} \neq \emptyset\,.$$

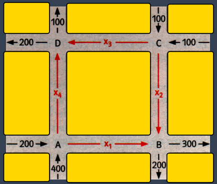
Fall 1 unendlich viele Lösungen

Fall 2 genau eine Lösung

Im praktischen Kontext kann es aber durchaus sein, dass sich "unendlich viele" Lösungen, beschränkt auf die relevanten Lösungen, auf enlich viele einschränken lassen.

Übersicht


Berechnung auf abstrakter Ebene
mathematische Formulierung
Interpretation der Lösung im realen Kontext
reale Situation



Straßen-Geviert, Teil 3/3

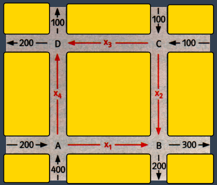
Was bisher geschah:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_2 &= 500 \\ x_3 + x_4 &= 300 \\ x_1 + x_4 &= 600 \end{aligned} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das LGS für sich hat unendlich viele Lösungen.

Motivation

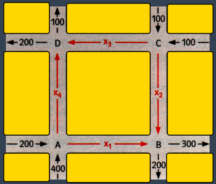


Straßen-Geviert, Teil 3/3

Memo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Motivation



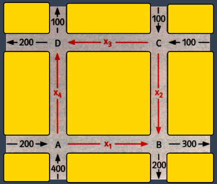
Straßen-Geviert, Teil 3/3

Memo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im praktischen Kontext: Einbahnstraßen

$$600 - x_4 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_4 \in (-\infty, 600]$$



Straßen-Geviert, Teil 3/3

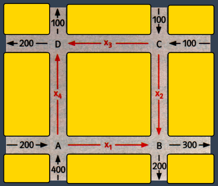
Memo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im praktischen Kontext: Einbahnstraßen

$$600 - x_4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 \in (-\infty, 600]$$

$$-100 + x_4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 \in [100, \infty)$$



Straßen-Geviert, Teil 3/3

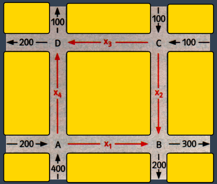
Memo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im praktischen Kontext: Einbahnstraßen

$$\begin{aligned} 600 - x_4 &\geq 0 &\Rightarrow\quad& x_4 \in (-\infty, 600] \\ -100 + x_4 &\geq 0 &\Rightarrow\quad& x_4 \in [100, \infty) \\ 300 - x_4 &\geq 0 &\Rightarrow\quad& x_4 \in (-\infty, 300] \end{aligned}$$

Motivation



Straßen-Geviert, Teil 3/3

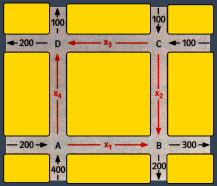
Memo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im praktischen Kontext: Einbahnstraßen

$$\begin{aligned} 600 - x_4 &\geq 0 & \Rightarrow \quad & x_4 \in (-\infty, 600] \\ -100 + x_4 &\geq 0 & \Rightarrow \quad & x_4 \in [100, \infty) \\ 300 - x_4 &\geq 0 & \Rightarrow \quad & x_4 \in (-\infty, 300] \\ x_4 &\geq 0 & \Rightarrow \quad & x_4 \in [0, \infty) \end{aligned}$$

Motivation



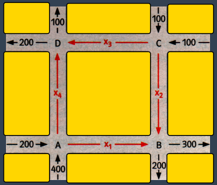
Straßen-Geviert, Teil 3/3

Memo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im praktischen Kontext: Einbahnstraßen

$$\begin{aligned} 600 - x_4 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad x_4 \in (-\infty, 600] \\ -100 + x_4 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad x_4 \in [100, \infty) \\ 300 - x_4 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad x_4 \in (-\infty, 300] \\ x_4 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad x_4 \in [0, \infty) \\ &\Rightarrow \quad x_4 \in [100, 300] \end{aligned}$$



Straßen-Geviert, Teil 3/3

Memo:

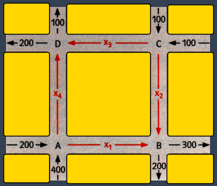
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im praktischen Kontext: Einbahnstraßen

$$\begin{aligned}
600 - x_4 &\geq 0 && \Rightarrow && x_4 \in (-\infty, 600] \\
-100 + x_4 &\geq 0 && \Rightarrow && x_4 \in [100, \infty) \\
300 - x_4 &\geq 0 && \Rightarrow && x_4 \in (-\infty, 300] \\
x_4 &\geq 0 && \Rightarrow && x_4 \in [0, \infty) \\
& && \Rightarrow && x_4 \in [100, 300]
\end{aligned}$$

usw. führt auf

$$x_1 \in [300, 500]\,, \;\; x_2 \in [0, 200]\,, \;\; x_3 \in [0, 200]$$



Straßen-Geviert, Teil 3/3

Memo:

$$x_1 \in [300, 500]\,,\ \ x_2 \in [0, 200]\,,\ \ x_3 \in [0, 200]\,,\ \ x_4 \in [100, 300]$$

Wir können dann etwa die folgenden, praktikablen Aussagen aus der Lösungsmenge ableiten:

(a) Eine Sperrung des Straßenstücks AD ist nicht möglich.

(b) Die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB ist 300.

(c) Die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD ist 200.

Definition: Pivot - Rang - Regularität - Singularität

- Das jeweils erste nicht Nullelement in einer Stufenform einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *Pivotelement*.

Beispiel:

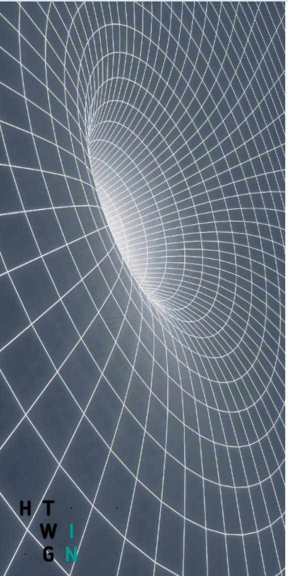
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Definition: Pivot - Rang - Regularität - Singularität

- Das jeweils erste nicht Nullelement in einer Stufenform einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *Pivotelement*.
- Die Anzahl der Pivotelemente in der Stufenform der Matrix A heißt *Rang* der Matrix A und wird mit $\operatorname{rang}(A)$ bezeichnet.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \operatorname{rang}(A) = 2$$



Definition: Pivot - Rang - Regularität - Singularität

- Das jeweils erste nicht Nullelement in einer Stufenform einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *Pivotelement*.
- Die Anzahl der Pivotelemente in der Stufenform der Matrix A heißt *Rang* der Matrix A und wird mit $\mathrm{rang}(A)$ bezeichnet.
- Gilt bei einer quadratischen $n \times n$-Matrix $\mathrm{rang}(A) = n$ so heißt die Matrix *regulär*, andernfalls *singulär*.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \mathrm{rang}(A) = 2\,, \text{ Spalten: } n = 3 \text{ (singulär)}$$

Definition: Pivot - Rang - Regularität - Singularität

- Das jeweils erste nicht Nullelement in einer Stufenform einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *Pivotelement*.
- Die Anzahl der Pivotelemente in der Stufenform der Matrix A heißt *Rang* der Matrix A und wird mit $\mathrm{rang}(A)$ bezeichnet.
- Gilt bei einer quadratischen $n \times n$-Matrix $\mathrm{rang}(A) = n$ so heißt die Matrix *regulär*, andernfalls *singulär*.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \mathrm{rang}(A) = 2\,, \text{ Spalten: } n = 3 \text{ (singulär)}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \mathrm{rang}(A) = 3\,, \text{ Spalten: } n = 3 \text{ (regulär)}$$

ongoing

1. Zeilenumformungen über die Stufenform hinaus bis zur Einheitsmatrix

ongoing

1. Zeilenumformungen über die Stufenform hinaus bis zur Einheitsmatrix
2. Mehrere LGS mit jeweils gleichen rechten Seiten auf einen Schlag lösen

1. Zeilenumformungen über die Stufenform hinaus bis zur Einheitsmatrix
2. Mehrere LGS mit jeweils gleichen rechten Seiten auf einen Schlag lösen

$\Rightarrow$ Berechnung einer Inversen Matrix, sofern diese existiert

1. Zeilenumformungen über die Stufenform hinaus bis zur Einheitsmatrix
2. Mehrere LGS mit jeweils gleichen rechten Seiten auf einen Schlag lösen

$\Rightarrow$ Berechnung einer Inversen Matrix, sofern diese existiert

$\Rightarrow$ Aussagen darüber welche Eigenschaften von Matrizen $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$ die Struktur einer Gruppe verleihen

$$A\,x = y \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E}\,x = A^{-1}\,y \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{E\,x}_{=x} = A^{-1}\,y$$

LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

einfach weiter machen

LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Stufenform - Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{2II-3I} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{5I-II} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[II/5]{I/10} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

einfach weiter machen

LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Stufenform - Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2II-3I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{5I-II}} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II/5}]{\text{I/10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= \frac{1}{5} \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= \frac{3}{5} \, . \end{aligned}$$

einfach weiter machen

LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Stufenform - Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{2II-3I}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{5I-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{II/5}{\overset{I/10}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= \frac{1}{5} \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= \frac{3}{5} \,. \end{aligned}$$

Lösung direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$$

2 auf einen Streich

<u>2 LGS:</u>

$$A\,x^1 = y^1 \quad \text{und} \quad A\,x^2 = y^2$$

2 LGS:

$$A\,x^1 = y^1 \quad \text{und} \quad A\,x^2 = y^2$$

Stufenform: 2 Mal identische Rechenschritte

$$(A, y^1) \quad \text{und} \quad (A, y^2)$$

2 LGS:

$$A\,x^1 = y^1 \quad \text{und} \quad A\,x^2 = y^2$$

Stufenform: 2 Mal identische Rechenschritte

$$(A, y^1) \quad \text{und} \quad (A, y^2)$$

zusammenfassen: 1 Mal rechnen

$$(A, y^1, y^2)$$

2 auf einen Streich: Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2 auf einen Streich: Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(I+II)}]{\text{II-3 I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II/(-2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \color{red}{1} & \color{teal}{1} \\ 0 & 1 & \color{red}{-1} & \color{teal}{1} \end{array}\right)$$

2 auf einen Streich: Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(I+II)}]{\text{II-3 I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II/(-2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Test:</u>

$$A\,x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = y^1$$

und

$$A\,x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = y^2$$

$\checkmark$

neutrales Element:

$$A\,E_n = A$$

neutrales Element:

$$A\,E_n = A$$

Wenn es A^{-1} gibt:

$$A^{-1}\,A = E_n \quad \text{bzw.} \quad A\,A^{-1} = E_n$$

neutrales Element:

$$A\,E_n = A$$

Wenn es A^{-1} gibt:

$$A^{-1}\,A = E_n \quad \text{bzw.} \quad A\,A^{-1} = E_n$$

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A} \qquad \text{und} \qquad A\,x = y \;\; \cancel{\Leftrightarrow x = \frac{y}{A}}$$

neutrales Element:

$$A\,E_n = A$$

Wenn es A^{-1} gibt:

$$A^{-1}\,A = E_n \quad \text{bzw.} \quad A\,A^{-1} = E_n$$

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A} \qquad \text{und} \qquad A\,x = y \quad \cancel{\Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{A}}$$

$$A\,x = y \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}A\,x = A^{-1}\,y \quad \Leftrightarrow \quad E_n\,x = A^{-1}\,y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\,y$$

neutrales Element:

$$A\,E_n = A$$

Wenn es A^{-1} gibt:

$$A^{-1}\,A = E_n \quad \text{bzw.} \quad A\,A^{-1} = E_n$$

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A} \qquad \text{und} \qquad A\,x = y \quad \cancel{\Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{A}}$$

$$A\,x = y \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}A\,x = A^{-1}\,y \quad \Leftrightarrow \quad E_n\,x = A^{-1}\,y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\,y$$

Trick: Lösung x^1 ist die erste Spalte von A^{-1}, wenn

$$y^1 = e_1 := \left(\delta_{1j}\right)_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{Einheitsvektor}$$

Für y^2 wählen wir

$$y^2 = e_2 = \left(\delta_{2j}\right)_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{usw.}$$

Für y^2 wählen wir

$$y^2 = e_2 = \left(\delta_{2j}\right)_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{usw.}$$

<u>sukkessives Fortführen:</u>

$$A\,x^1 = e_1\,,\ \ldots\,,\ A\,x^n = e_n$$

Jede Lösung x^i stellt die i-te Spalte von A^{-1} dar.

Für y^2 wählen wir

$$y^2 = e_2 = \left(\delta_{2j}\right)_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{usw.}$$

<u>sukkessives Fortführen:</u>

$$A\,x^1 = e_1\,,\ \ldots\,,\ A\,x^n = e_n$$

Jede Lösung x^i stellt die i-te Spalte von A^{-1} dar.
Die gesamte Matrix A^{-1} können wir dann aus der Umformung

$$(A, E_n) \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{Zeilen-}} (E_n, A^{-1})$$

direkt ablesen.

Beispiel: Inverse berechnen

Wir suchen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ das multiplikative Inverse A^{-1}:

Beispiel: Inverse berechnen

Wir suchen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ das multiplikative Inverse A^{-1}:

$$(A, E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{Zeilen-}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) = (E_2, A^{-1})$$

Wir suchen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ das multiplikative Inverse A^{-1}:

$$(A, E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{Zeilen-}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) = (E_2, A^{-1})$$

Demnach gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Inverse berechnen

Wir suchen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ das multiplikative Inverse A^{-1}:

$$(A, E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{Zeilen-}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) = (E_2, A^{-1})$$

Demnach gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Machen Sie den Test:

$$A \cdot A^{-1} = E_2 \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = E_2$$

Zwischenstand

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, so kann man das LGS $Ax = y$ auch mit Hilfe der Inversen A^{-1} berechnen:

$$Ax = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1}y$$

Zwischenstand

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, so kann man das LGS $Ax = y$ auch mit Hilfe der Inversen A^{-1} berechnen:

$$Ax = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1}y$$

<u>Beispiel:</u> Matrizen als Gruppe $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$ bildet mit der üblichen Matrixmultiplikation keine Gruppe, $(A, \cdot)$ mit

$$A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;\middle|\; \mathrm{rang}(A) = n \right\}$$

aber schon, d.h. die Menge der quadratischen, regulären Matrizen bilden mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe (nicht abelsch!).

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix, so kann man das LGS $Ax = y$ auch mit Hilfe der Inversen A^{-1} berechnen:

$$Ax = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1}y$$

Beispiel: Matrizen als Gruppe $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$ bildet mit der üblichen Matrixmultiplikation keine Gruppe, $(\mathcal{A}, \cdot)$ mit

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; \mathrm{rang}(A) = n\right\}$$

aber schon, d.h. die Menge der quadratischen, regulären Matrizen bilden mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe (nicht abelsch!).

Inverse einer 2×2

Hier noch eine kleine aber sehr nützliche Formel für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Saalaufgabe

Memo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie - falls möglich - mit obiger Formel die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, d.h. gilt

$$A^{-1} \cdot A = E_2\,?$$

Saalaufgabe

Memo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie - falls möglich - mit obiger Formel die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, d.h. gilt

$$A^{-1} \cdot A = E_2\,?$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \; A^{-1}A = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B^{-1} existiert nicht, da $ad - bc = 0$!

Lernziele

- Sie erkennen ob zwei Matrizen sich multiplizieren lassen
- Falls erlaubt sind Sie in der Lage das Produkt zweier Matrizen zu berechnen
- Sie können Matrizenprodukte in abstrakter und unterschiedlichster Weise beschreiben
- Sie können ein lineares Gleichungssystem lösen - sofern es lösbar ist - und eine Aussage über die Anzsahl der Lösungen treffen
- Sie sind in der Lage - falls möglich - die Inverse einer Matrix zu berechnen

H