Blatt 6: Koordinatenvektoren

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Darstellung von Vektoren

Aufgabe 1:

(a) Schreiben Sie jeweils den Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und geben Sie jeweils die Koordinatendarstellung an.

$$\text{(i)} \quad x = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad x = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Koordinatenvektoren von $a = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie einen Basiswechsel von $a_{\mathcal{V}}$ zu $a_{\mathcal{W}}$, bzw. umgekehrt.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 3

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $p(x) = 3\,x^3 - 10\,x + 2 \in \mathbb{P}_3$ bezüglich der Basis

$$\mathcal{P} = \{3, 2\,x, -5\,x^2, 4\,x^3\}.$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

Darstellung von Matrizen (als Vektoren)

Verstänsnisfrage 3: Matrix oder Vektor?

Matrizen als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind auch Vektoren, genauso wie n-Tupel als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ Vektoren sind. In gewissem Sinne kann man n-Tupel als $n \times 1$, bzw. $1 \times n$-Matrizen auffassen. Streng genommen ist aber der $\mathbb{R}^n$ nicht das gleiche wie $\mathbb{R}^{n\times 1}$, bzw. $\mathbb{R}^{1\times n}$. Wo liegt der Unterschied?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

Aufgabe 4:

(a) Gegeben sei die Menge

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Handelt es sich hier um linear unabhängige Vektoren?

(b) Erweitern Sie $\tilde{\mathcal{B}}$ um einen weiteren linear unabhängigen Vektor zu $\mathcal{B}$. Ist die Wahl eindeutig?

(c) Stellt $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Berechnen Sie zu folgenden Matrizen jeweils den Koordinatenvektor bzgl. der Basis $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 1 \\ -1 & 30 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 48 & 2 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie dazu die entsprechende Transformationsmatrix, im Folgenden T genannt, auf.

(i) Wie lautet das 4×4-LGS, das Sie dazu lösen müssen?

(ii) Berechnen Sie zu diesem LGS die inverse Matrix T^{-1} mit dem Gauß-Verfahren.

(iii) Berechnen Sie mit der Inversen T^{-1} dann die Koordinatenvektoren.

(iv) Was fällt Ihnen auf?

(e) Sie wollen den Datensatz in (d) um mindestens 25% reduzieren. Wie könnten Sie das machen, wie sehen ihre reproduzierten Daten (das sind ja jetzt Matrizen) aus?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

Lösung 1

(a)

$$x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, b_i \,, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \,, \; b_i \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$\text{(i)} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \text{(ii)} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \text{(iii)} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:V^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Der Koordinatenvektor von $a = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{V} = \left\{ \binom{-1}{3}, \binom{0}{4} \right\}$ lautet

$$a_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} .$$

Genauso berechnen wir den Koordinatenvektor $a_{\mathcal{W}}$ von a bezüglich der Basis $\mathcal{W}$:

$$a_{\mathcal{W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:W^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Um die Koordinatendarstellung direkt von Basis $\mathcal{V}$ auf Basis $\mathcal{W}$ zu wechseln, ohne dazu das Kartesische Koordinatensystem zu verwenden machen wir die folgende Überlegung:

Es ist

$$a = V \, a_{\mathcal{V}} \qquad \wedge \qquad a = W \, a_{\mathcal{W}} \,,$$

woraus wir Folgendes ableiten können:

$$
\begin{aligned}
& & a &= V\,a_{\mathcal{V}} \\
\wedge & & a &= W\,a_{\mathcal{W}} \\
\Rightarrow & & V\,a_{\mathcal{V}} &= W\,a_{\mathcal{W}} \\
\Leftrightarrow & & W^{-1}\,V\,a_{\mathcal{V}} &= a_{\mathcal{W}} \\
\Leftrightarrow & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} a_{\mathcal{V}} &= a_{\mathcal{W}} \\
\Leftrightarrow & & \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}}_{=:A} a_{\mathcal{V}} &= a_{\mathcal{W}}
\end{aligned}
$$

Mit der Matrix A können wir den Koordiantenvektor $a_{\mathcal{V}}$ direkt in den Koordinatenvektor $a_{\mathcal{W}}$ überführen, ohne erst den Vektor a im Kartesischen Koordinatensystem zu berechnen.

Lösung 2

$$
p(x) = 3\,x^3 - 10\,x + 2 = \alpha_0\,3 + \alpha_1\,2\,x - \alpha_2\,5\,x^2 + \alpha_3\,4\,x^3
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -5 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 \\ -60 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}
$$

Lösung 3

Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist über ein kartesisches Produkt $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ definiert, deren Elemente n-Tupel sind. Der Unterschied zu $\mathbb{R}^{n\times 1}$ ist der, dass diese Menge nicht über ein kartesisches Produkt erklärt ist. Die Elemente haben im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n$ die Vorgabe "Spaltenvektoren" zu sein, bzw. "Zeilenvektoren" in $\mathbb{R}^{1\times n}$. Diese Vorgabe gibt es im $\mathbb{R}^n$ nicht.

Lösung 4

(a) Es handelt sich hier um linear unabhängige Vektoren, denn es gilt:

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0
\end{aligned}
$$

(b) Gesucht ist eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die zu allen Matrizen in $\tilde{\mathcal{B}}$ lu ist. Die Untersuchung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 + a\alpha_4 & \alpha_2 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix}$$

führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir müssen die vierte Spalte jetzt so wählen, dass das LGS eindeutig lösbar ist, denn dann gilt auf jeden Fall $\alpha_i = 0, i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Die vierte Spalte muss also lu von den anderen dreien sein. Das wäre etwa bei der Wahl von

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es ist dann

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) $\mathcal{B}$ stellt eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dar, denn wir haben sie so erzeugt (lu), dass alle Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ von ihr erzeugt werden können.

(d) (i) Koordinatenvektor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$ zu einer beliebigen Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:T} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\overline{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overline{B}_{\mathcal{B}} = \ldots$ etc (siehe Teil (iv))

(iv) Was fällt Ihnen auf?

Die Koordinatenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 1 \\ -1 & 30 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 48 & 2 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

lauten

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 30 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; C_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; D_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 48 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Basis ist so gewählt, dass die Koordinatenvektoren bestimmte, typische Strukturen der Matrizen aufweisen. A ist zum Beispiel stark diagonaldominant, was durch den hohen Wert des ersten Koeffizienten wiedergespiegelt wird.

(e) Reduktion um mindestens 25%:

$$\overline{A}_{\mathcal{B},i} = \begin{cases} 0 & |A_{\mathcal{B},i}| \leq 1 \\ A_{\mathcal{B},i} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \overline{B}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \overline{D}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 48 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die rekonstruierten Matrizen sehen dann so aus:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}, \overline{C} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, \overline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 50 \\ 48 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$