Übungsblatt 4 - mit Lösungen

Kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

{Theoretische Informatik}@AIN3
Prof. Dr. Barbara Staehle
Wintersemester 2021/2022
HTWG Konstanz

Aufgabe 4.1 Eine kontextfreie Sprache

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, X\}, \{x, y\}, P, S)$ mit der Produktionsmenge $P = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & X \\ X & \rightarrow & xXy \\ X & \rightarrow & xy \end{array} \}$

Teilaufgabe 4.1.1 Von G erzeugte Sprache, 2 Punkte

Geben Sie an

a) 3 Worte, welche man aus G ableiten kann,

b) $\mathscr{L}(G)$, also alle von G erzeugten Worte.

Lösung

a) $xy, xxyy, xxxyyy$

b) $\mathscr{L}(G) = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Teilaufgabe 4.1.2 Chomsky-Normalform, 4 Punkte

Geben Sie für G eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$ an.

Lösung

a) 1. Schritt: Elimination der ε-Regeln: Nichts zu tun

b) 2. Schritt: Elimination von Kettenregeln: Eliminiere $S \rightarrow X$
$P = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & xSy \\ S & \rightarrow & xy \end{array} \}$

c) 3. Schritt: Separation von Terminalzeichen
$P = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & USV \\ S & \rightarrow & UV \\ U & \rightarrow & x \\ V & \rightarrow & y \end{array} \}$

d) 4. Schritt: Elimination mehrelementiger Nonterminalketten

$$P = \{ \begin{array}{lcl} S & \to & UW \\ S & \to & UV \\ W & \to & SV \\ U & \to & x \\ V & \to & y \end{array} \}$$

$G' = (\{S,U,V,W\},\{x,y\},P,S)$ und P wie nach Schritt 4 angegeben.

AUFGABE 4.2 EINE CNF FÜR DIE DYCK-SPRACHE, 3 PUNKTE

Von Übungsblatt 2 ist Ihnen die Grammatik G_4 zur Erzeugung der Dyck-Sprache D_4 bekannt:

- $G_4 = \{N, \Sigma, P, S\} = \{\{S\}, \{(,),[,],\{,\},<,>\}, P, S\}$
- Die Produktionsmenge P besteht aus den Regeln:

$$S \to \varepsilon \mid SS \mid [S] \mid (S) \mid \{S\} \mid \ < S >$$

a) Modifizieren Sie die Grammatik so, dass sich das leere Wort nicht mehr ableiten lässt.

b) Übersetzen Sie die modifizierte Grammatik in Chomsky-Normalform.

c) Generieren Sie mit Hilfe der Grammatik in Chomsky-Normalform eine Ableitung und den dazugehörigen Ableitungsbaum für das Wort $[] < \{([])()\} >$

LÖSUNG

a) $P : S \to [] \mid () \mid \{\} \mid \ <> \ \mid SS \mid [S] \mid (S) \mid \{S\} \mid \ < S >$

b)
1) 1. Schritt: Elimination der ε-Regeln: Nichts zu tun
2) 2. Schritt: Elimination von Kettenregeln: Nichts zu tun
3) 3. Schritt: Separation von Terminalzeichen
   $S \to V_[V_] \mid V_(V_) \mid V_\{ V_\} \mid V_< V_> \mid SS \mid V_[S V_] \mid V_(S V_) \mid V_\{ S V_\} \mid V_< S V_>$
   $V_[\to [$
   $V_] \to]$
   $V_(\to ($
   $V_) \to)$
   $V_\{ \to \{$
   $V_\} \to \}$
   $V_< \to <$
   $V_> \to >$

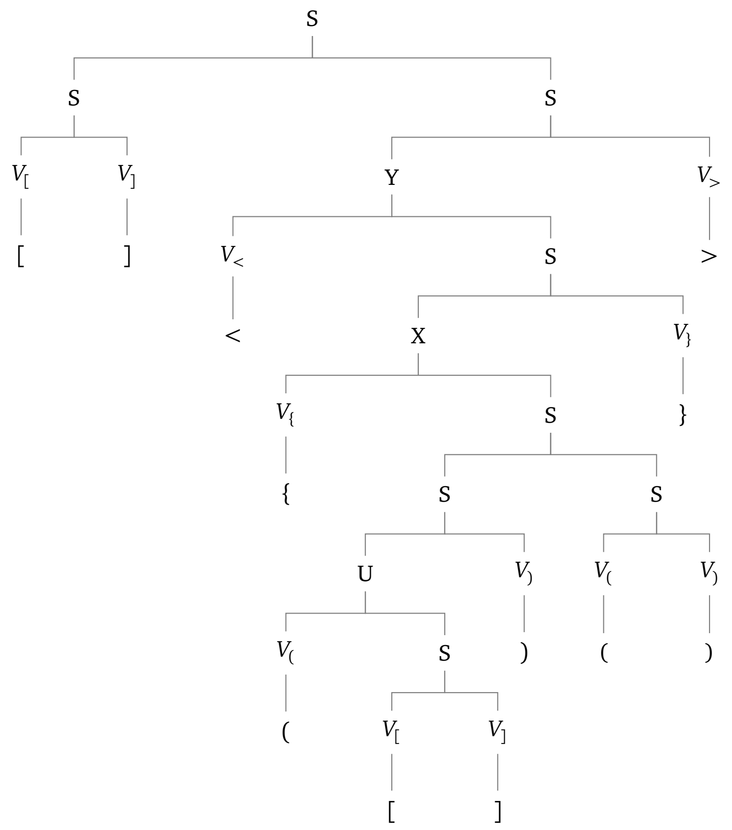
4) 4. Schritt: Elimination mehrelementiger Nonterminalketten
   $S \to V_[V_] \mid V_(V_) V_\{ V_\} \mid V_< V_> \mid SS \mid T V_] \mid U V_) \mid X V_\} \mid Y V_>$
   $V_[\to [$
   $V_] \to]$
   $V_(\to ($
   $V_) \to)$
   $T \to V_[S$
   $U \to V_(S$
   $X \to V_\{ S$

$Y \to V_< S$

$G_{4CNF} = (N, \Sigma, P, S) = (\{S, V_[, V_], V_(, V_), V_\{, V_\}, V_<, V_>\}, \{[,], (,), \{, \}, <, >\}, P, S)$ mit P wie nach Schritt 4 angegeben.

c)

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow SS \\
&\Rightarrow V_[V_] S \\
&\Rightarrow V_[V_] Y V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< S V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< X V_\} V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< V_\{ S V_\} V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< V_\{ S S V_\} V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< V_\{ U V_) S V_\} V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< V_\{ V_(S V_) S V_\} V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< V_\{ V_(V_[V_] V_) S V_\} V_> \\
&\Rightarrow V_[V_] V_< V_\{ V_(V_[V_] V_) V_(V_) V_\} V_> \\
&\Rightarrow^* [\,] < \{([\,])()\} >
\end{aligned}$$



Aufgabe 4.3 Chomsky-Normalform und CYK-Alogrithmus

Gegeben seien die Grammatiken $G_x = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit der Produktionsmenge

$$P_x = \{S \to aSb, S \to b\}$$

und $G_y = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit der Produktionsmenge

$$P_y = \{S \to cAB, A \to aAb, B \to cBb, A \to ab, B \to \epsilon\}$$

Teilaufgabe 4.3.1 2 Punkte

Geben Sie für die Grammatik G_x eine Grammatik G'_x in Chomsky-Normalform mit $\mathscr{L}(G_x) = \mathscr{L}(G'_x)$ an.

Lösung

a) 1. Schritt: Elimination der ε-Regeln: Nichts zu tun

b) 2. Schritt: Elimination von Kettenregeln: Nichts zu tun

c) 3. Schritt: Separation von Terminalzeichen

$$P_x = \{ \begin{array}{lcl} S & \to & ASB \\ S & \to & b \\ A & \to & a \\ B & \to & b \end{array} \}$$

d) 4. Schritt: Elimination mehrelementiger Nonterminalketten

$$P_x = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & TB \\ S & \rightarrow & b \\ T & \rightarrow & AS \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \end{array} \}$$

$G'_x = (\{S, T, A, B\}, \{a, b\}, P_x, S)$ und P_x wie nach Schritt 4 angegeben.

TEILAUFGABE 4.3.2 3 PUNKTE

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen aus dem CYK-Algorithmus, welche der Wörter abb, $aabb$ und $aabbb$ zur Sprache $\mathscr{L}(G_x)$ gehören.
Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis - welche Sprache wird von G_x erzeugt?

LÖSUNG

a) $abb \in \mathscr{L}(G_x)$:

cyk	i=1 a	i=2 b	i=3 b
$j=1$	$\{A\}$	$\{S,B\}$	$\{S,B\}$
$j=2$	$\{T\}$	$\{\}$	
$j=3$	$\{S\}$		

b) $aabb \notin \mathscr{L}(G_x)$:

cyk	i=1 a	i=2 a	i=3 b	i=4 b
$j=1$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{S,B\}$	$\{S,B\}$
$j=2$	$\{\}$	$\{T\}$	$\{\}$	
$j=3$	$\{\}$	$\{S\}$		
$j=4$	$\{T\}$			

c) $aabbb \in \mathscr{L}(G_x)$:

cyk	i=1 a	i=2 a	i=3 b	i=4 b	i = 5 b
$j=1$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{S,B\}$	$\{S,B\}$	$\{S,B\}$
$j=2$	$\{\}$	$\{T\}$	$\{\}$	$\{\}$	
$j=3$	$\{\}$	$\{S\}$	$\{\}$		
$j=4$	$\{T\}$	$\{\}$			
$j=5$	$\{S\}$				

d) $\mathscr{L}(G_x) = \{a^n b^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

TEILAUFGABE 4.3.3 3 PUNKTE

Geben Sie für die Grammatik G_y eine Grammatik G'_y in Chomsky-Normalform mit $\mathscr{L}(G_y) = \mathscr{L}(G'_y)$ an.

LÖSUNG

a) 1. Schritt: Elimination der ε-Regeln: $P_y = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & cAB \\ S & \rightarrow & cA \\ A & \rightarrow & aAb \\ B & \rightarrow & cBb \\ B & \rightarrow & cb \\ A & \rightarrow & ab \end{array} \}$

b) 2. Schritt: Elimination von Kettenregeln: Nichts zu tun

c) 3. Schritt: Separation von Terminalzeichen

$$P_y = \{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ZAB \\ S & \rightarrow & ZA \\ A & \rightarrow & XAY \\ B & \rightarrow & ZBY \\ B & \rightarrow & ZY \\ A & \rightarrow & XY \\ X & \rightarrow & a \\ Y & \rightarrow & b \\ Z & \rightarrow & c \end{array} \}$$

d) 4. Schritt: Elimination mehrelementiger Nonterminalketten

$$P_y = \{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & TB \\ S & \rightarrow & ZA \\ T & \rightarrow & ZA \\ A & \rightarrow & UY \\ U & \rightarrow & XA \\ B & \rightarrow & VY \\ V & \rightarrow & ZB \\ B & \rightarrow & ZY \\ A & \rightarrow & XY \\ X & \rightarrow & a \\ Y & \rightarrow & b \\ Z & \rightarrow & c \end{array} \}$$

$G'_y = (\{S, T, U, V, A, B, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P_y, S)$ und P_y wie nach Schritt 4 angegeben.

Teilaufgabe 4.3.4 4 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen aus dem CYK-Algorithmus, welche der Wörter cab, $cabcb$ und $caabcb$ zur Sprache $\mathscr{L}(G_y)$ gehören.
Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis - welche Sprache wird von G_y erzeugt?

Lösung

a) $cab \in \mathscr{L}(G_y)$:

cyk	i=1 a	i=2 b	i=3 b
$j=1$	$\{Z\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$
$j=2$	$\{\}$	$\{A\}$	
$j=3$	$\{S\}$		

b) $cabcb \in \mathscr{L}(G_y)$:

cyk	i=1 c	i=2 a	i=3 b	i=4 c	i = 5 b
$j=1$	$\{Z\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{Y\}$
$j=2$	$\{\}$	$\{A\}$	$\{\}$	$\{B\}$	
$j=3$	$\{S,T\}$	$\{\}$	$\{\}$		
$j=4$	$\{\}$	$\{\}$			
$j=5$	$\{S\}$				

c) $caabcb \notin \mathscr{L}(G_x)$:

cyk	i=1 a	i=2 a	i=3 a	i=4 b	i = 5 c	i = 6 b
$j=1$	$\{Z\}$	$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{Y\}$
$j=2$	$\{\}$	$\{\}$	$\{A\}$	$\{\}$	$\{B\}$	
$j=3$	$\{\}$	$\{U\}$	$\{\}$	$\{\}$		
$j=4$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$			
$j=5$	$\{\}$	$\{\}$				
$j=6$	$\{\}$					

d) $\mathscr{L}(G_y) = \{ca^n b^n c^m b^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\} = \{cab, cabcb, caabbcb, \ldots, caaaabbbb, \ldots, caabbccccbbbb, \ldots\}$

Aufgabe 4.4 Eine Formelsprache, 3 Punkte

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{x, y, *, +\}$ sowie die Sprache
$L_F = \{$ korrekt formulierte mathematische Formeln mit Symbolen aus Σ $\}$.

L_F wird von der **kontextfreien** Grammatik $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S)$ mit $N_2 = \{S, T, R\}$ und $P_2 = \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & TRT \\ T & \rightarrow & TRT \mid x \mid y \\ R & \rightarrow & * \mid + \end{array}$
erzeugt.

a) Geben Sie eine **reguläre** Grammatik G_3, welche L_F ebenfalls erzeugt (mit $\mathscr{L}(G_3) = L_F$).

b) Bringen Sie die Grammatik G_2 in die Chomsky-Normalform.

Lösung

a) reguläre Grammatik: $G_3 = (N_3, \Sigma, P_3, S)$ mit $N_3 = \{S, T, R\}$ und $P_3 = \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & xT \mid yT \\ T & \rightarrow & +R \mid *R \\ R & \rightarrow & x \mid y \mid xT \mid yT \end{array}$

b) Überführung von G_2 in CNF

1) 1. Schritt: Elimination der ε-Regeln: Nichts zu tun

2) 2. Schritt: Elimination von Kettenregeln: $P_2' = \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & TX \\ T & \rightarrow & TX \mid x \mid y \\ R & \rightarrow & * \mid + \\ X & \rightarrow & RT \end{array}$

3) 3. Schritt: Separation von Terminalzeichen: Nichts zu tun

4) 4. Schritt: Elimination mehrelementiger Nonterminalketten: Nichts zu tun

$G_{2CNF} = (N_2', \Sigma, P_2', S)$ mit $N_2' = \{S, T, R, X\}$ und P_2' wie nach Schritt 2 angegeben.

Aufgabe 4.5 Der Kellerautomat P_{ab}

Betrachten Sie den PDA $P_{ab} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben wie folgt:

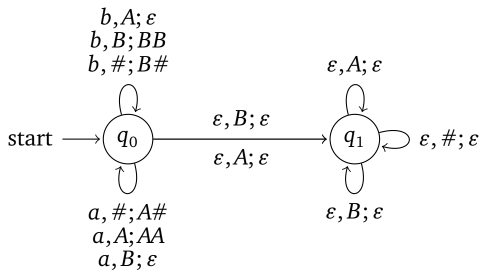


Abbildung 1: Erweitertes Zustandsübergangsdiagramm für P_{ab}

Teilaufgabe 4.5.1 2 Punkte

Bestimmen Sie für die Worte

a) $\omega_1 = ab$

b) $\omega_2 = aab$

c) $\omega_3 = bbbaa$

jeweils alle Konfigurationen (aktueller Zustand, verbleibendes Eingabewort, Inhalt des Kellers), die P_{ab} während der Verarbeitung der Worte durchläuft. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

Lösung

Anmerkung: Da P_{ab} nichtdeterministisch arbeitet, wird jeweils **ein beispielhafter** Verarbeitungsweg gezeigt.

a) $\omega_1 = ab$

$(q_0, ab, \#) \vdash (q_0, b, A\#) \vdash (q_0, \varepsilon, \#)$

Wort komplett eingelesen, Keller ist nicht leer, ω_1 wird nicht akzeptiert (Es gibt auch keinen Verarbeitungsweg, der ω_1 akzeptieren würde).

b) $\omega_2 = aab$

$(q_0, aab, \#) \vdash (q_0, ab, A\#) \vdash (q_0, b, AA\#) \vdash (q_0, \varepsilon, A\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$

Wort komplett eingelesen, Keller leer, ω_2 wird akzeptiert (auch wenn es Verarbeitungswege gibt, die ω_2 nicht akzeptieren).

c) $\omega_3 = bbbaa$

$(q_0, bbbaa, \#) \vdash (q_0, bbaa, B\#) \vdash (q_0, baa, BB\#) \vdash (q_0, aa, BBB\#) \vdash (q_0, a, BB\#) \vdash (q_0, \varepsilon, B\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$

Wort komplett eingelesen, Keller ist leer, ω_3 wird akzeptiert (auch wenn es Verarbeitungswege gibt, die ω_3 nicht akzeptieren).

Teilaufgabe 4.5.2 2 Punkte

Welche Sprache $\mathscr{L}(P_{ab})$ wird von P_{ab} akzeptiert?

Lösung

$\mathscr{L}(P_{ab}) = \{\omega \in \Sigma^+ \mid \omega = |\omega|_a \neq |\omega|_b\} = \{\omega \in \Sigma^+ \mid \omega$ enthält nicht die gleiche Anzahl von as und bs$\}$

Aufgabe 4.6 Der Kellerautomat P_{01}

Betrachten Sie den PDA $P_{01} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{A, B, X, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben wie folgt:

- $\delta(q_0, 0, \#) = (q_1, A\#)$
- $\delta(q_0, 1, \#) = (q_3, B\#)$
- $\delta(q_0, \varepsilon, \#) = (q_0, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, 0, A) = (q_1, AA)$
- $\delta(q_1, 1, A) = (q_2, \varepsilon)$
- $\delta(q_2, \varepsilon, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, \varepsilon, \#) = (q_0, \varepsilon)$
- $\delta(q_2, \varepsilon, \#) = (q_3, X)$
- $\delta(q_3, 1, B) = (q_3, BB)$
- $\delta(q_3, 0, B) = (q_3, X)$
- $\delta(q_3, 0, X) = (q_3, \varepsilon)$
- $\delta(q_3, 1, X) = (q_3, XB)$
- $\delta(q_3, \varepsilon, \#) = (q_0, \#)$

Teilaufgabe 4.6.1 1 Punkt

Stellen Sie die Zustandsübergangsfunktion mit Hilfe eines Graphen dar.

LÖSUNG

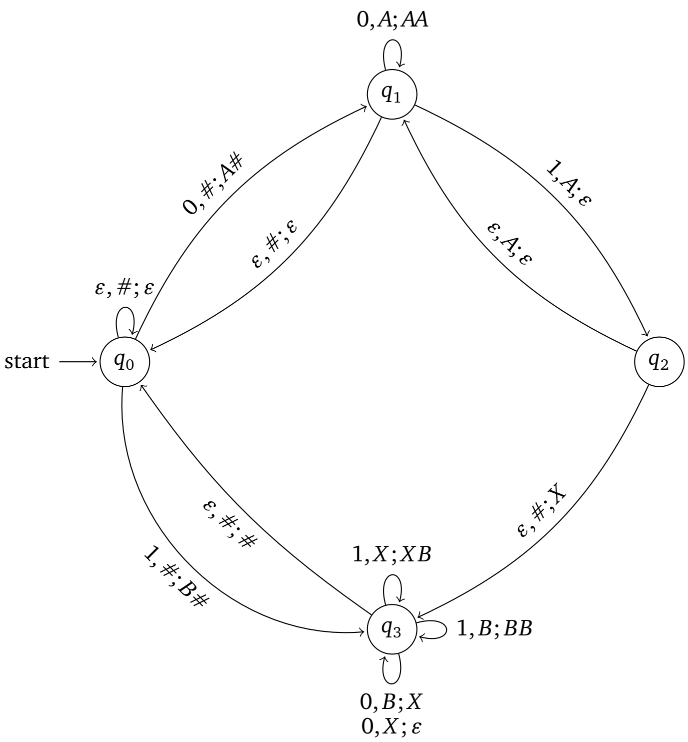


Abbildung 2: Erweitertes Zustandsübergangsdiagramm für P_{01}

TEILAUFGABE 4.6.2 3 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Worte

a) $\omega_1 = 001$

b) $\omega_2 = 101$

c) $\omega_3 = 100001$

jeweils alle Konfigurationen (aktueller Zustand, verbleibendes Eingabewort, Inhalt des Kellers), die P_{01} während der Verarbeitung der Worte durchläuft. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

LÖSUNG

a) $\omega_1 = 001$
$(q_0, 001, \#) \vdash (q_1, 01, A\#) \vdash (q_1, 1, AA\#) \vdash (q_2, \varepsilon, A\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$
Wort komplett eingelesen, Keller ist leer, ω_1 wird akzeptiert.

b) $\omega_2 = 101$
$(q_0, 101, \#) \vdash (q_3, 01, B\#) \vdash (q_3, 1, X\#) \vdash (q_3, \varepsilon, XB\#)$
Wort komplett eingelesen, aber Keller nicht leer, ω_2 wird nicht akzeptiert.

c) $\omega_3 = 100001$

$(q_0, 100001, \#) \vdash (q_3, 00001, B\#) \vdash (q_3, 0001, X\#) \vdash (q_3, 001, \#) \vdash (q_0, 001, \#) \vdash (q_1, 01, A\#)$
$\vdash (q_1, 1, AA\#) \vdash (q_2, \varepsilon, A\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$

Wort komplett eingelesen, Keller ist leer, ω_3 wird akzeptiert.

Teilaufgabe 4.6.3 2 Punkte

Welche Sprache $\mathscr{L}(P_{01})$ wird von P_{01} akzeptiert?

Lösung

$\mathscr{L}(P_{01}) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega = |\omega|_0 = 2 \cdot |\omega|_1\} = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega$ emthält doppelt so viele 0en wie 1en$\}$

Aufgabe 4.7 Ein PDA für die OTTO-Zahlen

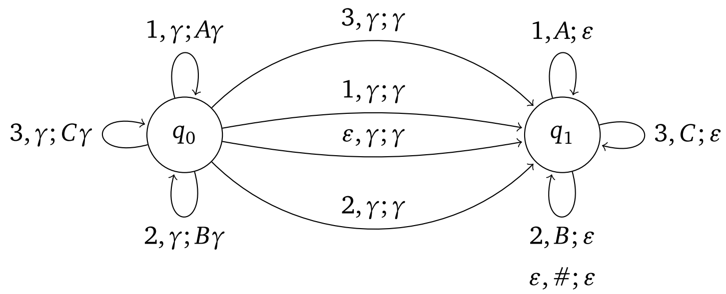
Erinnern Sie sich an die OTTO-Zahlen (siehe Übungsblatt 2). Wir betrachten jetzt allerdings nur OTTO-Zahlen mit dem Ziffernvorrat 1-3: $L_{O3} \subseteq \{1, 2, 3\}^*$ mit
$L_{O3} = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 121, 131 \dots 2332 \dots 132321, \dots\}$, also die natürlichen Zahlen aus Ziffern von 1-3, die von vorne und hinten gelesen gleich sind.

Teilaufgabe 4.7.1 3 Punkte

Geben Sie den PDA P_{O3} an, der L_{O3} akzeptiert.

Lösung

$P_{O3} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{1, 2, 3\}, \{A, B, C, \#\}, \delta, q_0)$ mit $\gamma \in \Gamma$, sowie δ gegeben durch



Teilaufgabe 4.7.2 2 Punkte

Bestimmen Sie für die Worte

a) $\omega_1 = 123321$

b) $\omega_2 = 321311$

jeweils alle Konfigurationen, die P_{O3} während der Verarbeitung der Worte **auf einem möglichen Pfad** durchläuft. Falls es einen akzeptierenden Pfad gibt, so wählen Sie bitte diesen. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

LÖSUNG

a) $\omega_1 = 123321$

Schritt	Zustand	ω	Keller
0	q_0	123321	$\#$
1	q_0	23321	$A\#$
2	q_0	3321	$BA\#$
3	q_0	321	$CBA\#$
4	q_1	321	$CBA\#$
5	q_1	21	$BA\#$
6	q_1	1	$A\#$
7	q_1	ε	$\#$

ω_1 wurde vollständig eingelesen, der Keller ist leer, damit wird es akzeptiert.

b) $\omega_2 = 321311$

$$\begin{aligned}(q_0, 321311, \#) &\vdash (q_0, 21311, A\#)\\ &\vdash (q_0, 1311, BA\#)\\ &\vdash (q_0, 311, ABA\#)\\ &\vdash (q_0, 11, CABA\#)\\ &\vdash (q_0, 1, ACABA\#)\\ &\vdash (q_0, \varepsilon, AACABA)\end{aligned}$$

Ein Beispiel eines nicht-akzeptierenden Weges - ω_2 wird nicht akzeptiert.

AUFGABE 4.8 VERSCHIEDENE KELLERAUTOMATEN

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{x, y\}$, sowie die folgenden Sprachen:

a) $L_1 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n\} = \{\varepsilon, y, yy, xy, xyy, xxyy, xxyyy, \ldots\}$

b) $L_2 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m < n\} = \{y, yy, xyy, xxyyy, \ldots\}$

c) $L_3 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq n\} = \{\varepsilon, x, xx, xy, xxy, xxyy, xxxyy, \ldots\}$

d) $L_4 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m > n\} = \{x, xx, xxy, xxxyy, \ldots\}$

e) $L_5 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}, n = 2m\} = \{xyy, xxyyyy, xxxyyyyyy, \ldots\}$

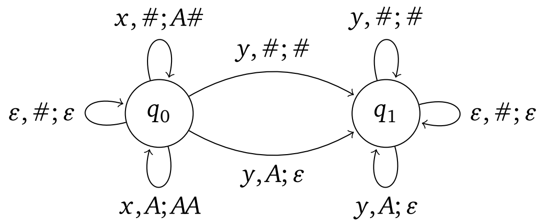
f) $L_6 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}, m = 2n\} = \{xxy, xxxxyy, xxxxxxyyy, \ldots\}$

TEILAUFGABE 4.8.1 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs P_1, P_2, welcher die Sprachen L_1, L_2 erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

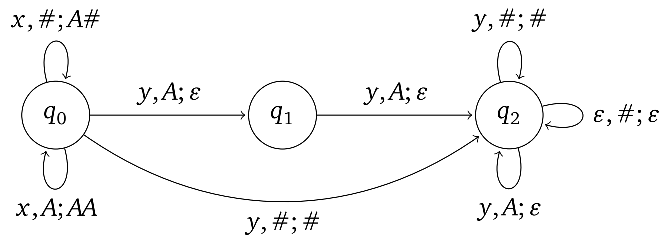
LÖSUNG

a) $P_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{x, y\}, \{A, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben durch



P_1 arbeitet nichtdeterministisch (Zustandsübergänge in q_0, q_1).

b) $P_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{x, y\}, \{A, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben durch



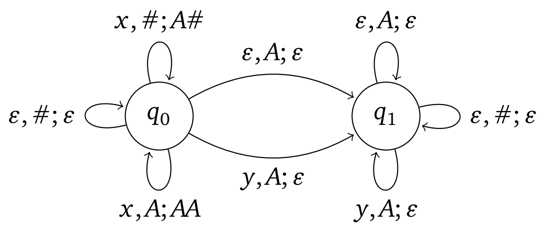
P_2 arbeitet nichtdeterministisch (Zustandsübergänge in q_2).

Teilaufgabe 4.8.2 3 Punkte

Konstruieren Sie die PDAs P_3, P_4, welcher die Sprachen L_3, L_4 erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

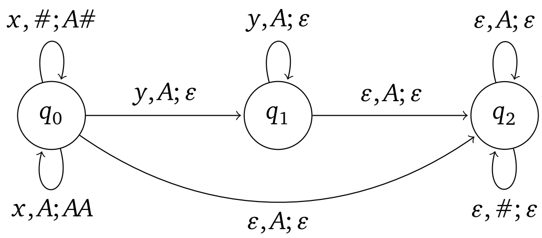
Lösung

c) $P_3 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{x, y\}, \{A, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben durch



P_3 arbeitet nichtdeterministisch (Zustandsübergänge in q_0, q_1).

d) $P_4 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{x, y\}, \{A, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben durch



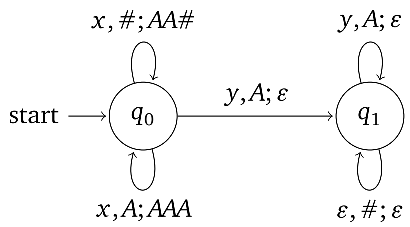
P_4 arbeitet nichtdeterministisch (Zustandsübergänge in q_0, q_1, q_2).

Teilaufgabe 4.8.3 3 Punkte

Konstruieren Sie die PDAs P_5, P_6, welcher die Sprachen L_5, L_6 erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

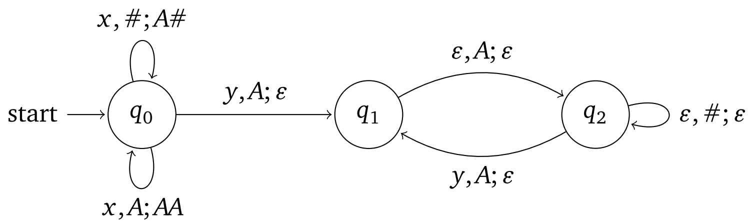
Lösung

e) $P_5 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{x, y\}, \{A, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben durch



P_5 arbeitet deterministisch.

f) $P_6 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{x, y\}, \{A, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben durch



P_6 arbeitet deterministisch.

Teilaufgabe 4.8.4 2 Punkte

Für $a \in \{1, 2, \dots, 6\}$ können die Sprachen L_a jeweils von einer Grammatik $G_a = (\{S\}, \{x, y\}, P_a, S)$ (also nur mit einem einzigen Nonterminal) erzeugt werden.

Geben Sie die Produktionsmengen der verschiedenen Grammatiken ($P_1, P_2, \dots, P_6$) an.

Lösung

a) $P_1 : S \to xSy \mid Sy \mid \varepsilon$

b) $P_2 : S \to xSy \mid Sy \mid y$

c) $P_3 : S \to xSy \mid xS \mid \varepsilon$

d) $P_4 : S \to xSy \mid xS \mid x$

e) $P_5 : S \to xSyy \mid xyy$

f) $P_6 : S \to xxSy \mid xxy$