Blatt 5: Matrizenoperationen und LGS

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Matrizenoperationen

Aufgabe 1:

(a) Wie lautet die 4×4–Matrix mit

$$A_{ik} = \begin{cases} i+k & \text{für } i > k \\ i \cdot k & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

(b) Wie lautet die 5×5–Matrix mit

$$A_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i+k = 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der folgenden Multiplikationen sind erlaubt?

(i)	$A \cdot B$	☐	(ii)	$B \cdot A$	☐	(iii)	$A \cdot C$	☐
(iv)	$D \cdot C$	☐	(v)	$C \cdot D^T$	☐	(vi)	$C \cdot D$	☐
(vii)	$C \cdot F$	☐	$(viii)$	$F \cdot B$	☐	(ix)	$B \cdot F$	☐

(b) Geben Sie bei allen erlaubten Multiplikationen in Teil (a) die Größe der Produktmatrix an.

(c) Berechnen Sie die "erlaubten" Produkte.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie $V^T \cdot W$

(a) und $V \cdot W^T$

für $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $W = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4:

Finden Sie quadratische Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die $A \cdot C = B \cdot A \quad \Rightarrow \quad C = B$ nicht erfüllen.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe 5:

Ordnen Sie passende Ausdrücke einander zu:

$A\,x$	☐	☐	$\sum_{i,j} a_{ji}x_ix_j$
$x^T\,A$	☐	☐	$\left(\sum_i a_{ij}x_i\right)_j$
$A^T\,x$	☐	☐	$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$
$x^T\,A\,x$	☐	☐	$\left(\sum_j a_{ij}x_j\right)_i$
$\left(x^T\,A^T\,x\right)^T$	☐	☐	$\left(\sum_i a_{ij}x_i\right)_j$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe 6:

Geben Sie eine möglichst einfache Basis des VRs $(\mathbb{R}^{2\times 2})$.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Lineare Gleichungssysteme - LGS

Aufgabe 7:

Die folgenden linearen Gleichungssysteme wurden bereits mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf die Zeilenstufenform gebracht. Diskutieren Sie die zugehörige Lösungsmengen und geben Sie jeweils Rang und Lösungsmenge explizit an:

1.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	2	0	−2
0	1	−1	0	1
0	0	0	1	3

2.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	−1	3	0
0	1	0	2	−4	0
0	0	0	0	0	1

3.

x_1	x_2	x_3	
1	0	2	0
0	1	−3	0
0	0	0	0
0	0	0	0

4.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	2	0	1
0	1	−3	0	4
0	0	0	1	−2
0	0	0	0	0

5.

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	−4
0	1	0	5
0	0	1	7

6.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	0	2	5
0	1	−2	0	−1	−6
0	0	0	1	3	4
0	0	0	0	0	0

7.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	0	−1	0
0	0	1	3	0
0	0	0	0	0

8.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	4	0	0
0	1	−3	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

9.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	1	0	2
0	1	0	−3	0	−3
0	0	1	2	0	4
0	0	0	0	1	−2

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 7

Aufgabe 8:

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

(a)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 60, \\ x - 3y + 2z &= -4, \\ 2x + 5y - 5z &= 68 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{9}{7x-4z} - \frac{4}{4y-3z} - \frac{3}{5x-4y} &= 2, \\ \frac{3}{7x-4z} + \frac{7}{5x-4y} + \frac{10}{4y-3z} &= -13, \\ \frac{21}{7x-4z} + \frac{12}{4y-3z} - \frac{4}{5x-4y} &= -9 \end{aligned}$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Aufgabe 9: genau 2 Lösungen

Sie planen eine Party, um die bestandenen Prüfungen zu feiern. Sie haben 150 EUR zur Verfügung. Es soll Sekt (10 EUR pro Flasche), Bier (0,5 EUR pro Flasche) und Wein (3 EUR pro Flasche) geben. Wegen der erwarteten Anzahl Besucher wollen Sie insgesamt 100 Flaschen an Getränken besorgen. Wieviel Flaschen Sekt, Wein und Bier kaufen Sie?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Lösung 1

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

(a)

(i)	$A \cdot B$	☐	(ii)	$B \cdot A$	☒	(iii)	$A \cdot C$	☐
(iv)	$D \cdot C$	☐	(v)	$C \cdot D^T$	☒	(vi)	$C \cdot D$	☐
(vii)	$C \cdot F$	☒	$(viii)$	$F \cdot B$	☒	(ix)	$B \cdot F$	☐

(b)

(ii)	$B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$	(v)	$C \cdot D^T \in \mathbb{R}^{2\times 1}$
(vii)	$C \cdot F \in \mathbb{R}^{2\times 3}$	$(viii)$	$F \cdot B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

(c) ...

Lösung 3

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a)

$$V^T \cdot W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = < V, W > = 32 \,.$$

(b)

$$V \cdot W^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Lösung 4

$$
\begin{aligned}
& & A \cdot C &= B \cdot A \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
&\text{aber} & C &\neq B
\end{aligned}
$$

Lösung 5

$$
A\,x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)_i
$$

$$
x^T\,A = (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1}, \cdots, x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn}) = \left(\sum_{i=1}^n x_ia_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^n x_ia_{in} \right)
$$

$$
= \left(\sum_{i=1}^n x_ia_{ij} \right)_j = \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \right)_j
$$

$$
A^T\,x = \left(x^T A\right)^T = \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \right)_j
$$

$$
x^T\,A\,x = \langle x^T A, x \rangle = \sum_{j=1}^n \left(x^T A\right)_j x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j
$$

$$
\left(x^T\,A^T\,x\right)^T = \langle x, A^T x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left(A^T x\right)_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=j}^n a_{ji}x_j = \sum_{i,j} x_ia_{ji}x_j = \sum_{i,j} a_{ji}x_jx_i
$$

Lösung 6

$$
\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\}
$$

$\mathcal{B}$ ist lu, denn es gilt

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = 0
$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_i = 0\,,\; i \in \{1,2,3,4\}$$

und es lässt sich jede Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch $\mathcal{B}$ darstellen, denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_4 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad & \lambda_1 = a\,,\; \lambda_2 = b\,,\; \lambda_3 = c\,,\; \lambda_4 = d \end{aligned}$$

Lösung 7

1. $n = 4$, Rang=3. Die Lösung ist eine Gerade (Parameter x_3).

$$g: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Nicht lösbar, denn $0 = 1$ ist nicht wahr!

3. $n = 3$, Rang=2. Die Lösung ist eine Gerade durch den Ursprung (Parameter x_3).

$$g: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

4. $n = 4$, Rang=3. Die Lösung ist eine Gerade (Parameter x_3).

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

5. $n = 3$, Rang=3. Die Lösung ist ein Punkt und der lässt sich direkt ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

6. $n = 5$, Rang=3. Die Lösung ist eine Ebene (Parameter x_3 und x_5)

$$E := \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. $n = 4$, Rang=2: Die Lösung ist eine Ebene (Parameter x_2 und x_4) durch den Ursprung.

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

8. $n = 5$, Rang=3. Die Lösung ist eine Ebene (Parameter x_3 und x_4; $x_5 = 0$) durch den Ursprung.

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

9. $n = 5$, Rang=4: Die Lösung ist eine Gerade (Parameter x_4). Die Lösung kann

man direkt ablesen:

$$g: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 8

(a) Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & 1 & -64 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right)$$

Lösung:

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}$$

(b) Substitution:

$$a := \frac{1}{7\,x = 4\,z}\,,\; b := \frac{1}{4\,y - 3\,z}\,,\; c := \frac{1}{5\,x - 4}$$

neues LGS für $(a, b, c)^T$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -4 & -3 & 2 \\ 3 & 10 & 7 & -13 \\ 21 & 12 & -4 & -9 \end{array}\right)$$

Zwischenlösung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Führt auf neues LGS:

$$7\,x - 4\,z = -3$$
$$4\,y - 3\,z = -2$$
$$5\,x - 4\,y = -1$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösung 9

Es seien S die Anzahl der Sektflaschen, B die der Bierflaschen und W die Anzahl der Weinflaschen. Wir erhalten das LGS

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

mit der Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix} \in \left\{ \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -300 \\ 1700 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix} \lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das sind zunächst unendlich viele Möglichkeiten. Allerdings müssen wir die Lösungsmenge einschränken. Wir wollen keine nicht positiven Werte. Wie soll man -6 Bierflaschen kaufen? Und die Werte müssen natürliche Zahlen ergeben. Sie wollen ja auch nicht 3/4 Flaschen Sekt kaufen. Wir brauchen eine vernünftige Zusatzbedingung; aber wie könnte die aussehen?

Was haben wir? Die ersten beiden Zeilen in der Lösungsmenge ergeben:

$$\begin{aligned} -300 + 5\,\lambda &= 14S \\ 1700 - 19\,\lambda &= 14\,W \end{aligned}$$

Wir lösen beide Zeilen nach λ auf und setzen sie dann entsprechend gleich. Das liefert

$$19\,S + 5\,W = 200$$

damit $S, W \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und die letzte Gleichung muss S ein Vielfaches von 5 sein. Wir erhalten also mit

$$S = 5\,n \quad n \in \mathbb{N}$$

eine zusätzliche Bedingung in unserem Gleichungssystem, welches dadurch zu einem 3×3 System anwächst, nämlich

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 5\,n \end{pmatrix}$$

mit der Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Zunächst mal liefert uns diese Darstellung ganzzahlige Werte. Das ist schon besser aber immer noch nicht ganz was wir haben wollen.

Die Anzahl der Bierflaschen soll positiv sein, dann muss also $n > 0$ sein. Das gilt ohnehin. Die Anzahl der Weinflaschen soll ebenfalls positiv sein, was auf $n \leq 2$ führt. Die für unser Problem sinnvollen Lösungswerte ergeben sich dann zu

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \\ 74 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 68 \end{pmatrix} \right\}$$

Ein Fest für die Biertrinker auf jeden Fall!