

Blatt 8: Integration

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:

-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"

0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"

1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"

2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"

3: "alles klar hier"

unbestimmte Integrale / Stammfunktionen

Aufgabe 1: _____ Stammfunktionen

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^4 + x + 2$$

$$g(x) = 6x^5 - \frac{2}{3}x^4$$

$$u(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{4}{13}}$$

$$v(t) = (2t + 3)^4$$

$$w(s) = \frac{10}{s^3}$$

$$h(t) = \sqrt{t}^5$$

(a) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale (alle Stammfunktionen) der angegebenen Funktionen.

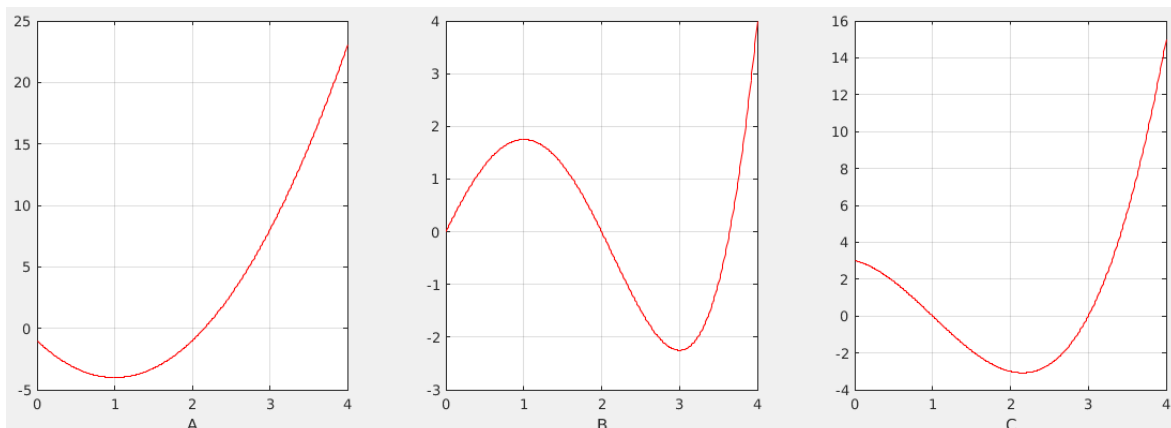
(b) Berechnen Sie jeweils die Stammfunktion, die durch den Punkt $P = (1, 2)$ verläuft.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

Fingerübung 2: _____ Stammfunktion und Ableitungsfunktion

Im Folgenden sind die Graphen der Funktion f , ihrer Ableitungsfunktion f' und einer ihrer Stammfunktionen F gegeben:



Ordnen Sie die Graphen A, B, C den Funktionen f , f' und F zu.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [6](#)

Aufgabe 3: _____ partielle Integration

Berechnen Sie das unbestimmte Integral unter Verwendung der partiellen Integration:

$$\int x \log_2(x) dx$$

Prüfen Sie ob die Ableitung der Stammfunktion wieder auf den Integranden führt.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [6](#)

Aufgabe* 4: _____ partielle Integration

Berechnen Sie die Stammfunktionen zu

$$(a) \int \arccos x dx \quad \text{und} \quad (b) \int \operatorname{arccot} x dx.$$

Verwenden Sie dabei partielle Integration.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [7](#)

Aufgabe 5: _____ Integration, verschiedene Methoden

Berechnen Sie folgende Stammfunktionen:

$$\begin{array}{lll} (a) \int x^2 \ln x dx & (b) \int x \sin x dx & (c) \int 1 + \tan^2 x dx \\ (d) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & (e) \int \frac{2x}{\cot(x^2)} dx & (f) \int \cos^2 x dx \\ (g) \int \ln\left(\frac{1}{2}x\right) dx & (h) \int \frac{1}{x} + e^{2x} dx & (i) \int (x+1)(x^2+2x) dx \\ (j) \int x^2 e^{-x} dx & (k) \int \frac{1+2x}{e^x} dx & (l) \int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ (m) \int \frac{x^2+4x}{x^3+6x^2-10} dx & (n) \int 2xe^{x^2} dx & (o) \int e^{\log_2 x} dx \\ (d) \int x\sqrt{x+1}^3 dx & (b) \int xe^{1-3x^2} dx & (c) \int \frac{2x}{\cot(x^2)} dx \end{array}$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [7](#)

Aufgabe 6: _____

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u'(x) = f(x) u(x).$$

- (a) Geben Sie alle Lösungen $u(x)$ der Differentialgleichung zu einem gegebenen aber allgemein gehaltenen $f(x)$ an.
- (b) Wie lautet die Lösung für $f(x) = \frac{1}{x}$ mit der Eigenschaft $u(1) = 2$?

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [10](#)

bestimmte Integrale / Riemann-Integral

Aufgabe 7: _____

Wie muss $a \in \mathbb{R}^+$ gewählt werden, damit

$$\int_0^a x^3 - x \, dx = 1$$

gilt? Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [11](#)

Aufgabe 8: _____ Substitution

Berechnen Sie die folgenden Integrale und verwenden Sie dabei die Substitutionsformel

(a) $\int_0^2 \sqrt{4-r} \, dr$

(b) $\int_0^1 x (2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

Subst.

subst.

(c) $\int_1^2 \sqrt{e^{3x} + e^{2x}} \, dx$

$x(t) = \ln t$

(d) $\int_1^3 \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, dx$

$x(t) = t^2$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [11](#)

Aufgabe 9:

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion f und der x -Achse im Bereich $[-1 : 3]$.

(a) $f(x) = x^2 - 12x + 11$

(b) $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [11](#)

Aufgabe 10:

Ein Auto und ein Motorrad befahren die gleiche Strecke. Ihr Geschwindigkeitsverlauf kann innerhalb einer Stunde mit

$$v_A = 100t + 20 \quad \text{und} \quad v_M = 160t, \quad t \in [0, 1]$$

beschrieben werden. Es ist $[t] = \text{h}$ und $[v] = \text{km/h}$. Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsgraphen in ein Achsenkreuz. Zeichnen Sie eine vertikale Linie durch eine variable Stelle a auf der x -Achse. Interpretieren Sie den Flächeninhalt, der von dieser vertikalen Linie ($x = a$), der y -Achse und den beiden Graphen v_A und v_M eingeschlossen wird. Können Sie eine Aussage darüber treffen, ob und welches Fahrzeug von dem jeweils anderen überholt wird?

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [13](#)

Aufgabe 11: partielle Integration für ein bestimmtes Integral

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^2 x \left(\frac{1}{3}x + 2 \right)^{17} dx$$

mit Hilfe der partiellen Integration. Vereinfachen Sie den Ergebnisausdruck so weit wie möglich (ohne TR!) und berechnen Sie erst im letzten Schritt mit dem TR eine Dezimalzahl, gerundet auf zwei Nachkommastellen.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [14](#)

uneigentliche Integrale

Aufgabe 12: uneigentliche Integrale

Prüfen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren und falls ja wie lautet ihr Wert? Skizzieren Sie die Graphen.

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx$$

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 15

Aufgabe 13: _____ partielle Integration für uneigentliche Integrale

Welchen Wert hat folgendes uneigentliches Integral, so es denn existiert:

$$\int_0^{\infty} x e^{-3x} dx$$

Verwenden Sie bei der Berechnung die partielle Integration für bestimmte Integrale.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 16

Laboraufgabe 14: _____

Zur Funktion

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x^2)$$

gibt es keine analytische Darstellung einer Stammfunktion. Letztere lässt sich aber über das bestimmte Integral

$$F(x) = \int_0^x \sin(s^2) ds$$

beschreiben.

Berechnen Sie eine diskrete Funktion $\mathbf{F} = (F_i)_i \approx F(x_i)$ zu gegebenen Stützstellen x_i , wobei das bestimmte Integral über das arithmetische Mittel endlicher Ober- und Untersummen genähert wird.

Ober-/Untersumme:

$$F(x_i) = \int_0^{x_i} \sin(s^2) ds \approx S_n/s_n$$

Selbsteinschätzung: