Blatt 1: Mengen und (Komplexe) Zahlen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Mathe als Sprache

Sprachaufgabe 1:

(a) Schreiben Sie folgenden mathematischen Ausdruck in verbaler Sprache:

$$\{1,2,3\} \cap \{1,2,4,5\} = \{1,2\}$$

(b) Schreiben Sie folgende mathematische Ausdrücke in verbaler Sprache:

$M \subseteq N$		$C = A \cap B$	
$M \subset N$		$A = M \setminus N$	

(c) Schreiben Sie folgende Sätze mathematisch:

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Zwei Mengen heißen disjunkt wenn sie keinen Schnitt haben.

(d) Beschreiben Sie folgende Ausdrücke mathematisch:

$$M \setminus (N \cap O) \quad \text{und} \quad (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$$

und überzeugen Sie sich davon, dass

$$M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$$

gilt. **Tipp:** Zeichnen Sie ein Venndiagramm.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 7

Mengen

Fingerübung 2:

Welche der folgenden Darstellungen sind gemäß der verabredeten Schreibweise Mengen?

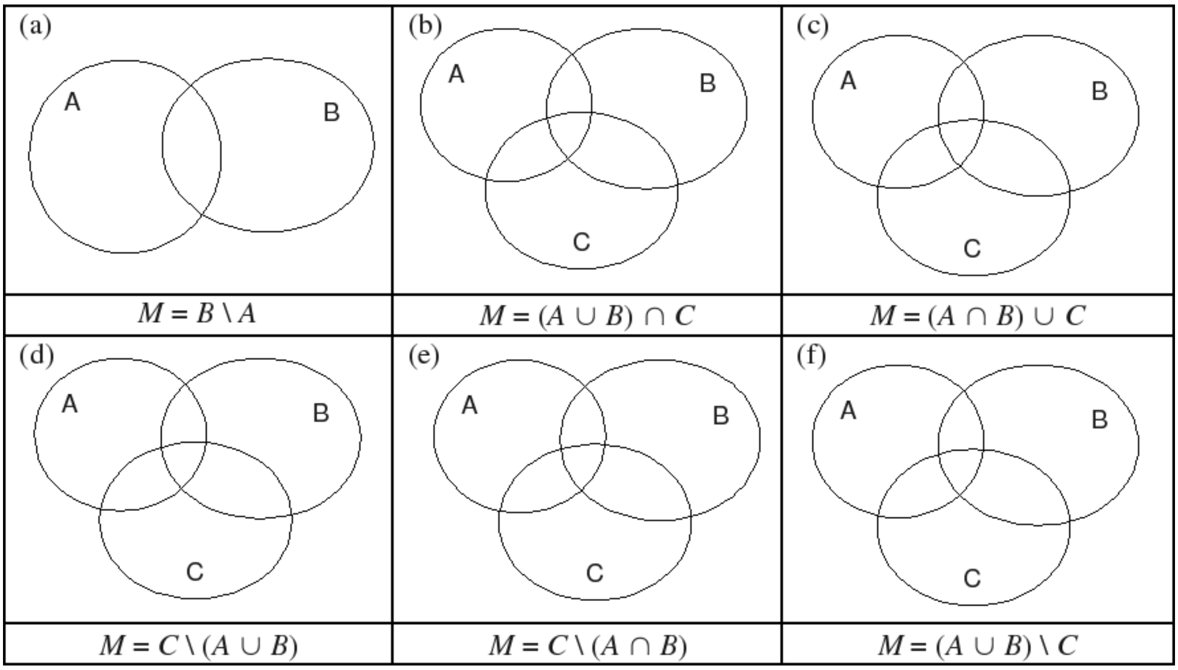
(a)	$\{1, 7, 9, 10\}$	(b)	$\{A\}$	(c)	(r, q, s)	(d)	$\{0, 11, 15, 16, 0, 3\}$
(e)	$\{\emptyset, \{1, 2\}, a\}$	(f)	$\{\{\emptyset\}\}$	(g)	$[4, Z, w]$		

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 8

Fingerübung 3:

Kennzeichnen Sie in den folgenden Venn-Diagrammen die Menge M.



Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 8

Fingerübung 4:

Gegeben sind

$$M = \{1, 2, 3\}, \quad N = \{5, 6, 7, 8\} \quad \text{und} \quad C = \{1, 3, 5\}.$$

Bestimmen Sie folgende Mengen:

(a)	$(M \cup N) \setminus C$	(b)	$M \cup (N \setminus C)$
(c)	$(M \setminus C) \cup N$	(d)	$C \setminus (M \cap N)$
(e)	$(M \cap C) \cup N$	(f)	$(C \cup N) \setminus M$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Aufgabe 5:

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender und beschreibender Form an.

(a) Die Teilmenge B der natürlichen Zahlen, die echte Vielfache (d.h. nicht 4) von 4 und kleiner oder gleich 96 sind.

(b) Die Teilmenge C der Primzahlen zwischen 1 und 30, welche mindestens einen Primzahlzwilling haben (Primzahlzwillinge sind Primzahlen mit einem Abstand zueinander von 2, z.B. 11 und 13). **Tipp:** Beschreiben Sie zunächst P, die Menge der Primzahlen.

(c) D beschreibt die Menge aller perfekten Zahlen zwischen 2 und 30:

$$D = \left\{ n \in \mathbb{N} \cap (2,30) \;\middle|\; \forall k_i \in \mathbb{N} \setminus \{n\} : \frac{n}{k_i} \in \mathbb{N} \wedge \sum_i k_i = n \right\}$$

Beschreiben Sie D in Worten.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Intervalle

Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sind Teilmengen der reellen Zahlen und folgendermaßen definiert:

$$[a,b] = \left\{ \underline{\qquad\qquad} \;\middle|\; \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \right\}$$

Fingerübung 6:

Geben Sie folgende Intervalle in Klammernschreibweise und beschreibender Schreibweise wieder. Grundmenge seien die reellen Zahlen.

(a) Offenes Intervall von $\frac{2}{3}$ bis $\frac{19}{3}$.

(b) Rechts halboffenes Intervall von x bis y.

(c) Links halboffenes Intervall von 8 bis z.

(d) Geschlossenes Intervall von -3 bis $\frac{4}{5}$.

(e) Das Intervall aller Zahlen größer oder gleich 2.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Fingerübung 7:

Kennzeichnen Sie die Menge am Zahlenstrahl und schreiben Sie sie als Intervall.

(a)	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 6\}$	(b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
(c)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2.5\}$	(d)	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$
(e)	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	(f)	$\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \leq 4\}$
(g)	$\{x \in \mathbb{R}_0^- \mid -2 \leq x \leq 2\}$	(h)	$\{x \in \mathbb{R}^- \mid x \geq -1\}$
(i)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	(j)	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 0.5\}$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Fingerübung 8:

Es seien die Mengen A, B und C wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \mid -2 < x \leq 1\} \\
B &= \{x \mid |x| < 1\} \\
C &= \{x \mid x(x+2)(x-1) = 0\}
\end{aligned}
$$

Beschreiben Sie die Mengen A und B als Intervalle und bestimmen Sie:

(a)	$A \cap B$	(b)	$A \cap B \cap C$
(c)	$A \cap (B \cup C)$	(d)	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Tipp: Skizzieren Sie die Mengen A, B und C auf einer Zahlengerade. Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

Fingerübung 9:

Beschreiben Sie jede der folgenden Mengen durch ein Intervall

(a)	$[0, 2] \cup [1, 3]$	(b)	$[-2, 0] \setminus (-1, 1]$
(c)	$[0, 2) \setminus [1, 3)$	(d)	$[-2, 0) \cap [-1, 1)$

$$(i)\big((-5, 1] \cup (0, 3]\big) \cap [-6, 2) \setminus (1, 4)$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

Produktmengen

Aufgabe 10:

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\ I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

(a)

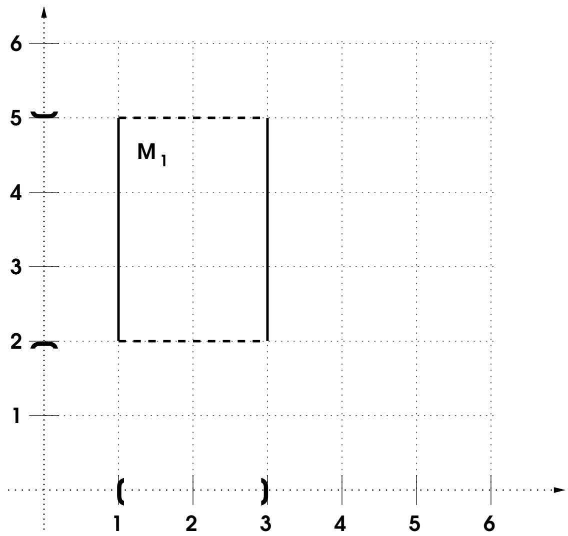
M_1, M_2 und M_3 seien Produktmengen aus I_1, I_2 und I_3 gemäß

$$M_1 = I_1 \times I_2\,,$$
$$M_2 = I_2 \times I_3$$

und

$$M_3 = I_3 \times I_1\,.$$

Skizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3 in das rechts stehende Achsenkreuz.



(b) Welche der folgenden Alternativen sind richtig?

$M_1 \cap M_2 =$

☐ $(2,3] \times (2,4]$ ☐ $(2,3) \times (2,4)$ ☐ $(2,3]^2$

$M_1 \cap M_2 \cap M_3 =$

☐ $(2,3]^2$ ☐ $(2,3) \times (2,3]$ ☐ $(2,3] \times (2,3]$

$M_1 \setminus M_3 =$

☐ $[1,3] \times [3,5)$ ☐ $[1,3] \times (3,5)$ ☐ $[1,3) \times (3,5)$

$M_1 \cap M_2 \setminus M_3 =$

☐ $[2,3) \times (3,4]$ ☐ $(2,3] \times [3,4]$ ☐ $(2,3] \times (3,4]$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

Aufgabe 11:

Gelten für beliebige Mengen A, B, C, D folgende Beziehungen?

$$
\begin{array}{ll}
(a) & (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) \\
(b) & (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)
\end{array}
$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 11

Komplexe Zahlen: Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division

Aufgabe 12:

Es seien $a = 7 - 5\,i, b = 2 + i$ und $c = 8\,i$ gegeben. Berechnen Sie d mit

$$
\begin{array}{llll}
(a) \quad d = a + b & (b) \quad d = b - a & (c) \quad d = a \cdot b & (d) \quad d = \dfrac{b}{a} \\
(e) \quad d = a + i\,b - b \cdot a & (f) \quad d = \mathrm{Re}(a + 4\,b) & (g) \quad d = \mathrm{Im}(c - \overline{b}) & (h) \quad d = \overline{(a - \overline{b})}(\overline{c} + b)
\end{array}
$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 12

Aufgabe 13:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und stellen Sie sie in kartesischer Form (a+i b) dar:

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & \dfrac{5 + 3\,i}{2 + 4\,i} & (b) & \dfrac{13 - 5\,i}{1 - i} & (c) & \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i} \\
(d) & \dfrac{(1 + 2\,i)\overline{(1 + 2\,i)}}{5 + 5\,i} & (e) & \dfrac{(1 + 3\,i)(-2 - 3\,i)}{(3 - i)(2 - 3\,i)} & (f) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{5 + 2\,i}{-3 + 5\,i}\right) \\
(g) & \dfrac{\mathrm{Re}(5 + 2\imath)}{\mathrm{Re}(-3 + 5\,i)} & (h) & \dfrac{\mathrm{Im}(-3 + 5\,i)}{\mathrm{Im}(5 + 2\,i) + \mathrm{Re}(5 + 2\,i)} & &
\end{array}
$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 12

Lösung 1

(a)

$$\{1,2,3\} \cap \{1,2,4,5\} = \{1,2\}$$

in verbaler Sprache:

Die Schnittmenge gebldet aus der Menge, die die Zahlen 1, 2 und 3 mit der Menge, die die Zahlen 1, 2, 4 und 5 enthält, ist die Menge, bestehend aus den Zahlen 1 und 2.

(b) Schreiben Sie folgende mathematische Ausdrücke in verbaler Sprache:

$M \subseteq N$	M ist eine Teilmenge von N.	$C = A \cap B$	C ist die Schnittmenge von A und B.
$M \subset N$	M ist eine echte Teilmenge von N.	$A = M \setminus N$	A ist gleich der Menge M ohne die Menge N.

(c) Schreiben Sie folgende Sätze mathematisch:

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

$$A = B \quad :\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A \,:\, x \in B) \,\wedge\, (\forall x \in B \,:\, x \in A)$$

Zwei Mengen heißen disjunkt wenn sie keinen Schnitt haben.

$$A\,,\ B \text{ heißen disjunkt} \quad :\Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

oder

$$A\,,\ B \text{ heißen disjunkt} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in A \,:\, x \notin B$$

oder

$$A\,,\ B \text{ heißen disjunkt} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in B \,:\, x \notin A$$

(d) Beschreiben Sie folgende Ausdrücke mathematisch:

$$M \setminus (N \cap O) \quad \text{und} \quad (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$$

Die Menge $M \setminus (N \cap O)$ beinhaltet folgende Elemente:

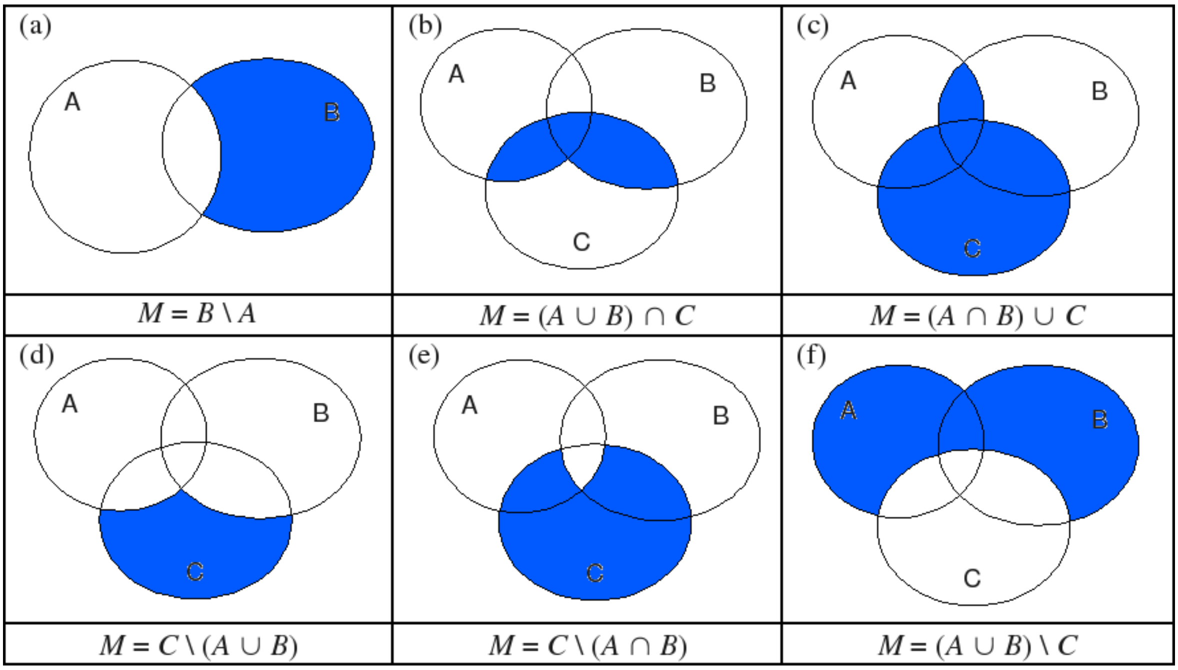
$$x \in M \ \wedge\ (x \notin N \ \vee\ x \notin O)$$

Die Menge $(M \setminus N) \cup (M \setminus O)$ beinhaltet folgende Elemente:

$$(x \in M \ \wedge\ x \notin N) \ \vee\ (x \in M \ \wedge\ x \notin O)$$

Lösung 2 a, b, e und f

Lösung 3



Lösung 4

$$M := \{1, 2, 3\}, \quad N := \{5, 6, 7, 8\} \quad \text{und} \quad C := \{1, 3, 5\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} (a) & (M \cup N) \setminus C = \{2, 6, 7, 8\} & (b) & M \cup (N \setminus C) = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\} \\ (c) & (M \setminus C) \cup N = \{2, 5, 6, 7, 8\} & (d) & C \setminus (M \cap N) = C = \{1, 3, 5\} \\ (e) & (M \cap C) \cup N = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\} & (f) & (C \cup N) \setminus M = N = \{5, 6, 7, 8\} \end{array}$$

Lösung 5

(a) aufzählend:

$$B = \{8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96\}$$

beschreibend:

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid 8 \leq k \leq 96 \ \wedge \ k\%4 = 0\}$$

(b) aufzählend:

$$C = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

beschreibend:

Die Menge der Primzahlen sind natürliche Zahlen, gröser als 1, die nur durch sich und die 1 teilbar sind, also

$$P = \left\{ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, k\} \,:\, \frac{k}{n} \notin \mathbb{N} \right\}.$$

Dann können wir C beschreiben durch

$$C = \{k \in \, P \,|\, 1 < k < 30 \,\wedge\, \exists n \in \, P \,:\, |k - n| = 2\}.$$

(c) Alle natürlichen Zahlen n zwischen 2 und 30 für die gilt, dass alle echten Teiler von n aufsummiert wieder n ergeben.

(Bsp.: 6=1+2+3 und 28=1+2+4+7+14)

Lösung 6

(a)

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2}{3} < x < \frac{19}{3} \right\}$$

(b)

$$[x, y) = \{b \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b < y\}$$

(c)

$$(8, z] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 8 < x \leq z\}$$

(d)

$$\left[-3, \frac{4}{5}\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 \leq x \leq \frac{4}{5} \right\}$$

(e)

$$[2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x < \infty\}$$

Lösung 7

(a)	$[2, 6)$	(b)	$(-\infty, -1]$
(c)	$(2.5, \infty)$	(d)	$[-2, -1]$
(e)	$[-3, 2)$	(f)	$(0, 4]$
(g)	$[-2, 0]$	(h)	$[-1, 0)$
(i)	$[3, \infty)$	(j)	$(0, 0.5)$

Lösung 8

Für die Mengen A, B und C (siehe Abbildung 1)

$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid -2 < x \leq 1\} && = (-2, 1] \\
B &= \{x \mid |x| < 1\} && = (-1, 1) \\
C &= \{x \mid x(x+2)(x-1) = 0\} && = \{0\} \cup \{-2\} \cup \{1\}
\end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{array}{llll}
(a) & A \cap B = B & (c) & A \cap (B \cup C) = \{x \mid -1 < x \leq 1\} = (-1, 1] \\
(b) & A \cap B \cap C = \{0\} & (d) & (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{x \mid -1 < x \leq 1\} = (-1, 1]
\end{array}$$

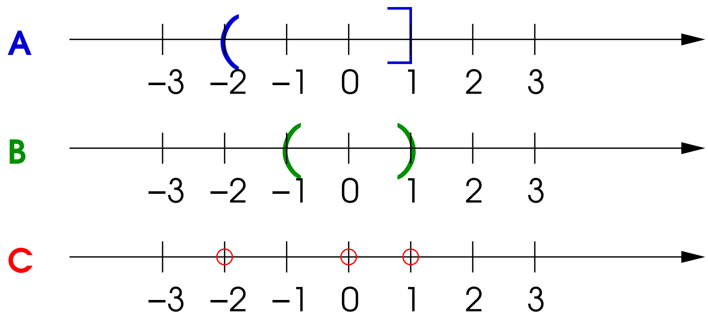


Abbildung 1: Die Mengen A, B und C aufgezeichnet auf Zahlengeraden

Lösung 9

$$\begin{array}{llll}
(a) & [0, 3] & (b) & [-2, -1] \\
(c) & [0, 1) & (d) & [-1, 0)
\end{array}$$

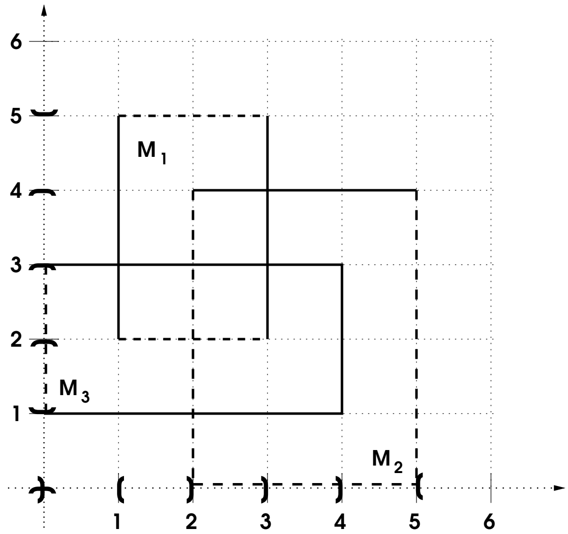
$$(i) \qquad (-5, 1]$$

Lösung 10

$$I_1 = [1, 3]\,, \ I_2 = (2, 5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0, 4]\,.$$

(a)

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$
$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$
$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$



(b) Welche der folgenden Alternativen sind richtig?

$M_1 \cap M_2 =$

☒ $(2,3] \times (2,4]$ ☐ $(2,3) \times (2,4)$ ☐ $(2,3]^2$

$M_1 \cap M_2 \cap M_3 =$

☒ $(2,3]^2$ ☐ $(2,3) \times (2,3]$ ☒ $(2,3] \times (2,3]$

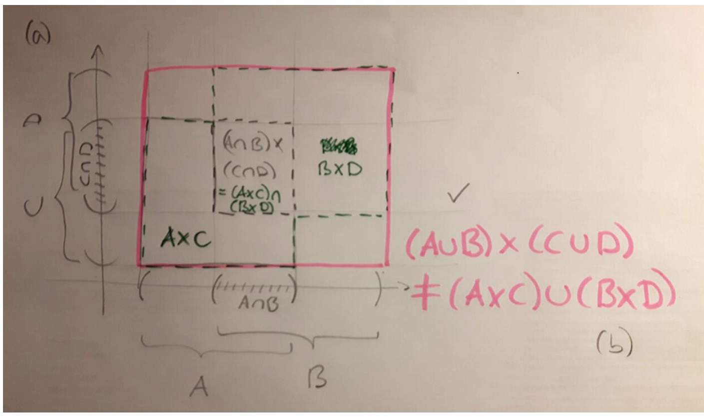
$M_1 \setminus M_3 =$

☐ $[1,3] \times [3,5)$ ☒ $[1,3] \times (3,5)$ ☐ $[1,3) \times (3,5)$

$M_1 \cap M_2 \setminus M_3 =$

☐ $[2,3) \times (3,4]$ ☐ $(2,3] \times [3,4]$ ☒ $(2,3] \times (3,4]$

Lösung 11



Lösung 12

(a)	$d = 9 - 4\,i$	(b)	$d = -5 + 6\,i$	(c)	$d = 19 - 3\,i$	(d)	$d = \frac{9}{74} + \frac{17}{74}\,i$
(e)	$d = -13$	(f)	$d = 15$	(g)	$d = 9$	(h)	$d = 38 - 27\,i$

Lösung 13

(a)	$1.1 - 0.7\,i$	(b)	$9 + 4\,i$	(c)	$\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}\,i$
(d)	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i$	(e)	$\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\,i$	(f)	$\frac{-5}{34}$
(g)	$\frac{-5}{3}$	(h)	$\frac{5}{7}$		