Blatt 8: Geraden-/Ebenendarstellungen und orthogonale Projektion

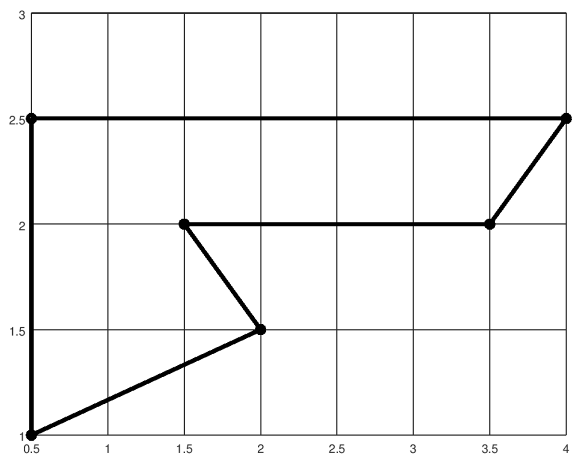
Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Kreuzprodukt

Aufgabe 1:

Gegeben sind folgende Punkte im $\mathbb{R}^2$:

$P_1 = (0.5, 2.5) \quad P_2 = (0.5, 1) \quad P_3 = (2, 1.5)$
$P_4 = (1.5, 2) \quad P_5 = (3.5, 2) \quad P_6 = (4, 2.5)$



(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Punkte P_1, P_3 und P_6 aufgespannt wird.

(b) Finden Sie mithilfe der Methode in (a) eine Methode, um den Flächeninhalt des vom Polygon umrandeten Gebiets zu bestimmen. :-)

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 4

Geraden- und Ebenendarstellungen

Aufgabe 2:

Gegeben Sie die Ebene

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verläuft die Ebene durch den Ursprung?

(b) Liegt der Punkt $Q = (3, -1, 0)$ in der Ebene? D.h. gilt $Q \in E$? Oder anders formuliert: Gibt es $t, s \in \mathbb{R}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie einen Normalenvektor n und dessen normierte Variante $\tilde{n}$ an die Ebene.

(d) Wie lautet die Koordinatendarstellung von E? Prüfen Sie auch ob Ihre Koordinatendarstellung korrekt ist.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Ebene A in Koordinatendarstellung mit

$$A \,:\, x_2 - x_3 = 0$$

(a) Wie lautet der Normalenvektor n an A?

(b) Gilt $0 \in A$?

(c) Gilt $(1, 2, 3) \in A$?

(d) Geben Sie die Ebene in Paramterdarstellung an.

(e) Überlegen Sie: Kann es eine Koordinatendarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ geben?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Orthogonale Projektion und Orthogonalisierung

Aufgabe 4: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (GSO)

Berechnen Sie mit dem GSO eine ONB aus

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Punktes $X = (1, 2, -1)$ auf die Gerade

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,.$$

(b) Berechnen Sie nun die orthogonale Projektion von X auf die Ebene

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} s\,.$$

(c) Und dann noch die orthogonale Projektion von X auf die Ebene

$$F : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s\,.$$

(d) Prüfen Sie in allen Fällen (a)-(c), ob Ihr Ergebnis korrekt ist.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe* 6: GSO für Polynome

Gegeben sei $a \in \mathbb{R}$ und der Prä-HR $(V, s(\,,\,))$ mit Basis $\mathcal{B} = \{a+x, 1-x^2\}$ und Skalarprodukt

$$s(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

gegeben.

1. Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Basis von V eine Orthogonalbasis?
2. Welche Polynome in $\mathbb{P}_2$ sind Element von V, welche nicht?
3. Erweitern Sie die Basis von V zu einer OGB von $\mathbb{P}_2$ unter Zuhilfenahme des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Lösung 1

(a)

$$F = \frac{1}{2}\,|(P_3 - P_1) \times (P_6 - P_1)| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1.5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{7}{4} = 1.75$$

(b)

$$F_{\text{poly}} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{5}(P_k - P_1) \times (P_{k+1} - P_1)$$

Lösung 2

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Die Frage ist also, ob $0 \in E$ erfüllt ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt, dass $s = -1$ sein muss und aus der zweiten Zeile folgt, dass $t = -1/2$ sein muss. Diese Werte führen in der dritten Zeile dann aber auf einen Widerspruch, denn dort gilt dann

$$-1 = \frac{-1}{2}(-1) + (-1)(-1) = 1.5\,.$$

Folglich gilt

$$0 \notin E$$

(b) Diese Rechnung geht genauso wie die vorherige:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile liefert $s = 2$ und die zweite $t = -1$. Dann erhalten wir für die dritte Zeile:

$$-1 = (-1)(-1) + 2(-1)\,, \qquad \checkmark$$

was passt. Damit gilt $Q \in E$.

(c)

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{n} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d)

$$E : < x, n > - < a, n >= 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad E \, : \, 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 - 5 = 0$$

Um zu prüfen ob die Darstellung korrekt ist überzeugt man sich davon, ob jeder Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$, der durch die Parameterdarstellung erzeugt wird in die Koordinatengleichung hineinpasst: Es ist

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 1+2\,t \\ 1-t-s \end{pmatrix}$$

und das setzen wir in die Koordinatendarstellung ein:

$$2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 - 5 = 2\,(1+s) + (1+2\,t) + 2\,(1-t-s) - 5 = 0$$

passt.

Lösung 3

$$A \, : \, x_2 - x_3 = 0$$

(a)

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) $0 \in A$, denn $0 - 0 = 0$.

(c) $(1, 2, 3) \notin A$, denn $2 - 3 = -1 \neq 0$.

(d) Wir suchen drei beliebige Punkte der Ebene, die ein Dreieck bilden

$$P_1 = (0, 0, 0)\,, \ P_2 = (1, 2, 2) \quad \text{und} \quad P_3 = (1, 3, 3)$$

Die Vektoren

$$v = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

spannen die Ebene auf und 0 ist der Stützvektor. Es gilt dann

$$A\,:\,t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

Lösung 4

$$\tilde{b}_1 = a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = a_2 - < a_2, b_1 > b_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\frac{1}{9} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 = a_3 - < a_3, b_1 > b_1 - < a_3, b_2 > b_2 = \cdots = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{ONB} = \left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Lösung 5

(a) Orthogonale Projektion des Punktes $X = (1, 2, -1)$ auf die Gerade

$$g\,:\,\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}t\,.$$

$$P(X) = \frac{< X, v >}{\|v\|^2}v$$

Dabei ist

$$< X, v > = 2\,, \ \|v\|^2 = 3$$

und damit gilt dann

$$P(X) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P(X)$ ist ein Element der Geraden: $t = \frac{2}{3}$ und es gilt $X - P(X) \perp v$, denn

$$\begin{aligned}
< X - P(X), v > &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(1 + 4 - 5) = 0
\end{aligned}$$

(b) Orthogonale Projektion von X auf die Ebene

$$E\ :\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} s\,.$$

Die Basisvektoren der Ebene (UVR) ist eine OGB, daher können wir die Formel direkt anwenden, d.h. wir berechnen die Summe der Projektionen auf die beiden Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
P(X) &= \frac{< X, v >}{\|v\|^2} v + \frac{< X, w >}{\|w\|^2} w \\
&= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit der Wahl von $t = \frac{2}{3}$ und $s = 1$ können wir uns davon überzeugen, dass $P(X) \in E$ erfüllt ist. Und

$$X - P(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal auf beide Basisvektoren und damit auf die Ebene und es gilt

$$X - P(X) \perp E\,.$$

(c) Orthogonale Projektion von X auf die Ebene

$$F\ :\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s\,.$$

Bei dieser Ebene ist die Basis nicht orthogonal. Sie können es gerne mit der Formel einmal versuchen, werden aber feststellen, dass sie nicht zum Ziel führt. Für eine orthogonale Projektion auf einen UVR muss dieser zunächst mit einer OGB versehen sein. Wenn diese nicht vorhanden ist müssen wir mittels GSO zunächst eine erzeugen:

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist nun eine OGB der Ebene und wir können die Ebene dann auch so beschreiben:

$$F\ :\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} s$$

Nehmen Sie es als kleine Übungsaufgabe, sich davon zu überzeugen, dass es sich um die gleiche Ebene handelt. Vergleichen Sie dazu die letzte Aufgabe auf diesem Blatt.

Nun können wir die orthogonale Projektion von X auf F vornehmen:

$$\begin{aligned} P(X) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt der Test:

$$X - P(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal auf beide Basisvektoren, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Gilt auch $P(x) \in F$? Gibt es $t, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ja, gibt es. Wie die Werte von t und s genau sind ist nicht relevant.

(d) Die Überprüfung wurde direkt in den Teilaufgaben vorgenommen.

Lösung 6

1. Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Basis von V eine Orthogonalbasis?

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (a+x)(1-x^2)\,dx &= \int_0^1 a - ax^2 + x - x^3\,dx \\
&= ax - \frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 \\
&= a - \frac{a}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Orthogonalbasis

$$\mathcal{B} = \left\{ x - \frac{3}{8}, 1 - x^2 \right\}$$

2. Welche Polynome in $\mathbb{P}_2$ sind Element von V, welche nicht?

   Alle Polynome, die sich von den Basisvektoren in $\mathcal{B}$ darstellen lassen:

$$\begin{aligned} p(x) &= \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 = \beta_1 (x - \frac{3}{8}) + \beta_2 (1 - x^2) \\ &= -\beta_2 \, x^2 + \beta_1 \, x + (\beta_2 - \frac{3}{8} \, \beta_1) \end{aligned}$$

   Die Koeffizienten vor x^2 und x sind jeweils beliebig. Aus ihnen resultiert dann aber ein ganz bestimmtes absolutes Glied. Zum Beispiel ist

$$p(x) = x^2 + x - \frac{11}{8} \in V$$

   aber

$$q(x) = x^2 + x + 1 \notin V \, .$$

   Es ist demnach $v \neq \mathbb{P}_2$.

3. Wir erweitern die Basis von V zu einer OGB von $\mathbb{P}_2$ unter Zuhilfenahme des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens:

   Da $\mathcal{B}$ bereits eine OGB ist braucht es hier nur einen Schritt: Wir nehmen $1 \in \mathbb{P}_2 \setminus V$ und orthogonalisieren:

$$b_3 = 1 - \frac{s(1, x - \frac{3}{8})}{\|x - \frac{3}{8}\|_s^2} \left(x - \frac{3}{8} \right) - \frac{s(1, 1 - x^2)}{\|1 - x^2\|_s^2} \, (1 - x^2)$$

   Wir berechnen zunächst die beteiligten Größen separat:

$$\begin{aligned} s(1, x - \frac{3}{8}) &= \\ \|x - \frac{3}{8}\|_s^2 &= s(x - \frac{3}{8}, x - \frac{3}{8}) = \\ s(1, 1 - x^2) &= \\ \|1 - x^2\|_s^2 &= s(1 - x^2, 1 - x^2) \qquad = \end{aligned}$$

   ... Fortsetzung folgt