Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

2 Funktionen

2.1 Definition

2.2 Stetigkeit

2.3 Umkehrfunktion & Komposition

BEI MATHEMATIKERN ZU HAUSE

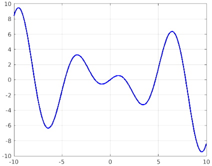
Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

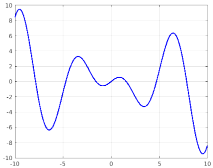
Funktionen

Funktionen, die wir betrachten wollen

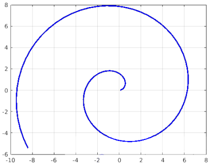


$f \, : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funktionen, die wir betrachten wollen

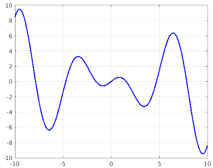


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

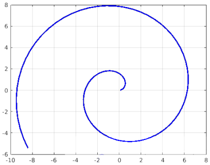


$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

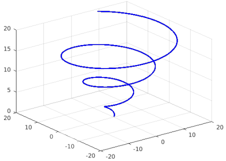
Funktionen, die wir betrachten wollen



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

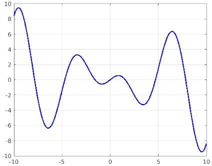


$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

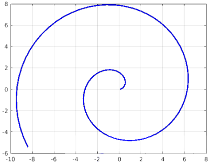


$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

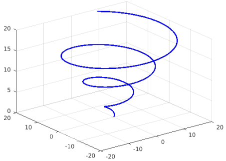
Funktionen, die wir betrachten wollen



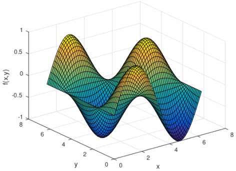
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

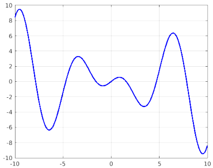


$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

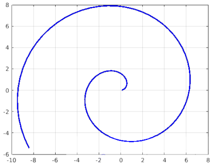


$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

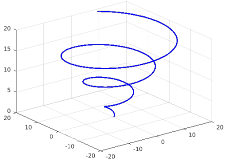
Funktionen, die wir betrachten wollen



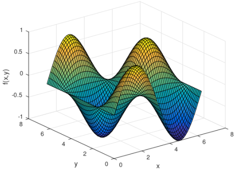
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



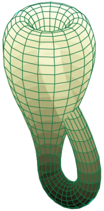
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

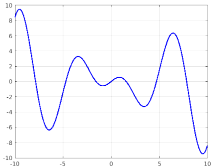


$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

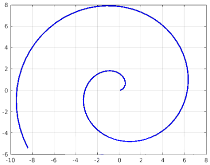


$w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

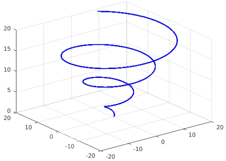
Funktionen, die wir betrachten wollen



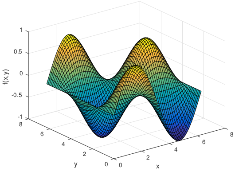
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



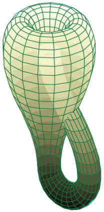
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

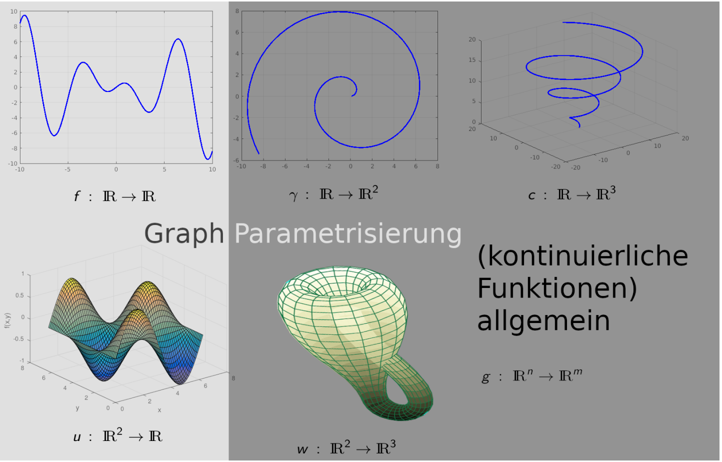


$w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

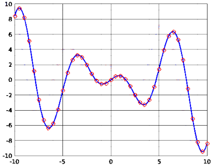
(kontinuierliche Funktionen) allgemein

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

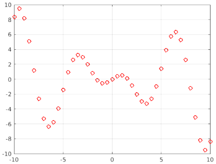
Funktionen, die wir betrachten wollen



Funktionen, die wir betrachten wollen



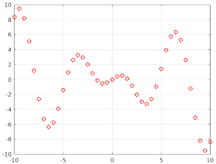
Funktionen, die wir betrachten wollen



$\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$

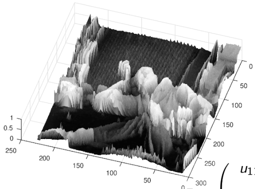
diskrete Funktionen

Funktionen, die wir betrachten wollen



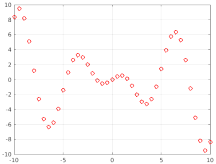
$$\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n) \quad \in \mathbb{R}^n$$

diskrete Funktionen



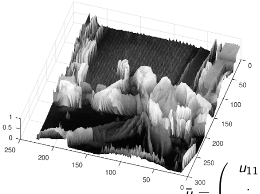
$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Funktionen, die wir betrachten wollen



$\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n) \;\in \mathbb{R}^n$

diskrete Funktionen



digitale Bilder als diskrete Funktionen

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Was wir mit Funktionen “machen”

- Definitionsbereich von Funktionen: kontinuierlich und univariat
- Ableitungen: uni- und multivariat, kontinuierlich und diskret
- Integration: univariat, kontinuierlich und ein wenig diskret
- Anwendung:
  - Bildverarbeitung: diskret und multivariat
  - Taylorpolynom: kontinuierlich und univariat

Definition: Elementare Funktion

Unter den *elementaren Funktionen* verstehen wir grundlegende Funktionen, aus denen mittels Operationen wie Addition/Substraktion, Multiplikation/Division, Zusammensetzung, Verkettung und Umkehrung alle anderen existierenden Funktionsarten erzeugt werden können.

$p(x) = x^r$	$u(x) = a^x$	$v(x) = \sin x$
Potenzfunktionen	Exponentialfunktionen	Sinusfunktionen

elementare Fkt	**Beispiele**	**Kombinationen**
Potenzfunktion	Monom	Polynom
$f(x) = x^r$	$x\,,\; x^2\,,\; x^3\,,\; \ldots$	$2\,x^2 - x^4 + \frac{1}{3}\,x^{12}$
	Wurzelfunktion	
	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x}^3$ $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{x+3} + x^7 - \sqrt[8]{2\,x - x^2}$

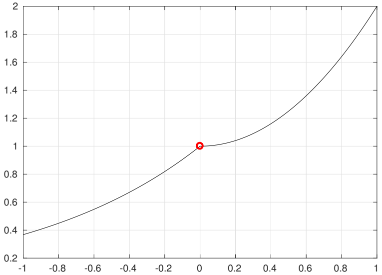
Elementare Funktionen und Kombinationen

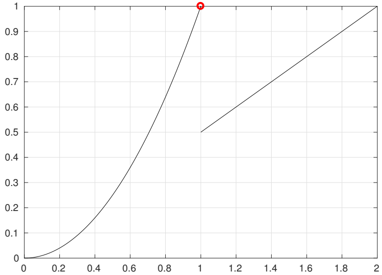
elementare Fkt	**Beispiele**	**Kombinationen**
Exponentialfkt.	e-Funktion	Hyperbelfunktion
$f(x) = a^x$	e^x	$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$ $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
	allgemein	
	$2^x\,,\ 0.5^x = \frac{1}{2^x}\,,\ \ldots$	$2\,\pi^{\frac{x+1}{x^2}}$

elementare Fkt	**Beispiele**	**Kombinationen**
Sinusfunktion	Signal	Kosinusfunktion
$f(x) = \sin x$	$\frac{1}{2}\sin(440\,x)$	$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
		Tangensfunktion
		$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
		Arkussinus
		$\arcsin x = \sin^{-1} x$

zusammengesetzte Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}\,x & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} .$$





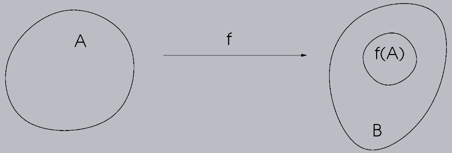
Übersicht

- Elementare Funktionen:
  - Potenzfunktion
  - Exponentialfunktion
  - Sinusfunktion
- Kombinationen:
  - Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
  - Zusammensetzung
  - Verkettung
  - Umkehrung

Definition: Funktionen

Seien A, B Mengen. Eine *Funktion* oder *Abbildung* von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.
Statt $(x, y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$ oder

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y\ . \end{aligned}$$



Notationen:

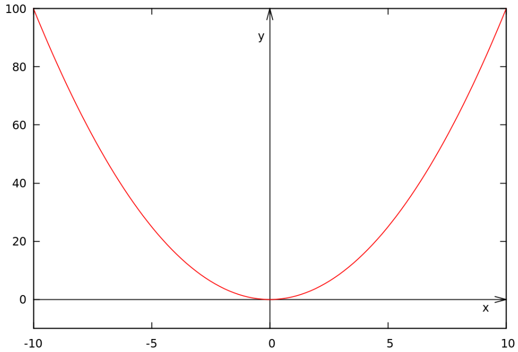
A	Definitionsbereich	$f(A) \subseteq B$	Bild von A unter f
B	Wertebereich	$f(x)$	Funktionswert an der Stelle x

Beispiel: Bezeichnungen

Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$$



Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{R}$
Bild von $\mathbb{R}$ unter f: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$

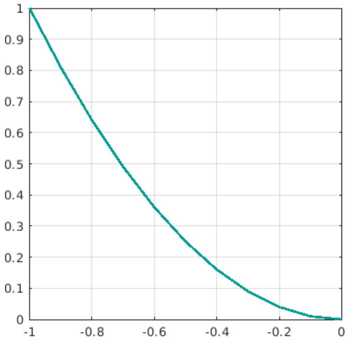
Beispiel: (nicht) Gleichheit

$$f : [-1,0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

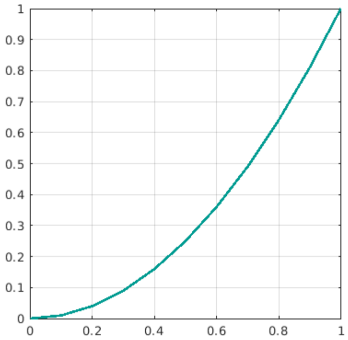
Beispiel: (nicht) Gleichheit

$$f : [-1,0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$



$$\neq$$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$



Definition: Gleichheit von Funktionen

Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, genau dann wenn sowohl die Abbildungsvorschriften von f und g gleich sind und jeweils Definitions– und Bildbereiche übereinstimmen. Das heißt:

$$(f = g) :\Leftrightarrow \begin{cases} A & = & C\,, & \\ B & = & D & \text{und} \\ f(x) & = & g(x) & \forall x \in A\,. \end{cases}$$

Man sagt auch die Funktionen sind *identisch gleich*: $f \equiv g$

Definition: Gleichheit von Funktionen

Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, genau dann wenn sowohl die Abbildungsvorschriften von f und g gleich sind und jeweils Definitions– und Bildbereiche übereinstimmen. Das heißt:

$$(f = g) :\Leftrightarrow \begin{cases} \quad A & = \quad C\,, & \\ \quad B & = \quad D & \text{und} \\ f(x) & = \quad g(x) & \forall x \in A\,. \end{cases}$$

Man sagt auch die Funktionen sind *identisch gleich*: $f \equiv g$

Konvention

Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der größtmögliche Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.
Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die Bildmenge $f(\mathbb{D}_f)$ des Definitionsbereichs unter f gemeint.

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f =$$

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \ln(2\,x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f =$$

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \ln(2x-3) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \ln(2x - 3) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$$f(x) = \ln \cos x \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f =$$

Beispiel: Definitionsbereich & Saalaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \ln(2x-3) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$$f(x) = \ln\cos x \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{4k-1}{2}, \frac{4k+1}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \ln(2\,x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$$f(x) = \ln\cos x \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{4\,k-1}{2}, \frac{4\,k+1}{2}\right)$$

$$f(x) = x\,,\; g(x) = \frac{x^2}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \neq g(x)\,,$$

da die Definitionsbereiche nicht übereinstimmen:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\,,\; \mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

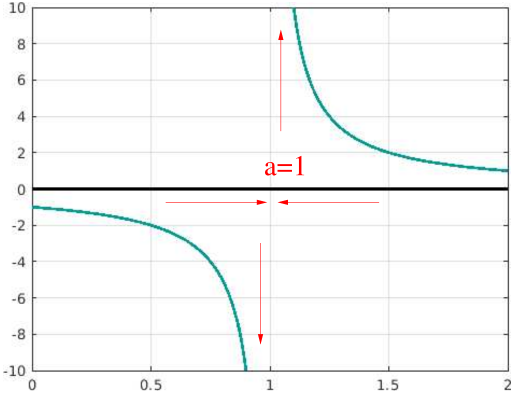
Ziel: Was "passiert" bei sogenannten *Definitionslücken* (fehlender Punkt)?

Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Welchen Wert nimmt $f(x)$ an, wenn sich x dem Wert a nähert:

$$'' \lim_{x \to a} f(x) = ?''$$

Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Welchen Wert nimmt $f(x)$ an, wenn sich x dem Wert a nähert:

$$'' \lim_{x \to a} f(x) = ?''$$



Wir untersuchen von beiden Seiten:

von links

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

von rechts

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

"Der Grenzwert. Der ewig jugendliche Held des analytischen Dramas."

Harro Heuser, 1927-2011

Definition: Grenzwert von Funktionen

Es heißt die Zahl c mit $|c| < \infty$, bzw. d mit $|d| < \infty$ und

$c = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$	*linksseitiger Grenzwert* von f für x gegen a
$d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$	*rechtsseitiger Grenzwert* von f für x gegen a.
$c = d \quad \Rightarrow \quad c = \lim\limits_{x \to a} f(x)\,,$	*Grenzwert* von f für x gegen a, das heißt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen: $$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

…

Definition

"Der Grenzwert. Der ewig jugendliche Held des analytischen Dramas."

Harro Heuser, 1927-2011

Definition: Grenzwert einer Funktion

...
Wenn die Grenzwerte beider Seiten existieren und übereinstimmen so sagen wir "der Limes x gegen a von $f(x)$ *existiert*" und wir schreiben

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

Notation: Kurzschreibweise

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Beispiel

Grundsätzlich können wir Grenzwertuntersuchungen von Funktionen auf solche von Folgen übertragen:

Grundsätzlich können wir Grenzwertuntersuchungen von Funktionen auf solche von Folgen übertragen:

<u>Beispiel:</u>

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Grundsätzlich können wir Grenzwertuntersuchungen von Funktionen auf solche von Folgen übertragen:

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Uns interessiert:

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1}$$

Grundsätzlich können wir Grenzwertuntersuchungen von Funktionen auf solche von Folgen übertragen:

<u>Beispiel:</u>

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Uns interessiert:

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1}$$

Substitution: $x = 1 \pm \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 \pm \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \to \infty} \pm n = \pm\infty$$

Beispiel

Grundsätzlich können wir Grenzwertuntersuchungen von Funktionen auf solche von Folgen übertragen:

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Uns interessiert:

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1}$$

Substitution: $x = 1 \pm \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 \pm \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \pm n = \pm\infty$$

Mit etwas Übung benötigt man diesen Umweg allerdings nicht.

Definition: Stetigkeit einer Funktion

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in I$, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

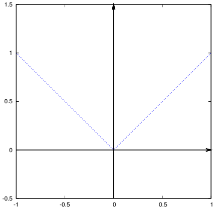
- Falls x_0 ein Randpunkt von I ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.
- Die Funktion f heißt *auf I stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.

Die Menge der aller stetigen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit:

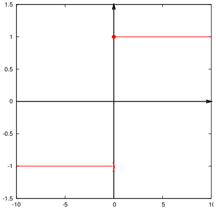
$$C^0(\Omega) := \{f \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } \Omega\}$$

<u>Obacht:</u> Die zu untersuchende Stelle x_0 ist hier Element des Definitionsbereichs!

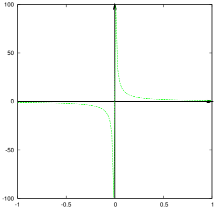
Beispiele



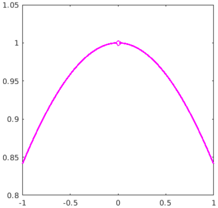
$f(x) = |x|$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

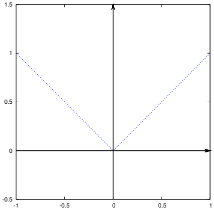


$$f(x) = \frac{1}{x}$$



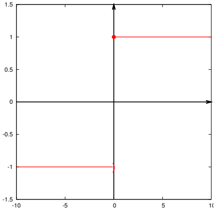
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Beispiele

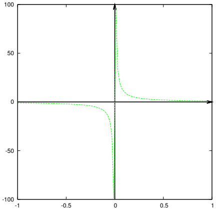


$$f(x) = |x|$$

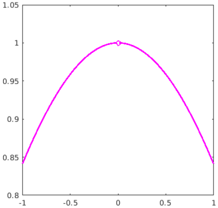
$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

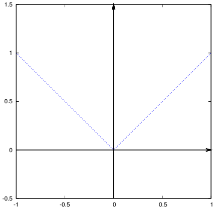


$$f(x) = \frac{1}{x}$$



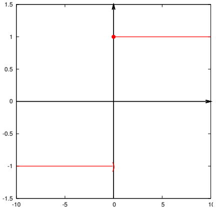
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Beispiele



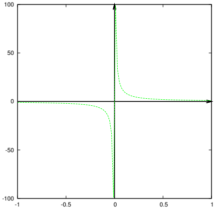
$$f(x) = |x|$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

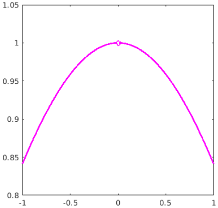


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

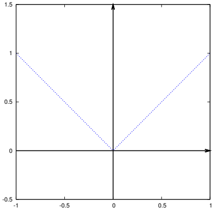


$$f(x) = \frac{1}{x}$$



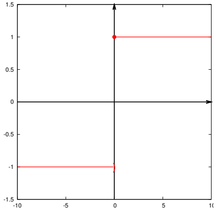
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Beispiele



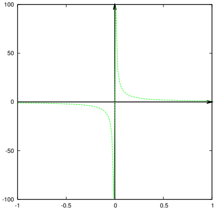
$f(x) = |x|$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



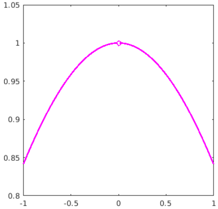
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



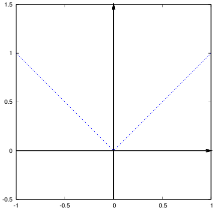
$f(x) = \frac{1}{x}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



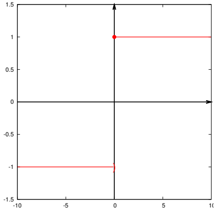
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Beispiele



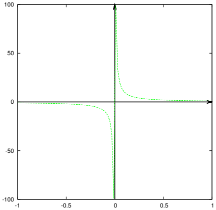
$f(x) = |x|$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



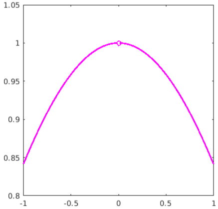
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



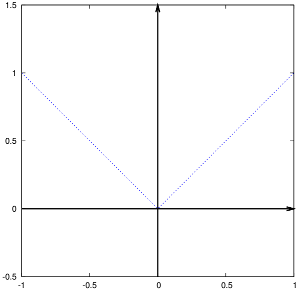
$f(x) = \frac{1}{x}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(x) = |x|$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x|\,.$$

Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} |x| = \lim_{x \searrow 0} x = 0$$

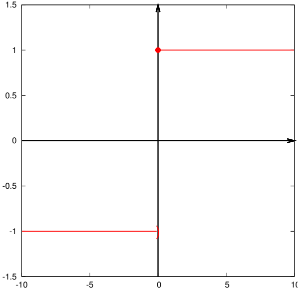
und

$$\lim_{x \nearrow 0} |x| = \lim_{x \nearrow 0} -x = 0\,.$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert existieren jeweils und stimmen überein. Also lautet der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$$

f ist stetig in 0. Wir sagen f *existiert bei* $x = 0$.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

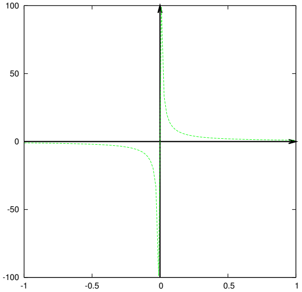
Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} 1 = 1$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} -1 = -1 .$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert existieren jeweils, stimmen aber nicht überein. Demzufolge ist f nicht stetig in $x = 0$. Wir sagen f *existiert bei* $x = 0$.



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Es gilt

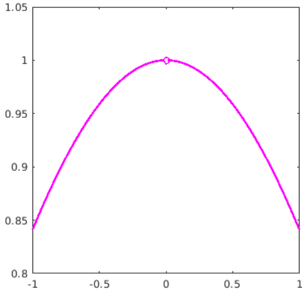
$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert existieren jeweils nicht. Demzufolge hat f bei $x = 0$ keinen Grenzwert und ist dort auch nicht stetig. Wir sagen f *existiert nicht bei* $x = 0$.

Beispiele



$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Es gilt (das schauen wir gleich noch genauer an)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = x = 1$$

Das gilt für rechts- und linksseitigem Grenzwert. Diese existieren und stimmen überein. f existiert dennoch nicht bei $x = 0$, da $0 \notin \mathbb{D}_f$, f ist also nicht stetig in $x = 0$.

Stetigkeit beinhaltet zwei zu erfüllende Kriterien:

1. Der Grenzwert muss existieren (das beinhaltet Übereinstimmung und Existenz der einseitigen Grenzwerte)
2. Die Funktion muss existieren (das beinhaltet, dass der zu untersuchende Wert auch im Definitionsbereich enthalten ist)

Stetigkeit beinhaltet zwei zu erfüllende Kriterien:

1. Der Grenzwert muss existieren (das beinhaltet Übereinstimmung und Existenz der einseitigen Grenzwerte)
2. Die Funktion muss existieren (das beinhaltet, dass der zu untersuchende Wert auch im Definitionsbereich enthalten ist)

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Stetigkeit beinhaltet zwei zu erfüllende Kriterien:

1. Der Grenzwert muss existieren (das beinhaltet Übereinstimmung und Existenz der einseitigen Grenzwerte)
2. Die Funktion muss existieren (das beinhaltet, dass der zu untersuchende Wert auch im Definitionsbereich enthalten ist)

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Definition: unbestimmter Ausdruck

Als *unbestimmte Ausdrücke* bezeichnen wir Limes, die von folgender Form sind:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], \left[0^0\right], \left[1^\infty\right], \left[\infty^0\right], [\infty - \infty]$$

Beispiel: $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

Beispiel: $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$0 < \sin x < x < \tan x \qquad \Big| : \sin x$$

Beispiel: $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} && 0 < \sin x < x < \tan x && \Big| : \sin x \\ \Leftrightarrow && 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} && \end{aligned}$$

Beispiel: $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& & 0 < \sin x < x < \tan x \qquad & \Big| : \sin x \\
&\Leftrightarrow & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} & \\
&\Leftrightarrow & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x &
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& 0 < \sin x < x < \tan x && \Big| : \sin x \\
\Leftrightarrow\quad & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \\
\Rightarrow\quad & 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x = 1\,.
\end{aligned}$$

Beispiel: $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& & 0 < \sin x < x < \tan x & \qquad \big| : \sin x \\
\Leftrightarrow & & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} & \\
\Leftrightarrow & & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x & \\
\Rightarrow & & 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x = 1\,. &
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (linksseitiger Grenzwert berechnet sich in analoger Weise)

Sei $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& & 0 < \sin x < x < \tan x & \qquad \Big| : \sin x \\
&\Leftrightarrow & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} & \\
&\Leftrightarrow & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x & \\
&\Rightarrow & 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 > \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} > \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \cos x = 1\,. &
\end{aligned}
$$

Unser gesuchter Ausdruck ist nach unten und oben in die 1 eingespannt und demzufolge muss

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gelten.

Beispiele

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4}\ ,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Einseitige Limes:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = -\infty\,.$$

f hat also bei $x = 1$ eine Polstelle.

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Einseitige Limes:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = -\infty\,.$$

f hat also bei $x = 1$ eine Polstelle.

2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1. $$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)^4}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

   Einseitige Limes:

   $$\lim_{x\searrow 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^4} = \lim_{x\searrow 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \lim_{x\searrow 1}\frac{(x+1)}{(x-1)^3} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow 1}\frac{(x+1)}{(x-1)^3} = -\infty\,.$$

   f hat also bei $x = 1$ eine Polstelle.

2. $$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

   Einseitige Limes:

   $$\lim_{x\searrow 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\searrow 1}(x+1) = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1}(x+1) = 2$$

   Damit ist die Unstetigkeitsstelle bei $x = 1$ hebbar

1.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)^4}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Einseitige Limes:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = -\infty\,.$$

f hat also bei $x = 1$ eine Polstelle.

2.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

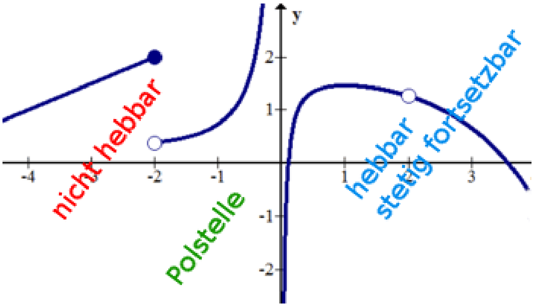
Einseitige Limes:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} (x+1) = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} (x+1) = 2$$

Damit ist die Unstetigkeitsstelle bei $x = 1$ hebbar und die Funktion f stetig fortsetzbar zu:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 2 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

Arten von Unstetigkeitsstellen



Saalaufgabe

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$
☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 2}$$
☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 12 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$
☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☒ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 2}$$

☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 12 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

☐ stetig ☐ stetig fortsetzbar ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ Polstelle

Saalaufgabe

Funktion				
$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☒ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$	☐ stetig	☒ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 2}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 12 & \text{für } x = 2 \end{cases}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle

Saalaufgabe

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☒ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$	☐ stetig	☒ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 2}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☒ Polstelle
$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 12 & \text{für } x = 2 \end{cases}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle

Saalaufgabe

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☒ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$	☐ stetig	☒ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle
$f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 2}$	☐ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☒ Polstelle
$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 12 & \text{für } x = 2 \end{cases}$	☒ stetig	☐ stetig fortsetzbar	☐ nicht stetig fortsetzbar	☐ Polstelle

Intro

Funktion:

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{D}_f &\to f(\mathbb{D}_f) \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Umkehrfunktion:

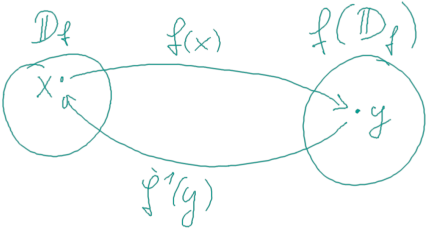
$$\begin{aligned} \mathbb{D}_f &\leftarrow f(\mathbb{D}_f)\ :\ f^{-1} \\ x &\leftarrow\!\!\shortmid\ y \end{aligned}$$

Funktion:

$$\begin{aligned} f \;:\; \mathbb{D}_f &\to f(\mathbb{D}_f) \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_f &\leftarrow f(\mathbb{D}_f) \;:\; f^{-1} \\ x &\leftarrow\!\shortmid\, y \end{aligned}$$

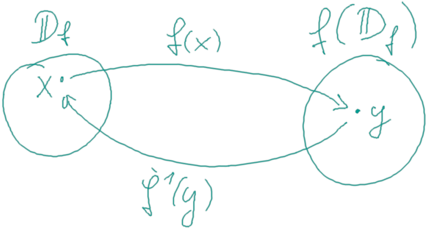


Funktion:

$$f\ :\ \mathbb{D}_f \to f(\mathbb{D}_f)$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Umkehrfunktion:

$$\mathbb{D}_f \leftarrow f(\mathbb{D}_f)\ :\ f^{-1}$$
$$x \leftarrow\!\shortmid y$$



3 Beispiele: “einfach berechnen”, “nicht so einfach berechnen”, “existent aber nicht berechenbar”

Beispiel

Berechnung der Umkehrabbildung:

$$f(x) = 2x$$

Beispiel

Berechnung der Umkehrabbildung:

$$f(x) = 2x$$
$$y = 2x$$

Beispiel

Berechnung der Umkehrabbildung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x \\
y &= 2x \\
\Leftrightarrow \qquad x &= \frac{1}{2}y
\end{aligned}
$$

Beispiel

Berechnung der Umkehrabbildung:

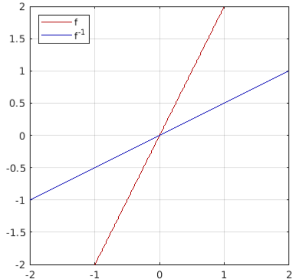
$$
\begin{aligned}
& & f(x) &= 2\,x \\
& & y &= 2\,x \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{1}{2}\,y \\
&\Rightarrow & f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}\,x
\end{aligned}
$$

Beispiel

Berechnung der Umkehrabbildung:

$$
\begin{aligned}
 & & f(x) &= 2\,x \\
 & & y &= 2\,x \\
\Leftrightarrow & & x &= \frac{1}{2}\,y \\
\Rightarrow & & f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}\,x
\end{aligned}
$$

Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:

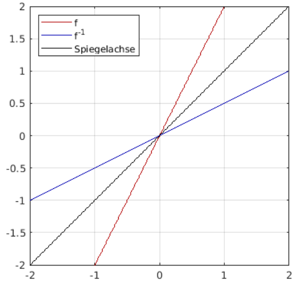


Beispiel

Berechnung der Umkehrabbildung:

$$f(x) = 2x$$
$$y = 2x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y$$
$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$$

Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:



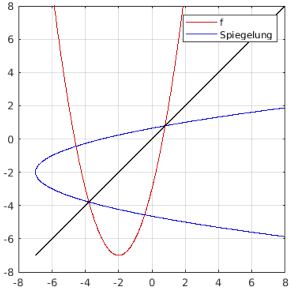
Beispiel

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$

Beispiel

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$
$$y = x^2 + 4x - 3$$

Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:



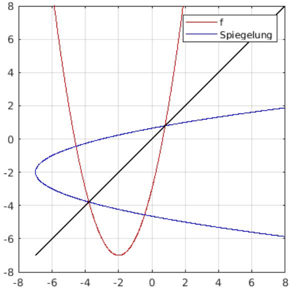
Beispiel

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$

$$y = x^2 + 4x - 3$$

$$= \underbrace{(x+2)^2 - 4}_{= x^2 + 4x} - 3$$

Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:



Beispiel

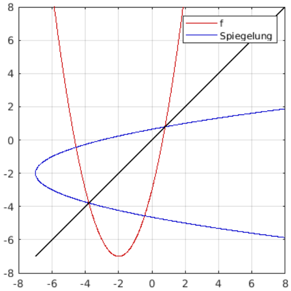
$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$

$$y = x^2 + 4x - 3$$

$$= \underbrace{(x+2)^2 - 4}_{=x^2+4x} - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = y + 7$$

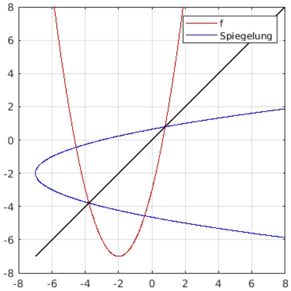
Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:



Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 4x - 3\\
y &= x^2 + 4x - 3\\
&= \underbrace{(x+2)^2 - 4}_{=x^2+4x} - 3\\
\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 &= y + 7\\
\Leftrightarrow \quad |x+2| &= \sqrt{y+7}
\end{aligned}
$$

Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:

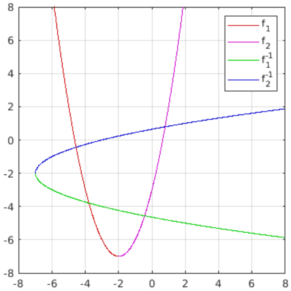


Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 4\,x - 3\\
y &= x^2 + 4\,x - 3\\
&= \underbrace{(x+2)^2 - 4}_{=x^2+4\,x} - 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 &= y + 7\\
\Leftrightarrow \quad |x+2| &= \sqrt{y+7}\\
\Leftrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{y+7} - 2
\end{aligned}
$$

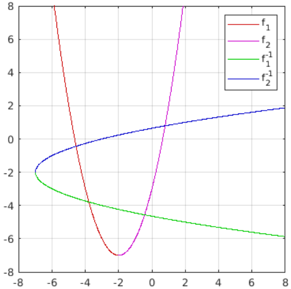
Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:



Beispiel

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$
$$y = x^2 + 4x - 3$$
$$= \underbrace{(x+2)^2 - 4}_{=x^2+4x} - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = y + 7$$
$$\Leftrightarrow \quad |x+2| = \sqrt{y+7}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y+7} - 2$$
$$\Rightarrow \quad f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x+7} - 2$$
$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{x+7} - 2$$

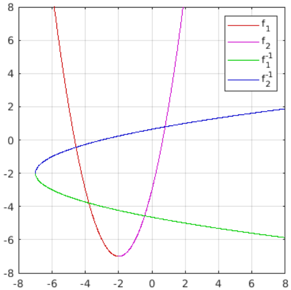
Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:



Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 4x - 3 \\
y &= x^2 + 4x - 3 \\
&= \underbrace{(x+2)^2 - 4}_{=x^2+4x} - 3 \\
\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 &= y + 7 \\
\Leftrightarrow \quad |x+2| &= \sqrt{y+7} \\
\Leftrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{y+7} - 2 \\
\Rightarrow \quad f_1^{-1}(x) &= -\sqrt{x+7} - 2 \\
f_2^{-1}(x) &= \sqrt{x+7} - 2
\end{aligned}
$$

Graphische Ermittlung der Umkehrabbildung:

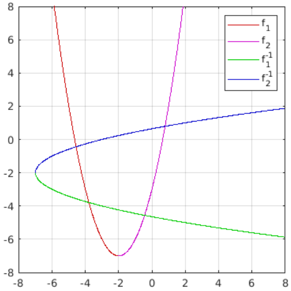


Bei $x = -2$ wird $\mathbb{D}_f$ in zwei Teile zerlegt

$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -2] \cup [-2, \infty)$$

Beispiel

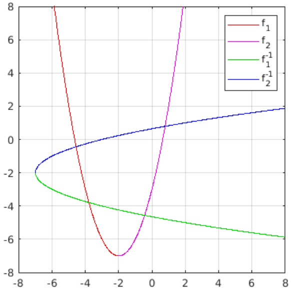
$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -2] \cup [-2, \infty)$$



Beispiel

$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -2] \cup [-2, \infty)$$

$$f_1(x) \; : \; (-\infty, -2] \to [-7, \infty)$$
$$x \mapsto x^2 + 4\,x - 3$$



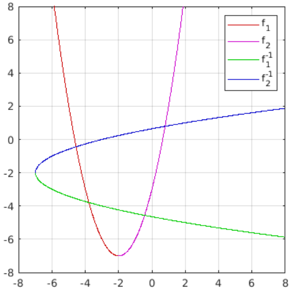
Beispiel

$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -2] \cup [-2, \infty)$$

$$\begin{aligned} \color{red}{f_1(x)} \ : \ (-\infty, -2] &\to [-7, \infty) \\ x &\mapsto x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

hat die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \color{green}{f_1^{-1}(x)} \ : \ [-7, \infty) &\to (-\infty, -2] \\ x &\mapsto -\sqrt{x+7} - 2 \end{aligned}$$



Beispiel

$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -2] \cup [-2, \infty)$$

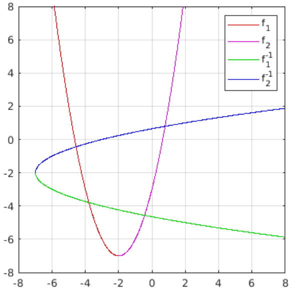
$$f_1(x) : (-\infty, -2] \to [-7, \infty)$$
$$x \mapsto x^2 + 4x - 3$$

hat die Umkehrabbildung

$$f_1^{-1}(x) : [-7, \infty) \to (-\infty, -2]$$
$$x \mapsto -\sqrt{x+7} - 2$$

und

$$f_2(x) : [-2, \infty) \to [-7, \infty)$$
$$x \mapsto x^2 + 4x - 3$$



Beispiel

$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -2] \cup [-2, \infty)$$

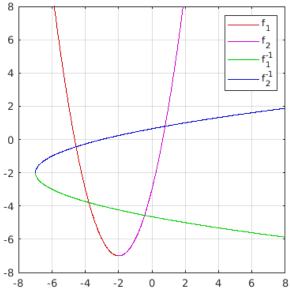
$$\begin{aligned} f_1(x) \;:\; (-\infty, -2] &\to [-7, \infty) \\ x &\mapsto x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

hat die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(x) \;:\; [-7, \infty) &\to (-\infty, -2] \\ x &\mapsto -\sqrt{x+7} - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(x) \;:\; [-2, \infty) &\to [-7, \infty) \\ x &\mapsto x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$



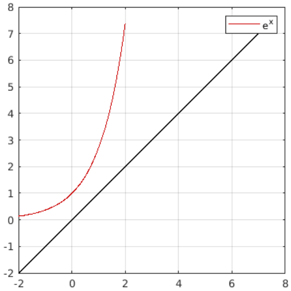
hat die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} f_2^{-1}(x) \;:\; [-7, \infty) &\to [-2, \infty) \\ x &\mapsto \sqrt{x+7} - 2 \end{aligned}$$

Übersicht

umkehrbar aber nicht berechenbar:

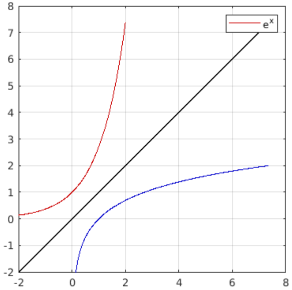
$$f(x) = \mathrm{e}^x$$



Übersicht

<u>umkehrbar aber nicht berechenbar:</u>

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$



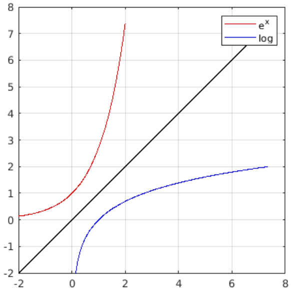
Übersicht

umkehrbar aber nicht berechenbar:

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

Umkehrung definieren:

$$f^{-1}(x) := \log_{\mathrm{e}} x$$

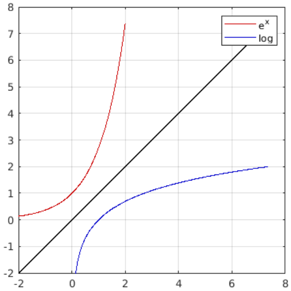


<u>umkehrbar aber nicht berechenbar:</u>

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

<u>Umkehrung definieren:</u>

$$f^{-1}(x) := \log_{\mathrm{e}} x$$



- Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ in Teile zerlegen auf denen f “umkehrbar” ist.
  $\rightarrow$ Welche Merkmale einer Funktion geben Auskunft über Umkehrbarkeit?
- Umkehrung berechnen falls das möglich ist.
  $\rightarrow$ Existiert die Umkehrung, kann aber nicht berechnet werden, so definiert man sich einen Namen dafür. (Bsp.: $\tan$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ ...)

Definition: Injektiv - Surjektiv - Bijektiv

Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

Definition: Injektiv - Surjektiv - Bijektiv

Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

surjektiv $:\Leftrightarrow \quad f(A) = B$ $\qquad$ (f bildet A auf B ab)

Definition: Injektiv - Surjektiv - Bijektiv

Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

surjektiv	$:\Leftrightarrow$	$f(A) = B$	(f bildet A auf B ab)
injektiv	$:\Leftrightarrow$	$\forall x_1 \neq x_2 \ : \ f(x_1) \neq f(x_2)$	(f ist eineindeutig)

Definition: Injektiv - Surjektiv - Bijektiv

Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

surjektiv	$:\Leftrightarrow$	$f(A) = B$	(f bildet A auf B ab)
injektiv	$:\Leftrightarrow$	$\forall x_1 \neq x_2 \; : \; f(x_1) \neq f(x_2)$	(f ist eineindeutig)
bijektiv	$:\Leftrightarrow$	f ist surjektiv und injektiv	(f bildet eineindeutig A auf B ab)

Satz: Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt

$$\forall x \in A\ \exists!\, y \in B\ :\ f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B\ \exists!\, x \in A\ :\ f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists\ f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

Satz: Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt

$$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \; : \; f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B \; \exists! \, x \in A \; : \; f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists \, f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

Die **Surjektivität** kann immer durch die Einschränkung des Wertebereiches auf das Bild von $\mathbb{D}_f$ erreichen:

$$f \; : \; \mathbb{D}_f \to f(\mathbb{D}_f)$$

Satz: Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt

$$\forall x \in A \ \exists!\, y \in B \ : \ f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B \ \exists!\, x \in A \ : \ f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists\, f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

Die **Surjektivität** kann immer durch die Einschränkung des Wertebereiches auf das Bild von $\mathbb{D}_f$ erreichen:

$$f \ : \ \mathbb{D}_f \to f(\mathbb{D}_f)$$

Umkehrbarkeit reduziert sich damit auf die Frage nach **Injektivität**.

Satz: Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt

$$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \;:\; f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B \; \exists! \, x \in A \;:\; f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists \; f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

Die **Surjektivität** kann immer durch die Einschränkung des Wertebereiches auf das Bild von $\mathbb{D}_f$ erreichen:

$$f \;:\; \mathbb{D}_f \to f(\mathbb{D}_f)$$

Umkehrbarkeit reduziert sich damit auf die Frage nach **Injektivität**.

$$f(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad f(x)^{-1} = \frac{1}{2x}$$

Saalaufgabe

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^- &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

Saalaufgabe

$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☒ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

Saalaufgabe

$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- ☒ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☒ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

Saalaufgabe

$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☒ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☒ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

Saalaufgabe

$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- ☒ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☒ surjektiv
- ☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- ☐ injektiv
- ☐ surjektiv
- ☐ bijektiv

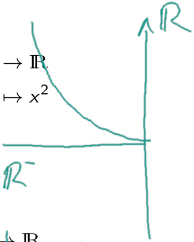
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$$

- ☒ injektiv
- ☒ surjektiv
- ☒ bijektiv

Saalaufgabe

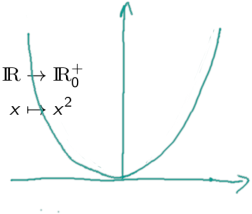
$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- [x] injektiv
- [ ] surjektiv
- [ ] bijektiv



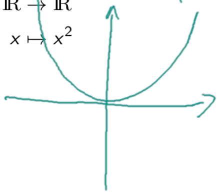
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$$

- [ ] injektiv
- [x] surjektiv
- [ ] bijektiv



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- [ ] injektiv
- [ ] surjektiv
- [ ] bijektiv



$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$$

- [x] injektiv
- [x] surjektiv
- [x] bijektiv

Definition: Monotonie von Funktionen

Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ *monoton wachsend* *(monoton fallend)*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\ x_1 < x_2 \ :\ f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$$

gilt. f heißt *streng monoton wachsend* *(streng monoton fallend)*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\ x_1 < x_2 \ :\ f(x_1) < (>) f(x_2)\,.$$

gilt. Wir nennen f streng monoton, wenn f entweder streng monoton wachsend (smw) oder streng monoton fallend (smf) ist.

Bemerkung: Die Definition ist analog zur Monotonie von Folgen.

Satz:

Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

Satz:

Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

Beweis: Aus

$$x_1 < x_2 \quad \text{also insbesondere auch} \quad x_1 \neq x_2$$

Satz:

Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

Beweis: Aus

$$x_1 < x_2 \quad \text{also insbesondere auch} \quad x_1 \neq x_2$$

folgt für streng monoton wachsende Funktionen

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{also insbesondere auch} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Satz:

Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

Beweis: Aus

$$x_1 < x_2 \quad \text{also insbesondere auch} \quad x_1 \neq x_2$$

folgt für streng monoton wachsende Funktionen

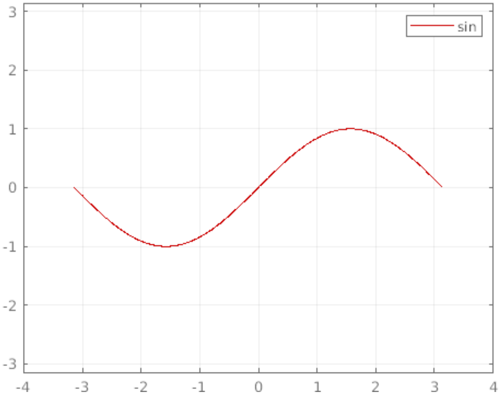
$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{also insbesondere auch} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Das Analoge gilt für streng monoton fallende Funktionen.

□

Beispiel: Sinus

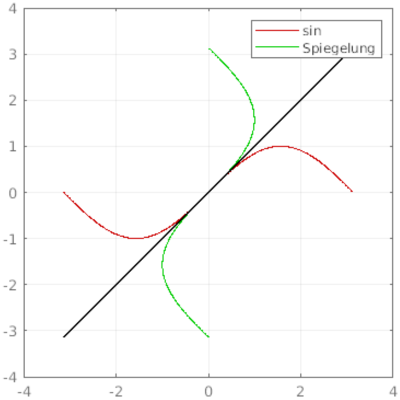
$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$



Beispiel: Sinus

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Spiegelung an der Winkelhalbierenden liefert keine Funktion.



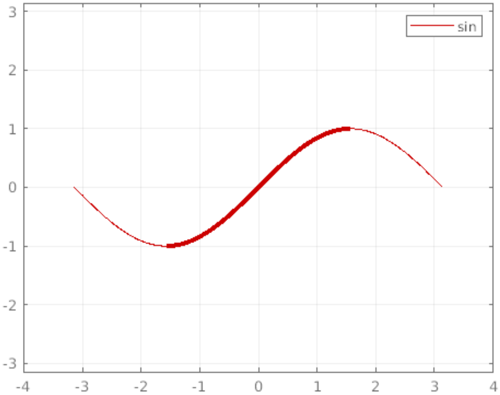
Beispiel: Sinus

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Spiegelung an der Winkelhalbierenden liefert keine Funktion.

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist bijektiv und damit umkehrbar.



Beispiel: Sinus

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

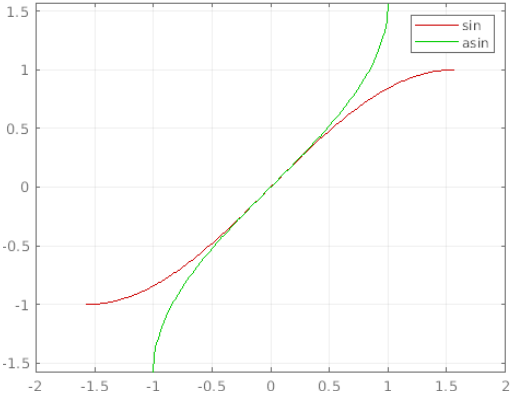
Spiegelung an der Winkelhalbierenden liefert keine Funktion.

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist bijektiv und damit umkehrbar.

$$y = \sin x$$

lässt sich nicht nach x auflösen aber eine Umkehrung existiert, also definieren wir einen Namen:



Beispiel: Sinus

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Spiegelung an der Winkelhalbierenden liefert keine Funktion.

$$f(x) = \sin x\,,\ \mathbb{D}_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

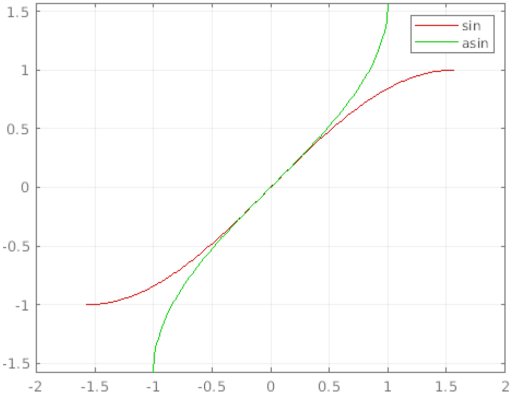
ist bijektiv und damit umkehrbar.

$$y = \sin x$$

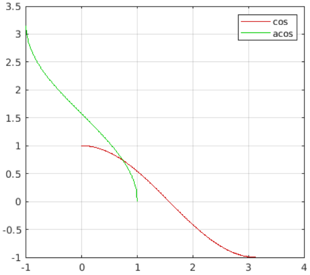
lässt sich nicht nach x auflösen aber eine Umkehrung existiert, also definieren wir einen Namen:

$$f^{-1}(x) =: \arcsin(x)$$

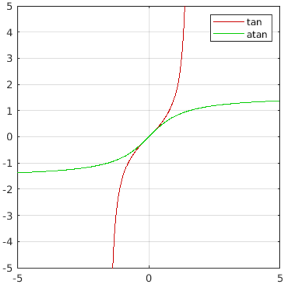
$$f^{-1}\ :\ [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Beispiel: Kosinus und Tangens



$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$



$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Definition: Arkusfunktionen

Die Abbildungen

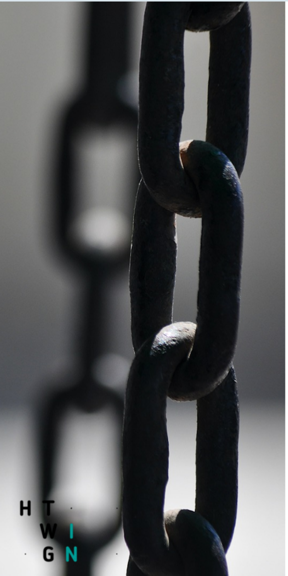
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \qquad \cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \qquad \cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$$

sind bijektiv. Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen heißen *Arkusfunktionen* und lauten

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

Bemerkung: Erinnern Sie sich gerne an `atan2` aus der Linearen Algebra!

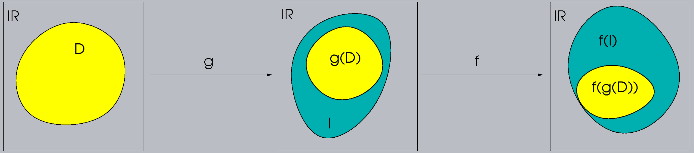
Definition



Definition: Komposition/Verkettung von Funktionen

Durch $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq I$ kann man die Komposition/Verkettung $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) .$$



Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

   gegeben.

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

1. Es seien die Funktionen
$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$
gegeben. Dann ist
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen
$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$
gegeben. Dann ist
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5\, f(x) + 7$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5\,f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7$$

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5\,f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22\,.$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und} \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 5\,f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22\,. \\
&\Rightarrow \quad f \circ g \neq g \circ f
\end{aligned}$$

Beispiele

1. Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

   gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 5\,f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22\,. \\ \Rightarrow \quad & f \circ g \neq g \circ f \end{aligned}$$

2. Ausnahme: Die Verkettung von $f(x) = 2\,x$ und $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x$ führt auf

Beispiele

1. Es seien die Funktionen
$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$
gegeben. Dann ist
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 5\,f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22\,. \\ \Rightarrow \quad & f \circ g \neq g \circ f\end{aligned}$$

2. Ausnahme: Die Verkettung von $f(x) = 2\,x$ und $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x$ führt auf
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} 2x = x$$

1. Es seien die Funktionen
$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$
gegeben. Dann ist
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17 \qquad \text{und}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5\,f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22\,.$$
$$\Rightarrow \quad f \circ g \neq g \circ f$$

2. Ausnahme: Die Verkettung von $f(x) = 2\,x$ und $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x$ führt auf
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}2x = x \quad \text{und}$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) = 2\frac{1}{2}x = x\,.$$
$$\Rightarrow \quad f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$$

Beispiele

3.

$$f(x) = \cos(\arcsin(x))$$

Berechnung der Umkehrabbildung: Wir starten mit einem Trick.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

3.

$$f(x) = \cos(\arcsin(x))$$

Berechnung der Umkehrabbildung: Wir starten mit einem Trick.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(\arcsin(x)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(x))}_{=(\sin\circ\arcsin)(x)^2 = x^2} = 1$$

3.

$$f(x) = \cos(\arcsin(x))$$

Berechnung der Umkehrabbildung: Wir starten mit einem Trick.

$$\begin{aligned} && \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \Rightarrow && \cos^2(\arcsin(x)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(x))}_{=(\sin\circ\arcsin)(x)^2 = x^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow && \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 &= 1 \end{aligned}$$

3.

$$f(x) = \cos(\arcsin(x))$$

Berechnung der Umkehrabbildung: Wir starten mit einem Trick.

$$\begin{aligned}
& & \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\
&\Rightarrow & \cos^2(\arcsin(x)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(x))}_{=(\sin\circ\arcsin)(x)^2 = x^2} &= 1 \\
&\Leftrightarrow & \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 &= 1 \\
&\Leftrightarrow & \cos^2(\arcsin(x)) &= 1 - x^2
\end{aligned}$$

3.

$$f(x) = \cos(\arcsin(x))$$

Berechnung der Umkehrabbildung: Wir starten mit einem Trick.

$$\begin{aligned}
& & \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\
&\Rightarrow & \cos^2(\arcsin(x)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(x))}_{=(\sin\circ\arcsin)(x)^2 = x^2} &= 1 \\
&\Leftrightarrow & \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 &= 1 \\
&\Leftrightarrow & \cos^2(\arcsin(x)) &= 1 - x^2 \\
&\Leftrightarrow & \cos(\arcsin(x)) &= \pm\sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

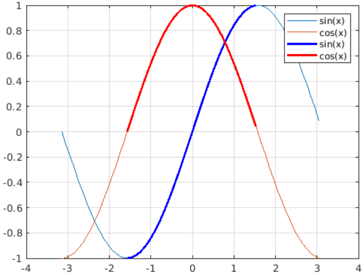
Beispiele

Memo:

$$\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}\,, \quad \arcsin\ :\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Vorzeichen:

$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$



Beispiele

Memo:

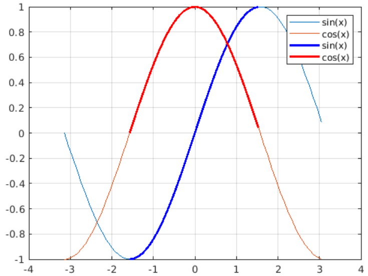
$$\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}\ ,\ \arcsin\ :\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Vorzeichen:

$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\Big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}\,.$$



Beispiele

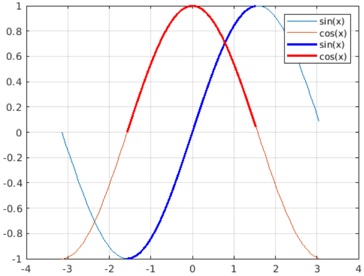
Vorzeichen:

$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:



Beispiele

Vorzeichen:

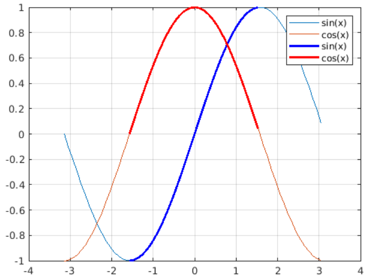
$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:

$$y = \cos(\arcsin(x))$$



Beispiele

Vorzeichen:

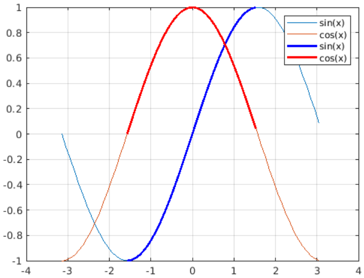
$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:

$$\begin{aligned} y &= \cos(\arcsin(x)) \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$



Beispiele

Vorzeichen:

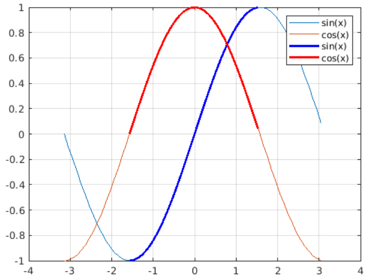
$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:

$$\begin{aligned} y &= \cos(\arcsin(x)) \\ &= \sqrt{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow \qquad y^2 &= 1 - x^2 \end{aligned}$$



Beispiele

Vorzeichen:

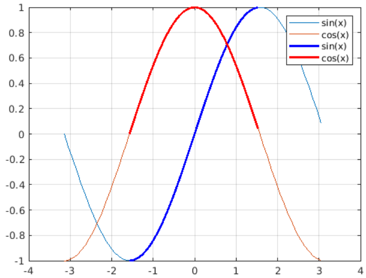
$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:

$$\begin{aligned} y &= \cos(\arcsin(x)) \\ &= \sqrt{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow \quad y^2 &= 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 1 - y^2 \end{aligned}$$



Beispiele

Vorzeichen:

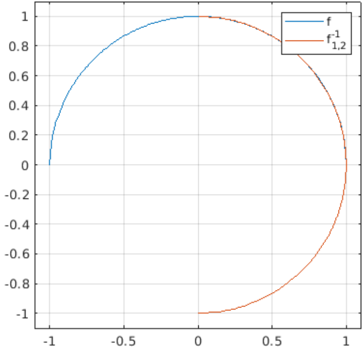
$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:

$$\begin{aligned} & y = \cos(\arcsin(x)) \\ & \quad = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 1 - y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$



Beispiele

Vorzeichen:

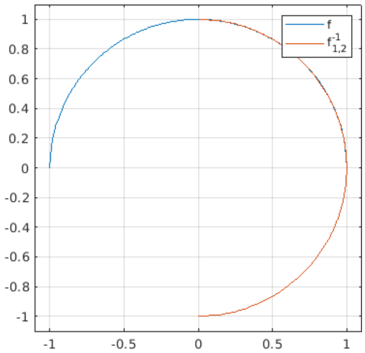
$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \geq 0$$

Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Nun können wir nochmal über die Umkehrung nachdenken:

$$\begin{aligned}
& & y &= \cos(\arcsin(x)) \\
& & &= \sqrt{1-x^2} \\
&\Leftrightarrow & y^2 &= 1-x^2 \\
&\Leftrightarrow & x^2 &= 1-y^2 \\
&\Leftrightarrow & x &= \pm\sqrt{1-y^2} \\
&\Rightarrow & f_{1,2}^{-1}(x) &= \pm\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$



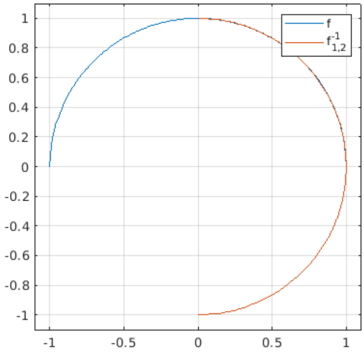
zusammengefasst:

$$f_1 : [-1,0] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f_1^{-1} : [0,1] \to [-1,0]$$
$$x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$$

$$f_2 : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f_2^{-1} : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$



Saalaufgabe

1. Berechnen Sie zu

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x-1)^2$$

   die Kompositionen

$$(f \circ g)(x) \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x)$$

Saalaufgabe

1. Berechnen Sie zu

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x-1)^2$$

   die Kompositionen

$$(f \circ g)(x) = (x-1)^4 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = (x^2-1)^2$$

Saalaufgabe

1. Berechnen Sie zu

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x-1)^2$$

   die Kompositionen

$$(f \circ g)(x) = (x-1)^4 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = (x^2-1)^2$$

2. Weiter Sei

$$h(x) = \sqrt{x}\,.$$

   Berechnen Sie

$$(f \circ h)(x) \quad \text{und} \quad (h \circ f)(x) \quad \text{und} \quad (h \circ f \circ g)(x)$$

Saalaufgabe

1. Berechnen Sie zu
$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x-1)^2$$
die Kompositionen
$$(f \circ g)(x) = (x-1)^4 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = (x^2-1)^2$$
2. Weiter Sei
$$h(x) = \sqrt{x}\,.$$
Berechnen Sie
$$(f \circ h)(x) = x \quad \text{und} \quad (h \circ f)(x) = |x| \quad \text{und} \quad (h \circ f \circ g)(x) = (x-1)^2$$

Saalaufgabe

1. Berechnen Sie zu
$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x-1)^2$$
die Kompositionen
$$(f \circ g)(x) = (x-1)^4 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = (x^2-1)^2$$
2. Weiter Sei
$$h(x) = \sqrt{x}\,.$$
Berechnen Sie
$$(f \circ h)(x) = x \quad \text{und} \quad (h \circ f)(x) = |x| \quad \text{und} \quad (h \circ f \circ g)(x) = (x-1)^2$$
3. Wie lautet die Verkettung in elementare Funktionen von
$$\sqrt{\sin(x^2)} = (g \circ f \circ h)(x)$$
$$h(x) = \qquad , \ f(x) = \qquad , \ g(x) =$$

Saalaufgabe

1. Berechnen Sie zu
$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x-1)^2$$
die Kompositionen
$$(f \circ g)(x) = (x-1)^4 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = (x^2-1)^2$$
2. Weiter Sei
$$h(x) = \sqrt{x}\,.$$
Berechnen Sie
$$(f \circ h)(x) = x \quad \text{und} \quad (h \circ f)(x) = |x| \quad \text{und} \quad (h \circ f \circ g)(x) = (x-1)^2$$
3. Wie lautet die Verkettung in elementare Funktionen von
$$\sqrt{\sin(x^2)} = (g \circ f \circ h)(x)$$
$$h(x) = x^2\,,\ f(x) = \sin x\,,\ g(x) = \sqrt{x}$$

Lernziele

- Sie könnnen den Definitionsbereich einer Funktion bestimmen.
- Sie können mittels Limes den Grenzwertbegriff erklären.
- Sie können die Begriffe Polstelle, Definitionslücke, Unstetigkeitsstelle und stetig fortsetzbar erklären; graphisch und mathematisch.
- Sie kennen Methoden, wie Sie das Verhalten von Funktionen an Definitionslücken untersuchen können.
- Sie wissen was ein unbestimmter Ausdruck ist und kennen ein paar Methoden, wie man mit ihnen umgeht.
- Sie wissen wie man methodisch eine Umkehrabbildung berechnet und welche Voraussetzung erfüllt sein muss. In diesem Zusammenhang können Sie den Begriff "Monotonie" einordnen.
- Sie sind in der Lage Funktionen zu verketten und umgekehrt sind Sie in der Lage Funktionen als Verkettung von - nicht notwendigerweise - elementaren Funktionen darzustellen.