Prof. Dr. Matthias O. Franz

Übungsblatt Fouriertransformation

Signale, Systeme und Sensoren

1. Symmetrie von Signalen (Vorl. 6)

Sind bzw. unter welchen Bedingungen sind die folgenden Signale gerade, ungerade, weder gerade noch ungerade, oder gleichzeitig gerade und ungerade? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Tip: Ersetzen Sie dazu $f(t)$ durch $f(-t)$.

a.
$$f(t) = \frac{1}{t^n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

b.
$$f(t) = t^n + t, \quad n = 0, 1, \ldots$$

c.
$$f(t) = t + 1 - 2\cos^2 t - \tfrac{1}{2}\sin^2 t$$

d.
$$f(t) = \frac{d}{dt}(\cos t + t^n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

e.
$$f(t) = \int \frac{1}{t^n}\, dt, \quad n = 2, 3, \ldots$$

2. Rechnen mit δ-Funktionen (Vorl. 10)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Ausblendeigenschaft der δ-Funktion:

a.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tfrac{\pi}{2}) \cdot \sin t \, dt$$

b.
$$\int_{-\infty}^{0} \delta(t - \tfrac{\pi}{2}) \cdot \sin t \, dt$$

c.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(4 + t - T) \cdot e^{2t} \, dt$$

3. Linearität der Fouriertransformation (Vorl. 10)

Benutzen Sie die in der Vorlesung zur Verfügung gestellte Tabelle und die Linearitätseigenschaft, um die Fouriertranformierte folgender Signale zu berechnen ($\sigma(t)$ ist die Sprungfunktion):

a.

$$f(t) = 6e^{-64t^2} - \tfrac{1}{2}e^{i64t^2} + 7$$

b.

$$f(t) = -\tfrac{1}{3}e^{5bt}\sigma(t) + \tfrac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$$

Nutzen Sie beides, um aus den folgenden Spektren das Originalsignal im Zeitbereich zu rekonstruieren:

c.

$$F(\omega) = -4i + \frac{9-\omega^2}{81+18\omega^2+\omega^4} + \delta(\omega)$$

d.

$$F(\omega) = \frac{\omega}{A+\omega^2} - \frac{B}{\omega} + \frac{\sin C\omega}{\omega}$$

4. Rechenregeln der Fouriertransformation (Vorl. 10)

Bestimmen Sie mithilfe des Ähnlichkeitssatzes die Fouriertransformierte für folgende Signale:

a.

$$f(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{b}) \quad \text{(skalierter Rechteckimpuls)}, \quad b > 0$$

b.

$$f(t) = \sigma(3t)$$

Nutzen Sie für *b.* zur Überprüfung Ihres Ergebnisses die (in der Vorlesung nicht behandelte) Skalierungseigenschaft des δ-Impulses:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Bestimmen Sie mithilfe der Verschiebungssätze die Fouriertransformierte für folgende Signale:

c.

$$f(t) = 4e^{2|t-5|}$$

d.

$$f(t) = e^{i3t-2}$$

e.

$$f(t) = e^{i4t}\cos(-t^2)$$

Gemischte Aufgaben:

f.

$$f(t) = \mathrm{sgn}(\tfrac{t}{2} + 1)$$

g.

$$f(t) = e^{it} \cdot e^{7i(t^2+6t+9)}$$

5. Diskrete Spektren (Versuch 3 und Vorl. 15)

a. Ein Tonsignal macht genau eine Schwingung innerhalb von M = 500 Abtastwerten. Die Abtastung erfolgt alle $\Delta t = 1$ ms. Was ist die Abtastfrequenz? Was ist die Grundperiode des Signals? Was ist seine Grundfrequenz? Welcher realen Frequenz entspricht die Wellenzahl $k = 2$? Was ist hier die Nyquistfrequenz?

b. Ein eindimensionales Druckraster mit einer Auflösung (Abtastfrequenz) von 120 Punkten pro cm hat die Länge $N = 1800$ Punkte. Was ist die Grundfrequenz in Zyklen pro cm, wenn das Druckraster eine Sinusfolge von Grauwerten mit genau einer Schwingung darstellt? Was ist hier die feinste Struktur (Frequenz), die aufgelöst werden kann?

c. In einer 200 ms langen Tonaufnahme mit einer Abtastfrequenz von 44.1 kHz beobachten Sie einen Peak im Spektrum bei der Wellenzahl $k = 6000$. Welcher Frequenz in Hz entspricht dieser Ton? Kann diese Komponente des Tonsignals fehlerfrei aus den Abtastwerten rekonstruiert werden?