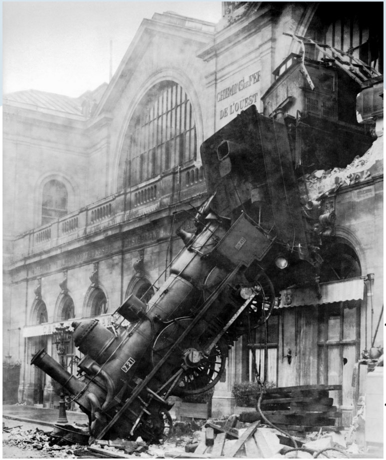
H T W I G N

Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik



6 Taylorentwicklung

6.1 Das Taylorpolynom
6.2 Die Taylorreihe

Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

- die Übergänge sind knickfrei

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

- die Übergänge sind knickfrei
- ein Geradenstück hat Krümmung $\kappa = 0$

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

- die Übergänge sind knickfrei
- ein Geradenstück hat Krümmung $\kappa = 0$
- ein Kreisbogen mit Radius R hat Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

Die Klothoide

$$c(l) = A\sqrt{\pi} \int_0^l \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} s^2\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} s^2\right) \end{pmatrix} ds$$

- die Übergänge sind knickfrei
- ein Geradenstück hat Krümmung $\kappa = 0$
- ein Kreisbogen mit Radius R hat Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

<u>Die Klothoide</u>

$$c(l) = A\sqrt{\pi} \int_0^l \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\, s^2\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\, s^2\right) \end{pmatrix} ds$$

hat die Krümmung

$$\kappa(l) = \frac{\sqrt{\pi}}{A}\, l$$

- die Übergänge sind knickfrei
- ein Geradenstück hat Krümmung $\kappa = 0$
- ein Kreisbogen mit Radius R hat Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$

Designelemente/Übergangsbögen von Bahnschienen

- die Übergänge sind knickfrei
- ein Geradenstück hat Krümmung $\kappa = 0$
- ein Kreisbogen mit Radius R hat Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$

Die Klothoide

$$c(l) = A\sqrt{\pi} \int_0^l \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} s^2\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} s^2\right) \end{pmatrix} ds$$

hat die Krümmung

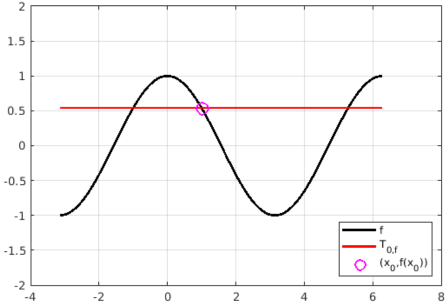
$$\kappa(l) = \frac{\sqrt{\pi}}{A}\, l$$

und beschreibt von $(0,0)$ bis $(c^1(l), c^2(l))$ eine Kurve der Länge

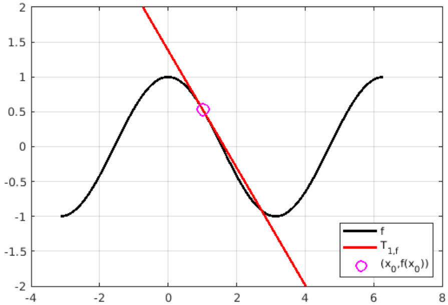
$$L = A\, l\, \sqrt{\pi}\,.$$

Kurven ertasten

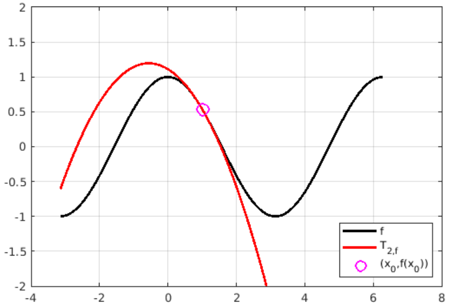
Ziel: Eine "gute" Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.



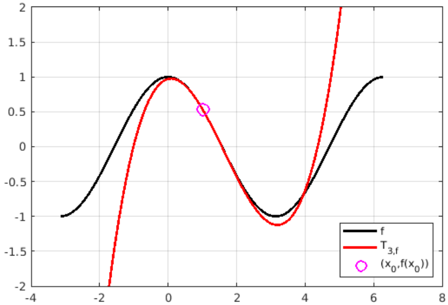
Ziel: Eine “gute” Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.



Ziel: Eine “gute” Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.

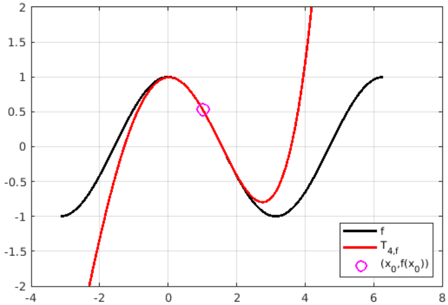


Ziel: Eine "gute" Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.

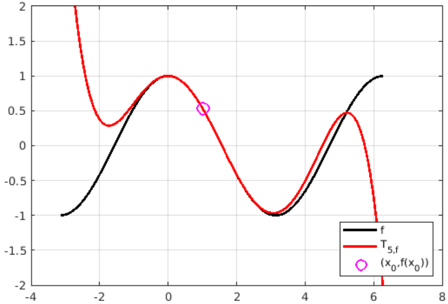


Kurven ertasten

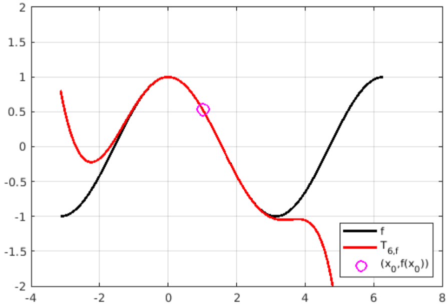
<u>Ziel:</u> Eine “gute” Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.



Ziel: Eine “gute” Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.



<u>Ziel:</u> Eine “gute” Näherung an $f(x) = \cos x$ im Bereich $(1, f(1))$.



Eigenschaften:

- aus der Wunschliste: k-te Ableitungen am Punkt x_0 stimmen überein.

$$T_{n,f}^{(k)}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0)\,,\ \ k = 0, \ldots, n$$

Eigenschaft und Fragen

Eigenschaften:

- aus der Wunschliste: k-te Ableitungen am Punkt x_0 stimmen überein.

$$T^{(k)}_{n,f}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0)\,,\;\; k = 0, \dots, n$$

- wegen der Konstruktion:

$$T_{n,f}(x, x_0) \in \mathbb{P}_n$$

Eigenschaften:

- aus der Wunschliste: k-te Ableitungen am Punkt x_0 stimmen überein.

$$T_{n,f}^{(k)}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0)\,,\ k = 0, \ldots, n$$

- wegen der Konstruktion:

$$T_{n,f}(x, x_0) \in \mathbb{P}_n$$

- wir beaobachten:

$$T_{n,f}(x, x_0) \approx f(x)$$

Eigenschaft und Fragen

Eigenschaften:

- aus der Wunschliste: k-te Ableitungen am Punkt x_0 stimmen überein.

$$T_{n,f}^{(k)}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0)\,,\ \ k = 0, \ldots, n$$

- wegen der Konstruktion:

$$T_{n,f}(x, x_0) \in \mathbb{P}_n$$

- wir beaobachten:

$$T_{n,f}(x, x_0) \approx f(x)$$

Fragen:

- Wie berechnet man solche Polynome?

Eigenschaft und Fragen

Eigenschaften:

- aus der Wunschliste: k-te Ableitungen am Punkt x_0 stimmen überein.

$$T_{n,f}^{(k)}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0)\,, \;\; k = 0, \ldots, n$$

- wegen der Konstruktion:

$$T_{n,f}(x, x_0) \in \mathbb{P}_n$$

- wir beaobachten:

$$T_{n,f}(x, x_0) \approx f(x)$$

Fragen:

- Wie berechnet man solche Polynome?
- Wie gut ist die Näherung?

$$|T_{n,f}(x, x_0) - f(x)| \leq ?$$

Eigenschaft und Fragen

Eigenschaften:

- aus der Wunschliste: k-te Ableitungen am Punkt x_0 stimmen überein.

$$T_{n,f}^{(k)}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0)\,, \;\; k = 0, \ldots, n$$

- wegen der Konstruktion:

$$T_{n,f}(x, x_0) \in \mathbb{P}_n$$

- wir beaobachten:

$$T_{n,f}(x, x_0) \approx f(x)$$

Fragen:

- Wie berechnet man solche Polynome?
- Wie gut ist die Näherung?

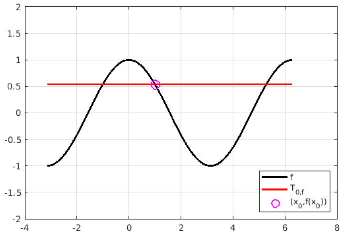
$$|T_{n,f}(x, x_0) - f(x)| \leq ?$$

- $$\lim_{n\to\infty} T_{n,f}(x, x_0) \stackrel{?}{=} f(x)$$

  Wenn ja, wo gilt das dann? Im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$?

Wie berechnet man Taylorpolynome?

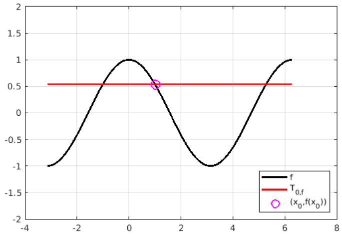
$$f(x) = \cos x$$



<u>Wunsch:</u> $T_f(1) = f(1)$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



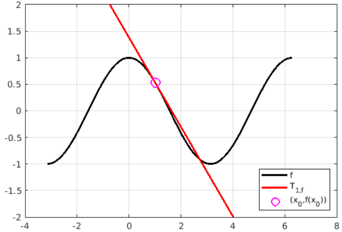
<u>Wunsch:</u> $T_f(1) = f(1)$

Das einfachste Polynom, welches den Wunsch erfüllt:

$$T_f(x) = f(1) = \cos(1) \in \mathbb{P}_0$$

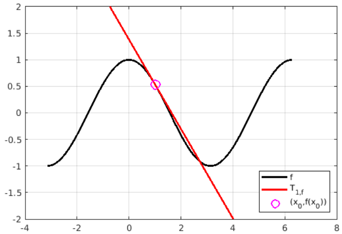
Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



Wunsch: $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$

$$f(x) = \cos x$$



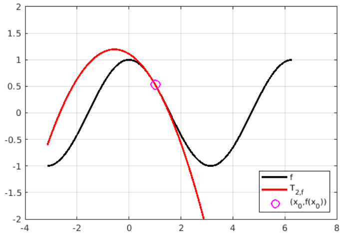
<u>Wunsch:</u> $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$

Das einfachste Polynom, welches den Wunsch erfüllt:

$$T_f(x) = f'(1)\,(x-1) + f(1) = -\sin(1)\,(x-1) + \cos(1) \in \mathbb{P}_1$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

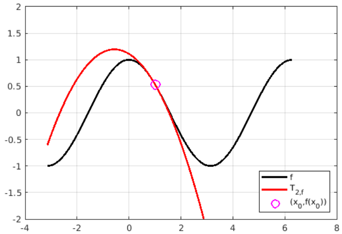
$$f(x) = \cos x$$



Wunsch: $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



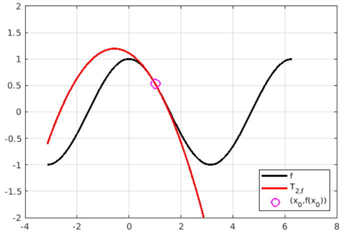
Wunsch: $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



Wunsch: $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

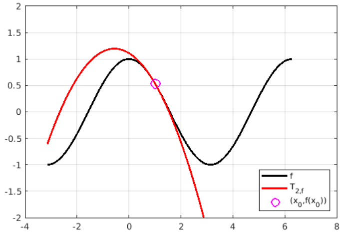
Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f(1) = f(1) \qquad \checkmark$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



<u>Wunsch:</u> $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

<u>Ansatz:</u> $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

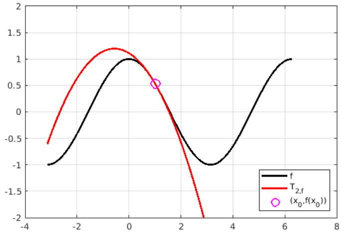
$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f(1) = f(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f'(x) = 2\,\alpha\, f''(1)\,(x-1) + f'(1)$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



Wunsch: $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

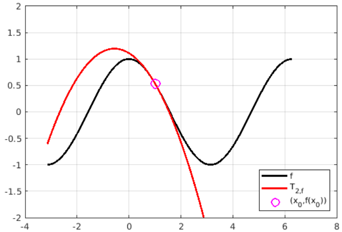
$$T_f(1) = f(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f'(x) = 2\,\alpha\, f''(1)\,(x-1) + f'(1)$$

$$T_f'(1) = f'(1) \qquad \checkmark$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$f(x) = \cos x$



Wunsch: $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

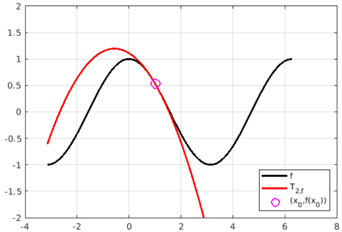
Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f(1) = f(1) \qquad \checkmark$$
$$T_f'(x) = 2\,\alpha\, f''(1)\,(x-1) + f'(1)$$
$$T_f'(1) = f'(1) \qquad \checkmark$$
$$T_f''(x) = 2\,\alpha\, f''(1)$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



<u>Wunsch:</u> $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

<u>Ansatz:</u> $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f(1) = f(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f'(x) = 2\,\alpha\, f''(1)\,(x-1) + f'(1)$$

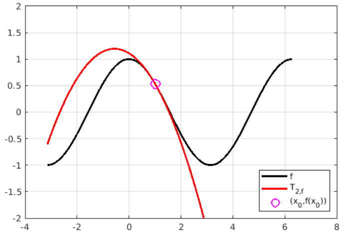
$$T_f'(1) = f'(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f''(x) = 2\,\alpha\, f''(1)$$

$$T_f''(1) = 2\,\alpha\, f''(1) \;\rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$f(x) = \cos x$



<u>Wunsch:</u> $T_f(1) = f(1)$ und $T_f'(1) = f'(1)$ und $T_f''(1) = f''(1)$

<u>Ansatz:</u> $T_f(x) \in \mathbb{P}_2$

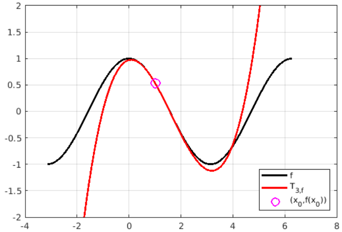
$$T_f(x) = \alpha\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f(x) = \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{1}\, f'(1)\,(x-1)^1 + \frac{1}{?}\, f(1)\,(x-0)^0$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

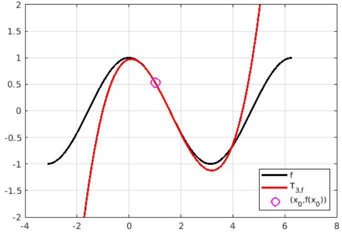
<u>Wunsch:</u> $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$f(x) = \cos x$$



Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



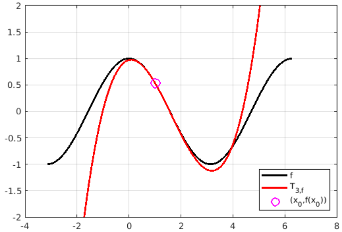
Wunsch: $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$f(x) = \cos x$



Wunsch: $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

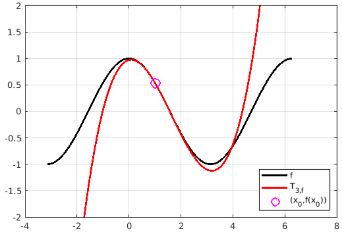
Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$f(x) = \cos x$



<u>Wunsch:</u> $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

<u>Ansatz:</u> $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

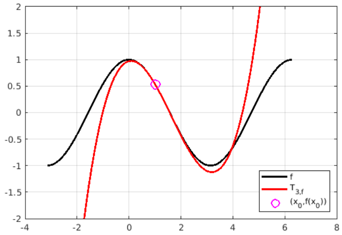
$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f^{(3)}(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1) \ \Rightarrow\ \beta = \frac{1}{6} \qquad \checkmark$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$f(x) = \cos x$



Wunsch: $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

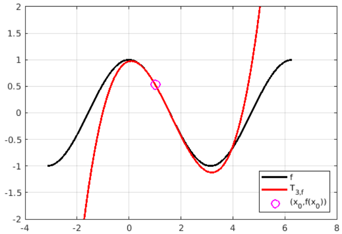
$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f^{(3)}(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1) \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1}{6} \qquad \checkmark$$

$$T_f(x) = \frac{1}{6}\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



<u>Wunsch:</u> $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

<u>Ansatz:</u> $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

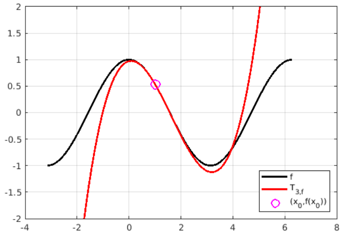
$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f^{(3)}(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1) \ \Rightarrow\ \beta = \frac{1}{6} \qquad \checkmark$$

$$T_{f,3}(x) = \frac{1}{3!}\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2!}\, f^{(2)}(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{1!}\, f^{(1)}(1)\,(x-1)^1 + \frac{1}{0!}\, f^{(0)}(1)\,(x-1)^0$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



Wunsch: $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

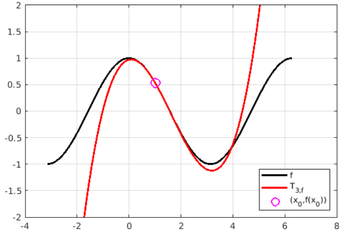
$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f^{(3)}(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1) \ \Rightarrow\ \beta = \frac{1}{6} \qquad \checkmark$$

$$T_{f,3}(x,1) = \frac{1}{3!}\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2!}\, f^{(2)}(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{1!}\, f^{(1)}(1)\,(x-1)^1 + \frac{1}{0!}\, f^{(0)}(1)\,(x-1)^0$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



<u>Wunsch:</u> $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1),\ n \in \{0,1,2,3\}$

<u>Ansatz:</u> $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

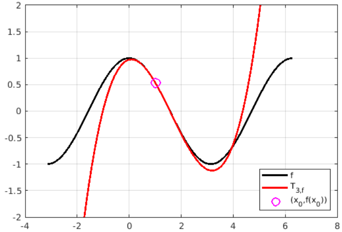
$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f^{(3)}(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1) \ \Rightarrow\ \beta = \frac{1}{6} \qquad \checkmark$$

$$T_{f,3}(x,x_0) = \frac{1}{3!}\, f^{(3)}(x_0)\,(x-x_0)^3 + \frac{1}{2!}\, f^{(2)}(x_0)\,(x-x_0)^2 + \frac{1}{1!}\, f^{(1)}(x_0)\,(x-x_0)^1 + \frac{1}{0!}\, f^{(0)}(x_0)\,(x-x_0)^0$$

Wie berechnet man Taylorpolynome?

$$f(x) = \cos x$$



Wunsch: $T_f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1), \; n \in \{0,1,2,3\}$

Ansatz: $T_f(x) \in \mathbb{P}_3$

$$T_f(x) = \beta\, f^{(3)}(1)\,(x-1)^3 + \frac{1}{2}\, f''(1)\,(x-1)^2 + f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

$$T_f''(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1)\,(1-1) + f''(1) \qquad \checkmark$$

$$T_f^{(3)}(1) = 6\,\beta\, f^{(3)}(1) \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1}{6} \qquad \checkmark$$

$$T_{f,N}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$$

- Falls keine analytische Darstellung einer Stammfunktion “zur Hand” ist:

$$\int \cos x^2 \; dx \approx \int T_{\cos x^2, n}(x, x_0) \; dx$$

- Falls keine analytische Darstellung einer Stammfunktion “zur Hand” ist:

$$\int \cos x^2 \; dx \approx \int T_{\cos x^2, n}(x, x_0) \; dx$$

- Auswertungen sind zu aufwendig (Halbleiterchip), “das Leben leichter machen”

Anwendungen

- Falls keine analytische Darstellung einer Stammfunktion "zur Hand" ist:

$$\int \cos x^2 \; dx \approx \int T_{\cos x^2, n}(x, x_0) \; dx$$

- Auswertungen sind zu aufwendig (Halbleiterchip), "das Leben leichter machen"
- in mathematischen Beweisen (Konvergenzaussagen von Algorithmen, Numerik)

Definition

Brook Taylor
(1685-1731)

Definition: Taylorpolynom

Für eine in $x_0 \in I$ n–mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt das Polynom

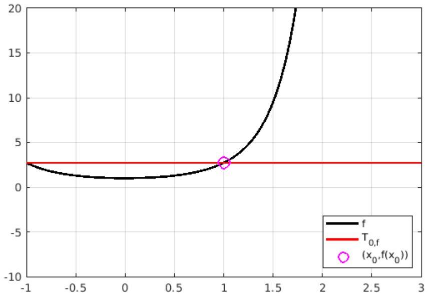
$$T_{f,n}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das *Taylorpolynom* der Ordnung n von f an der Stelle x_0.

Beispiel

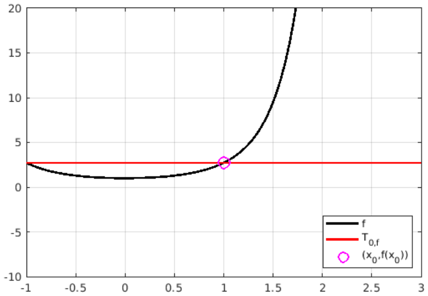
Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

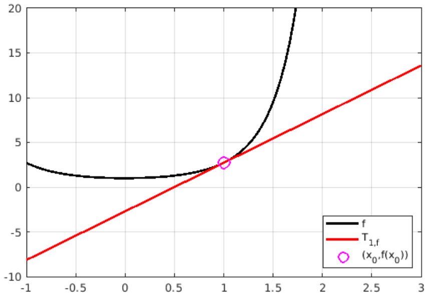


Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(0)}(1) = \mathrm{e}$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



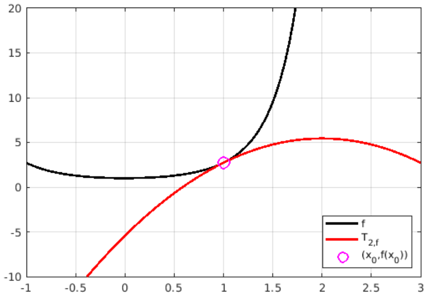
Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = \mathrm{e}$$

$$f'(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 2\,\mathrm{e}$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

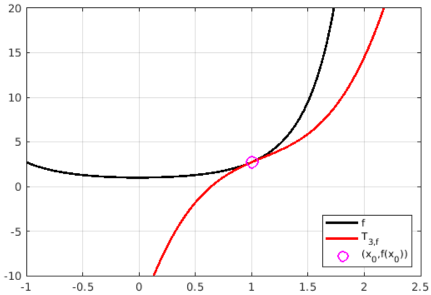


Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow&& f^{(0)}(1) &= \mathrm{e}\\
f'(x) &= 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow&& f^{(1)}(1) &= 2\,\mathrm{e}\\
f''(x) &= 2\,(2\,x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow&& f^{(2)}(1) &= 6\,\mathrm{e}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i=\{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$.

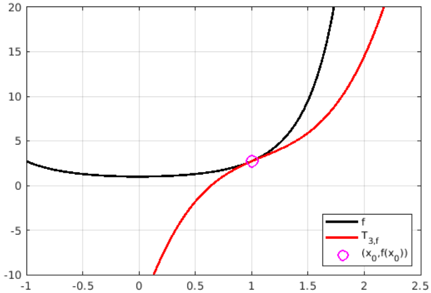


Entwicklungspunkt $x_0=1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow\quad f^{(0)}(1) &= \mathrm{e}\\
f'(x) &= 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow\quad f^{(1)}(1) &= 2\,\mathrm{e}\\
f''(x) &= 2\,(2\,x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow\quad f^{(2)}(1) &= 6\,\mathrm{e}\\
f^{(3)}(x) &= (12\,x+8\,x^3)\,\mathrm{e}^{x^2} &\Rightarrow\quad f^{(3)}(1) &= 20\,\mathrm{e}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = e^{x^2}$.



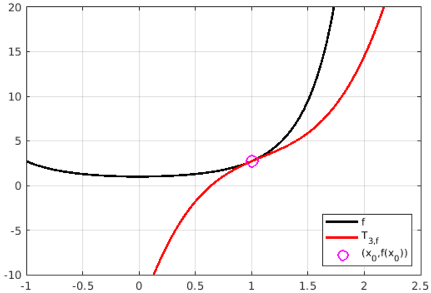
Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} & &\Rightarrow & f^{(0)}(1) &= e \\ f'(x) &= 2\,x\,e^{x^2} & &\Rightarrow & f^{(1)}(1) &= 2\,e \\ f''(x) &= 2\,(2\,x^2+1)\,e^{x^2} & &\Rightarrow & f^{(2)}(1) &= 6\,e \\ f^{(3)}(x) &= (12\,x + 8\,x^3)\,e^{x^2} & &\Rightarrow & f^{(3)}(1) &= 20\,e \end{aligned}$$

$$T_{f,3}(x,1) = \frac{1}{0!}\,f^{(0)}(1)\,(x-1)^0 + \frac{1}{1!}\,f^{(1)}(1)\,(x-1)^1 + \frac{1}{2!}\,f^{(2)}(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\,f^{(3)}(1)\,(x-1)^3$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



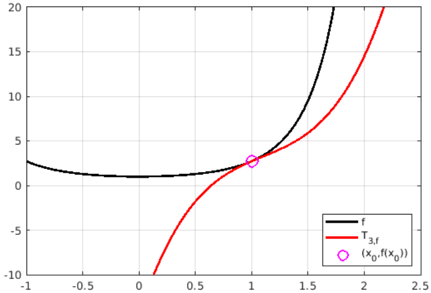
Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = \mathrm{e}$$
$$f'(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 2\,\mathrm{e}$$
$$f''(x) = 2\,(2\,x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = 6\,\mathrm{e}$$
$$f^{(3)}(x) = (12\,x + 8\,x^3)\,\mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 20\,\mathrm{e}$$

$$T_{f,3}(x,1) = \mathrm{e} + \frac{1}{1!}\,f^{(1)}(1)\,(x-1)^1 + \frac{1}{2!}\,f^{(2)}(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\,f^{(3)}(1)\,(x-1)^3$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



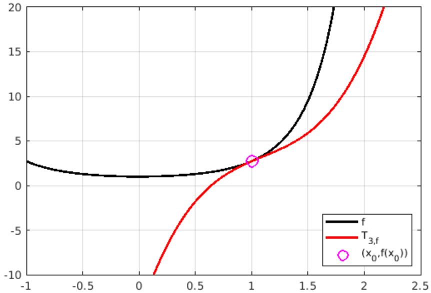
Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{x^2} & \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) &= \mathrm{e} \\
f'(x) &= 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} & \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) &= 2\,\mathrm{e} \\
f''(x) &= 2\,(2\,x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} & \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) &= 6\,\mathrm{e} \\
f^{(3)}(x) &= (12\,x + 8\,x^3)\,\mathrm{e}^{x^2} & \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) &= 20\,\mathrm{e}
\end{aligned}
$$

$$T_{f,3}(x,1) = \mathrm{e} + 2\,e\,(x-1) + \frac{1}{2!}\,f^{(2)}(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\,f^{(3)}(1)\,(x-1)^3$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



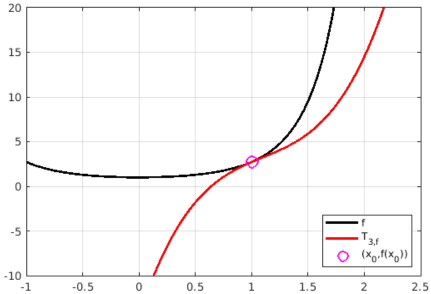
Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow f^{(0)}(1) = \mathrm{e}$$
$$f'(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow f^{(1)}(1) = 2\,\mathrm{e}$$
$$f''(x) = 2\,(2\,x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow f^{(2)}(1) = 6\,\mathrm{e}$$
$$f^{(3)}(x) = (12\,x + 8\,x^3)\,\mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 20\,\mathrm{e}$$

$$T_{f,3}(x,1) = \mathrm{e} + 2\,e\,(x-1) + 3\,\mathrm{e}\,(x-1)^2 + \frac{20}{6}\,\mathrm{e}\,(x-1)^3$$

Beispiel

Wir berechnen $T_{f,i}(x,1)$, $i = \{1,2,3,4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{x^2} &&\Rightarrow & f^{(0)}(1) &= \mathrm{e}\\
f'(x) &= 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2} &&\Rightarrow & f^{(1)}(1) &= 2\,\mathrm{e}\\
f''(x) &= 2\,(2\,x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} &&\Rightarrow & f^{(2)}(1) &= 6\,\mathrm{e}\\
f^{(3)}(x) &= (12\,x + 8\,x^3)\,\mathrm{e}^{x^2} &&\Rightarrow & f^{(3)}(1) &= 20\,\mathrm{e}
\end{aligned}$$

$$T_{f,3}(x,1) = \frac{\mathrm{e}}{3}\,\left(10\,x^3 - 21\,x^2 + 18\,x - 4\right)$$

src

Memo:

$$T_{f,N}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

```
x  = linspace(-1,3,100);
x0 = 0;
N  = 3;

Tf = zeros(1,100);
for k=0:N
    Tf = Tf + dfunc(x0,k)/factorial(k)*(x-x0).^k;
end
```

Source/src/Taylor_p1.m

src

```
function df=dfunc(x,l)

switch l
    case 0
        df = exp(x.^2);
    case 1
        df = 2*x.*exp(x.^2);
    case 2
        df = 2*(1-2*x.^2).*exp(x.^2);
    case 3
        df = 4*(3*x+2*x.^3).*exp(x.^2);
    otherwise
        df = 0;
        fprintf('error');
end

end
```

Source/src/Taylor_p2.m

Beispiel: Blatt 4, Aufgabe 6

Am besten man kennt die k-te Ableitung:

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(x-k)}{\mathrm{e}^x}$$

Beispiel: Blatt 4, Aufgabe 6

Am besten man kennt die k-te Ableitung:

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (x-k)}{e^x}$$

```
function df=dfunc(x,l)

  df = (-1)^l*(x-l)./exp(x);

end
```

Source/src/Taylor_p3.m

Beispiel: Blatt 4, Aufgabe 6

Am besten man kennt die k-te Ableitung:

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (x-k)}{\mathrm{e}^x}$$

```
function df=dfunc(x,l)

  df = (-1)^l*(x-l)./exp(x);

end
```

Source/src/Taylor_p3.m

Bemerkung: Das ist schick in dreierlei Hinsicht:

1. "bequem" programmiert (klar)
2. es lässt sich damit eine Taylorreihe aufstellen
3. man kann a-priori Fehlerschranken einhalten

Definition: Taylorreihe

Sei $f \in C^\infty(I)$. Dann heißt die Potenzreihe

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe* der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0. Wir sagen die Funktion ist *taylorentwickelbar*, wenn $f(x) = T_f(x, x_0)$ gilt.

Definition: Taylorreihe

Sei $f \in C^\infty(I)$. Dann heißt die Potenzreihe

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe* der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0. Wir sagen die Funktion ist *taylorentwickelbar*, wenn $f(x) = T_f(x, x_0)$ gilt.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow \quad T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x_0 - k)\, \mathrm{e}^k}{k!} (x - x_0)^k$$

Bemerkung: Eine solche geschlossene Form der Taylorreihe lässt sich nur formulieren, wenn man $f^{(k)}$ kennt.

Beispiele

1. Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ um $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & \Rightarrow && f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & \Rightarrow && f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & \Rightarrow && f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow && f^{(3)}(0) &= -1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1. Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ um $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & \Rightarrow && f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & \Rightarrow && f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & \Rightarrow && f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow && f^{(3)}(0) &= -1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$T_{\sin}(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

1. Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ um $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & \Rightarrow && f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & \Rightarrow && f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & \Rightarrow && f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow && f^{(3)}(0) &= -1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$T_{\sin}(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

<u>analog:</u> $f(x) = \cos x$ (ÜA)

2. Taylorreihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f(0) &= 1 \\ f^{(k)}(x) &= \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f^{(k)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

2. Taylorreihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x & \Rightarrow && f(0) &= 1 \\ f^{(k)}(x) &= \mathrm{e}^x & \Rightarrow && f^{(k)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$T_{\mathrm{e}}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k$$

Beispiele

2. Taylorreihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^x \qquad &\Rightarrow \qquad f(0) &= 1 \\
f^{(k)}(x) &= \mathrm{e}^x \qquad &\Rightarrow \qquad f^{(k)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
T_{\mathrm{e}}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
$$

2. Taylorreihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x & \Rightarrow && f(0) &= 1 \\ f^{(k)}(x) &= \mathrm{e}^x & \Rightarrow && f^{(k)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$T_{\mathrm{e}}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Erinnerung (Mathe 1): $\mathrm{e}^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$ (Eulergleichung)

2. Taylorreihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x & \Rightarrow && f(0) &= 1 \\ f^{(k)}(x) &= \mathrm{e}^x & \Rightarrow && f^{(k)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$T_{\mathrm{e}}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

<u>Erinnerung (Mathe 1):</u> $\mathrm{e}^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$ (Eulergleichung)

<u>auch schön:</u> $f(x) = \ln x$ (Blatt 9, Aufgabe 2)

Beispiele

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

Beispiele

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 1$$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} & \Rightarrow \quad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow \quad f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3} & \Rightarrow \quad f'(0) &= 2 \end{aligned}$$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} & \Rightarrow \quad & f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow \quad & f'(0) = 1 \\
f''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3} & \Rightarrow \quad & f'(0) = 2 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4} & \Rightarrow \quad & f^{(3)}(0) = 3! \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} & \Rightarrow \quad f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow \quad f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3} & \Rightarrow \quad f'(0) &= 2 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4} & \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) &= 3! \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} & \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) &= k!
\end{aligned}
$$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(x-x_0)^k}{k!\,(1-x_0)^{k+1}}\,, \;\; x_0 = 0$$

Beispiele

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{(1-x_0)^{k+1}}\,, \;\; x_0 = 0$$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Beispiele

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

<u>Frage:</u>

$$T_f(x,0) \overset{?}{=} f(x)\,, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{?}{=} \frac{1}{1-x}$$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

<u>Frage:</u>

$$T_f(x,0) \stackrel{?}{=} f(x)\,, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \stackrel{\text{(Mathe 1)}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{(Mathe 2)}} \frac{1}{1-x}$$

Also ja, wenn $|x| < 1$ erfüllt ist.

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Frage:

$$T_f(x,0) \overset{?}{=} f(x)\,, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{?}{=} \frac{1}{1-x}$$

Wie sieht das aus?

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,, \quad \mathbb{D}_{T_f} = (-1,1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \overset{\text{(Mathe 1)}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[(n \to \infty)]{\text{(Mathe 2)}} \frac{1}{1-x}$$

Also ja, wenn $|x| < 1$ erfüllt ist.

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

<u>Frage:</u>

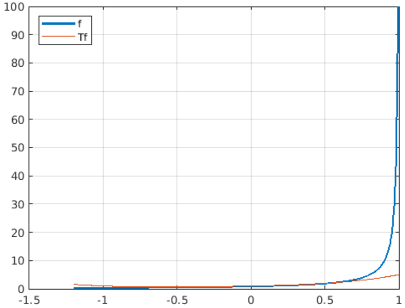
$$T_f(x,0) \overset{?}{=} f(x)\,, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{?}{=} \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \overset{\text{(Mathe 1)}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{(Mathe 2)}} \frac{1}{1-x}$$

Also ja, wenn $|x| < 1$ erfüllt ist.

Wie sieht das aus?

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,, \quad \mathbb{D}_{T_f} = (-1,1)$$



$n = 4$, $x_0 = 0$

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

<u>Frage:</u>

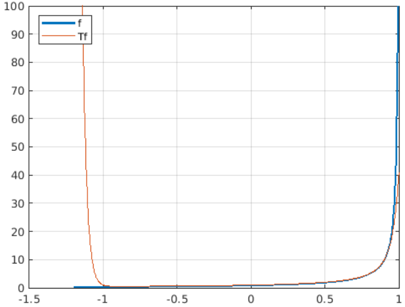
$$T_f(x,0) \stackrel{?}{=} f(x)\,, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \stackrel{\text{(Mathe 1)}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{(Mathe 2)}} \frac{1}{1-x}$$

Also ja, wenn $|x| < 1$ erfüllt ist.

Wie sieht das aus?

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,, \quad \mathbb{D}_{T_f} = (-1,1)$$



$n = 40$, $x_0 = 0$

Beispiele

3. Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

<u>Frage:</u>

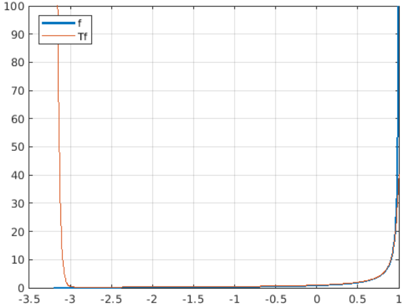
$$T_f(x,0) \overset{?}{=} f(x)\,, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{?}{=} \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \overset{\text{(Mathe 1)}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{(Mathe 2)}} \frac{1}{1-x}$$

Also ja, wenn $|x| < 1$ erfüllt ist.

Wie sieht das aus?

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,, \quad \mathbb{D}_{T_f} = (-1,1)$$



$n = 80$, $x_0 = -1$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\ dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

$$\int_{-2}^{0} T_{f,n}(x,0)\ dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{-2}^{0} x^k\ dx$$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\ dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

$$\int_{-2}^{0} T_{f,n}(x,0)\ dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{-2}^{0} x^k\ dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-2}^{0}$$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

$$\int_{-2}^{0} T_{f,n}(x,0)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{-2}^{0} x^k\, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-2}^{0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{0^{k+1}}{k+1} - \frac{(-2)^{k+1}}{k+1}$$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

$$\int_{-2}^{0} T_{f,n}(x,0)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{-2}^{0} x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-2}^{0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{0^{k+1}}{k+1} - \frac{(-2)^{k+1}}{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,2^k}{k+1}$$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

$$\int_{-2}^{0} T_{f,n}(x,0)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{-2}^{0} x^k\, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-2}^{0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{0^{k+1}}{k+1} - \frac{(-2)^{k+1}}{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 2^k}{k+1}$$

$$= 2 \begin{cases} 1.33 & n=2 \\ -0.67 & n=3 \\ 2.53 & n=4 \\ -2.80 & n=5 \\ 6.34 & n=6 \\ -9.66 & n=7 \end{cases}$$

Achtung!

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 3 \approx 1.09$$

$$\int_{-2}^{0} T_{f,n}(x,0)\,dx = \sum_{k=0}^{n}\int_{-2}^{0} x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-2}^{0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{0^{k+1}}{k+1} - \frac{(-2)^{k+1}}{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,2^k}{k+1}$$

$$= 2\begin{cases} 1.33 & n=2 \\ -0.67 & n=3 \\ 2.53 & n=4 \\ -2.80 & n=5 \\ 6.34 & n=6 \\ -9.66 & n=7 \end{cases}$$

Grund:

$$(-2,0) \not\subseteq \mathbb{D}_{T_{f,n}(x,0)} \quad \text{(Konvergenzbereich)}$$

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \Theta < 1$$

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{n \to \infty} \Theta < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=a_k(x)}$$

Für welche x ist das Quotientenkriterium erfüllt? Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich.

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad \Theta < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{= a_k(x)}$$

Für welche x ist das Quotientenkriterium erfüllt? Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich.

$$\left| \frac{\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}}{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k} \right|$$

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Theta < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=a_k(x)}$$

Für welche x ist das Quotientenkriterium erfüllt? Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich.

$$\left|\frac{\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)}\frac{1}{k+1}\right||x-x_0|$$

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad \Theta < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{= a_k(x)}$$

Für welche x ist das Quotientenkriterium erfüllt? Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich.

$$\left| \frac{\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}}{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k} \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)} \frac{1}{k+1} \right| |x - x_0| \to: \frac{1}{\varrho} |x - x_0| \overset{!}{<} 1$$

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{n \to \infty} \Theta < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=a_k(x)}$$

Für welche x ist das Quotientenkriterium erfüllt? Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich.

$$\left|\frac{\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)}\frac{1}{k+1}\right| |x-x_0| \to: \frac{1}{\varrho}|x-x_0| \overset{!}{<} 1$$

Konvergenzradius:

$$|x-x_0| < \varrho := \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)}\frac{1}{k+1}\right|}$$

Konvergensbereich

Memo: Quotientenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{n \to \infty} \Theta < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=a_k(x)}$$

Für welche x ist das Quotientenkriterium erfüllt? Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich.

$$\left|\frac{\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)}\frac{1}{k+1}\right| |x-x_0| \to: \frac{1}{\varrho}|x-x_0| \overset{!}{<} 1$$

Konvergenzradius:

$$|x-x_0| < \varrho := \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)}\frac{1}{k+1}\right|}$$

Konvergenzbereich:

$$K = (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$$

Beispiele

1.
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \; x_0 = 0$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \,, \;\; x_0 = 0$$

$$\left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right|$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,,\ x_0 = 0$$

$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,,\;\; x_0 = 0$$

$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

Beispiele

1.
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,,\ x_0 = 0$$
$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

2.
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \,, \; x_0 = 0$$

$$\left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+3)!}\, x^{2\,k+3}}{\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}} \right|$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \;\; x_0 = 0$$

$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+3)!}\, x^{2\,k+3}}{\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}}\right| = \left|\frac{(2\,k+1)!}{(2\,k+3)!}\,\frac{x^{2\,k+3}}{x^{2\,k+1}}\right|$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \;\; x_0 = 0$$

$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+3)!}\, x^{2\,k+3}}{\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}}\right| = \left|\frac{(2\,k+1)!}{(2\,k+3)!}\,\frac{x^{2\,k+3}}{x^{2\,k+1}}\right| = \frac{x^2}{(2\,k+2)(2\,k+3)}$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \,, \;\; x_0 = 0$$

$$\left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+3)!}\, x^{2\,k+3}}{\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}} \right| = \left| \frac{(2\,k+1)!}{(2\,k+3)!}\, \frac{x^{2\,k+3}}{x^{2\,k+1}} \right| = \frac{x^2}{(2\,k+2)(2\,k+3)} \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\lim_{k\to\infty} (2\,k+2)(2\,k+3)} = \infty$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \;\; x_0 = 0$$

$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1,1)$$

2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+3)!}\, x^{2\,k+3}}{\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}}\right| = \left|\frac{(2\,k+1)!}{(2\,k+3)!}\,\frac{x^{2\,k+3}}{x^{2\,k+1}}\right| = \frac{x^2}{(2\,k+2)(2\,k+3)} \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\lim_{k\to\infty}(2\,k+2)(2\,k+3)} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad K = \mathbb{R}$$

Beispiele

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,,\ \ x_0 = 0$$

$$\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| < 1 = \varrho \quad \Rightarrow \quad K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = (0-1, 0+1) = (-1, 1)$$

2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}$$

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2\,k+3)!}\, x^{2\,k+3}}{\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}}\right| = \left|\frac{(2\,k+1)!}{(2\,k+3)!}\,\frac{x^{2\,k+3}}{x^{2\,k+1}}\right| = \frac{x^2}{(2\,k+2)(2\,k+3)} \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\lim_{k\to\infty}(2\,k+2)(2\,k+3)} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad K = \mathbb{R}$$

taylorentwickelbar: Die Taylorreihe der Sinusfunktion stimmt auf ganz $\mathbb{R}$ mit dieser überein! Analoges gilt für die Taylorreihe von $\cos x$, e^x, $\ln x$,... (ÜA)

3.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \; x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \{0\}$$

(Rechnungen im Skript)

Beispiele

3.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \; x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \{0\}$$

(Rechnungen im Skript)

Jeder in x_0 unendlich oft differenzierbare Funktion kann um x_0 einer Taylorreihe $T_f(x, x_0)$ zugeordnet werden. Diese Potenzreihe ist der einzig mögliche Kandidat, welcher die Funktion f in einer Umgebung von x_0 darstellen könnte. Die Taylorreihe stellt jedoch nicht notwendigerweise die Funktion f dar.

3.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\,,\; x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \{0\}$$

(Rechnungen im Skript)

Jeder in x_0 unendlich oft differenzierbare Funktion kann um x_0 einer Taylorreihe $T_f(x, x_0)$ zugeordnet werden. Diese Potenzreihe ist der einzig mögliche Kandidat, welcher die Funktion f in einer Umgebung von x_0 darstellen könnte. Die Taylorreihe stellt jedoch nicht notwendigerweise die Funktion f dar.

letzte offene Frage: Wie gut ist die Approximation?

in der Praxis: berechnet man das Taylorpolynom

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=T_f(x,x_0)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=T_{f,n}(x,x_0)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=R_{f,n}(x,x_0)}$$

Fehler: Restgliedabschätzung

in der Praxis: berechnet man das Taylorpolynom

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_f(x,x_0)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_{f,n}(x,x_0)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=R_{f,n}(x,x_0)}$$

$$|R_{f,n}(x,x_0)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right|$$

in der Praxis: berechnet man das Taylorpolynom

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_f(x,x_0)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_{f,n}(x,x_0)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=R_{f,n}(x,x_0)}$$

$$|R_{f,n}(x,x_0)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right|$$

Man kann zeigen, dass es ein ζ zwischen x und x_0 gibt mit

$$|R_{f,n}(x,x_0)| = \left| \frac{f^{(\zeta+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{k+1} \right|$$

Beispiel

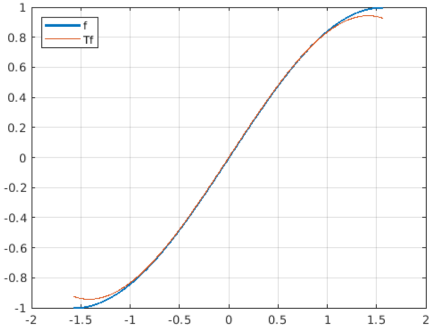
Auf $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ schätzen wir das Restglied

$$R_{\sin,3}(x,0)$$

ab:

$$\left|R_{\sin,3}(x,0)\right| = \left|\frac{\sin^{(4)}(\zeta)}{4!}\,x^4\right| = \frac{|\sin(\zeta)|}{4!}\,x^4$$

$$\leq \frac{x^4}{4!} \leq \frac{\pi^4}{2^4\,4!} < 2.54 \cdot 10^{-1}$$



`max(abs(Tf-dfunc(x,0)))` $\approx$ 0.075

Für welchen Polynomgrad n wird ein gewünschter Fehler ϵ nicht überschritten?

$$|R_{\sin,n}(x,0)| = \left| \frac{\sin^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| \leq \underbrace{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}} < \epsilon$$

$n = 0, 1, \ldots, 10$:

```
 1.0000 0.7854 0.4112 0.1615 0.0507 0.0133 0.0030 0.0006 0.0001 0.0000 0.0000
```

etwa

$$|R_{\sin,7}(x,0)| < 10^{-3}$$

Lernziele

- Sie können ein Taylorpolynom einer Funktion $f \in C^n$ beliebigen Grades n berechnen.
- Falls Sie die k-te Ableitung einer Funktion kennen können Sie die Taylorreihe einer Funktion $f \in C^\infty$ aufstellen.
- Sie haben verstanden was ein Konvergenzbereich bzw. ein Konvergenzradius ist. Sie können den Sachverhalt anhand eines Beispiels skizzieren.
- Ihnen ist die Dringlichkeit des Konvergenzbereichs verständlich. Sie können den Sachverhalt anhand eines Beispiels skizzieren.