Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Blatt 1: Folgen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Sprachaufgabe 1: Beschreibung von Folgen

Formulieren Sie in umgangssparchlichen Worten die Definitionen für Grenzwerte und Häufungspunkte (Was ist überhaupt was?):

$$\forall \epsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N \;:\; |a_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \;:\; |a_n - a| < \epsilon$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Sprachaufgabe 2: Beschränktheit

Beschreiben Sie in Quantorenschreibweise die Beschränktheit einer Folge; jeweils nach oben und nach unten.

"Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante gibt, die größer ist als alle Folgenglieder."

"Eine Folge heißt nach unten beschränkt,

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Fingerübung 3:

(a)

$$a_n = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

Stellen Sie die ersten 5 Folgenglieder als geordnete Menge der Form

$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$$

dar. Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

(b)

$$b_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$$

Stellen Sie die ersten 5 Folgenglieder als geordnete Menge der Form

$$(b_n)_n = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots)$$

dar. Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

(c) Vergleichen Sie $(a_n)_n$ mit $(b_n)_n$. Was stellen Sie fest?

(d)

$$(a_n)_n = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 2, \frac{1}{3}, -1, 3, \frac{1}{4}, 0, 4, \frac{1}{5}, -1, 5, \frac{1}{6}, 0, \ldots\right)$$

Untersuchen Sie die Folge auf die Eigenschaften konvergent, bestimmt oder unbestimmt divergent. Hat sie Teilfolgen? Hat sie einen Grenzwert oder Häufungspunkte? Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe 4:

(a) Bilden Sie aus

$$a_n = n^3 - 3\,n^2$$

eine implizite Folge.

(b) Bilden Sie aus

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + 4\,n - 2$$

eine explizite Folge.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 7

Aufgabe 5:

Grenzwert von explizit/impliziter Folge

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenz/Divergenz/Grenzwert/Häufungspunkte:

$(i)\quad a_n = \dfrac{1}{4^n}$ $\qquad (ii)\quad a_n = \sqrt[n]{5}$

$(iii)\quad a_n = \dfrac{3\,n^2 - 2\,n + 1}{-9\,n^2 - 20}$ $\qquad (iv)\quad a_n = \dfrac{2\,n^3 + 2}{n - 10} \cdot \dfrac{1}{n}$

$(v)\quad a_n = \dfrac{(-1)^n\,n^2}{(2\,n + 1)^2}$ $\qquad (vi)\quad a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$

Tipp zu (vi): $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der impliziten Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= 2 - \frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

(c) Untersuchen Sie die Folgen aus Aufgabe 4 auf ihr Konvergenzverhalten. Betrachten Sie dabei jeweils die explizite als auch die implizite Darstellung.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

Aufgabe 6: Blutalkohol

(Diese Aufgabe bezieht sich auf Beispiel 1 im Vorlesungsskript.) Es sei $a_1 = 1.12$ der Blutalkoholanteil in Promille. Eine Zeiteinheit $n = 1$ beträgt 4.07 Stunden. Nach dieser Zeiteinheit liegt der Promillewert bei $b = 0.5$. Damit gilt für die prozentuale Abnahme p:

$$b = a_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad \Leftrightarrow \quad p = 100 \left(1 - \frac{b}{a_1}\right)$$

In unserem Fall also

$$p = \frac{1550}{29} \approx 53.45\,.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.12 \\ a_{n+1} &= a_n \left(1 - \frac{p}{100}\right) + a_1 \end{aligned}$$

(a) Welcher Wert stellt sich nach langer Zeit ein?

(b) Wann (nach wieviel Stunden) liegt der Blutalkohol bei 1.8 Promille?

Tipp: Um diese beiden Fragen ohne Rechner beantworten zu können stellen Sie die implizite Folge in eine explizite um.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 11

Laboraufgabe 7: Blutalkohol

Schreiben Sie ein Programm, welches die Entwicklung des Blutalkohols aus Aufgabe 6 berechnet und graphisch darstellt. Implementieren Sie dabei die implizite Folge und beantworten Sie die Fragen so gut es geht mit ihren numerischen Berechnungen.

Prosit!

Selbsteinschätzung:

Lösung 1

$\forall \epsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n > N \; : \; |a_n - a| < \epsilon$:

Für alle positiven Epsilon und für alle natürlichen Zahlen N gibt es natürliche Zahlen n, die gröser als N sind und für die gilt, dass der Betrag des n-ten Folgenglieds minus a kleiner als Epsilon ist.

Anmerkung: Dass n ebenfalls eine natürliche Zahl ist könnte man in der Quantorenschreibweise hinzufügen, ist aber überflüssig, das es ja der Index der Folgenglieder ist und dieser ist per Definition eine natürliche Zahl.

Umgangssprachlich: Ganz gleich wie klein wir die Umgebung um a legen so finden wir doch unendlich viele Folgenglieder, die innerhalb dieses Bandes liegen. (Das ist die Definition eines Häufungspunktes a der Folge.)

$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \; : \; |a_n - a| < \epsilon$:

Für alle positiven Epsilon gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle n, die gröser oder gleich N sind gilt, dass der Betrag des n-ten Folgenglieds minus a kleiner als Epsilon ist.

Umgangssprachlich: Für jedes noch so kleine Epsilon finden wir einen Index, ab dem alle weiteren unendlich vielen Folgenglieder in der Umgebung von a liegen. (Hierbei handelt es sich um die Definition eines Grenzwertes a der Folge.)

Lösung 2

"Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante gibt, die gröser ist als alle Folgenglieder."

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, falls gilt:

$\exists \, C \in \mathbb{R} \, \forall n \; : \; a_n < C$

"Eine Folge heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Konstante gibt, kleiner ist als alle Folgenglieder."

Eine Folge heißt nach unten beschränkt, falls gilt:

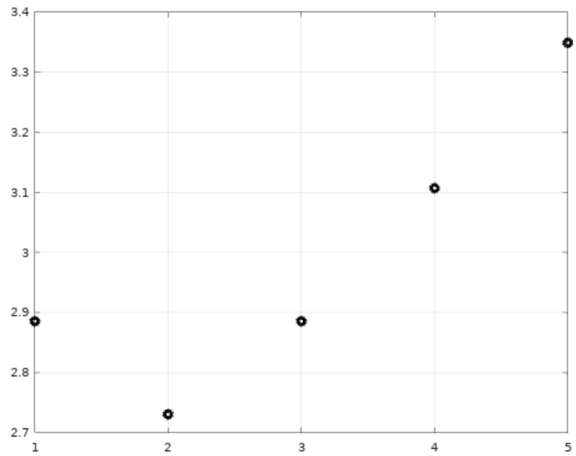
$\exists \, c \in \mathbb{R} \, \forall n \; : \; a_n > c$

Lösung 3

(a)

$$a_n = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

$$(a_n)_n = (2.8854\,,\ 2.7307\,,\ 2.8854\,,\ 3.1067\,,\ 3.3487, \ldots)$$



Plotten Sie in Matlab/Octave die Folge.

```
alpha = 1;                        % Kleiner Exponent
DIM = 10;                         % Anzahl darzustellender Folgenglieder
n=linspace(1,DIM,DIM);            % Feld aller Indizes

an = (n+1).^(alpha)./log(n+1);    % Die Folgenglieder
                                  % plot mit schwarzen Kugeln, Groesse 2
plot(n,an,'ko','LineWidth',2)
grid on
```

Wählen Sie immer kleiner werdendes `alpha` und erweitern Sie gegebenenfalls den sichtbaren Bereich durch Wahl eines größeren Wertes für `DIM`. Wenn `alpha` sehr klein gewählt wird reicht es nicht aus `DIM` sehr groß zu wählen. Schneiden Sie den linken sichtbaren Bereich ab mittel `n=linspace(10000,DIM,DIM)`. Sie können auch wahlweise prüfen ob die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder positiv ist oder nicht:

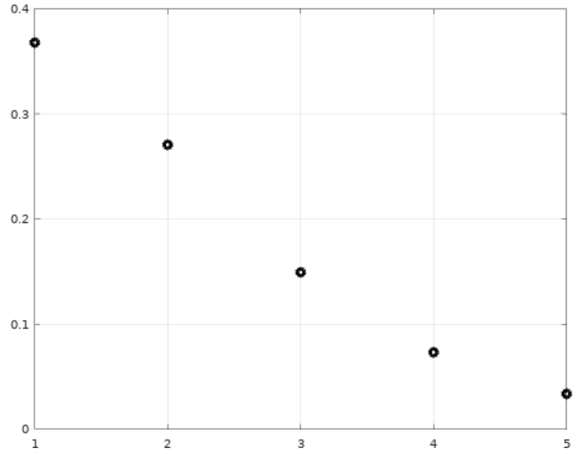
```
min(an(2:length(an))-an(1:length(an)-1))
```

Die obere Zeiel liefert den kleinsten Wert von $(a_n - a_{n-1})_{n=2,\ldots,DIM}$.

(b)

$$b_n = \frac{n}{e^n}$$

$$(b_n)_n = (0.367879\,,\ 0.270671\,,\ 0.149361\,,\ 0.073263\,,\ 0.033690, \ldots)$$



(c) Folgen a_n divergiert bestimmt, d.h. der Limes strebt nach ∞ während b_n mit Grenzwert 0 konvergiert. Das liegt daran, dass der Logarithmus langsamer wächst als die Identität, während die Exponentialfunktion schneller wächst als die Identität. Das ist ein bedeutsames Merkmal dieser beiden Funktionen. Es wird uns später in der Vorlesung noch einmal begegnen.

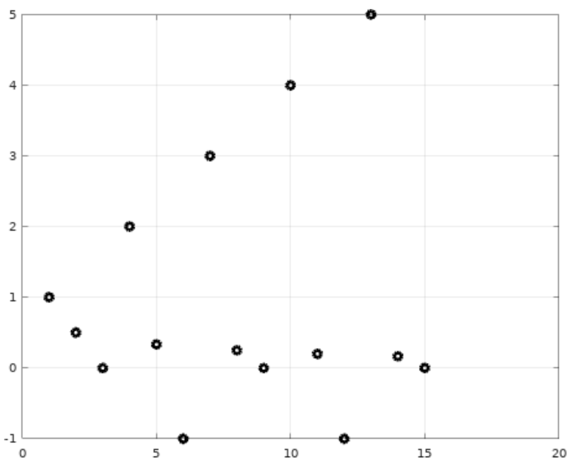
(d) Die Folge

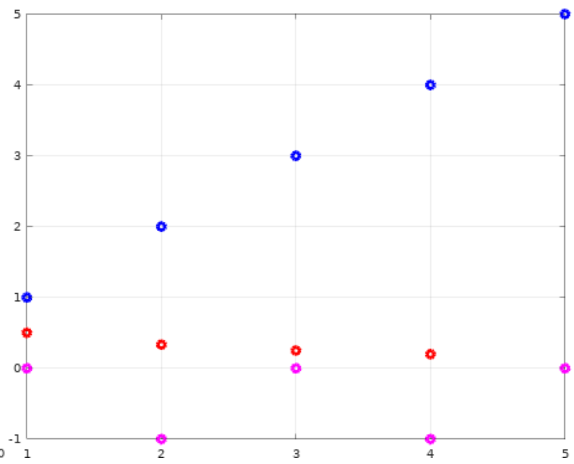
$$(a_n)_n = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 2, \frac{1}{3}, -1, 3, \frac{1}{4}, 0, 4, \frac{1}{5}, -1, 5, \frac{1}{6}, 0, \ldots\right)$$

zeigt zunächst keine Struktur, die auf Konvergenz hindeutet (siehe Skizze links). Zerlegen wir sie allerdings in drei Teilfolgen (siehe Skizze rechts) so sehen wir eine bestimmt divergente (blau) eine konvergente (rot) und eine unbestimmt divergente (pink) Teilfolge. Die Folge a_n hat somit keinen Grenzwert, dafür aber zwei Häufungspunkte, nämlich

$$\{0, -1\}\,.$$

Die pinkfarbene Teilfolge könnte man auch abernals in zwei Teilfolgen zerlegen.





Lösung 4

(a) Aus

$$a_n = n^3 - 3\,n^2$$

eine implizite Folge bilden:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_n &= n^3 - 3\,n^2 \\ a_{n+1} &= (n+1)^3 - 3\,(n+1)^2 \\ \Rightarrow \qquad a_{n+1} - a_n &= (n+1)^3 - 3\,(n+1)^2 - n^3 + 3\,n^2 \\ &= n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 - 3\,n^2 - 6\,n - 3 - n^3 + 3\,n^2 \\ &= 3\,n^2 - 3\,n - 2 \end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_{n+1} &= a_n + 3\,n^2 - 3\,n - 2 \end{aligned}$$

(b) Aus

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 4\,n - 2 \end{aligned}$$

eine explizite Folge bilden:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 4\,n - 2 \\
&= a_{n-1} + 4\,(n-1) - 2 + 4\,n - 2 \\
&= a_{n-2} + 4\,(n-2) - 2 + 4\,(n-1) - 2 + 4\,(n-0) - 2 \\
&\vdots \\
&= a_{n-k} + 4\,(n-k) + \ldots + 4\,(n-2) + 4\,(n-1) + 4\,(n-0) \underbrace{-2 \cdots -2}_{k+1 \ \text{Mal}} \\
&= a_{n-k} + 4\,\underbrace{(n + \cdots + n)}_{k+1 \ \text{Mal}} - 4\,(k + \cdots + 1 + 0) - 2\,(k+1) \\
&= a_{n-k} + 4\,n\,(k+1) - 4\sum_{l=1}^{k} l - 2\,(k+1) \\
&= a_{n-k} + 4\,n\,(k+1) - 4\,\frac{k\,(k+1)}{2} - 2\,(k+1) \\
&= a_{n-k} + (4\,n-2)\,(k+1) - 2\,k\,(k+1) \\
&= a_{n-k} + 2\,(2\,n - 1 - k)\,(k+1) \\
&\vdots \quad k = n \\
&= a_0 + 2\,(n-1)\,(n+1) \\
&= 1 + 2\,(n^2 - 1)
\end{aligned}$$

Also gilt bisher

$$a_{n+1} = 2\,n^2 - 1$$

Damit gilt dann insgesamt:

$$a_n = 2\,n^2 - 4\,n + 1$$

Man muss die Folge nicht als a_n statt a_{n+1} beschreiben, es ist aber üblich.

Wir prüfen unser Ergebnis, indem wir die explizite Darstellung in die implizite Darstellung einsetzen:

$$a_{n+1} = 1 + 2\,(n^2 - 1)$$

und

$$a_n = 2\,n^2 - 4\,n + 1$$

eingesetzt in

$$a_{n+1} = a_n + 4\,n - 2$$

führt auf

$$\begin{aligned} & 1+2\,(n^2-1) = 2\,n^2-4\,n+1+4\,n-2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,n^2-1 = 2\,n^2-1 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 5

(a)

$$\begin{array}{llll} (i) & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0 & (ii) & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1 \\ (iii) & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\,n^2-2\,n+1}{-9\,n^2-20} = -\dfrac{1}{3} & (iv) & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\,n^3+2}{n-10}\cdot\dfrac{1}{n} = \infty \\ (v) & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n\,n^2}{(2\,n+1)^2} = \pm\dfrac{1}{4} & (vi) & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = 0 \end{array}$$

zu (vi):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = 2-\underbrace{\frac{1}{a_n}}_{\to\frac{1}{a}} \\ \Rightarrow \quad & a = 2-\frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow \quad & a^2-2\,a+1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (a-1)^2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & a = 1 \end{aligned}$$

MatlabPlot

```
DIM = 100;
n=linspace(1,DIM,DIM);

an(1) = 2;
for i=2:DIM
an(i) = 2 - 1/an(i-1);
end

plot(n,an,'ko','LineWidth',2)
ylim([0.9,1.2])
grid on
```

(c) Beide Folgen sind divergent. Bei den jeweiligen expliziten Darstellungen gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

und die implizite Darstellung führt bei Annahme der Existenz eines Grenzwertes a auf einen Widerspruch.

Lösung 6

Für diese Fragestellung benötigen wir die explizite Darstellung. (Gelingt das nicht müssen wir die Folge in eine `for`-Schleife packen und warten bis der gewünschte Wert erreicht wird. Versuchen wir es erst mit der expliziten Darstellung. Ist einfach eleganter! ;-)

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}\left(1-\frac{p}{100}\right)+a_1\\
&= \left(a_{n-2}\left(1-\frac{p}{100}\right)+a_1\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)+a_1\\
&= a_{n-2}\left(1-\frac{p}{100}\right)^2+a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^1+a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^0\\
&\vdots\\
&= a_{n-k}\left(1-\frac{p}{100}\right)^k+\cdots+a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^1+a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^0\\
&= a_{n-k}\left(1-\frac{p}{100}\right)^k+a_1\sum_{l=0}^{k-1}\left(1-\frac{p}{100}\right)^l\\
&\vdots\quad k=n-1\\
&= a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^{n-1}+a_1\sum_{l=0}^{n-2}\left(1-\frac{p}{100}\right)^l\\
&= a_1\sum_{l=0}^{n-1}\underbrace{\left(1-\frac{p}{100}\right)^l}_{\in(0,1)}\quad\text{Geometrische Reihe}\\
&= a_1\frac{1-\left(1-\frac{p}{100}\right)^n}{1-\left(1-\frac{p}{100}\right)}=a_1\frac{1-\left(1-\frac{p}{100}\right)^n}{\frac{p}{100}}\xrightarrow{n\to\infty}a_1\frac{100}{p}\approx 2.0232
\end{aligned}$$

Letzteres besagt, welcher Wert auf lange Sicht angenommen wird. Frage: Für welches N gilt

$$a_1\frac{1-\left(1-\frac{p}{100}\right)^N}{\frac{p}{100}}=1.8\,?$$

Dazu müssen wir nach N auflösen:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\qquad \left(1-\frac{p}{100}\right)^N &= 1-\frac{1.8\,p}{100\,a_1}\\
\Leftrightarrow\qquad N &= \frac{\ln\left(1-\frac{1.8\,p}{100\,a_1}\right)}{\ln\left(1-\frac{p}{100}\right)}
\end{aligned}$$

Das packen wir jetzt in den Taschenrechner

$$\approx 2.562$$

Das bedeutet, dass man nach 3 Einheiten die 1.8 Promille überschritten hat. Oder genauer nach

$$2.56*4.07=10.427\quad\text{Stunden.}$$

Lösungen vom Tutorial "Eulersche Zahl" Nr 12/13

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-4}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5\,n}\right)^n = \sqrt[5]{\mathrm{e}}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

Mit einem EUR Einsatz wächst Ihr Guthaben bei 100% Zinsen und einer kontinuierlichen Zinsausschüttung auf 2.72 EUR.