

## Blatt 1: Folgen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:

-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"

0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"

1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"

2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"

3: "alles klar hier"

### Sprachaufgabe 1: \_\_\_\_\_ Beschreibung von Folgen

Formulieren Sie in umgangssprachlichen Worten die Definitionen für Grenzwerte und Häufungspunkte (Was ist überhaupt was?):

$$\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

Häufungspunkte, Grenzwerte von Teilfolgen

---

---

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

Grenzwert, nur bei Konvergenten Folgen, Der Wert dem sich eine Folge/Funktion annähert

---

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite [5](#)

**Sprachaufgabe 2:** \_\_\_\_\_ Beschränktheit

Beschreiben Sie in Quantorenschreibweise die Beschränktheit einer Folge; jeweils nach oben und nach unten.

“Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante gibt, die größer ist als alle Folgenglieder.”

$$\exists C \forall n \in \mathbb{N} : a_n < C$$

“Eine Folge heißt nach unten beschränkt, wenn es eine konstante gibt die kleiner als alle Folgeglieder ist

$$\exists C \forall n \in \mathbb{N} : a_n > C$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

**Fingerübung 3:** \_\_\_\_\_

(a)

$$a_n = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

Stellen Sie die ersten 5 Folgenglieder als geordnete Menge der Form

$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$
$$(2,885; 2,731; 2,885; 3,107; 3,349)$$

dar. Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

(b)

$$b_n = \frac{n}{e^n}$$

Stellen Sie die ersten 5 Folgenglieder als geordnete Menge der Form

$$(b_n)_n = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots)$$

dar. Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

(c) Vergleichen Sie  $(a_n)_n$  mit  $(b_n)_n$ . Was stellen Sie fest?

(d)

$$(a_n)_n = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 2, \frac{1}{3}, -1, 3, \frac{1}{4}, 0, 4, \frac{1}{5}, -1, 5, \frac{1}{6}, 0, \dots\right)$$

Untersuchen Sie die Folge auf die Eigenschaften konvergent, bestimmt oder unbestimmt divergent. Hat sie Teilfolgen? Hat sie einen Grenzwert oder Häufungspunkte? Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

#### Aufgabe 4:

(a) Bilden Sie aus

$$a_n = n^3 - 3n^2$$

eine implizite Folge.  $1^3 - 3 = -2$ ;  $8 - 12 = -4$ ;  $27 - 27 = 0$ ;

(b) Bilden Sie aus

$$a_0 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + 4n - 2$$

eine explizite Folge.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 7

#### Aufgabe 5:

Grenzwert von explizit/impliziter Folge

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenz/Divergenz/Grenzwert/Häufungspunkte:

0, konvergent (i)

$$a_n = \frac{1}{4^n}$$

(ii)

$a_n = \sqrt[n]{5} - 1$ , konvergent

$-1/3$ , konvergent (iii)

$$a_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{-9n^2 - 20}$$

(iv)

$$a_n = \frac{2n^3 + 2}{n - 10} \cdot \frac{1}{n}$$

divergent (v)

$$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{(2n + 1)^2}$$

(vi)

$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  divergent

**Tipp zu (vi):**  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  :)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der impliziten Folge

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

(c) Untersuchen Sie die Folgen aus Aufgabe 4 auf ihr Konvergenzverhalten. Betrachten Sie dabei jeweils die explizite als auch die implizite Darstellung.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 10

**Aufgabe 6:** \_\_\_\_\_ Blutalkohol

(Diese Aufgabe bezieht sich auf Beispiel 1 im Vorlesungsskript.) Es sei  $a_1 = 1.12$  der Blutalkoholanteil in Promille. Eine Zeiteinheit  $n = 1$  beträgt 4.07 Stunden. Nach dieser Zeiteinheit liegt der Promillewert bei  $b = 0.5$ . Damit gilt für die prozentuale Abnahme  $p$ :

$$b = a_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow p = 100 \left(1 - \frac{b}{a_1}\right)$$

In unserem Fall also

$$p = \frac{1550}{29} \approx 53.45.$$

Es ist dann

$$a_1 = 1.12$$
$$a_{n+1} = a_n \left(1 - \frac{p}{100}\right) + a_1$$

(a) Welcher Wert stellt sich nach langer Zeit ein?

(b) Wann (nach wieviel Stunden) liegt der Blutalkohol bei 1.8 Promille?

**Tipp:** Um diese beiden Fragen ohne Rechner beantworten zu können stellen Sie die implizite Folge in eine explizite um.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 11

**Laboraufgabe 7:** \_\_\_\_\_ Blutalkohol

Schreiben Sie ein Programm, welches die Entwicklung des Blutalkohols aus Aufgabe 6 berechnet und graphisch darstellt. Implementieren Sie dabei die implizite Folge und beantworten Sie die Fragen so gut es geht mit ihren numerischen Berechnungen.

Prosit!

Selbsteinschätzung: