Systemanalyse

Signale, Systeme und Sensoren: Vorlesung 13

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

1. Systemanalyse
2. Moderne Testsignale
3. Impulsantwort

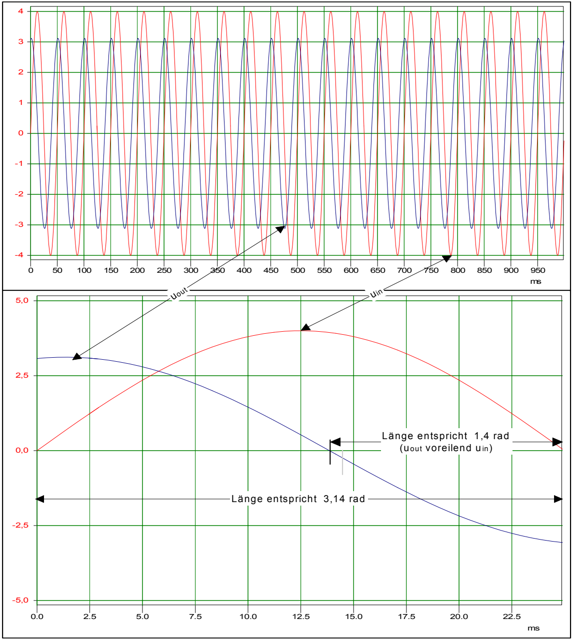
Systemanalyse mit Sinusschwingungen

- Messprinzip: Sinusgenerator, Frequenz einstellbar, und 2-Kanal-Oszilloskop
- Ein- und Ausgangsspannung werden gleichzeitig auf dem Bildschirm dargestellt.
- Der Amplitudengang ergibt sich aus dem Verhältnis von Ausgangs- und Eingangsamplitude: $|H(\omega)| = U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$.
- Der Phasengang (in rad) berechnet sich aus der zeitlichen Verschiebung Δt beider Kurven als

$$\angle H(\omega) = \omega \cdot \Delta t = 2\pi \cdot f \cdot \Delta t.$$

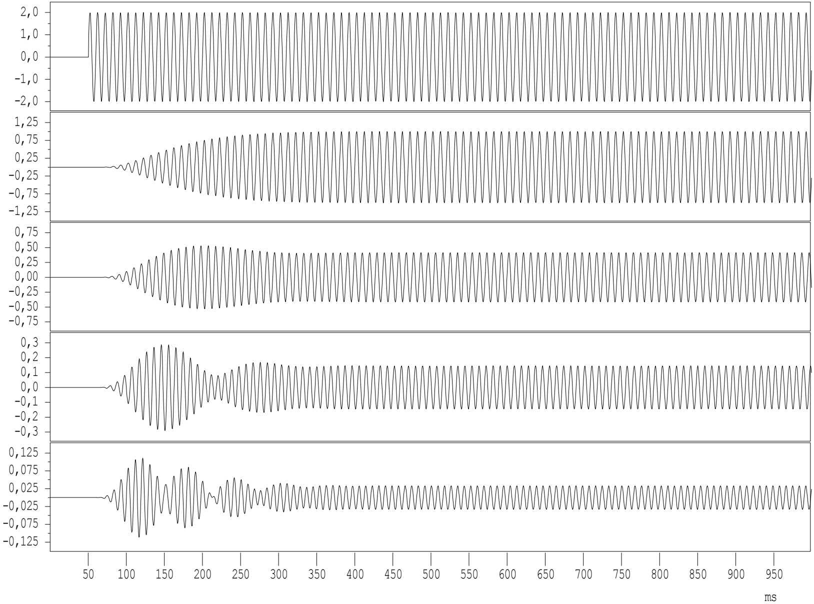
- Wählen Sie zur Messung der Amplituden eine so große Zeitbasis, dass die Wechselspannung als „Balken" auf dem Bildschirm erscheint.
- Zur Messung der Phasendifferenz stellen Sie genau eine halbe Periode des Eingangssignals mit Hilfe des beliebig einstellbaren Zeitbasisreglers ein und lesen die zeitliche Verschiebung ab.

Beispiel: Signalverläufe im Oszilloskop



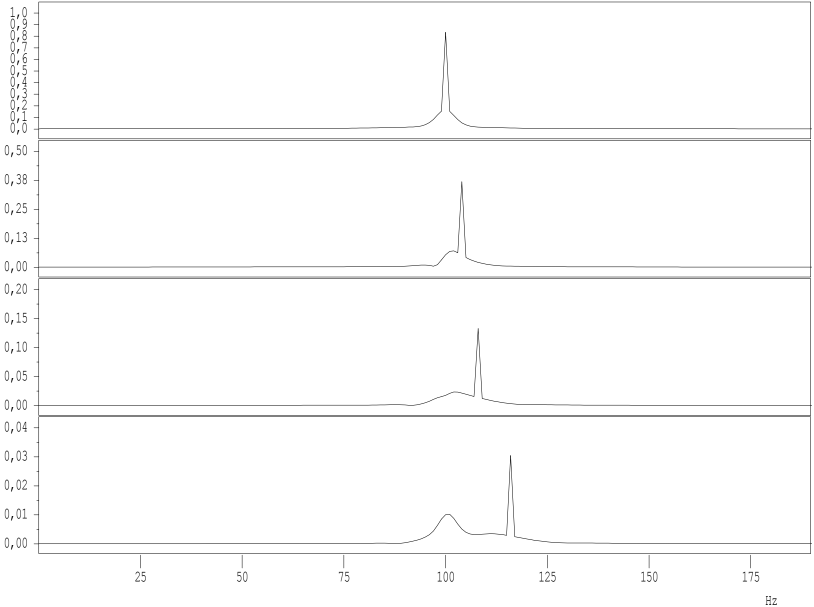
Quelle: Karrenberg, 2012

Problem: Einschwingvorgänge



Quelle: Karrenberg, 2012

Einschwingvorgänge im Frequenzbereich



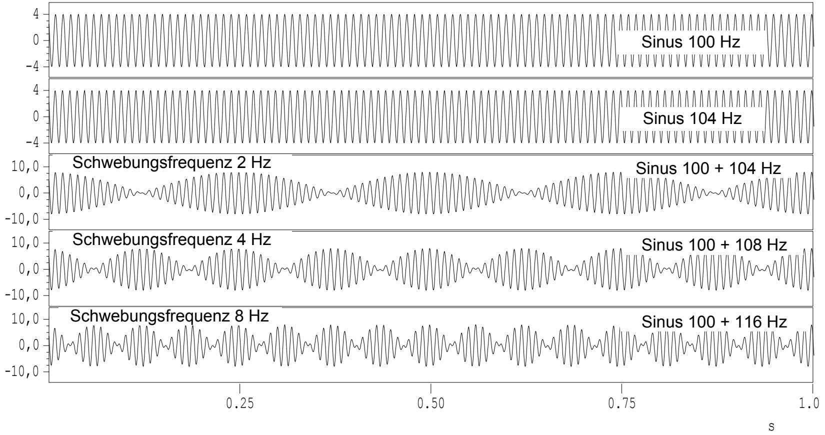
Quelle: Karrenberg, 2012

Einschwingvorgänge bei der Systemanalyse

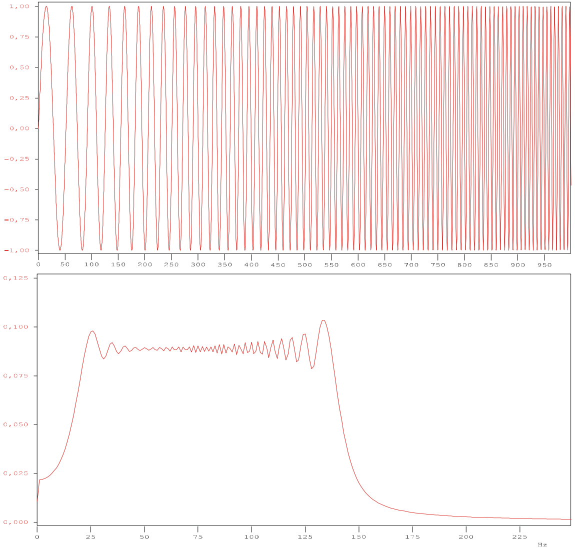
- Viele Systeme sind selbst schwingungsfähig (z.B. Schwingkreise, Brücken, etc.) und schwingen mit ihrer **Eigenfrequenz**, wenn sie von außen angeregt werden. Ohne äußere Anregung klingt diese Eigenschwingung wieder exponentiell ab.
- In einer realen Messung kann die Eingangsschwingung nicht unendlich weit in die Vergangenheit reichen, sondern muss irgendwann eingeschaltet werden.
- Der Einschaltvorgang erzeugt zusätzlich zur Testfrequenz ein ganzes Band weiterer Frequenzen, die die Eigenschwingungen des Systems anstoßen können.
- Zur Messung der Systemantwort muss daher abgewartet werden, bis die Eigenschwingungen abklingen und das System einen **stationären Zustand** erreicht hat.
- Liegen Anregungs- und Eigenfrequenz nahe beieinander, zeigen sich schwebungsartige Interferenzerscheinungen beider Frequenzen.

Beispiel: Schwebung

Eine Schwebung entsteht durch Überlagerung zweier Sinusschwingungen annähernd gleicher Frequenz. Sie äußert sich in einer periodischen Verstärkung und Abschwächung mit der Schwebungsfrequenz $\omega_S = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2|$.



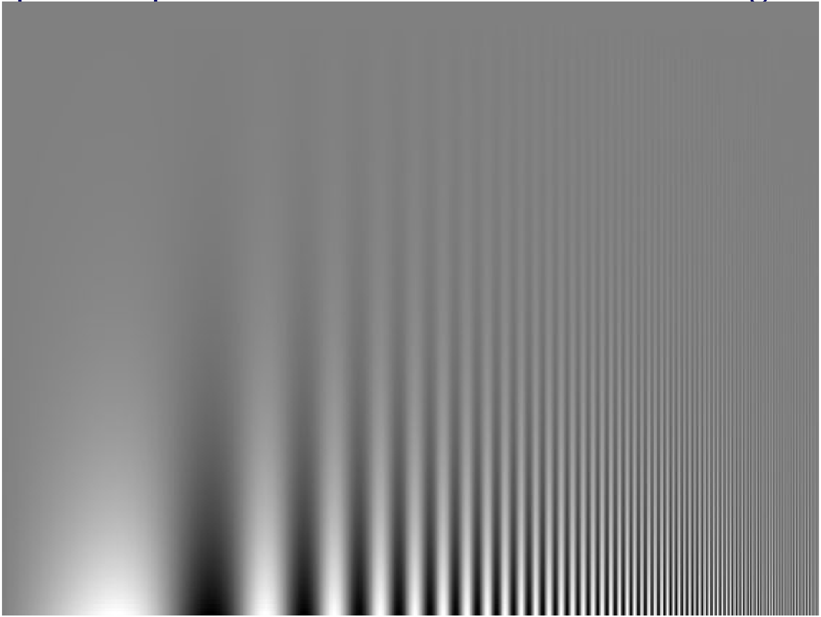
Das Wobbelsignal (Sweep) als Frequenzbereichscanner



Quelle: Karrenberg, 2012

Die traditionelle Messung des Frequenzgangs ist sehr zeitaufwändig. Das Wobbelsignal durchläuft alle Frequenzen und kann somit potentiell in einem Durchgang zumindest den Amplitudengang darstellen.

Beispiel: Frequenzsensitivität des menschlichen Auges



Quelle: NDT

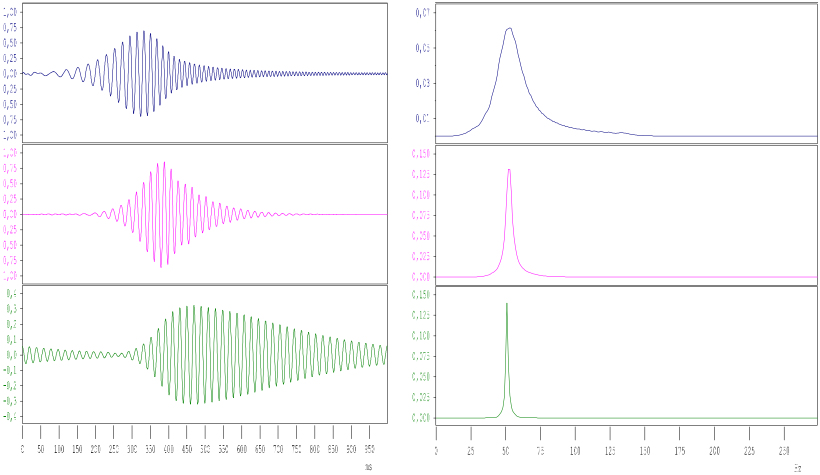
Wobbeln- eine Messmethode mit vorprogrammierten Fehlern

- Theoretisch sollte die Hüllkurve des Ausgangssignals genau den Amplitudengang des Systems wiedergeben.
- Mit dem Wobbelsignal lässt sich der Phasengang nicht ermitteln, da ihm keine eindeutige Phase zuzuordnen ist.
- Jede Frequenz liegt nur kurzzeitig an. Nach der Unschärferelation bedeutet dies eine hohe Frequenzungenauigkeit.
- Je schneller gewobbelt wird, desto kürzer liegt die Momentanfrequenz an und desto ungenauer wird gemessen.
- Dies führt zu großen Messfehlern bei Systemen mit einem schnell veränderlichen Amplitudengang.

Beispiel: schnell variierende Amplitudengänge

Ausgangssignal

Amplitudengang



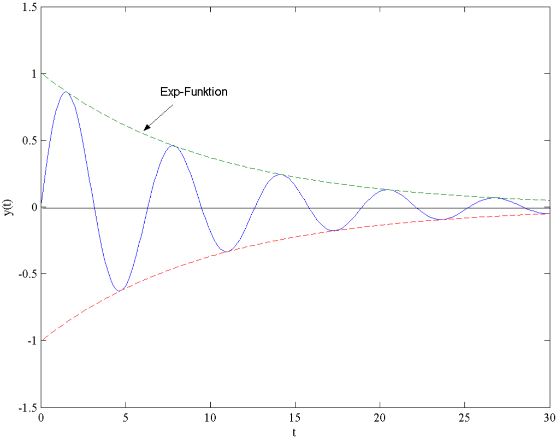
Quelle: Karrenberg, 2012

Übersicht

Impulsantwort

Die Antwort $h(t)$ eines Systems auf den Dirac-Impuls als Eingangsgröße heißt **Impulsantwort** oder **Gewichtsfunktion** des Systems.

Beispiel: Fahrzeugfederung bei Schlagloch



Systemanalyse mit dem Dirac-Impuls

- Wie in Vorlesung 8–20 gezeigt, enthält der Dirac-Impuls alle Frequenzen gleichzeitig und mit gleicher Amplitude:

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad 1.$$

- Die Fouriertransformierte der Impulsantwort berechnet sich also nach Vorlesung 10–23 als

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = H(\omega) \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} = H(\omega) \cdot 1 = H(\omega),$$

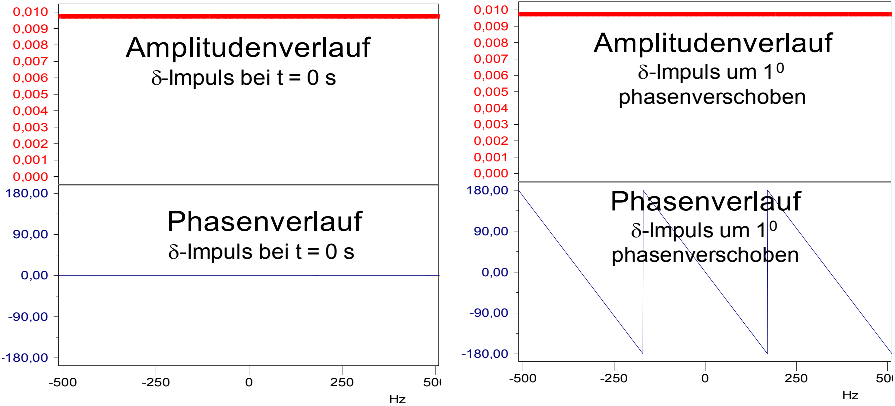
  d.h. **die Fouriertransformierte der Impulsantwort ist der Frequenzgang!**

- Damit ergibt sich eine ganz einfache Messvorschrift für den Frequenzgang: 1. Impulsantwort messen; 2. Impulsantwort numerisch in den Frequenzbereich transformieren. Statt einem Zeitaufwand im Stundenbereich ist das im Minutenbereich erledigt und deutlich genauer.

Impulsantwort als Testsignal

- Ähnlich wie der Frequenzgang im Frequenzbereich charakterisiert die Impulsantwort ein lineares System vollständig im Zeitbereich, da beide ein Transformationspaar bilden:
$$h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega).$$
- Der Nachteil des Dirac-Impulses als Testsignal ist seine geringe Energie, weil er so kurz andauert. Sie lässt sich nur vergrößern, indem seine Höhe vergrößert wird (z.B. 100 V). Ein solcher Spannungsimpuls könnte jedoch das System (z.B. Lautsprecher, Eingangs-Mikroelektronik) zerstören.
- Achtung: der korrekte Phasengang ergibt sich nur, wenn der Dirac-Impuls genau bei 0 liegt. In der Praxis hat der Impuls aber eine endliche Dauer und ist so leicht um seine Halbwertsbreite Δt verschoben. Dies führt nach dem Verschiebungssatz zu einem zusätzlichen Phasenfaktor $e^{-i\omega\Delta t}$, der rechnerisch kompensiert werden muss.

Unzentrierter Dirac-Impuls

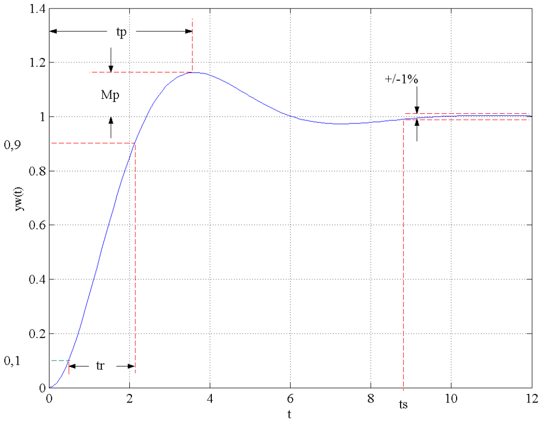


Quelle: Karrenberg, 2012

Sprungantwort

Die Antwort eines Systems $g(t)$ auf die Sprungfunktion $\sigma(t)$ als Eingangsgröße heißt **Sprungantwort** oder **Übergangsfunktion** des Systems.

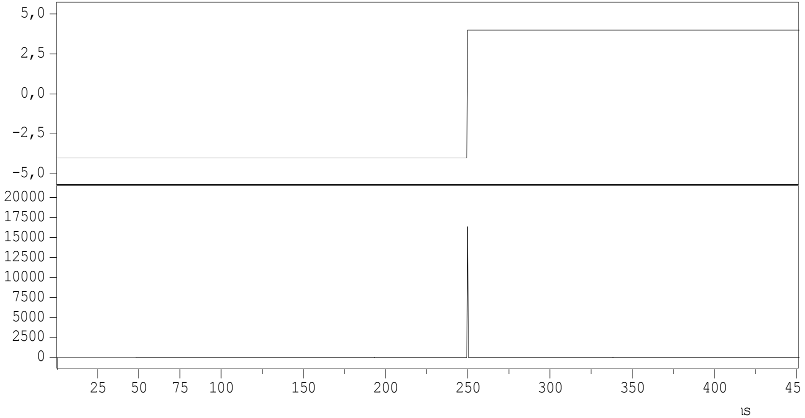
Beispiel: Fahrzeugfederung an Bordsteinkante



Beziehung zwischen Sprungfunktion und Dirac-Impuls

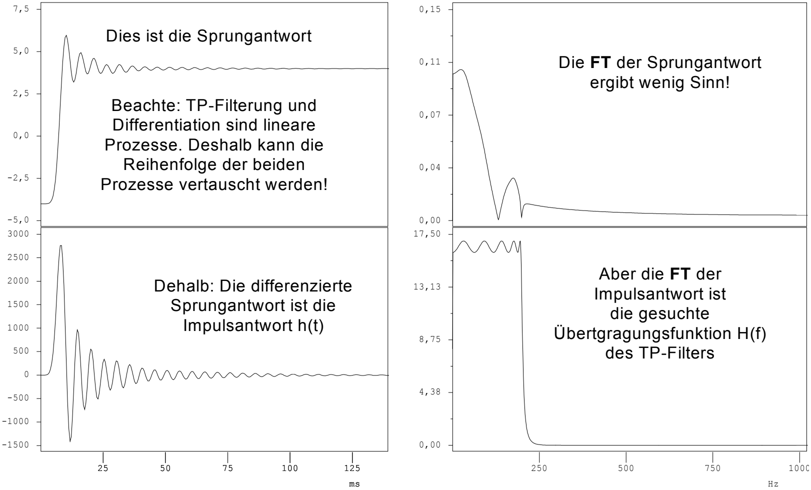
Die differenzierte Sprungfunktion ergibt den Dirac-Impuls:

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta(t).$$



Quelle: Karrenberg, 2012

Berechnung der Impulsantwort aus der Sprungantwort



Quelle: Karrenberg, 2012

Systemanalyse mit der Sprungantwort

1. Sprungantwort messen
2. Sprungantwort numerisch differenzieren ergibt Impulsantwort
3. Impulsantwort numerisch in den Frequenzbereich transformieren ergibt den Frequenzgang.

Vorteile:

- Zeitaufwand ist genauso kurz wie bei der Systemanalyse mit der Impulsantwort.
- Die Sprungfunktion besitzt genügend Energie auch bei kleiner Sprunghöhe - sie zerstört also nicht die Mikroelektronik eines empfindlichen Systems.
- Ein Sprungsignal ist extrem leicht zu erzeugen.

Weitere Testsignale

- Gauß-Impulse und Gabor-Wavelets: zur Laufzeitmessung in Übertragungsmedien
- Burst-Signale: zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens
- Sinc-Impulse: frequenzmäßiger Ausschnitt des Dirac-Impulses
- Weißes Rauschen: enthält - wie der Dirac-Impuls - alle Frequenzen in gleicher Intensität, aber nicht konzentriert in einem Impuls, eignet sich auch zur Analyse von nichtlinearen Systemen.

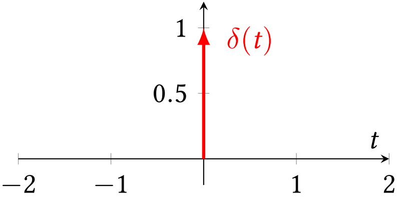
Übersicht

Beispiel: Impulsantwort von Proportional- und Verzögerungsglied

Proportionalsystem:

$$y(t) = K \cdot x(t) \quad \Rightarrow$$

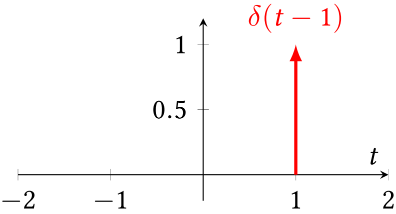
$$h(t) = K\delta(t)$$



Verzögerungsglied:

$$y(t) = x(t - T_t) \quad \Rightarrow$$

$$h(t) = \delta(t - T_t)$$

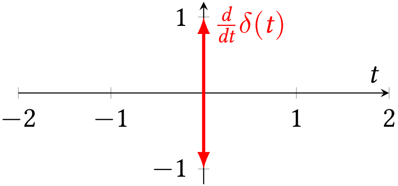


Beispiel: Impulsantwort von Differenzierer und Integrierer

Differenzierer:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad \Rightarrow$$

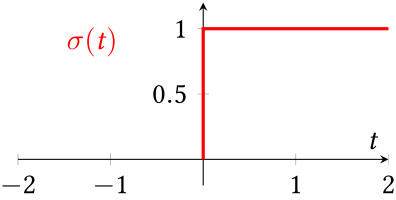
$$h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$$



Integrierer:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow$$

$$h(t) = \sigma(t)$$



Bedeutung der Impulsantwort

- Der Frequenzgang charakterisiert ein lineares System vollständig: man weiß für jede Eingangs- Sinusschwingung, um welchen komplexen Faktor sie verändert wird. Da jedes technisch realisierbare Signal aus Sinusschwingungen zusammengesetzt werden kann, weiß man so die Systemantwort auf jedes beliebige Signal.
- Die Impulsantwort ist die Darstellung der Frequenzgangs im Zeitbereich. Da bei der Fouriertransformation keine Information verloren geht, muss auch die Impulsantwort das lineare System vollständig charakterisieren. Damit ist die Impulsantwort ebenso grundlegend wichtig wie der Frequenzgang.
- Lässt sich jedes beliebige Signal statt aus Sinusschwingungen auch aus Dirac-Impulsen zusammensetzen?

Darstellung eines Signals als gewichtete Summe von Dirac-Impulsen

Siebeigenschaft des Dirac-Impulses am Ursprung (s. Vorlesung 8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot f(\tau)\, d\tau = f(0).$$

Um t verschobener Impuls:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) \cdot f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau') \cdot f(\tau' + t)\, d\tau' = f(t)$$

Mit $\delta(\tau - t) = \delta(t - \tau)$ (Spiegelsymmetrie, $\delta(-\tau) = \delta(\tau)$):

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau)\, d\tau} \quad \text{(vgl.} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega).$$

Jedes Signal ist also eine gewichtete Summe von an die Stelle τ verschobenen Dirac-Impulsen mit dem Gewicht $f(\tau)$.

Faltungsintegral

- Die Zerlegung in Dirac-Impulse als Elementarsignale ist also eine Alternative zur Zerlegung in Sinus- Schwingungen in der Fouriertransformation.
- Es gilt genauso: **kennt man die Antwort des Systems auf jeden zeitverschobenen Dirac-Impuls, so weiß man die Systemantwort auf jedes beliebige Signal**.
- Bei einem zeitinvarianten System bleibt die Impulsantwort immer gleich, d.h. die Antwort auf einen um τ zeitverschobenen Dirac-Impuls ist einfach die zeitverschobene Impulsantwort:

$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau).$$

- Die Systemantwort auf ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$ ist also

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \quad \textbf{(Faltungsintegral)}$$

Berechnung der Systemantwort

Es gibt also zwei alternative Wege zur Berechnung der Systemantwort $y(t)$ auf ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$:

- Fouriertransformation $x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega)$ in den Frequenzbereich, dann Multiplikation mit dem Frequenzgang $H(\omega)$:

  $$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega);$$

  Rücktransformation in den Zeitbereich $Y(\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad y(t)$.
- **Faltung** des Eingangssignals mit der Impulsantwort $h(t)$ des Systems:

  $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

  Kurzform: $\quad y(t) = h(t) * f(t).$

Je nach Anwendung ist der eine oder der andere Weg vorteilhafter.