HTWG IN

Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

2 Abstrakte Algebra

2.1 Relationen & Äquivalenzklassen

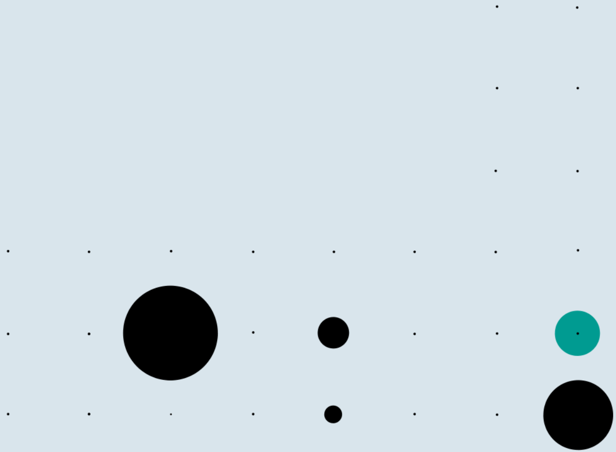
Mathe I

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Motivation

Grundmenge



Motivation

Grundmenge

Äquivalenzklassen

Motivation

Grundmenge

Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen

Motivation

Grundmenge

Motivation

Grundmenge

geordnete Menge

Motivation

Grundmenge

Ordnung

geordnete Menge

Definition: Relation

Eine Teilmene $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt (n-stellige) Relation auf das kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Handelt es sich um eine 2-stellige Relation so sprechen wir von einer "binären Relation".
Schreibweisen für binäre Relationen:

$$(x, y) \in R \quad \text{oder} \quad xRy \quad \text{oder auch} \quad R(x, y) \quad \text{sowie} \quad x \sim y\,.$$

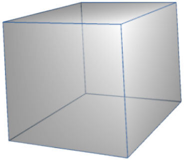
Definition: Relation

Eine Teilmene $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt (n-stellige) Relation auf das kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Handelt es sich um eine 2-stellige Relation so sprechen wir von einer "binären Relation".
Schreibweisen für binäre Relationen:

$$(x, y) \in R \quad \text{oder} \quad xRy \quad \text{oder auch} \quad R(x, y) \quad \text{sowie} \quad x \sim y\,.$$

Beispiel: 3-stellige Relationen (kontinuierlich und diskret)
(1) kontinuierlich: Würfel
$R = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Definition: Relation

Eine Teilmene $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt (n-stellige) Relation auf das kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$.

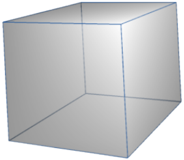
Handelt es sich um eine 2-stellige Relation so sprechen wir von einer "binären Relation".
Schreibweisen für binäre Relationen:

$$(x, y) \in R \quad \text{oder} \quad xRy \quad \text{oder auch} \quad R(x, y) \quad \text{sowie} \quad x \sim y\,.$$

Beispiel: 3-stellige Relationen (kontinuierlich und diskret)

(1) kontinuierlich: Würfel

$R = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



(2) diskret:

M = {Audi, VW, Renault, Opel, ...}
F = {Rot, Grün, Blau, Schwarz, ...}
A = {SD=Schiebedach, KA=Klimaanlage, SL=Servolenkung, ...}

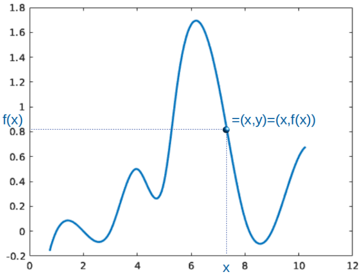
Angebot des Händlers $R \subset M \times F \times A$:

R = {(Audi,Rot,SD) , (VW,Blau,KA) , (Opel,Blau,SD) , (Renault,Schwarz,SL)}

Beispiel: binäre Relationen

(3) kontinuierlich: Funktionsgraphen,
$A = [1, 10]$, $B = [-0.2, 1.8]$, $G_f \subset A \times B$

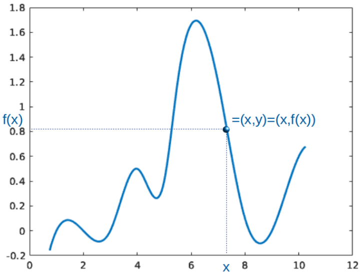
$$xG_f y \; :\Leftrightarrow \; y = f(x)$$



Beispiel: binäre Relationen

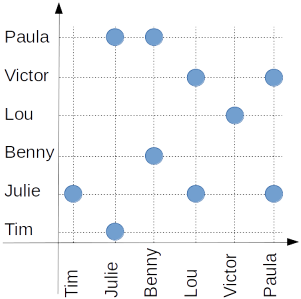
(3) kontinuierlich: Funktionsgraphen,
$A = [1, 10]$, $B = [-0.2, 1.8]$, $G_f \subset A \times B$

$$xG_f y \;:\Leftrightarrow\; y = f(x)$$



(2) diskret: Paare, $P \subset M^2$ und
$M = \{$Tim, Julie, Benny, Lou, Victor, Paula$\}$

$$aPb \;:\Leftrightarrow\; a \text{ mag } b \text{ sehr gerne}$$



Definition: Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ mit folgenden Eigenschaften:

Jedes Element steht zu sich selbst in Relation:

(A1) $\forall x \in A \; : \; xRx$ (reflexiv)

Wenn ein Element zu einem anderen in Relation steht, so steht das andere auch zu dem ersteren in Relation:

(A2) $\forall x, y \in A \; : \; xRy \; \Rightarrow yRx$ (symmetrisch)

Wenn ein Element zu einem anderen in Relation steht und dieses zu einem dritten, so steht auch das erste zum dritten in Relation:

(A3) $\forall x, y, z \in A \; : \; xRy \; \wedge \; yRz \; \Rightarrow xRz$ (transitiv)

Beispiel: Relation über Bügelperlchen

Es sei M eine Menge mit Bügelperlchen unterschiedlicher Farbe und die Relation $R \subset M^2$ gegeben durch

$$R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\} .$$

Beispiel: Relation über Bügelperlchen

Es sei M eine Menge mit Bügelperlchen unterschiedlicher Farbe und die Relation $R \subset M^2$ gegeben durch

$$R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\}\,.$$

Die Bezeichnung des Merkmals formulieren wir so:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

Beispiel: Relation über Bügelperlchen

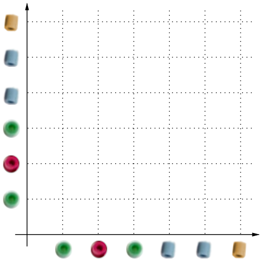
Es sei M eine Menge mit Bügelperlchen unterschiedlicher Farbe und die Relation $R \subset M^2$ gegeben durch

$$R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\}\,.$$

Die Bezeichnung des Merkmals formulieren wir so:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

graphische Darstellung für $M = \{$  $\}$:



Beispiel: Relation über Bügelperlchen

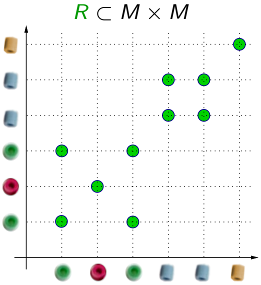
Es sei M eine Menge mit Bügelperlchen unterschiedlicher Farbe und die Relation $R \subset M^2$ gegeben durch

$$R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\}\,.$$

Die Bezeichnung des Merkmals formulieren wir so:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

graphische Darstellung für $M = \{$  $\}$:



Beispiel: Farben von Bügelperlchen

Memo:

$$aRb \ :\Leftrightarrow \ \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

(A1) $\forall a \in M\colon aRa$

Beispiel: Farben von Bügelperlchen

Memo:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

(A1) $\forall a \in M$: $aRa \Leftrightarrow a$ hat die gleiche Farbe wie a ✓

Beispiel: Farben von Bügelperlchen

Memo:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow a$ hat die gleiche Farbe wie a ✓

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa$

Beispiel: Farben von Bügelperlchen

Memo:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow a$ hat die gleiche Farbe wie a ✓

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$
Wenn a die gleiche Farbe wie b hat (also aRb) dann hat auch b die gleiche Farbe wie a (also bRa). ✓

H T W I G N

Beispiel: Farben von Bügelperlchen

Memo:

$$aRb \ :\Leftrightarrow \ \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow a$ hat die gleiche Farbe wie a ✓

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$
Wenn a die gleiche Farbe wie b hat (also aRb) dann hat auch b die gleiche Farbe wie a (also bRa). ✓

(A3) $\forall a, b, c \in M\colon aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Beispiel: Farben von Bügelperlchen

Memo:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; \text{“}a \text{ hat die gleiche Farbe wie } b\text{”}$$

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow a$ hat die gleiche Farbe wie a ✓

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$
Wenn a die gleiche Farbe wie b hat (also aRb) dann hat auch b die gleiche Farbe wie a (also bRa). ✓

(A3) $\forall a, b, c \in M\colon aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \Leftrightarrow$
Wenn a die gleiche Farbe wie b hat (also aRb) und b die gleiche Farbe wie c hat (also bRc), so hat a auch die gleiche Farbe wie c (also aRc). ✓

Die Relation (binäre) R ist also eine Äquivalenzrelation.

Beispiel: Rechenbeispiel

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x - y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Beispiel: Rechenbeispiel

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

xRy

Beispiel: Rechenbeispiel

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M \colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0 \colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}$$

Beispiel: Rechenbeispiel

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z}$$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z}$$

Beispiel: Rechenbeispiel

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z}.$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \Leftrightarrow \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow yRx$$

✓

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow yRx$$

✓

(A3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_0\colon xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow yRx$$

✓

(A3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_0\colon xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \Leftrightarrow$

$$\frac{x-z}{3} \overset{?}{\in} \mathbb{Z}$$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow yRx$$

✓

(A3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_0\colon xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \Leftrightarrow$

$$\frac{x-z}{3} \overset{?}{\in} \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-y+y-z}{3}$$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

(A1) $\forall x \in M\colon xRx \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x}{3} \in \mathbb{Z} .$$

✓

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0\colon xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow$

$$xRy \Leftrightarrow \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow yRx$$

✓

(A3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_0\colon xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \Leftrightarrow$

$$\frac{x-z}{3} \overset{?}{\in} \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-y+y-z}{3} \Leftrightarrow \frac{x-y}{3} + \frac{y-z}{3} \in \mathbb{Z}$$

✓

Beispiel: Rechenbeispiel

Memo:

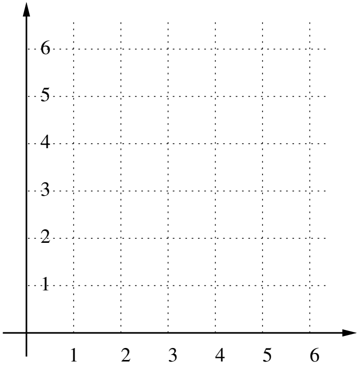
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x - y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:

Memo:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:

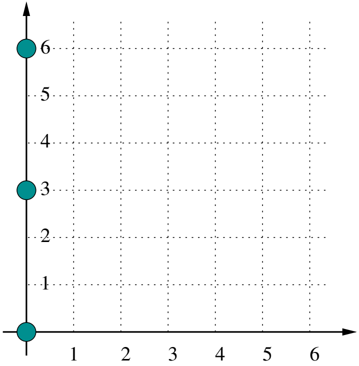


Beispiel: Rechenbeispiel

Memo:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:

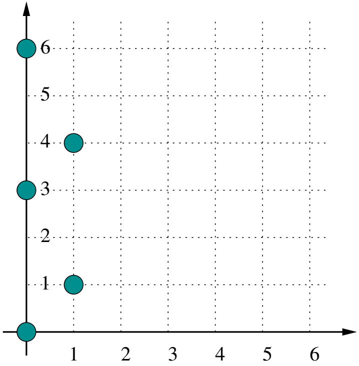


“0Ry”

Memo:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x - y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:

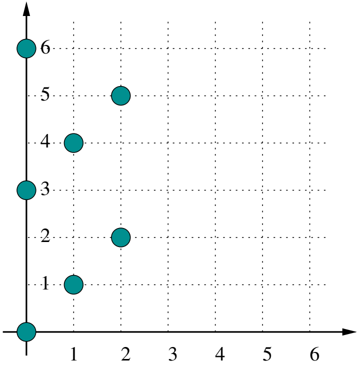


"und 1Ry"

Memo:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:

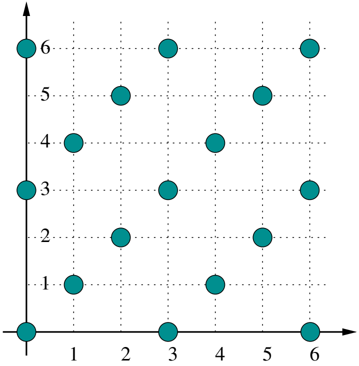


"und 2Ry"

Memo:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:

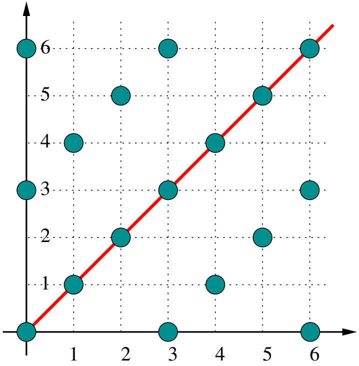


"xRy"

Memo:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:



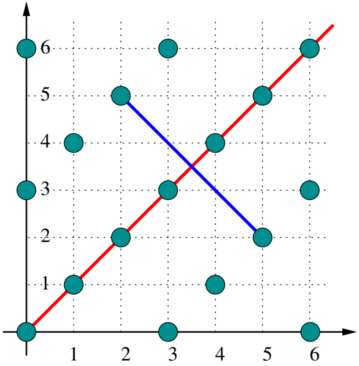
“xRy”

Reflexivität

Memo:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:



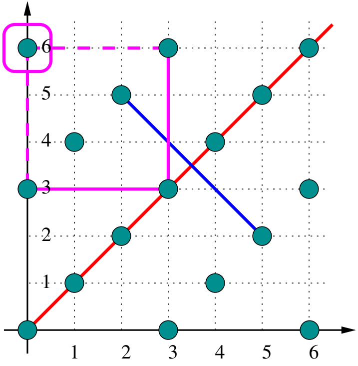
"xRy"

Reflexivität
Symmetrie

Memo:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

graphische Darstellung:



"xRy"

Reflexivität
Symmetrie
Transitivität

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \ :\Leftrightarrow\ g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M$: aRa

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb\ :\Leftrightarrow\ g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M$: $aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

✓

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\; E_2\,,\; E_3\,,\; E_4\,,\; E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M$: $aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

✓

(A2) $\forall a, b \in M$: $aRb \Rightarrow bRa$

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\; E_2\,,\; E_3\,,\; E_4\,,\; E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M$: aRa $\Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

✓

(A2) $\forall a, b \in M$: $aRb \Rightarrow bRa$ $\Leftrightarrow$

$$aRb$$

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \ :\Leftrightarrow\ g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

✓

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$

$$aRb \ \Leftrightarrow\ g(a) \leq g(b)$$

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \le g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \le g(a)$$

✓

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$

$$aRb \;\Leftrightarrow\; g(a) \le g(b) \not\Rightarrow g(b) \le g(a)$$

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

$\checkmark$

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$

$$aRb \;\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b) \not\Rightarrow g(b) \leq g(a) \;\Rightarrow \cancel{bRa}$$

$\cancel{\checkmark}$

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

$\checkmark$

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$

$$aRb \;\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b) \not\Rightarrow g(b) \leq g(a) \;\Rightarrow \cancel{bRa}$$

$\cancel{\checkmark}$

(A3) $\forall a, b, c \in M\colon aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\; E_2\,,\; E_3\,,\; E_4\,,\; E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

$\checkmark$

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$

$$aRb \;\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b) \not\Rightarrow g(b) \leq g(a) \;\Rightarrow \cancel{bRa}$$

$\cancel{\checkmark}$

(A3) $\forall a, b, c \in M\colon aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(b) \quad \wedge \quad g(b) \leq g(c)$$

Auf der Grundmenge, bestehend aus fünf Erdmännchen

$$M = \{E_1\,,\ E_2\,,\ E_3\,,\ E_4\,,\ E_5\}$$

sei fogende Relation definiert:

$$aRb\ :\Leftrightarrow\ g(a) \leq g(b)\,,$$

wobei $g(a)$ die Größe von a beschreibt.

(A1) $\forall a \in M\colon aRa \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(a)$$

$\checkmark$

(A2) $\forall a, b \in M\colon aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow$

$$aRb\ \Leftrightarrow\ g(a) \leq g(b) \not\Rightarrow g(b) \leq g(a)\ \Rightarrow \cancel{bRa}$$

$\cancel{\checkmark}$

(A3) $\forall a, b, c \in M\colon aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \Leftrightarrow$

$$g(a) \leq g(b) \quad \wedge \quad g(b) \leq g(c)\ \Rightarrow\ g(a) \leq g(c)$$

$\checkmark$

Die Relation, die wir auf die Menge der Erdmännchen definiert haben ist also keine Äquivalenzrelation.

Die Relation, die wir auf die Menge der Erdmännchen definiert haben ist also keine Äquivalenzrelation.

Sie hat aber eine andere Besonderheit:

Definition: Ordnung

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ mit den Eigenschaften (A1), (A3) und
(A4) $\forall x, y \in A \ : \ xRy \wedge yRx \quad \Rightarrow \quad x = y$ (antisymmetrisch)
heißt (Halb-) Ordnung.

Beispiel: Größe von Erdmännchen

Memo: Auf der Grundmenge M, bestehend aus fünf Erdmännchen und der Relation

$$aRb \; :\Leftrightarrow \; g(a) \leq g(b)$$

gelten $(A1)$ und $(A3)$, nicht aber $(A2)$.

Memo: Auf der Grundmenge M, bestehend aus fünf Erdmännchen und der Relation

$$aRb \; :\Leftrightarrow \; g(a) \leq g(b)$$

gelten $(A1)$ und $(A3)$, nicht aber $(A2)$.

Dafür aber:

(A4) $\forall\, a, b \in A \;:\; aRb \wedge bRa \quad \Rightarrow \quad a = b$

Memo: Auf der Grundmenge M, bestehend aus fünf Erdmännchen und der Relation

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)$$

gelten $(A1)$ und $(A3)$, nicht aber $(A2)$.

Dafür aber:

(A4) $\forall\, a, b \in A \;:\; aRb \wedge bRa \quad \Rightarrow \quad a = b \Leftrightarrow$

$$aRb \;\wedge\; bRa$$

Memo: Auf der Grundmenge M, bestehend aus fünf Erdmännchen und der Relation

$$aRb \; :\Leftrightarrow \; g(a) \le g(b)$$

gelten $(A1)$ und $(A3)$, nicht aber $(A2)$.

Dafür aber:

(A4) $\forall\, a, b \in A \; : \; aRb \wedge bRa \quad \Rightarrow \quad a = b \Leftrightarrow$

$$aRb \;\wedge\; bRa \;\Leftrightarrow\; (g(a) \le g(b)) \;\wedge\; (g(b) \le g(a))$$

Memo: Auf der Grundmenge M, bestehend aus fünf Erdmännchen und der Relation

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; g(a) \leq g(b)$$

gelten $(A1)$ und $(A3)$, nicht aber $(A2)$.

Dafür aber:

(A4) $\forall\, a, b \in A \;:\; aRb \wedge bRa \quad \Rightarrow \quad a = b \Leftrightarrow$

$$aRb \;\wedge\; bRa \;\Leftrightarrow\; (g(a) \leq g(b)) \;\wedge\; (g(b) \leq g(a)) \;\Rightarrow g(b) = g(a)$$

✓

Die Relation R ist damit eine Ordnung.

Saalaufgabe

Zur Grundmenge $A = \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\}$ seien folgende Relationen gegeben:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\\
R_2 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\\
R_4 &= \{(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}
\end{aligned}
$$

Zur Grundmenge $A = \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\}$ seien folgende Relationen gegeben:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\\
R_2 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\\
R_4 &= \{(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}
\end{aligned}
$$

- Welcher der Relationen ist reflexiv?
- Welcher der Relationen ist irreflexiv?
- Welcher der Relationen ist symmetrisch?
- Welcher der Relationen ist asymmetrisch?
- Welcher der Relationen ist antisymmetrisch?
- Welcher der Relationen ist transitiv?

Dabei bedeutet:

irreflexiv:

$$\forall a \in A \ :\ \neg\, aRa$$

asymmetrisch:

$$\forall a, b \in A \ :\ \neg\,(aRb \ \Rightarrow\ bRa)$$

Tipp: Machen Sie sich eine Skizze.

Zur Grundmenge $A = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ seien folgende Relationen gegeben:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\\
R_2 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\\
R_4 &= \{(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}
\end{aligned}
$$

- Welcher der Relationen ist reflexiv?
- Welcher der Relationen ist irreflexiv?
- Welcher der Relationen ist symmetrisch? $[R_1]$
- Welcher der Relationen ist asymmetrisch?
- Welcher der Relationen ist antisymmetrisch?
- Welcher der Relationen ist transitiv? $[R_1]$

Dabei bedeutet:

irreflexiv:

$$\forall a \in A \ :\ \neg\, aRa$$

asymmetrisch:

$$\forall a, b \in A \ :\ \neg\,(aRb \ \Rightarrow\ bRa)$$

Tipp: Machen Sie sich eine Skizze.

Zur Grundmenge $A = \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\}$ seien folgende Relationen gegeben:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\\
R_2 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\\
R_4 &= \{(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}
\end{aligned}$$

- Welcher der Relationen ist reflexiv? [R_2]
- Welcher der Relationen ist irreflexiv?
- Welcher der Relationen ist symmetrisch? [R_1]
- Welcher der Relationen ist asymmetrisch?
- Welcher der Relationen ist antisymmetrisch? [R_2]
- Welcher der Relationen ist transitiv? [R_1]

Dabei bedeutet:
irreflexiv:

$$\forall a \in A \ :\ \neg\, aRa$$

asymmetrisch:

$$\forall a, b \in A \ :\ \neg\,(aRb \ \Rightarrow\ bRa)$$

Tipp: Machen Sie sich eine Skizze.

Zur Grundmenge $A = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ seien folgende Relationen gegeben:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\\
R_2 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\\
R_4 &= \{(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}
\end{aligned}
$$

- Welcher der Relationen ist reflexiv? [R_2]
- Welcher der Relationen ist irreflexiv? [R_3]
- Welcher der Relationen ist symmetrisch? [R_1]
- Welcher der Relationen ist asymmetrisch? [R_3]
- Welcher der Relationen ist antisymmetrisch? [R_2] , [R_3]
- Welcher der Relationen ist transitiv? [R_1], [R_3]

Dabei bedeutet:

<u>irreflexiv:</u>

$$\forall a \in A \ :\ \neg\, aRa$$

<u>asymmetrisch:</u>

$$\forall a, b \in A \ :\ \neg\,(aRb \ \Rightarrow\ bRa)$$

Tipp: Machen Sie sich eine Skizze.

Zur Grundmenge $A = \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\}$ seien folgende Relationen gegeben:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\\
R_2 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\\
R_4 &= \{(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}
\end{aligned}$$

- Welcher der Relationen ist reflexiv? [R_2]
- Welcher der Relationen ist irreflexiv? [R_3]
- Welcher der Relationen ist symmetrisch? [R_1], [R_4]
- Welcher der Relationen ist asymmetrisch? [R_3]
- Welcher der Relationen ist antisymmetrisch? [R_2] , [R_3]
- Welcher der Relationen ist transitiv? [R_1], [R_3]

Dabei bedeutet:
<u>irreflexiv:</u>

$$\forall a \in A \;:\; \neg\, aRa$$

<u>asymmetrisch:</u>

$$\forall a, b \in A \;:\; \neg\,(aRb \;\Rightarrow\; bRa)$$

Tipp: Machen Sie sich eine Skizze.

Definition: Äquivalenzklasse

Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $a \in A$, dann heißt die Menge

$$[a]_R := \{b \in A \mid aRb\}$$

Äquivalenzklasse (ÄK) von R und a heißt Repräsentant der ÄK $[a]_R$.

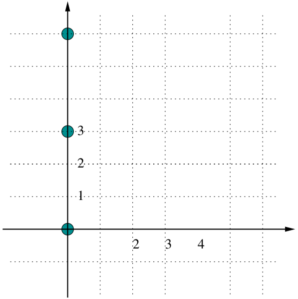
Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x - y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 0Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

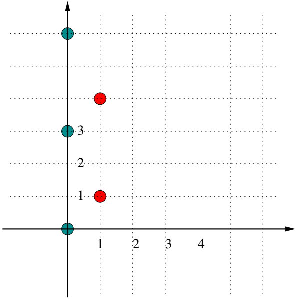


Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 0Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 1Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{1-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$



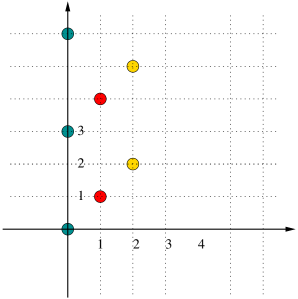
Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 0Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 1Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{1-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 2Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{2-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$



Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

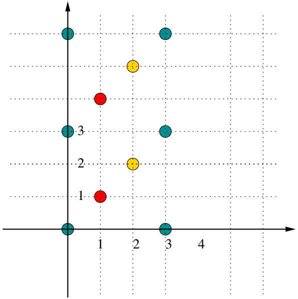
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 0Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 1Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{1-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 2Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{2-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

$$[3]_R = [0]_R \ni 3$$



Es sei $\mathbb{N}_0$ die Grundmenge und eine (binäre) Relation $R \subset \mathbb{N}_0^2$ gegeben mit

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 0Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

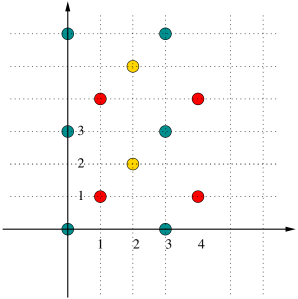
$$[1]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 1Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{1-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2]_R = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid 2Ry\} = \left\{ y \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{2-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

$$[3]_R = [0]_R \ni 3$$

$$[4]_R = [1]_R \ni 4$$

etc.



Eigenschaften von Äquivalenzklassen

Es sei $R \subseteq A^2$ eine ÄR und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:

(a) $\forall a \in A \ : \ [a]_R \neq \emptyset$

(b) $\forall b \in [a]_R \ : \ [b]_R = [a]_R$

(c) $\neg(bRa) \ : \ [b]_R \cap [a]_R = \emptyset$

(d) $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$

Eigenschaften von Äquivalenzklassen

Es sei $R \subseteq A^2$ eine ÄR und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:

(a) $\forall a \in A \ : \ [a]_R \neq \emptyset$ (Reflexivität)

(b) $\forall b \in [a]_R \ : \ [b]_R = [a]_R$

(c) $\neg(bRa) \ : \ [b]_R \cap [a]_R = \emptyset$

(d) $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$

Eigenschaften von Äquivalenzklassen

Es sei $R \subseteq A^2$ eine ÄR und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:

(a) $\forall a \in A \;:\; [a]_R \neq \emptyset$ (Reflexivität)

(b) $\forall b \in [a]_R \;:\; [b]_R = [a]_R$ (Symmetrie)

(c) $\neg(bRa) \;:\; [b]_R \cap [a]_R = \emptyset$

(d) $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$

Eigenschaften von Äquivalenzklassen

Es sei $R \subseteq A^2$ eine ÄR und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:

(a) $\forall a \in A \ : \ [a]_R \neq \emptyset$ (Reflexivität)

(b) $\forall b \in [a]_R \ : \ [b]_R = [a]_R$ (Symmetrie)

(c) $\neg(bRa) \ : \ [b]_R \cap [a]_R = \emptyset$ andernfalls Widerspruch zu (b)

(d) $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$

Eigenschaften von Äquivalenzklassen

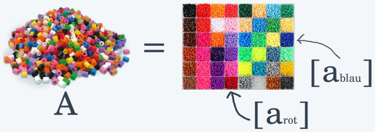
Es sei $R \subseteq A^2$ eine ÄR und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:

(a) $\forall a \in A \ : \ [a]_R \neq \emptyset$ (Reflexivität)

(b) $\forall b \in [a]_R \ : \ [b]_R = [a]_R$ (Symmetrie)

(c) $\neg(bRa) \ : \ [b]_R \cap [a]_R = \emptyset$ andernfalls Widerspruch zu (b)

(d) $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$



Definition: Gaußklammer

$$\lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

Beispiel:

$$\lfloor 3.4 \rfloor = 3$$

Definition: Gaußklammer

$$\lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

Beispiel:

$$\lfloor 3.4 \rfloor = 3 \qquad \left\lfloor \frac{34}{8} \right\rfloor = 4$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Definition: Gaußklammer

$$\lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

Beispiel:

$$\lfloor 3.4 \rfloor = 3 \qquad \left\lfloor \frac{34}{8} \right\rfloor = 4 \qquad \lfloor -2.5 \rfloor = -3$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Definition: Modulo

$$r = a \mod m :\Leftrightarrow \qquad r = a - m \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor$$

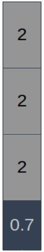
Wir füllen a mit m soweit möglich und r beschreibt dann den Rest, der noch übrig bleibt:

Definition: Modulo

$$r = a \mod m :\Leftrightarrow \quad r = a - m\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor$$

Wir füllen a mit m soweit möglich und r beschreibt dann den Rest, der noch übrig bleibt:

Beispiel: $6.7 \mod 2$



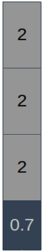
$$a = 6.7$$
$$m = 2$$
$$r = 0.7$$

Definition: Modulo

$$r = a \mod m :\Leftrightarrow \qquad r = a - m\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor$$

Wir füllen a mit m soweit möglich und r beschreibt dann den Rest, der noch übrig bleibt:

Beispiel: $6.7 \mod 2$



$$a = 6.7$$
$$m = 2$$
$$r = 0.7$$

$$\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6.7}{2} \right\rfloor = \lfloor 3.35 \rfloor = 3$$

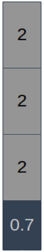
4. Beispiel: Datumsberechnung

Definition: Modulo

$$r = a \mod m \;:\Leftrightarrow\quad r = a - m\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor$$

Wir füllen a mit m soweit möglich und r beschreibt dann den Rest, der noch übrig bleibt:

Beispiel: $6.7 \mod 2$



$$a = 6.7$$
$$m = 2$$
$$r = 0.7$$

$$\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6.7}{2} \right\rfloor = \lfloor 3.35 \rfloor = 3$$

$$m\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor = 2\left\lfloor \frac{6.7}{2} \right\rfloor = 6$$

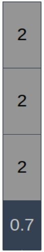
4. Beispiel: Datumsberechnung

Definition: Modulo

$$r = a \mod m \;:\Leftrightarrow\; r = a - m\left\lfloor\frac{a}{m}\right\rfloor$$

Wir füllen a mit m soweit möglich und r beschreibt dann den Rest, der noch übrig bleibt:

Beispiel: $6.7 \mod 2$



$$a = 6.7$$
$$m = 2$$
$$r = 0.7$$

$$\left\lfloor\frac{a}{m}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{6.7}{2}\right\rfloor = \lfloor 3.35\rfloor = 3$$

$$m\left\lfloor\frac{a}{m}\right\rfloor = 2\left\lfloor\frac{6.7}{2}\right\rfloor = 6$$

$$r = a - m\left\lfloor\frac{a}{m}\right\rfloor = 6.7 - 2\left\lfloor\frac{6.7}{2}\right\rfloor = 0.7$$

Die Homomorphieregeln

sind Rechenregeln für Modulo, die besagen, dass man auch Zwischenergebnisse modulo rechnen darf, ohne, dass sich das Ergebnis ändert. Es gilt:

$$(a \pm b) \mod m = ((a \mod m) \pm (b \mod m)) \mod m$$
$$(a \cdot b) \mod m = ((a \mod m) \cdot (b \mod m)) \mod m$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Die Homomorphieregeln

sind Rechenregeln für Modulo, die besagen, dass man auch Zwischenergebnisse modulo rechnen darf, ohne, dass sich das Ergebnis ändert. Es gilt:

$$(a \pm b) \mod m = ((a \mod m) \pm (b \mod m)) \mod m$$
$$(a \cdot b) \mod m = ((a \mod m) \cdot (b \mod m)) \mod m$$

Beispiel:

einerseits: $$(9 - 17) \mod 5 = -8 \mod 5 = -8 - 5\left\lfloor \frac{-8}{5} \right\rfloor$$
$$= -8 - 5\,(-2) = -8 + 10 = 2$$

Die Homomorphieregeln

sind Rechenregeln für Modulo, die besagen, dass man auch Zwischenergebnisse modulo rechnen darf, ohne, dass sich das Ergebnis ändert. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(a \pm b) \mod m &= ((a \mod m) \pm (b \mod m)) \mod m \\
(a \cdot b) \mod m &= ((a \mod m) \cdot (b \mod m)) \mod m
\end{aligned}
$$

<u>Beispiel:</u>

einerseits:
$$
\begin{aligned}
(9 - 17) \mod 5 = -8 \mod 5 &= -8 - 5 \left\lfloor \frac{-8}{5} \right\rfloor \\
&= -8 - 5\,(-2) = -8 + 10 = 2
\end{aligned}
$$

andererseits:
$$
\begin{aligned}
(9 - 17) \mod 5 &= (9 \mod 5 - 17 \mod 5) \mod 5 \\
&= (4 - 2) \mod 5 = 2
\end{aligned}
$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Die Homomorphieregeln

sind Rechenregeln für Modulo, die besagen, dass man auch Zwischenergebnisse modulo rechnen darf, ohne, dass sich das Ergebnis ändert. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(a \pm b) \mod m &= ((a \mod m) \pm (b \mod m)) \mod m \\
(a \cdot b) \mod m &= ((a \mod m) \cdot (b \mod m)) \mod m
\end{aligned}
$$

<u>Beispiel:</u>

$$
\begin{aligned}
\text{einerseits:} \quad & (9-17) \mod 5 = -8 \mod 5 = -8 - 5\left\lfloor \frac{-8}{5} \right\rfloor \\
& \qquad = -8 - 5\,(-2) = -8 + 10 = 2 \\
\text{andererseits:} \quad & (9-17) \mod 5 = (9 \mod 5 - 17 \mod 5) \mod 5 \\
& \qquad = (4-2) \mod 5 = 2 \\
\text{oder auch:} \quad & (9-17) \mod 5 = (9 \mod 5 + (-17 \mod 5)) \mod 5 \\
& \qquad = (4+3) \mod 5 = 7 \mod 5 = 2
\end{aligned}
$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Definition: Kongruenz

$$a \equiv_m b :\Leftrightarrow \quad a \mod m = b \mod m$$

Man nennt zwei ganze Zahlen a und b kongruent modulo m, wenn sie bei der Division durch m den gleichen Rest haben.

Definition: Kongruenz

$$a \equiv_m b :\Leftrightarrow \quad a \mod m = b \mod m$$

Man nennt zwei ganze Zahlen a und b kongruent modulo m, wenn sie bei der Division durch m den gleichen Rest haben.

Beispiel:

$$13 \equiv_3 10\,,\ 8 \equiv_4 12\,,\ -17 \equiv_5 8\,,\ \cancel{18 \equiv_7 14}$$

Definition: Kongruenz

$$a \equiv_m b \;:\Leftrightarrow\; a \mod m = b \mod m$$

Man nennt zwei ganze Zahlen a und b kongruent modulo m, wenn sie bei der Division durch m den gleichen Rest haben.

Beispiel:

$$13 \equiv_3 10\,,\; 8 \equiv_4 12\,,\; -17 \equiv_5 8\,,\; \cancel{18 \equiv_7 14}$$

Saalaufgabe: Welche Antworten sind richtig?

☐	$13 \equiv_4 18$	☐	$12 \equiv_2 10$	☐	$113 \equiv_5 58$
☐	$13 \equiv_{-4} 29$	☐	$-13 \equiv_{-4} 30$	☐	$-13 \equiv_4 15$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Definition: Kongruenz

$$a \equiv_m b :\Leftrightarrow \quad a \mod m = b \mod m$$

Man nennt zwei ganze Zahlen a und b kongruent modulo m, wenn sie bei der Division durch m den gleichen Rest haben.

Beispiel:

$$13 \equiv_3 10\,,\ 8 \equiv_4 12\,,\ -17 \equiv_5 8\,,\ \cancel{18 \equiv_7 14}$$

Saalaufgabe: Welche Antworten sind richtig?

☐	$13 \equiv_4 18$	☒	$12 \equiv_2 10$	☒	$113 \equiv_5 58$
☒	$13 \equiv_{-4} 29$	☐	$-13 \equiv_{-4} 30$	☒	$-13 \equiv_4 15$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Rechenregeln für Kongruenzen

In einer Kongruenz darf man eine Zahl durch eine kongruente Zahl ersetzen. Mit

$$a \equiv_m b \quad \text{und} \quad c \equiv_m d$$

gilt

$$a \pm c \equiv_m b \pm d$$
$$a \cdot c \equiv_m b \cdot d$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Rechenregeln für Kongruenzen

In einer Kongruenz darf man eine Zahl durch eine kongruente Zahl ersetzen. Mit

$$a \equiv_m b \quad \text{und} \quad c \equiv_m d$$

gilt

$$a \pm c \equiv_m b \pm d$$
$$a \cdot c \equiv_m b \cdot d$$

Beispiel:

$$234 + 666 \equiv_{10} 4 + 6 = 10 \equiv_{10} 0$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Satz

Auf der Grundmenge $\mathbb{Z}$ ist die Relation

$$aMb :\Leftrightarrow \; a \equiv_m b$$

eine Äquivalenzrelation und die zughörigen Äquivalenzklassen

$$[a]_{\equiv_m} = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv_m b\}$$

bestehen jeweils aus Zahlen, die bezüglich $\equiv_m$ den gleichen Rest haben.

4. Beispiel: Datumsberechnung

Satz

Auf der Grundmenge $\mathbb{Z}$ ist die Relation

$$aMb \;:\Leftrightarrow\; a \equiv_m b$$

eine Äquivalenzrelation und die zughörigen Äquivalenzklassen

$$[a]_{\equiv_m} = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv_m b\}$$

bestehen jeweils aus Zahlen, die bezüglich $\equiv_m$ den gleichen Rest haben.

Hausaufgabe: Versuchen Sie das mal durchzurechnen.

- Definieren Sie die Grundmenge und die Relation.
- Prüfen Sie auf Äquivalenzrelation.
- Definieren Sie die Äquivalenzklassen.
- Skizzieren Sie die Situation.

Es lassen sich bestimmte aufwendige Rechnungen durch sehr einfache Rechnungen ersetzen:

4. Beispiel: Datumsberechnung

Es lassen sich bestimmte aufwendige Rechnungen durch sehr einfache Rechnungen ersetzen:

$$10 \equiv_7 3$$

Beispiel

Es lassen sich bestimmte aufwendige Rechnungen durch sehr einfache Rechnungen ersetzen:

$$
\begin{aligned}
& & 10 &\equiv_7 3 \\
\Rightarrow & & 100 = 10 \cdot 10 &\equiv_7 3 \cdot 3 = 9 \equiv_7 2
\end{aligned}
$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel

Es lassen sich bestimmte aufwendige Rechnungen durch sehr einfache Rechnungen ersetzen:

$$
\begin{aligned}
 & 10 \equiv_7 3 \\
\Rightarrow \quad & 100 = 10 \cdot 10 \equiv_7 3 \cdot 3 = 9 \equiv_7 2 \\
\Rightarrow \quad & 1000 = 10^2 \cdot 10 \equiv_7 2 \cdot 3 = 6 \equiv_7 6
\end{aligned}
$$

Es lassen sich bestimmte aufwendige Rechnungen durch sehr einfache Rechnungen ersetzen:

$$
\begin{aligned}
& & 10 &\equiv_7 3 \\
\Rightarrow & & 100 = 10 \cdot 10 &\equiv_7 3 \cdot 3 = 9 \equiv_7 2 \\
\Rightarrow & & 1000 = 10^2 \cdot 10 &\equiv_7 2 \cdot 3 = 6 \equiv_7 6 \\
\Rightarrow & & 10^4 = 10^2 \cdot 10^2 &\equiv_7 2 \cdot 2 = 4 \equiv_7 4
\end{aligned}
$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

Da $45 = 9 \cdot 5$ zerlegen Sie den Beweis in zwei Schritte. Sie zeigen zunächst, dass z durch 9 und dann - hier wird's interessant - dass z auch durch 5 teilbar ist:

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

Da $45 = 9 \cdot 5$ zerlegen Sie den Beweis in zwei Schritte. Sie zeigen zunächst, dass z durch 9 und dann - hier wird's interessant - dass z auch durch 5 teilbar ist:

Teilbarkeit durch 9:

$$\frac{21^{39} + 39^{21}}{9} = \frac{3^{39} \cdot 7^{39} + 3^{21} \cdot 13^{21}}{3^2} = 3^{37} \cdot 7^{39} + 3^{19} \cdot 13^{21} \in \mathbb{Z} \qquad \checkmark$$

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

Memo: Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

Memo: Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 5:

4. Beispiel: Datumsberechnung

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

> Memo: Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 5:

Erster Summand:

$$21 \equiv_5 1 \quad \Rightarrow \quad 21^{39} = \underbrace{21 \cdots 21}_{\text{39 mal}} \equiv_5 \underbrace{1 \cdots 1}_{\text{39 mal}} = 1$$

Beispiel: Mathematik-Olympiade (8. Klasse)

Memo: Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 5:

Erster Summand:

$$21 \equiv_5 1 \quad \Rightarrow \quad 21^{39} = \underbrace{21 \cdots 21}_{\text{39 mal}} \equiv_5 \underbrace{1 \cdots 1}_{\text{39 mal}} = 1$$

Zweiter Summand:

$$39^2 = 39 \cdot 39 \equiv_5 4 \cdot 4 = 16 \equiv_5 1 \quad \Rightarrow \quad 39^{21} = 39^{2 \cdot 10} \cdot 39 \equiv_5 \underbrace{1 \cdots 1}_{\text{10 mal}} \cdot 4 = 4$$

Memo: Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 5:

Erster Summand:

$$21 \equiv_5 1 \quad \Rightarrow \quad 21^{39} = \underbrace{21 \cdots 21}_{\text{39 mal}} \equiv_5 \underbrace{1 \cdots 1}_{\text{39 mal}} = 1$$

Zweiter Summand:

$$39^2 = 39 \cdot 39 \equiv_5 4 \cdot 4 = 16 \equiv_5 1 \quad \Rightarrow \quad 39^{21} = 39^{2 \cdot 10} \cdot 39 \equiv_5 \underbrace{1 \cdots 1}_{\text{10 mal}} \cdot 4 = 4$$

Zusammen:

$$21^{39} + 39^{21} \equiv_5 1 + 4 = 5 \equiv_5 0$$

✓

Beispiel: Einfache Datumsberechnung

Es ist der 16. November, 16 Uhr. Welches Datum und welche Uhrzeit hat man nach 1000 Stunden?

Beispiel: Einfache Datumsberechnung

Es ist der 16. November, 16 Uhr. Welches Datum und welche Uhrzeit hat man nach 1000 Stunden?

Wir rechnen mit Modulo 24, da ein Tag aus 24 Stunden besteht.

Beispiel: Einfache Datumsberechnung

Es ist der 16. November, 16 Uhr. Welches Datum und welche Uhrzeit hat man nach 1000 Stunden?

Wir rechnen mit Modulo 24, da ein Tag aus 24 Stunden besteht.

$$1000 + 16 = 4 \cdot 240 + 2 \cdot 24 + 8 \equiv_{24} 8\,.$$

Die neue Uhrzeit ist also 8 Uhr.

Es ist der 16. November, 16 Uhr. Welches Datum und welche Uhrzeit hat man nach 1000 Stunden?

Wir rechnen mit Modulo 24, da ein Tag aus 24 Stunden besteht.

$$1000 + 16 = 4 \cdot 240 + 2 \cdot 24 + 8 \equiv_{24} 8\,.$$

Die neue Uhrzeit ist also 8 Uhr.
Es sind dabei

$$k = \frac{1016 - 8}{24} = 42$$

Tage vergangen. Das neue Datum ist also

$$16 + 42 \equiv_{31} 27\,,$$

d.h. der 27. Dezember.

H