

Blatt 4: Ableitungen in \mathbb{R}

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:

-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"

0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"

1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"

2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"

3: "alles klar hier"

Ableitung von Potenz- und Sinusfunktionen, Produkt- und Quotientenregel

Fingerübung 1: _____ Ableitung von Potenzfunktionen

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3 & (b) \quad u(r) = \frac{1}{5} r^5 \quad (c) \quad v(t) = t^{\frac{6}{5}} \\ (d) & v(w) = \cot w + \tan w & (e) \quad f(y) = \sqrt{y}^7 \quad (f) \quad u(r) = 2 \sqrt[5]{r}^3 - 6 \sin r - 1 \\ (g) & u(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x}^2} & (h) \quad h(s) = \left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right)^4 \end{array}$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Fingerübung 2: _____ Produktregel

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

$$\begin{array}{ll} (a) & v(t) = (2t + 1)(3t^2 + 1) \quad (b) \quad g(s) = (3s^2 + s)(4\sqrt{s} - 1) \\ (c) & f(x) = \sin x \cdot \cos x \quad (d) \quad u(r) = \sqrt[5]{r}^4 \cdot \sin r \end{array}$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Fingerübung 3: _____ Quotientenregel

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(y) = \frac{y^2 + y}{3y - 1} & (b) \quad g(b) = \frac{5b^5 - 2a^2 + b}{3ab - b^2} \quad (c) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \\ (d) & a(x) = \frac{10}{x^3 + 5} & (e) \quad \gamma(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha} \end{array}$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4: Kettenregel

Berechnen Sie die Ableitung von folgenden Funktionen:

(i)	$f(x) = (3x^2 + x)^2$	(ii)	$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+3}}$
(iii)	$f(x) = x $	(iv)	$f(x) = 7x + 2 + 5$
(vii)	$f(x) = xe^{\alpha x}$	(viii)	$f(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$
(ix)	$f(x) = (3 + e^{\frac{1}{x}})^4$	(x)	$f(x) = \ln(2x)$
(xi)	$f(x) = 5^{\frac{3}{x}}$	(xii)	$f(x) = \log_8(g(x))$
(xv)	$f(x) = \sin^2 x$	(xvi)	$f(x) = \tan\left(e^{\frac{2}{x}}\right)$
(xvii)	$f(x) = \cot(g(x))$	(xviii)	$f(x) = \sin(\ln x)$
(xix)	$f(x) = \frac{x}{\sin x}$	(xx*)	$f(x) = x^x$

Tipp zu (xx): $a^b = e^{b \ln(a)}$ (Warum ist das so?)

Selbsteinschätzung:

1

Lösung auf Seite 5

Aufgabe* 5: Ableitung der Umkehrabbildung

Berechnen Sie

(a)	$\frac{d}{dx} \sqrt{\arccos x}$	(b)	$(x^5 \arctan x)'$
(c)	$\frac{d}{dx} \frac{\arcsin x}{3^x}$	(d*)	$\operatorname{arccot}' x$

Selbsteinschätzung:

0

Lösung auf Seite 6

Aufgabe* 6:

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

die n -te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (x - n)}{e^x} \quad \text{für } n \geq 1$$

besitzt. Selbsteinschätzung:

0

Lösung auf Seite 7

Aufgabe* 7: _____ Ableitung von Umkehrabbildungen

Es ist der Tangenshyperbolicus definiert als der Quotient aus Sinushyperbolicus und Kosinushyperbolicus

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

wobei die Hyperbelfunktionen wie folgt definiert sind:

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

Es handelt sich also eigentlich um e-Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Umkehrabbildung des Tangenshyperbolicus, also des sogenannten Areatangenshyperbolicus, folgendes gilt:

$$\operatorname{artanh}' x = \frac{1}{1 - x^2}$$

Tipp: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

ist und berechnen Sie dann

$$\tanh' x$$

mit der Quotientenregel. Dann können Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrabbildung verwenden.

Selbsteinschätzung:

0

Lösung auf Seite 9

Anwendungsaufgaben: Optimierung und Optimierung mit Nebenbedingung

Aufgabe 8: _____ Geschenkschachtel

Von einem rechteckigen Stück $16 \times 10 \text{ cm}^2$ großen Pappe werden an den Ecken gleichgroße Quadrate ausgeschnitten und aus dem Rest eine Schachtel gebildet. Wie muss man die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate wählen, um eine Schachtel von größtem Rauminhalt zu erhalten? Wie groß ist der maximale Inhalt?

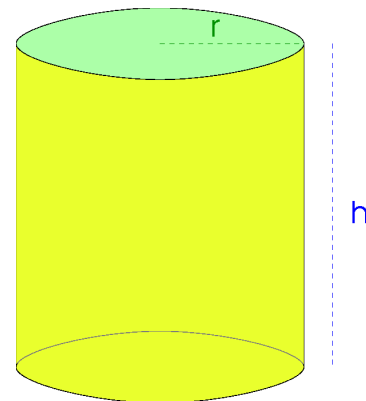
Selbsteinschätzung:

0

Lösung auf Seite 9

Aufgabe 9: _____ Produktionsoptimierung

Für eine Sonderaktion einer Getränkefirma sollen Dosen hergestellt werden, die 256 cm^3 Flüssigkeit fassen. Bei der Dosenfertigung soll selbstverständlich möglichst wenig Blech verbraucht werden. Wie groß müssen dazu Radius und Höhe der Dose sein? (Siehe Abbildung)

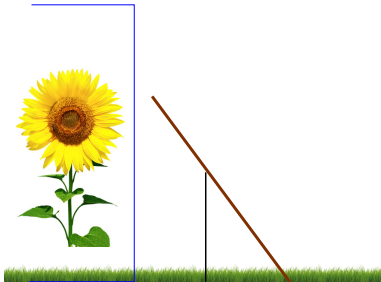


Selbsteinschätzung:

2

Lösung auf Seite 10

Aufgabe 10:



Sie wollen ein Brett von 8 Meter Länge streichen. Sie lehnen es gegen Ihren 1 Meter hohen Gartenzaun. Auf dem benachbarten Grundstück befindet sich ein gläsernes Gewächshaus, welches 5 Meter hinter dem Zaun aufgestellt ist. Sie sorgen sich darum, ob das Brett, das Sie streichen möchten die Glasscheiben zerschlagen könnte, falls es beim Anstreichen abrutscht.

- Sind Ihre Bedenken begründet?
- Welche Länge darf das Brett maximal haben, damit die Scheibe nicht eingeschlagen werden kann?

Selbsteinschätzung:

0

Lösung auf Seite 11

diskrete Ableitung

Matlabaufgabe 11:

- Implementieren Sie zur Wiederholung die Beispiele aus der Vorlesung
- Berechnen Sie die Matrizen D_{1v} und D_{1r} zur ersten Ableitung bzgl. des Vorwärts- bzw. des Rückwärtsdifferenzenquotienten. Implementieren Sie diese beiden Matrizen.
- Berechnen Sie die diskrete Verteilung aus dem Beispiel in der Vorlesung (Kapitel 3.5).

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 12