Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Blatt 10: Homomorphismen und Matrixdarstellungen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Aufgabe 1:

Gegeben sind zwei Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ein beliebiger Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

werde abgebildet auf den Vektor

$$v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = v_1 a_1 + v_2 a_2 \, .$$

(a) Wie lautet der Bildvektor v' des Vektors

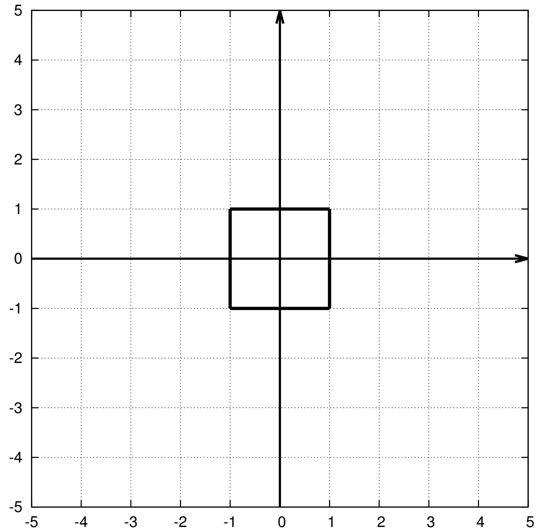
$$v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

(b) Geben Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f \; : \; \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto v' \end{aligned}$$

in Matrix-Vektor-Form an.

(c) Berechnen und zeichnen Sie (im Koordinatensystem rechts) das Bild von $[-1,1]^2$ unter f.



Selbsteinschätzung:

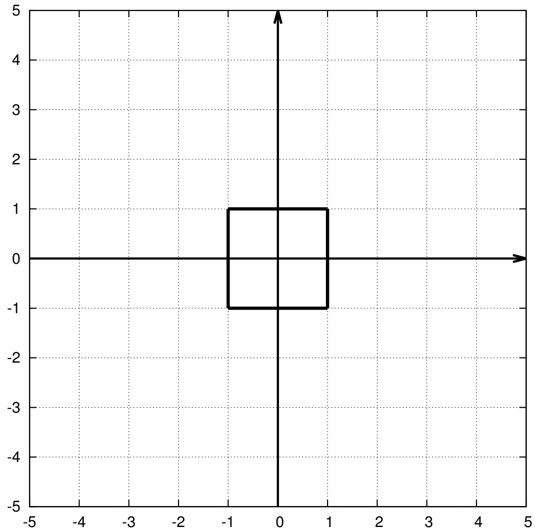
Lösung auf Seite 6

Aufgabe 2:

(a) Wiederholen Sie Aufgabenteil (c) der vorherigen Aufgabe und ersetzen Sie dabei a_1, a_2 durch b_1, b_2 mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Was beobachten Sie? Überlegen Sie sich selbst eine Abbildung zur Untersuchung.



Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 3:

(a) Welche Matrix gehört zu derjenigen Abbildung, die die Länge eines jeden Vektors v halbiert und seine Richtung umkehrt?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) Entscheiden Sie, ob es sich bei den Matrizen um Drehung, Streckung, Projektion oder Spiegelung handelt.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ____________ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ____________

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ____________ (iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ____________

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 4:

Geben Sie jeweils die Streckungs-Abbildungen von $\Omega \to \Omega'$ an. Skizzieren Sie jeweils die Situation.

(a)
$$\Omega = [1,2] \times [-1,3] \quad \text{und} \quad \Omega' = [3,6] \times [-1,3]$$

(b)
$$\Omega = [1,3] \times [-1,3] \quad \text{und} \quad \Omega' = [1,4] \times [-1,3]$$

(c)
$$\Omega = [0,1] \times [0,2] \quad \text{und} \quad \Omega' = [0,3] \times [0,1]$$

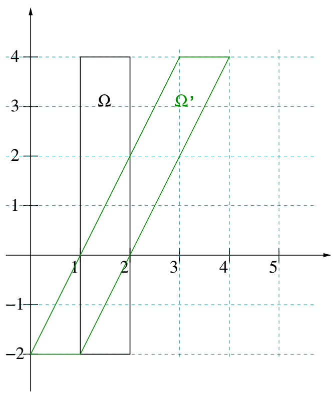
(d)
$$\Omega = [1,2] \times [1,3] \quad \text{und} \quad \Omega' = [3,6] \times [0.5,1]$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 7

Aufgabe 5:

Geben Sie jeweils die Scherungs-Abbildungen von $\Omega \to \Omega'$ an.

(a)

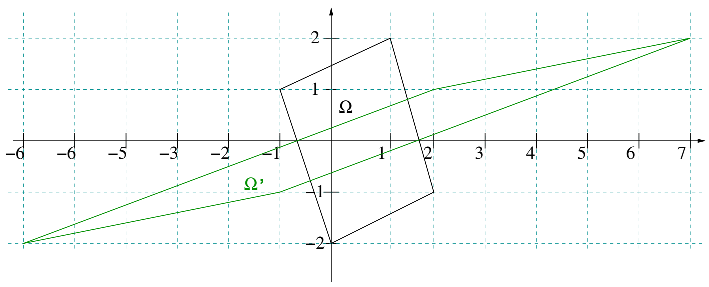


Eine Scherung an der x_1=Achse wird durch folgende Abbildung beschrieben:

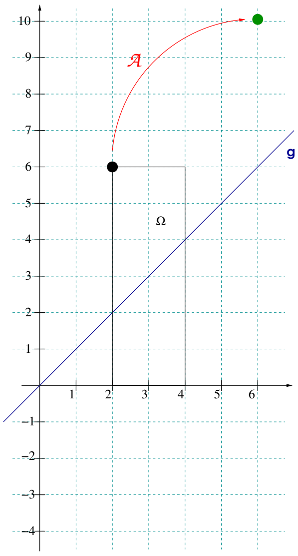
$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ anhand der Abbildung links.

(b) Wie lautet die Scherungsabbildung folgender Situation?



(c)



Berechnen Sie die Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass Sie eine Scherung an der Geraden

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \, , t \in \mathbb{R}$$

erhalten, wobei

$$\mathcal{A}((2,6)) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gelten sollte.
Zerlegen Sie die Abbildung in "Drehung der Gerade g auf die x_1-Achse", dann "Scherung" und anschließend "Drehung zurück auf die Gerade g". Die Gesamtabbildung erhalten Sie dann durch Verknüpfung der drei Einzelabbildungen in der richtigen Reihenfolge!

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Aufgabe 6:

Welches ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$f(x, y, z) = (x, y + 2\,z, z)\,?$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

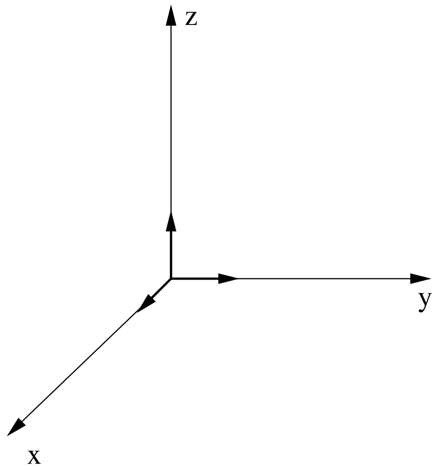
Aufgabe 7:

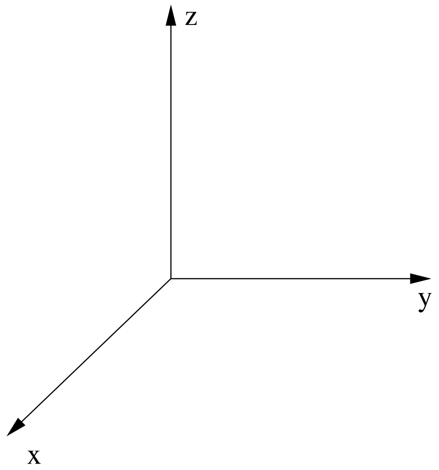
Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{A} :\ & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

(a) Was ist das Bild von $\mathcal{A}$? Machen Sie eine Skizze.





(b) Welche Dimension hat der Bildraum?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

Aufgabe 8:

Der Bildraum der Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

ist eine Ebene.

(a) Welches ist das Erzeugendensystem des Bildraumes?

(b) Geben Sie eine Basis des Bildraumes an.

(c) Welches ist der Kern der Abbildung?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 11

Lösung 1

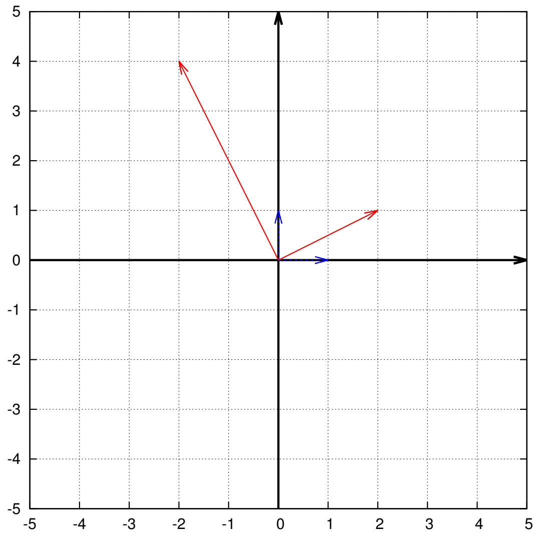
(a)

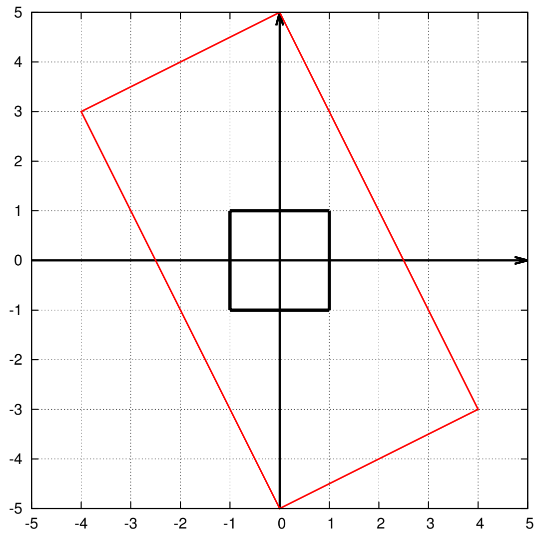
$$\begin{aligned} v' &= v_1 a_1 + v_2 a_2 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(v) &= v_1 a_1 + v_2 a_2 = (a_1, a_2)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c)





Lösung 2

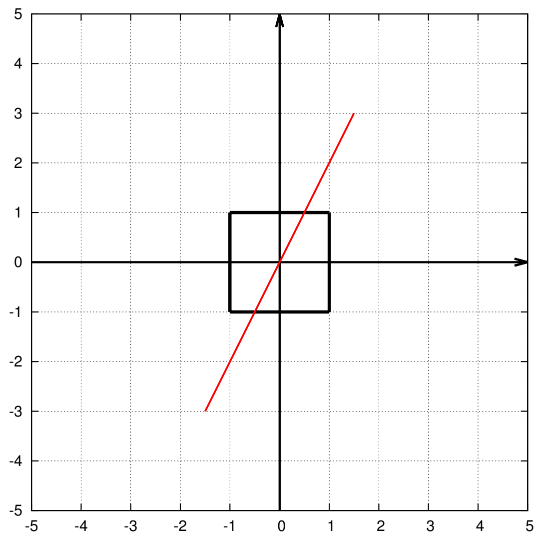
(a)

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$



(b) Das Bild ist kein Viereck mehr sondern eine Strecke. Hat also eine Dimension verloren.

Lösung 3

(a)

☐	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
☐	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	☒	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b)

(i)	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	Streckung mit Faktor 2
(ii)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Spiegelung an der x–Achse
(iii)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Projektion auf die x–Achse
(iv)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Drehung um $90°$

Lösung 4

(a) Streckung in x_1-Richtung:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3\,x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(b) Translation um $(-1, 0)$, dann Streckung in x_1-Richtung um Faktor $\frac{3}{2}$ und dann wieder Translation um $(1, 0)$:

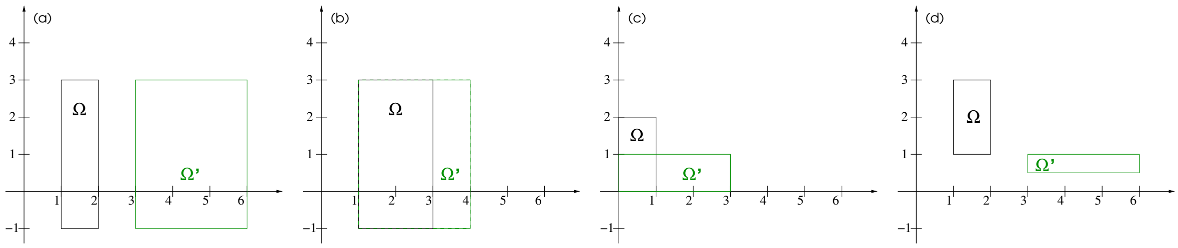
$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Streckung in x_1-Richtung um Faktor 3 und Streckung in x_2-Richtung um Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x$$

(d) Translation um $(-1, -1)$, dann Streckung in x_1-Richtung um den Faktor 3 und in x_2-Richtung um den Faktor $\frac{1}{4}$ und anschließend eine Translation um $(3, \frac{1}{2})$:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \left(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



Lösung 5

(a) Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\,\alpha \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

also onsgesamt auf die Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

Test:

$$\mathcal{A}((2,4)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{A}((2,0)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{A}((1,-2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{A}((2,-2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

(b)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

(c)

Wir drehen das ganze System (Viereck und Gerade) um den Winkel zwischen g und der x_1-Achse: $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Das liefert die Abbildung $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Auf das Ergebnis wenden wir eine Scherung mit der Unbekannten α an:

$$\mathcal{S}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Und anschließend drehen wir das Ganze wieder zurück:

$$\mathcal{D}^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Die Gesamtabbildung ist dann die Verknüpfung dieser Drei Abbildungen gemäß:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) = (\mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{D})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-\alpha & \alpha \\ -\alpha & 2+\alpha \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

α erhalten wir übre die Vorgabe der Abbildung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Also

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-\alpha & \alpha \\ -\alpha & 2+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2$$

Also lautet die Abbidlung insgesamt

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x$$

Wenn wir beide Paramter, also α und φ beliebig lassen, erhalten wir die allgemeine Formel:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha}{2}\sin(2\varphi) & \alpha\cos(\varphi)^2 \\ -\alpha\sin(\varphi)^2 & \frac{\alpha}{2}\sin(2\varphi) + 1 \end{pmatrix}$$

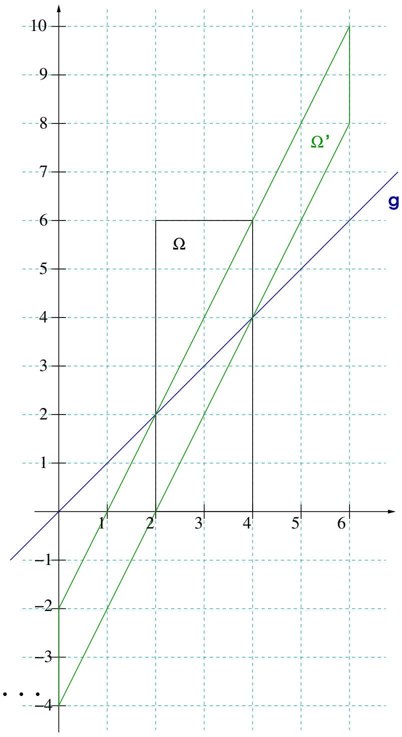
Das Matlab-Programm
ScherungGerade.m:

```
Omega = [[2 0]; [4 0];...
 [4 6]; [2 6]];
alpha = 2;
v   = [1 1];
nv  = norm(v,2);
phi = acos(v(1)/nv);

D  = [[cos(phi) sin(phi)];...
 [-sin(phi) cos(phi)]];
Di = inv(D);
S  = [[1 alpha]; [0 1]];

A  = @(x) (Di*S*D*x')';

Omegas = [A(Omega(1,:)); A(Omega(2,:));...
 A(Omega(3,:)); A(Omega(4,:))]
```



liefert die Ausgabe

```
         0   -2.0000
         0   -4.0000
    6.0000    8.0000
    6.0000   10.0000
```

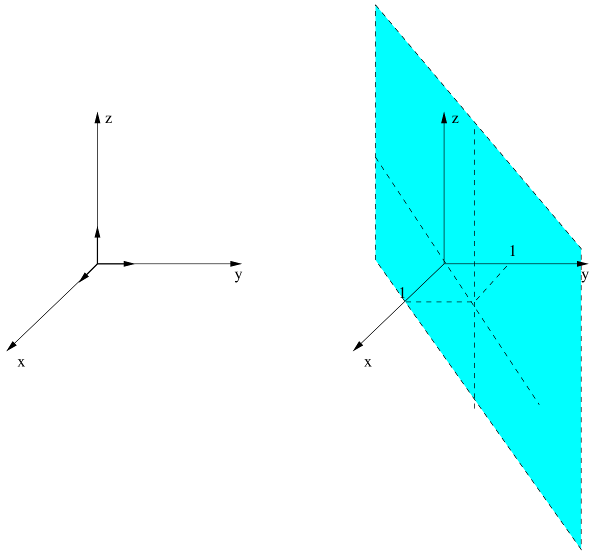
Lösung 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

(a)

$$\text{Bild}\,\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s \,,\ t, s \in \mathbb{R} \right\}$$



(b) $\operatorname{Dim} \operatorname{Bild} \mathcal{A} = 2$

Lösung 8

Der Bildraum der Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

ist eine Ebene.

(a) Das Erzeugendensystem des Bildraumes ist gegeben durch die Spaten der abbildenden Matrix A:

$$\operatorname{Span} (=) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Eine Basis sind die linear unabhängigen Vektoren des Erzeugendensystems, bzw. die linear unabhängigen Spaltenvektoren von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II-3I, (III+II)}]{\text{III+I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie finden Pivotelemente in erster und zweiter Spalte der Stufenform und damit erhalten wir eine Basis mit erstem und zweiten Spaltenvektor von A

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Der Kern ist die Lösung des LGS $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III-2I)/3,(III+II)}]{\text{(II-2I)/(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Kern} \mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \,,\; t \in \mathbb{R} \right\}$$