Sommersemester 2021

Prof. Dr. Doris Bohnet

Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

Klausur zu Mathematik 2

Studiengang Angewandte Informatik

09.07.2021

Bitte beachten Sie folgende Hinweise und Rahmenbedingungen:

- Zeit: 90 Minuten + 15 Minuten Upload-Zeit
- **Erlaubte Hilfsmittel:** alles (open book/open internet-Klausur) außer menschliche Hilfe. Ihre Lösungen müssen erkennbar eigenständig erarbeitet worden sein. Achten Sie auf einen nachvollziehbaren und vollständigen Lösungsweg! Wenn Sie Matlab für einzelne Rechenschritte verwenden, geben Sie den entsprechenden Matlab-Befehl auf Ihrem Lösungsblatt an oder kopieren Sie einen Screenshot des Matlab-Kommandofensters in Ihre Lösung.
- Ein Täuschungsversuch (Abschreiben, Kommunikation mit anderen) führt zum Nichtbestehen der Klausur.
- Zum Bestehen müssen 50 Punkte der möglichen 100 Punkte erreicht werden. Bonuspunkte werden nicht auf die Bestehensgrenze angerechnet.

A 1	A 2	A 3	A 4	A5	Bonuspunkte	Gesamtpunktzahl	bestanden
20	15	30	20	15		100	

Note ....

Aufgabe 1 (20 Punkte) - Folgen & elementare Funktionen

Wir betrachten die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Folgenvorschrift

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2, \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

a) Geben Sie die ersten Folgenglieder F_2, F_3, F_4, F_5 an.

b) Wir untersuchen das Wachstum der Folge durch den Quotienten

$$q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, n \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass q_n durch 2 nach oben beschränkt ist und monoton wächst.

c) Aus Teilaufgabe b) wissen wir, dass (q_n) eine konvergente Folge ist. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ ist genau der Schnittpunkt der Funktion

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x},\ x > 0$$

mit der Winkelhalbierenden $y = x$. Berechnen Sie diesen Schnittpunkt (=Grenzwert q). *Geben Sie bitte den genauen Wert an, keine gerundete Dezimalzahl.*

Aufgabe 2 (15 Punkte) - Differentialrechnung

Es sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

gegeben.

a) Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich der Funktion an.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte von $f(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs. Bestimmen Sie insbesondere, ob es sich bei den Definitionslücken um Polstellen oder hebbare Unstetigkeitsstellen handelt.

Aufgabe 3 (30 Punkte) – Differential- und Integralrechnung

Wir betrachten eine Kugel, die eine Kugelbahn hinunterrollt. Der Startpunkt der Bahn ist der Punkt $(0,0)$, der Endpunkt $(a,-b)$, $a,b>0$. Der Verlauf der Kugelbahn lasse sich durch die Funktion $y(x)$ beschreiben. Die Zeit, die die Kugel benötigt, um die Kugelbahn zu durchlaufen, berechnet sich dann als:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{-y(x)}} dx, \tag{1}$$

wobei $g \approx 9.81[m/s]$ die Fallbeschleunigung bezeichne.

a) Die Kugelbahn besitze konstante Steigung, so dass sich ihr Verlauf durch die Gerade $y(x) = -\frac{b}{a}x$ beschreiben lässt. Rechnen Sie nach, dass die folgende Formel, die in Physikbüchern zu finden ist, korrekt ist, indem Sie die Geradengleichung $y(x)$ in die Formel (1) einsetzen und das Integral berechnen:

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b}}.$$

Geben Sie alle Rechenschritte an.

b) Nun ersetzen wir die gerade Kugelbahn durch eine parabelförmige Kugelbahn, deren Verlauf sich durch $y(x) = cx^2 + dx + e$ beschreiben lässt. Berechnen Sie die Koeffizienten c, d, e, so dass die quadratische Funktion $y(x)$ durch die Punkte $(0,0)$ und $(a,-b)$ geht sowie ihr Minimum an der Stelle $x = a$ annimmt (s. Abbildung 1).

c) Wir setzen $a = b = 1$. In Abbildung 2 sehen Sie den Kurvenverlauf der Integranden $\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{-y(x)}}$ für $y(x) = -x$ bzw. $y(x) = x^2 - 2x$. Erklären Sie kurz anhand der Zeichnung, welche Kugelbahn in kürzerer Zeit durchlaufen wird.

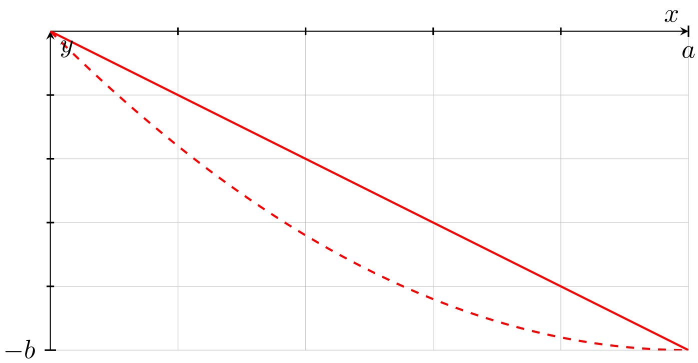

Abbildung 1: Die rote Linie zeigt die lineare Kugelbahn mit Geradengleichung $y(x) = -\frac{b}{a}x$. Die gestrichelte Linie zeigt die stückweise lineare Kugelbahn.

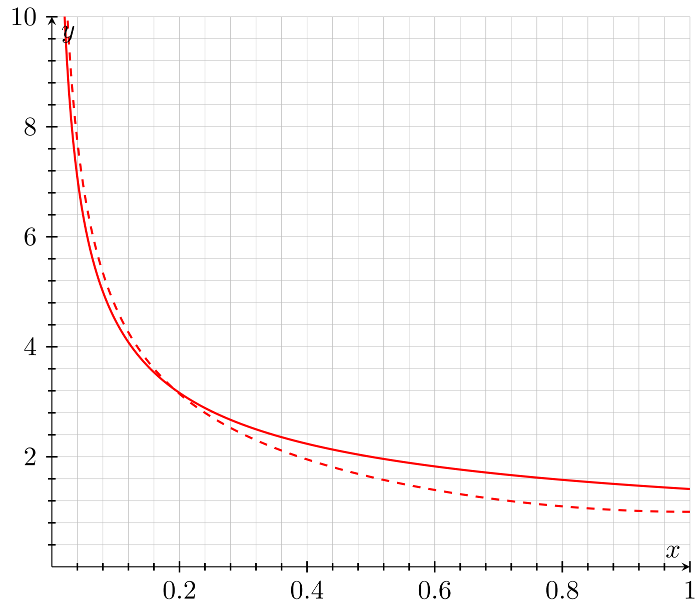

Abbildung 2: Die rote Linie zeigt den Integranden $\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{-y(x)}}$ mit $y(x) = -x$. Die gestrichelte Linie zeigt ihn für $y(x) = x^2 - 2x$.

Hinweis: *Alle Teilaufgaben sind unabhängig voneinander.*

Hinweis: *Sie können in Teilaufgabe a),b) die Parameter* $a, b = 1$ *setzen (-10 Punkte), um die Aufgabe zu vereinfachen. Sie dürfen in Teilaufgabe c) Matlab verwenden, um die Zeit mittels der Formel 1 zu berechnen.*

Aufgabe 4 (20 Punkte) – multivariate Analysis

In Abbildung 3 sehen die die Höhenlinien der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy - x^2y - xy^2.$$

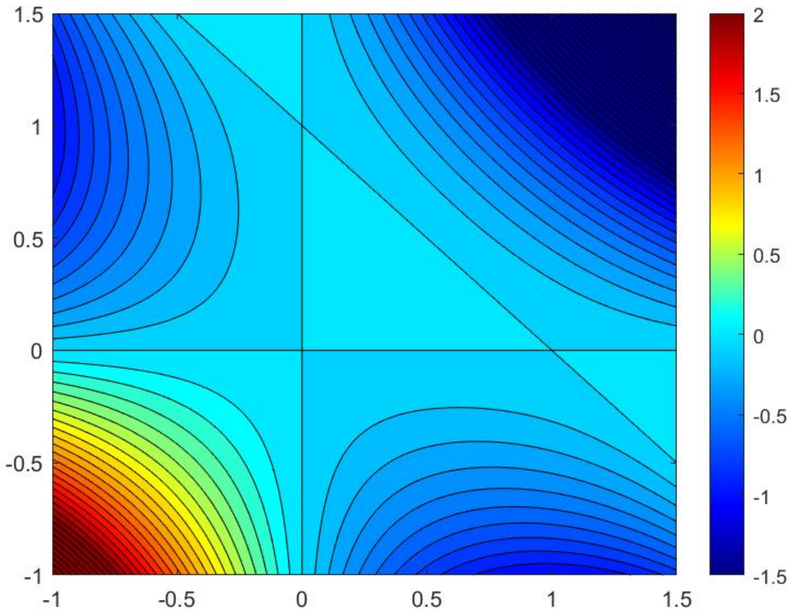

Abbildung 3: Höhenlinien von $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$.

a) Lesen Sie in der Zeichnung ab, wo sich die kritischen Punkte der Funktion f befinden und markieren Sie sie. *Hinweis: Falls Sie die Abbildung nicht ausdrucken können, zeichnen Sie die Abbildung skizzenhaft auf Ihrer Abgabe ab.*

b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und $\nabla f(1, 1)$. Zeichnen Sie $\nabla f(1, 1)$ am Punkt $(1, 1)$ in die Abbildung ein; dabei ist nur die Richtung ausschlaggebend.

c) Bestimmen Sie einen Vektor v tangential an die Höhenlinie im Punkt $(1, 1)$ und berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle v, \nabla f(1, 1)\rangle$. Erklären Sie in einem Satz Ihr Ergebnis.

d) Bestimmen Sie rechnerisch alle kritischen Punkte von $f(x, y)$ (notwendiges Kriterium) und geben Sie mit Hilfe der Zeichnung an, ob es sich jeweils um ein Maximum oder Minimum oder keins von beidem handelt.

Aufgabe 5 (15 Punkte) – diskrete Ableitungen

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ und diskretisieren f mit Gitterweite $h = 1$ im Quadrat $[-1,1] \times [-1,1]$. Damit erhalten wir eine (3×3)-Matrix

$$F = (f_{ij})_{i,j=1,\dots 3} = \begin{pmatrix} f(-1,-1) & f(-1,0) & f(-1,1) \\ f(0,-1) & f(0,0) & f(0,-1) \\ f(1,-1) & f(1,0) & f(1,1) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrix F. *Geben Sie die exakten Werte, keine gerundeten Dezimalzahlen an.*

b) Berechnen Sie die diskreten Gradienten im Punkt $(0,0)$. Wählen Sie einmal die gemittelten Ableitungen und einmal die Vorwärtsableitungen.

c) Überlegen Sie anhand der Matrixeinträge F oder einer Zeichnung von $f(x,y)$ in Matlab, ob die gemittelten Ableitungen oder die Vorwärtsableitungen besser das Verhalten der Funktion im Punkt $(0,0)$ wiedergeben.