

# Filter

Signale, Systeme und Sensoren: Vorlesung 14

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

# Übersicht

1 Faltung

2 Filter

# Übersicht

1 Faltung

2 Filter

# Wiederholung Faltung

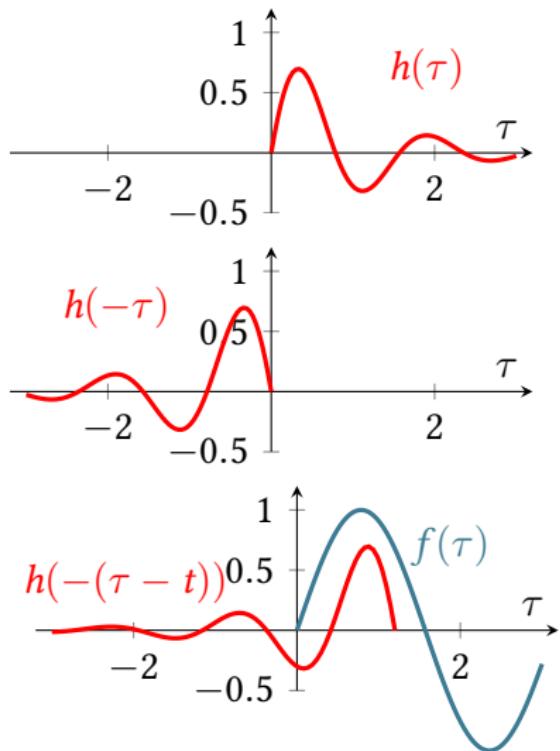
- Genau wie bei Sinusschwingungen kann man auch jedes beliebige Signal aus skalierten und verschobenen Dirac-Impulsen zusammensetzen:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(\tau - t) d\tau.$$

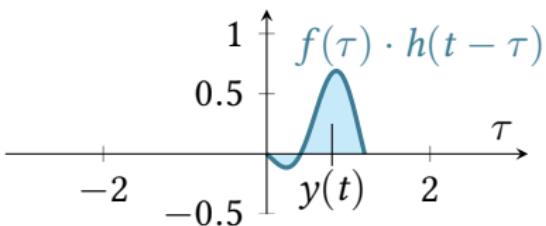
- Statt der Fourierkoeffizienten sind hier die jeweiligen Funktionswerte an der Stelle des Dirac-Impulses die Gewichte.
- Kennt man also die Antwort eines linearen Systems auf jeden zeitverschobenen Dirac-Impuls, so weiß man die Systemantwort auf jedes beliebige Signal.
- Die Wirkung des Systems auf ein Eingangssignal wird durch die sogenannte **Faltung** des Eingangssignals mit der Impulsantwort beschrieben:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = h(t) * f(t).$$

# Interpretation der Faltung $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$



- ❶ Impulsantwort  $h(\tau)$  um  $t$  nach links verschieben.
- ❷ Verschobene Impulsantwort an  $y$ -Achse spiegeln.
- ❸ Punktweise mit dem Signal  $f(\tau)$  multiplizieren.
- ❹ Integral ergibt Ausgangswert  $y(t)$ .

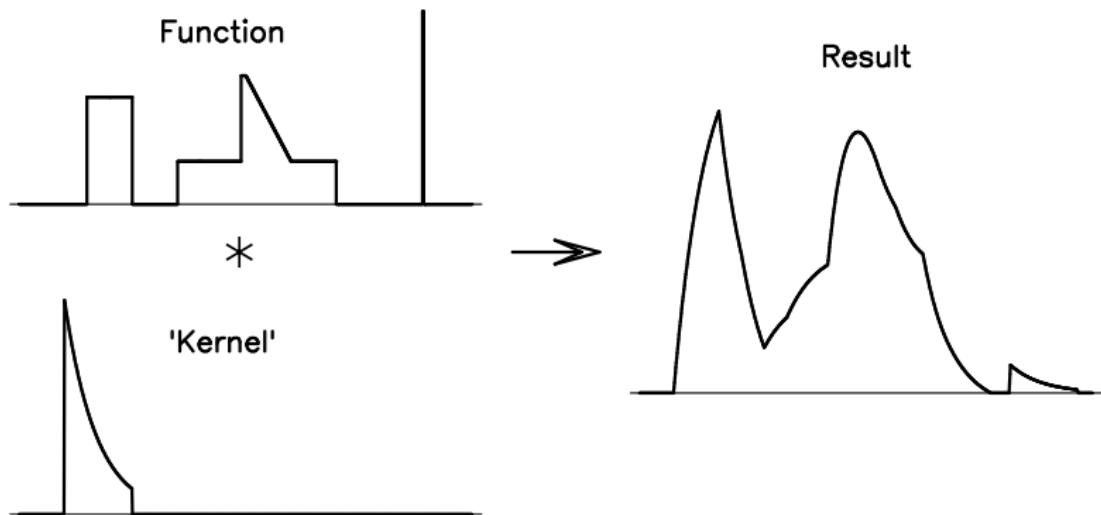


[Tafel]

# Wie wirkt das System auf das Eingangssignal?

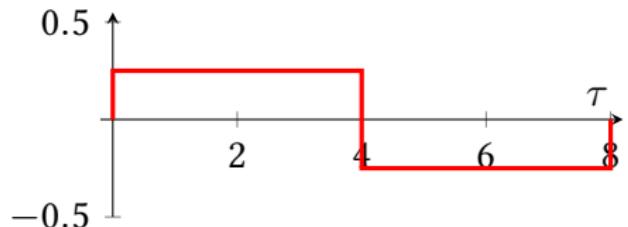
- Die gespiegelte Impulsantwort wird wie ein Fenster (s. Windowing, Vorl. 7) über das Signal geschoben, d.h. sie wirkt wie eine Fensterfunktion (“Flip and Slide”) [Video].
- Im Unterschied zum Windowing liegen die einzelnen Fenster aber unendlich dicht beieinander - für jeden Zeitpunkt gibt es ein Fenster.
- In jedem Fenster wird die gespiegelte Impulsantwort mit dem dortigen Signal **korreliert** (s. Vorl. 9).
- Sind sich Signal und gespiegelte Impulsantwort ähnlich, so ist die Korrelation hoch und damit ergibt sich eine hohe Amplitude des Ausgangssignals, ansonsten ist die Ausgangsamplitude niedrig.
- Das System wirkt also wie ein Detektor für das Vorkommen der gespiegelten Impulsantwort.

## Beispiel: “Detektion” von breiten Sprüngen durch sprungartige Impulsantwort

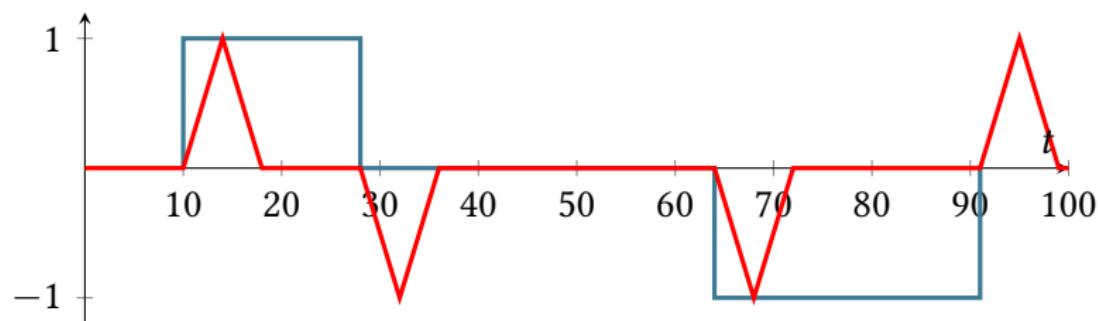
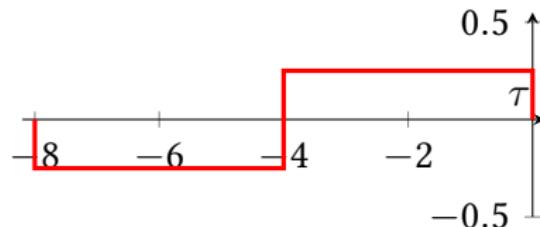


# Beispiel: Kantenfilter

Impulsantwort:



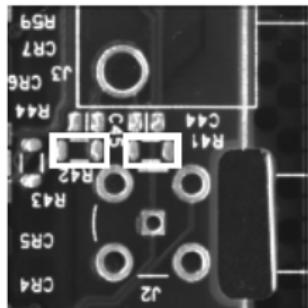
Gespiegelte Impulsantwort:



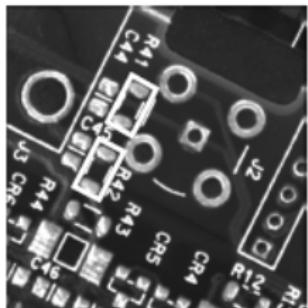
# Beispiel: Mustererkennung mit Schablone



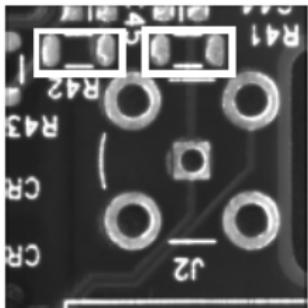
A



B



C

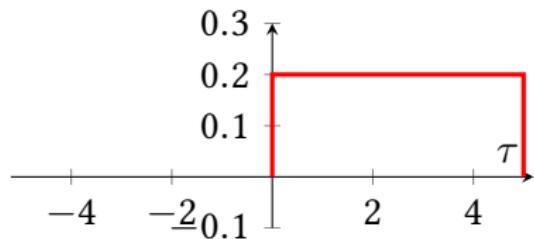


D

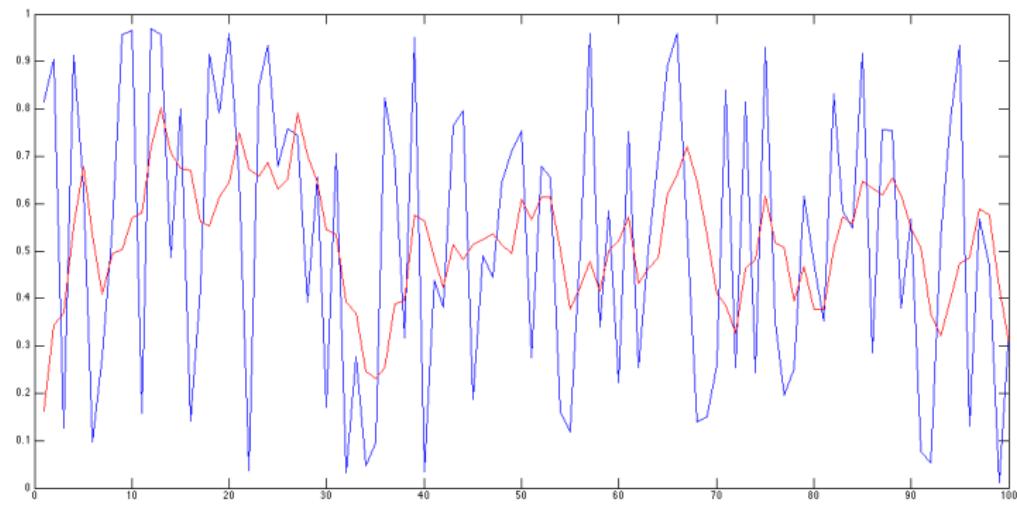
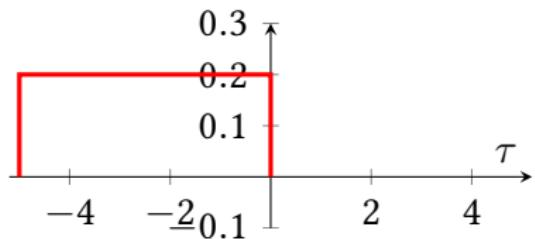
Quelle: National Instruments

# Beispiel: Boxfilter als Glättungsfilter

Impulsantwort:



Gespiegelte Impulsantwort:



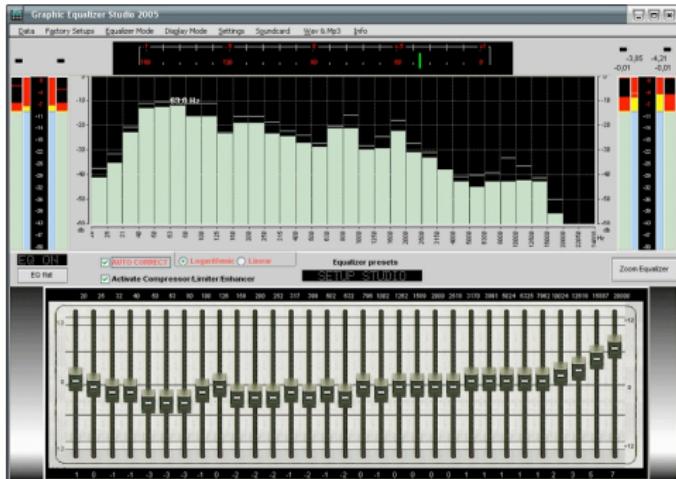
# Übersicht

1 Faltung

2 Filter

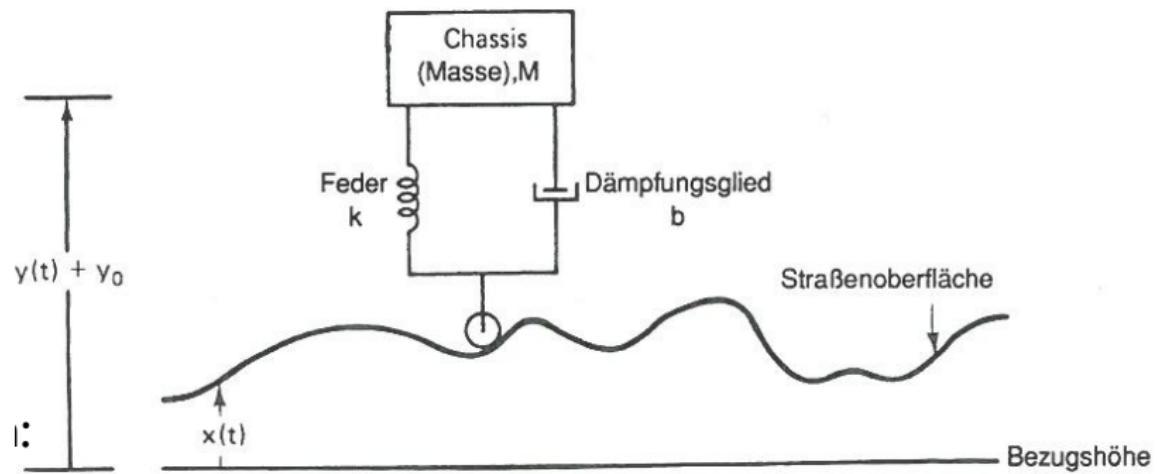
# Filterung

- Die Wirkung eines Systems im Frequenzbereich ist rein multiplikativ.
- Bei vielen Anwendungen möchte man die relativen Amplituden der Frequenzkomponenten in einem Signal verändern oder einige ganz ausschalten.



- Dieser Prozess wird als **Filterung** bezeichnet.
- Je nach Anwendung kann die gewünschte Wirkung des Filters durch Anpassung des Frequenzgangs, d.h. des Faktors  $H(\omega)$  erreicht werden.

# Beispiel: Radaufhängung eines Fahrzeugs



Quelle: Oppenheim & Willsky

Forderungen:

- nur tiefe Frequenzen sollen durchgelassen werden.
- darf nicht nachschwingen.

# Tiefpass



[Quelle: Burger & Burge]

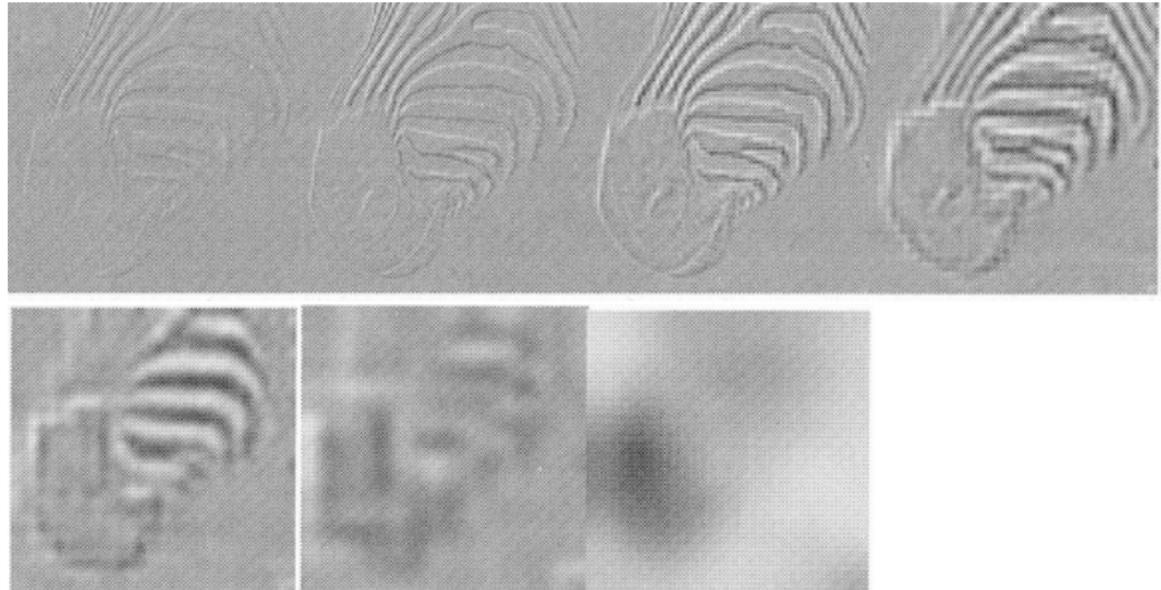
Tiefpässe unterdrücken hohe Frequenzen (d.h. schnell veränderliche Signalanteile) und lassen tiefen Frequenzen durch.

# Hochpass

Hochpässe unterdrücken niedrige Frequenzen (d.h. langsam veränderliche Signalanteile) und lassen hohe Frequenzen durch.



# Bandpass



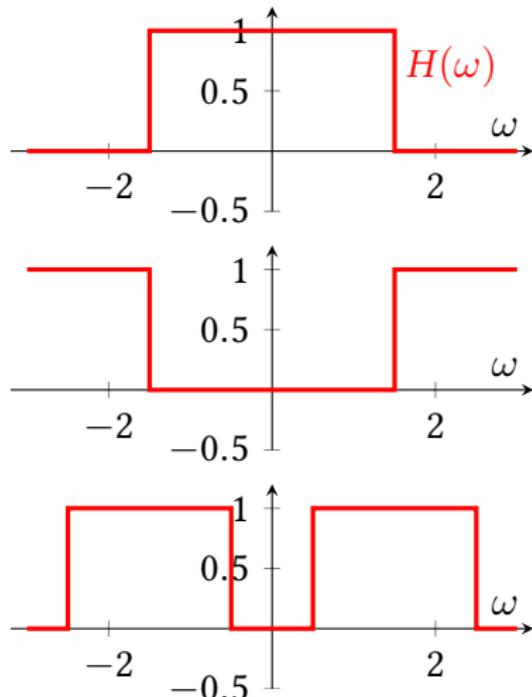
Bandpässe lassen nur einen bestimmten Ausschnitt (d.h. ein Band) des Spektrums durch.

# Ideale frequenzselektive Filter

Bei idealen frequenzselektiven Filtern werden bestimmte Frequenzen unverändert durchgelassen (d.h.  $H(\omega) = 1$ ), andere vollständig ausgeblendet (d.h.  $H(\omega) = 0$ ).

Man spricht vom **Durchlassbereich** und **Sperrbereich** des Filters. Den Übergang von Sperr- zu Durchlassbereich markiert die **Grenzfrequenz**.

Ideale Filter sind extrem scharf im Frequenzbereich lokalisiert. Nach der Unschärferelation führt dies zu einer weiträumigen "Verschmierung" im Zeitbereich.



Bandpass und Bandsperre lassen sich aus Tief- und Hochpässen zusammensetzen.

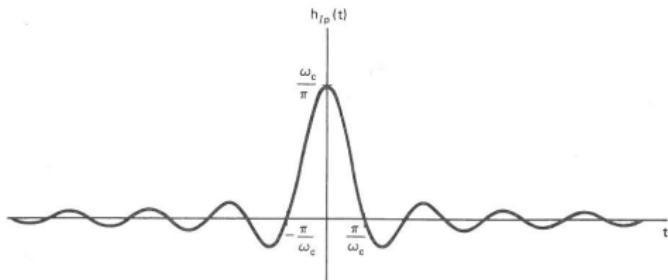
# Ideale Filter im Zeitbereich

Eigenschaften;

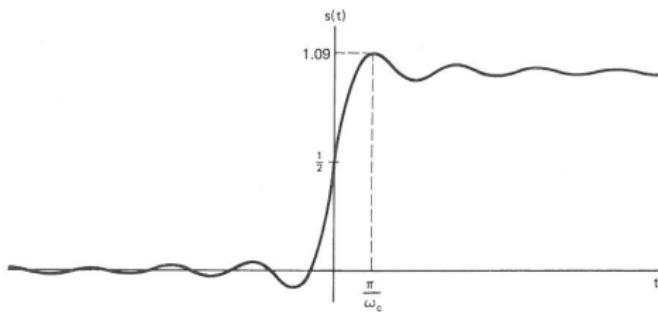
- Nichtkausal
- Unendlich große Impulsantwort (Sinc-Funktion)
- Überschwingen
- Oszillierendes Einschwingen.

Ein solches Verhalten ist im Zeitbereich oft unerwünscht, daher werden Filter häufig mit einem graduellen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich entworfen.

Impulsantwort:



Sprungantwort:

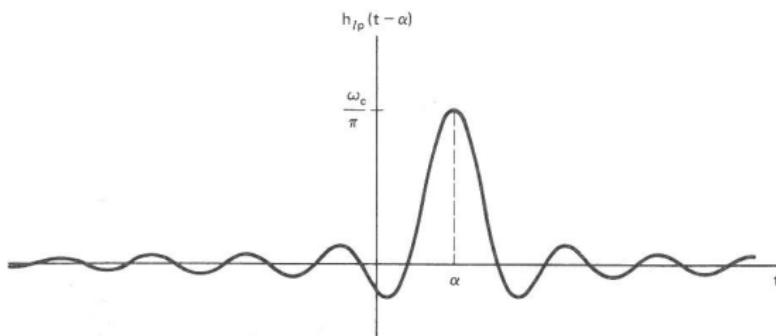


# Verschiebung der Impulsantwort im Zeitbereich

Verschiebungssatz:

$$f(t - a) \circledcirc e^{-i\omega a} \cdot F(\omega),$$

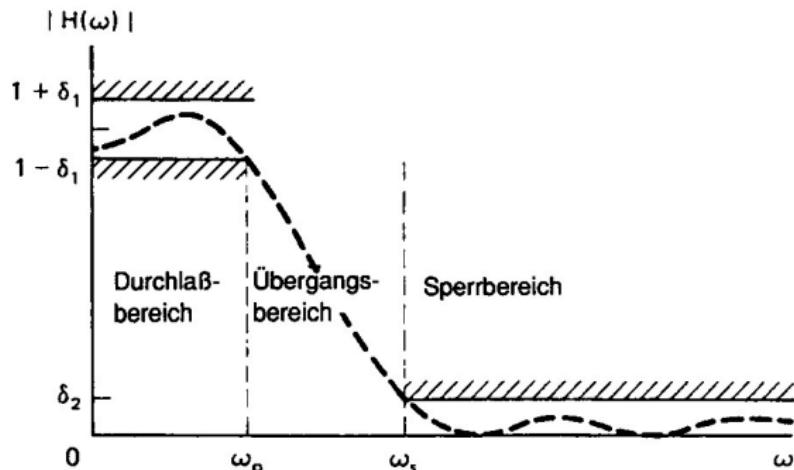
d.h. durch eine Multiplikation des Frequenzgangs mit einem Phasenfaktor  $e^{-i\omega a}$  erreicht man eine Verschiebung der Impulsantwort. Verschiebt man die Impulsantwort so weit in die Zukunft, dass der Teil links vom Ursprung vernachlässigbar wird, erhält man näherungsweise einen kausalen Filter mit (fast) idealen frequenzselektiven Eigenschaften.



# Nichtideale frequenzselektive Filter

Um Überschwinger und Oszillationen zu vermeiden, lässt man Toleranzen im Durchlass- und Sperrbereich und einen Übergangsbereich zu.

- $\delta_1$ : Welligkeit im Durchlassbereich
- $\delta_2$ : Welligkeit im Sperrbereich
- $\omega_p$ : Durchlasskante
- $\omega_s$ : Sperrkante



[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

Da ideale Filter nichtkausal sind, werden sie für Echtzeitanwendungen oft durch nichtideale, aber kausale Filter angenähert.

# Beispiel: Butterworth-Filter

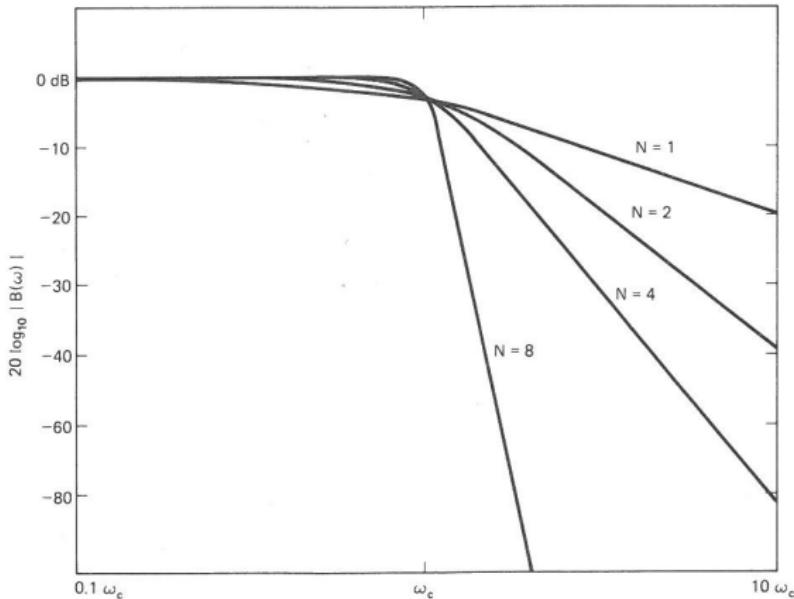
Amplitudengang:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

$N$ : Ordnung des Filters.

Merkmale:

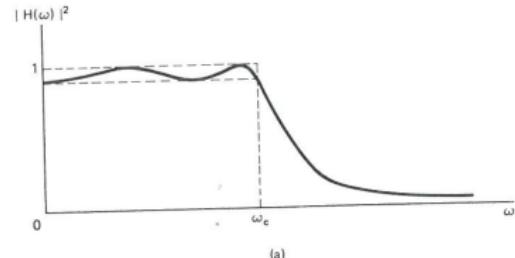
- Monotone Betragskurve
- Maximal flacher Frequenzgang



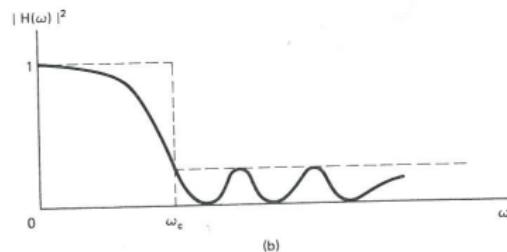
Je höher die Ordnung, desto aufwändiger wird die Implementierung des Filters im Zeitbereich.

# Beispiel: Tschebyscheff- und elliptische Filter

Tschebyscheff: gleiche Welligkeit im Durchlassbereich



Tschebyscheff: gleiche Welligkeit im Sperrbereich



Elliptisch: gleiche Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich

