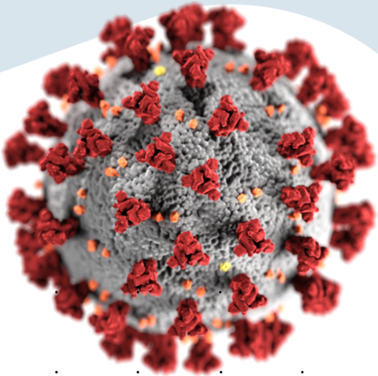


3 Differentiation

3.5 Anwendungen
3.6 Ableitung diskreter Funktionen

Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Differentiation

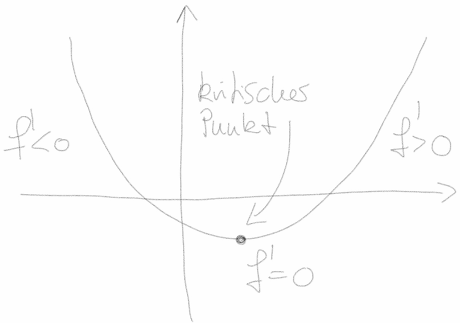
- Anwendungen
- Ableitung von diskreten Funktionen

- “Kurvendiskussion”, Charakteristika einer Funktion, Extrema & Wendepunkte
- Differentialgleichungen an ausgewählten Beispielen
- Ableitung von diskreten Funktionen
- Glättung von verrauschten Daten (Tiefpassfilter mit physikalischem Hintergrund)
- Parameterbestimmung zur approximativen Beschreibung von Daten (Labor 2 - Epidemie)
- Optimierungsprobleme

kritische Punkte: sind Stellen $(x_0, f(x_0))$ mit

$$f'(x_0) = 0$$

und Kandidaten für lokale Extrema.

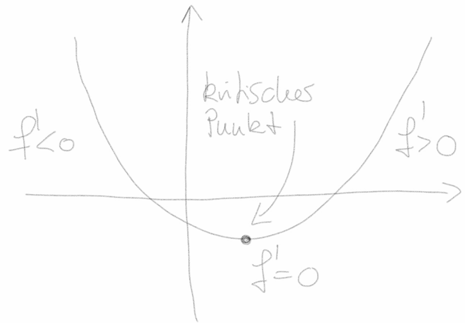


<u>kritische Punkte:</u> sind Stellen $(x_0, f(x_0))$ mit

$$f'(x_0) = 0$$

und Kandidaten für lokale Extrema.

<u>Frage:</u> Handelt es sich um ein Maximum oder Minimum?

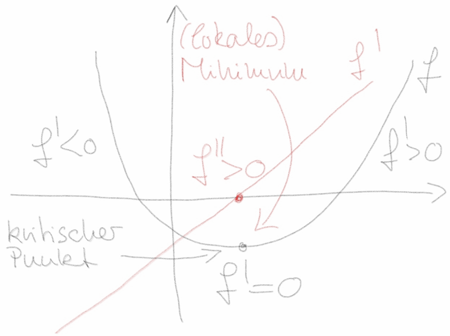


Was erzählen uns Ableitungen? - Extrema

<u>kritische Punkte:</u> sind Stellen $(x_0, f(x_0))$ mit

$$f'(x_0) = 0$$

und Kandidaten für lokale Extrema.



<u>Frage:</u> Handelt es sich um ein Maximum oder Minimum?

<u>Antwort:</u>

$$f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \quad \text{ist lok. Min.}$$

kritische Punkte: sind Stellen $(x_0, f(x_0))$ mit

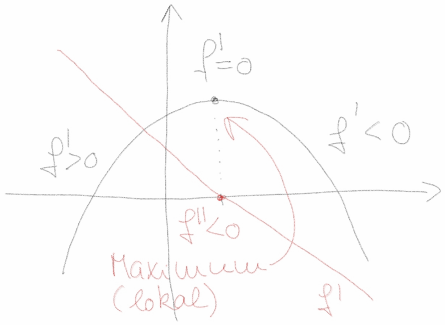
$$f'(x_0) = 0$$

und Kandidaten für lokale Extrema.

Frage: Handelt es sich um ein Maximum oder Minimum?

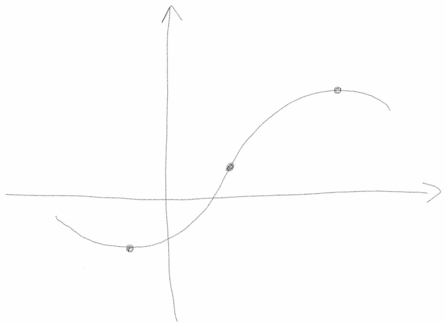
Antwort:

$$\begin{array}{llll} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow & (x_0, f(x_0)) & \text{ist lok. Min.} \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow & (x_0, f(x_0)) & \text{ist lok. Max.} \end{array}$$



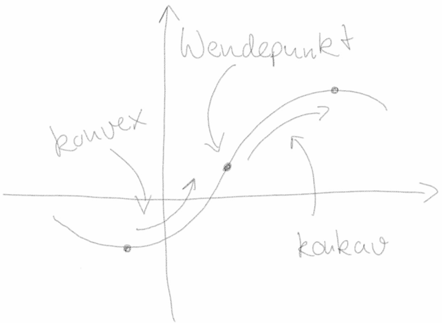
Was erzählen uns Ableitungen? - Wendepunkte

Ein Wendepunkte ist die Stelle des Graphen, wo Konvexität ("Linkskurve") in Konkavität (Rechtskurve) - oder anders herum - übergeht.



Ein Wendepunkte ist die Stelle des Graphen, wo Konvexität ("Linkskurve") in Konkavität (Rechtskurve) - oder anders herum - übergeht.

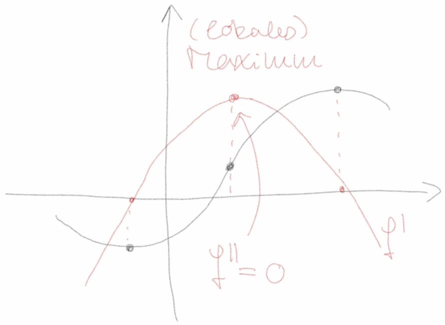
Es ist die Stelle x_0, an der der Graph am steilsten ist, also f' ein lokales Maximum besitzt, bzw. es ist ein kritischer Punkte von f'.



Ein Wendepunkte ist die Stelle des Graphen, wo Konvexität ("Linkskurve") in Konkavität (Rechtskurve) - oder anders herum - übergeht.

Es ist die Stelle x_0, an der der Graph am steilsten ist, also f' ein lokales Maximum besitzt, bzw. es ist ein kritischer Punkte von f'.

Bei Wendepunkten ist man selten am Vorzeichen der dritten Ableitung interessiert.



Beispiel: Extrema

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

Beispiel: Extrema

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2)$$

Beispiel: Extrema

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2) \qquad f'(x) = 0$$

Beispiel: Extrema

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2) \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

Beispiel: Extrema

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2) \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$f''(x) = 2\,\cos(x^2) - 4\,x^2\,\sin(x^2)$$

Beispiel: Extrema

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2) \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$f''(x) = 2\,\cos(x^2) - 4\,x^2\,\sin(x^2) \quad f''\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\,\pi \quad (\text{Max}) \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

$$f''(0) = 2 \quad (\text{Min}) \quad f(0) = 0$$

1.

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad \text{auf } I = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2) \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$f''(x) = 2\,\cos(x^2) - 4\,x^2\,\sin(x^2) \quad f''\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\,\pi \quad (\text{Max}) \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

$$f''(0) = 2 \quad (\text{Min}) \quad f(0) = 0$$

$f(x)$ hat zwei lokale Maxima bei

$$P_{max_1} = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1\right), \; P_{max_2} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1\right).$$

und ein lokase Minimum bei

$$P_{min} = (0, 0).$$

Beispiel: Extrema

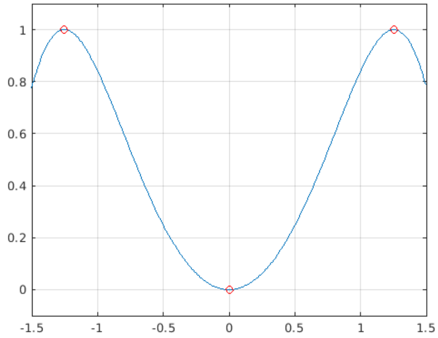
```
syms x

f(x)    = sin(x^2);
df(x)   = diff(f(x),x);
d2f(x) = diff(df(x),x); % oder diff(f(x),x,x);

kP     = solve(df(x)==0,x);
kPVal = subs(d2f(x),x,kP);

IndMax = find(kPVal<0);
IndMin = find(kPVal>0);

for i=1:length(IndMin)
    fprintf('Min = (%.2f,%.2f)\n',kP(IndMin(i)),subs(f(x),x,kP(IndMin(i))));
end
for i=1:length(IndMax)
    fprintf('Max = (%.2f,%.2f)\n',kP(IndMax(i)),subs(f(x),x,kP(IndMax(i))));
end
```

src/ExtremaDoc.m

Beispiel: Extrema

```
a = min(kP);
b = max(kP);
e = (b-a)/10;

xx=a-e:0.01:b+e;
yy=subs(f(x),x,xx);

plot(xx,yy,'-',kP,...
    subs(f(x),x,kP),'ro');
xlim([-1.5 1.5]);
ylim([-0.1 1.1]);
grid on
```

src/ExtremaDocPlot.m



Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x - 1) + 1 \qquad \text{auf } I = [0, 1]$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x - 1) + 1 \qquad \text{auf } I = [0, 1]$$
$$f'(x) = 2\cos(2x - 1)$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x - 1) + 1 \qquad \text{auf } I = [0, 1]$$
$$f'(x) = 2\cos(2x - 1)$$
$$f''(x) = -4\sin(2x - 1)$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x - 1) + 1 \qquad \text{auf } I = [0,1]$$

$$f'(x) = 2\cos(2x - 1)$$

$$f''(x) = -4\sin(2x - 1) \qquad f''(x) = 0$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x - 1) + 1 \qquad \text{auf } I = [0, 1]$$
$$f'(x) = 2\cos(2x - 1)$$
$$f''(x) = -4\sin(2x - 1) \qquad f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x-1)+1 \qquad \text{auf } I=[0,1]$$

$$f'(x) = 2\cos(2x-1)$$

$$f''(x) = -4\sin(2x-1) \qquad f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x-1)$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x-1)+1 \qquad \text{auf } I=[0,1]$$
$$f'(x) = 2\cos(2x-1)$$
$$f''(x) = -4\sin(2x-1) \qquad f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$
$$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x-1) \qquad f^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = -8$$

Beispiel: Wendepunkte

2.

$$f(x) = \sin(2x-1)+1 \qquad \text{auf } I = [0,1]$$
$$f'(x) = 2\cos(2x-1)$$
$$f''(x) = -4\sin(2x-1) \qquad f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$
$$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x-1) \qquad f^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = -8$$

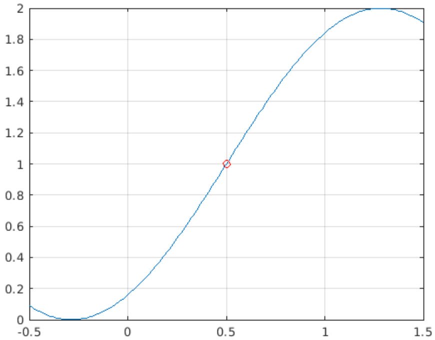
$f(x)$ hat einen Wendepunkt bei

$$W = \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Beispiel: Wendepunkt

```
syms x

f(x)    = sin(2*x-1)+1;
df(x)   = diff(f(x),x);
d2f(x)  = diff(df(x),x);
d3f(x)  = diff(d2f(x),x);

kP     = solve(d2f(x)==0,x);
kPVal  = subs(d3f(x),x,kP);

Ind  = find(kPVal~=0);

for  i=1:length(Ind)
     fprintf('Wp = (%.2f,%.2f)\n',...
         kP(Ind(i)),subs(f(x),x,...
         kP(Ind(i))));
end
```

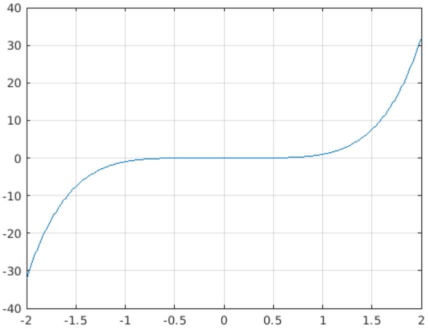
src/WendepunktDoc.m



Beispiel: Vorsicht geboten wenn ...

3. Kritische Punkte sind nur Kandidaten für Extrema und Wendepunkte:

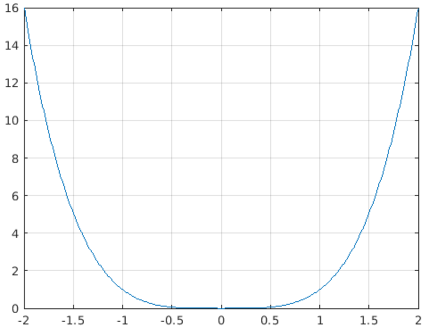
$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5\,x^4$$
$$f''(x) = 20\,x^3$$
$$f^{(3)}(x) = 60\,x^2$$



Beispiel: Vorsicht geboten wenn ...

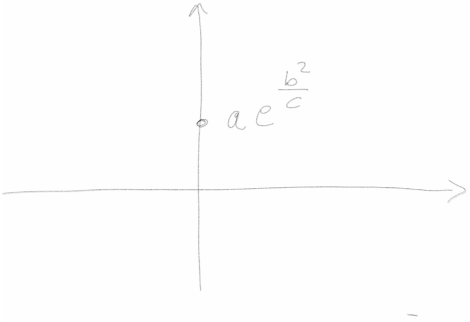
3. Kritische Punkte sind nur Kandidaten für Extrema und Wendepunkte:

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4\,x^3$$
$$f''(x) = 12\,x^2$$
$$f^{(3)}(x) = 24\,x$$



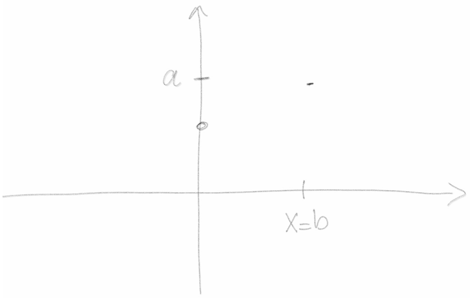
4. “wünsch’ dir was”

$$f(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$



4. “wünsch’ dir was”

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}} \\
f'(x) &= \frac{-2\,a\,(x-b)}{c}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}} \\
&= 0 \;\Leftrightarrow\; x = b
\end{aligned}
$$



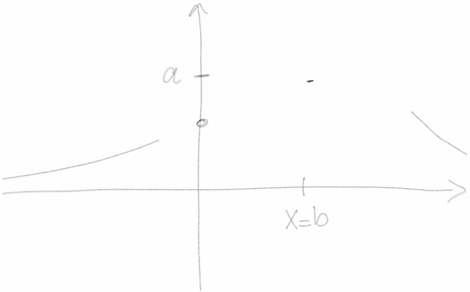
4. “wünsch’ dir was”

$$f(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$

$$f'(x) = \frac{-2\,a\,(x-b)}{c}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$

$$= 0 \;\Leftrightarrow\; x = b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$



4. “wünsch’ dir was”

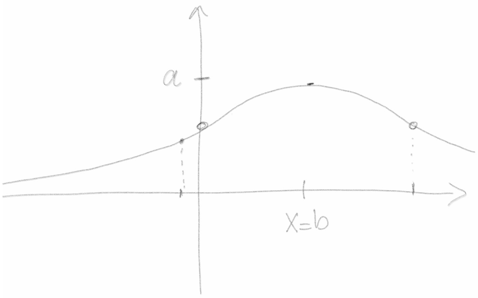
$$f(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$

$$f'(x) = \frac{-2\,a\,(x-b)}{c}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$

$$= 0 \;\Leftrightarrow\; x = b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$f''(x) = \frac{-2}{c}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}\left(1 + \frac{-2\,(x-b)^2}{c}\right)$$



4. "wünsch' dir was"

$$f(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$

$$f'(x) = \frac{-2\,a\,(x-b)}{c}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}$$

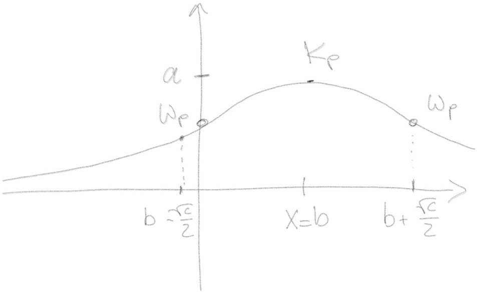
$$= 0 \;\Leftrightarrow\; x = b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$f''(x) = \frac{-2}{c}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}\left(1 + \frac{-2\,(x-b)^2}{c}\right)$$

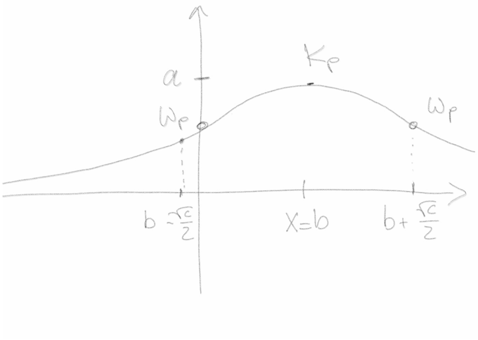
$$= 0 \;\Leftrightarrow\; (x-b)^2 = \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left\{b - \frac{\sqrt{c}}{2}, b + \frac{\sqrt{c}}{2}\right\}$$



4. “wünsch’ dir was”

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}} \\
f'(x) &= \frac{-2\,a\,(x-b)}{c}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}} \\
&= 0 \;\Leftrightarrow\; x = b \\
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= 0 \\
f''(x) &= \frac{-2}{c}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{c}}\left(1 + \frac{-2\,(x-b)^2}{c}\right) \\
&= 0 \;\Leftrightarrow\; (x-b)^2 = \frac{c}{2} \\
&\Leftrightarrow\; x \in \left\{ b - \frac{\sqrt{c}}{2}, b + \frac{\sqrt{c}}{2} \right\}
\end{aligned}
$$



Modelliere den Graphen nach Belieben durch die passende Wahl der Parameter a, b, c.

ODEs an ausgewählten Beispielen

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

ODEs an ausgewählten Beispielen

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

1. exponentielles Wachstum: "Wachstum ist proportional zum Bestand"

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

1. exponentielles Wachstum: "Wachstum ist proportional zum Bestand"

$$f' \sim f \quad \Rightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \ : \quad f' = \kappa f$$

ODEs an ausgewählten Beispielen

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

1. exponentielles Wachstum: "Wachstum ist proportional zum Bestand"

$$f' \sim f \quad \Rightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \ : \quad f' = \kappa f$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f_0 \, \mathrm{e}^{\kappa t}$$

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

1. exponentielles Wachstum: "Wachstum ist proportional zum Bestand"

$$f' \sim f \quad \Rightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \ : \quad f' = \kappa\, f$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f_0\, \mathrm{e}^{\kappa\, t}\,, \text{ denn } f'(t) = \kappa\, \underbrace{f_0\, \mathrm{e}^{\kappa\, t}}_{=f(t)}$$

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

1. exponentielles Wachstum: "Wachstum ist proportional zum Bestand"

$$f' \sim f \quad \Rightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \;:\quad f' = \kappa\, f$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f_0\, \mathrm{e}^{\kappa\, t}\,,\ \text{denn}\ f'(t) = \kappa\, \underbrace{f_0\, \mathrm{e}^{\kappa\, t}}_{=f(t)}$$

f_0 muss gegeben sein. Meist als Startwert $f_0 = f(0)$

ODE = Ordinary Differential Equation (Gewöhnliche Differentialgleichung)

1. exponentielles Wachstum: “Wachstum ist proportional zum Bestand”

$$f' \sim f \quad \Rightarrow \quad \exists \kappa \in \mathbb{R} \ : \quad f' = \kappa\, f$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f_0\, \mathrm{e}^{\kappa\, t}\,, \ \text{denn } f'(t) = \kappa\, \underbrace{f_0\, \mathrm{e}^{\kappa\, t}}_{=f(t)}$$

f_0 muss gegeben sein. Meist als Startwert $f_0 = f(0)$

Anfangswertproblem (AWP): Zu gegebenem f_0 und κ ist die Funktion $f\ :\ [0, T] \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$f'(t) = \kappa\, f(t)$$
$$f(0) = f_0$$

Zum AWP

$$f'(t) = 2\,f(t)$$
$$f(0) = 3$$

ist die (eindeutige) Lösung gegeben durch

$$f(t) = 3\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

2. Wenn das Wachstum durch eine Obergrenze G beschränkt ist:

$$f'(t) = \kappa f(t)$$

2. Wenn das Wachstum durch eine Obergrenze G beschränkt ist:

$$f'(t) = \kappa\, f(t)\,(G - f(t))$$

2. Wenn das Wachstum durch eine Obergrenze G beschränkt ist:

$$f'(t) = \kappa\, f(t)\,(G - f(t))\,,\ f(0) = f_0$$

2. Wenn das Wachstum durch eine Obergrenze G beschränkt ist:

$$f'(t) = \kappa\, f(t)\,(G - f(t))\,,\ f(0) = f_0$$

Die Lösung dazu lautet:

$$f(t) = \frac{G}{1 + \mathrm{e}^{-\kappa\, G\, t}\left(\frac{G}{f_0} - 1\right)}$$

2. Wenn das Wachstum durch eine Obergrenze G beschränkt ist:

$$f'(t) = \kappa\, f(t)\,(G - f(t))\,,\ \ f(0) = f_0$$

Die Lösung dazu lautet:

$$f(t) = \frac{G}{1 + \mathrm{e}^{-\kappa\, G\, t}\left(\frac{G}{f_0} - 1\right)}$$

$$f(0) = f_0\ \checkmark\,,\ \lim_{t\to\infty} f(t) = G\ \checkmark$$

2. Wenn das Wachstum durch eine Obergrenze G beschränkt ist:

$$f'(t) = \kappa\, f(t)\,(G - f(t))\,,\;\; f(0) = f_0$$

Die Lösung dazu lautet:

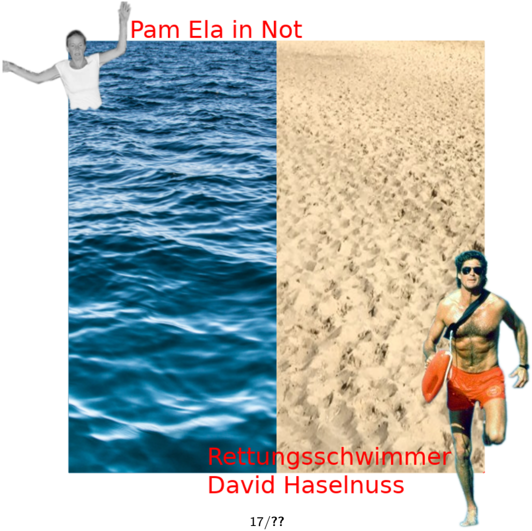
$$f(t) = \frac{G}{1 + \mathrm{e}^{-\kappa\, G\, t}\left(\frac{G}{f_0} - 1\right)}$$

$$f(0) = f_0 \;\checkmark\,,\;\; \lim_{t\to\infty} f(t) = G \;\checkmark$$

Weitere Untersuchungen und plots in der Laboraufgabe 2 “Epidemiesimulation”

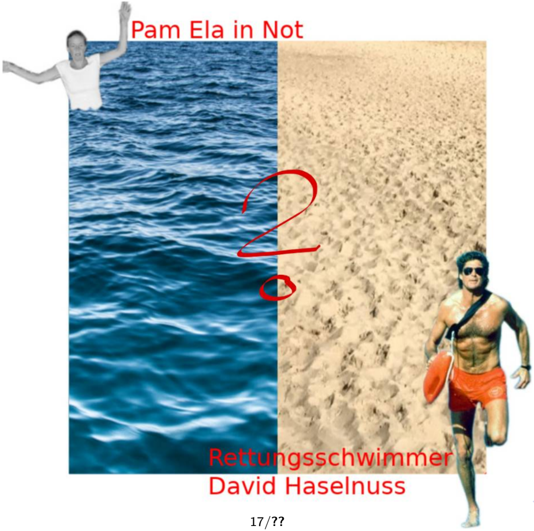
Baywatch: Ein Optimierungsproblem

3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?

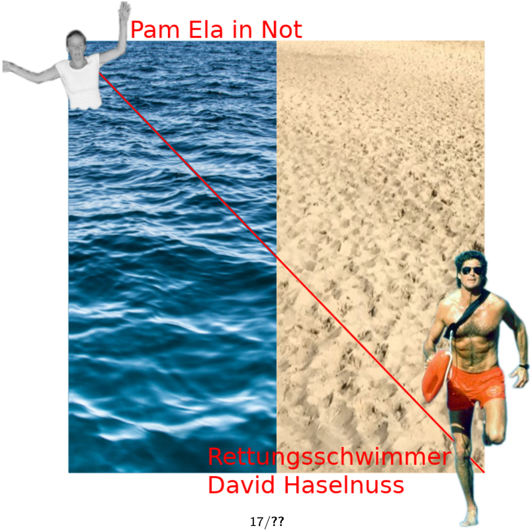


Baywatch: Ein Optimierungsproblem

3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?

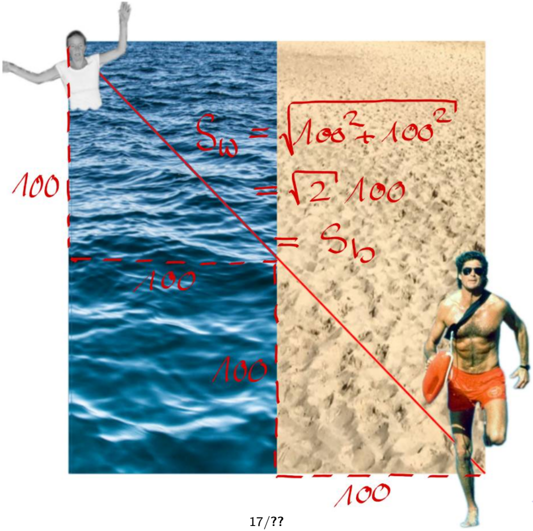


3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?

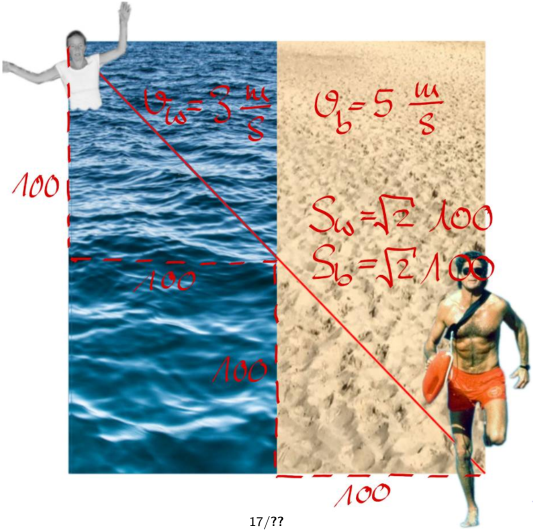


Baywatch: Ein Optimierungsproblem

3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?

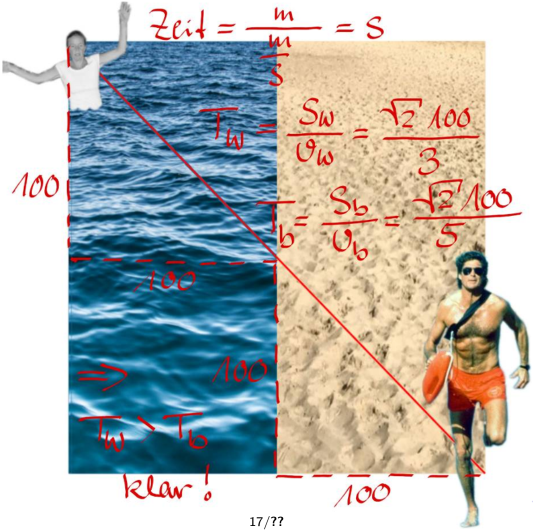


3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?

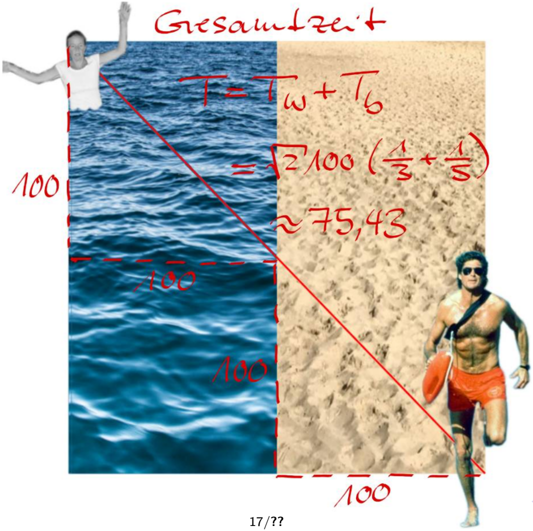


Baywatch: Ein Optimierungsproblem

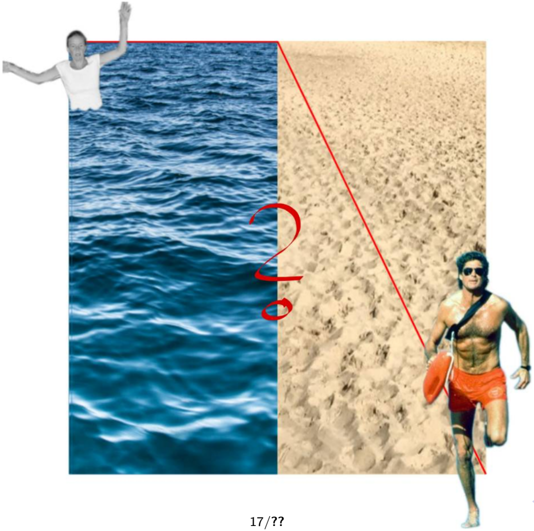
3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?



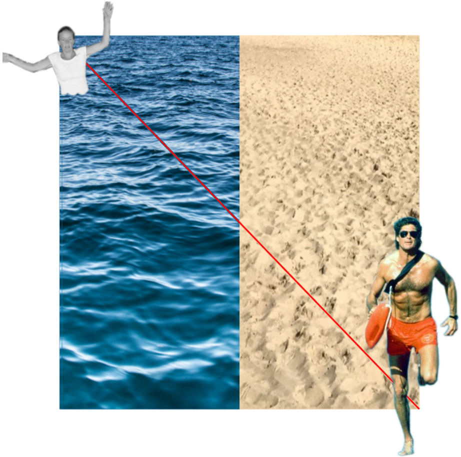
3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?

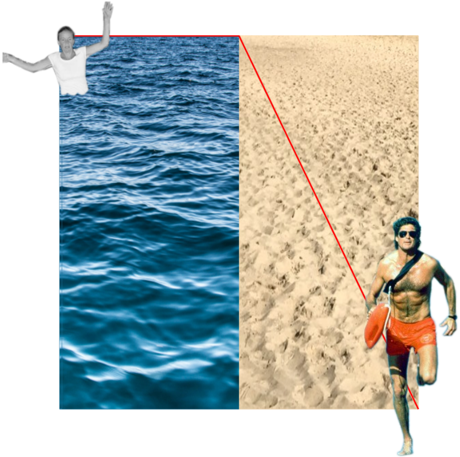


3. Wie lange braucht David, um Pam zu retten?



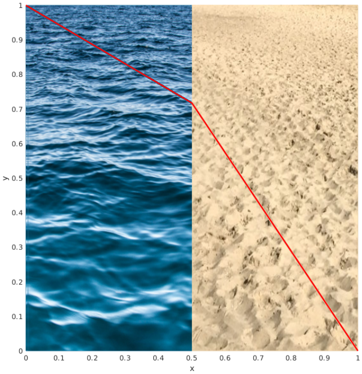
Baywatch: Ein Optimierungsproblem



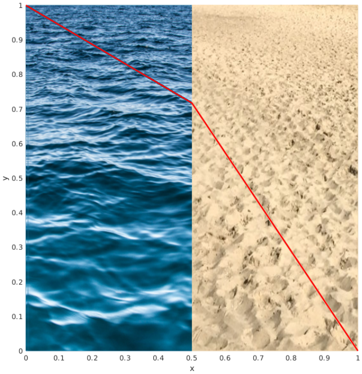


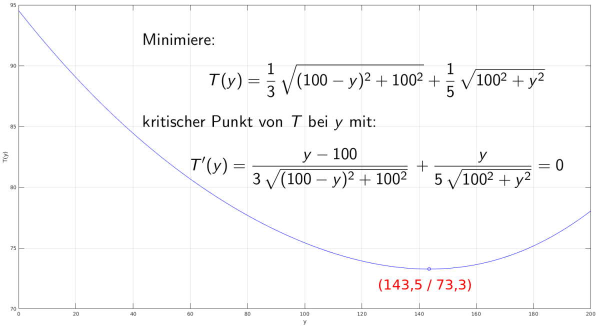
In welchem Fall ist David schneller?

Baywatch: Ein Optimierungsproblem



Baywatch: Ein Optimierungsproblem





Saalaufgabe

Sie sind 35 Jahre alt und bauen ein Haus. Alles soll gut für's Alter geplant sein. Es heißt ja, dass man ab 25 schrumpft und ab 40 ein wenig in die Breite geht. Sie wollen nun die Höhen-Breiten-Aufteilung der Türrahmen so gestalten, dass die geplante Zargenlänge (4,9 m pro Türrahmen sind schon geliefert) ausreicht, die Türöffnung aber maximale Fläche hat.
Auf welche Größe müssen Sie dann im Alter schrumpfen und wie füllig dürfen Sie werden, damit der Rahmen dann irgendwann optimal ist?

Saalaufgabe

Sie sind 35 Jahre alt und bauen ein Haus. Alles soll gut für's Alter geplant sein. Es heißt ja, dass man ab 25 schrumpft und ab 40 ein wenig in die Breite geht. Sie wollen nun die Höhen-Breiten-Aufteilung der Türrahmen so gestalten, dass die geplante Zargenlänge (4,9 m pro Türrahmen sind schon geliefert) ausreicht, die Türöffnung aber maximale Fläche hat.
Auf welche Größe müssen Sie dann im Alter schrumpfen und wie füllig dürfen Sie werden, damit der Rahmen dann irgendwann optimal ist?

Sie sollten auf 122.5 cm schrumpfen, dürfen aber 245 cm breit sein..., denn mit Türhöhe b, Türbreite a gilt

$$\begin{array}{llr} & L = a + 2\,b = 490 & \text{(Zargenlänge)} \\ \Leftrightarrow & a = 490 - 2\,b & \\ \Rightarrow & F = b\,(490 - 2\,b) & \text{(Fläche)} \\ \Rightarrow & F' = 490 - 4\,b \overset{!}{=} 0 & F'' = -4 < 0 \\ \Leftrightarrow & b = 122.5 \ \wedge \ a = 245 & \end{array}$$

Darstellung einer diskreten Funktion

<u>kontinuierlich:</u>

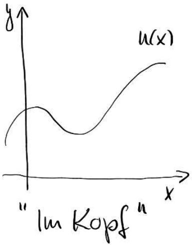
$$u\ :\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

<u>diskret:</u>

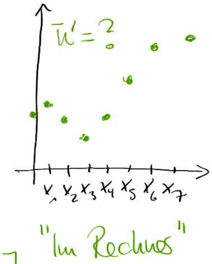
$$\overline{u} = (\overline{u}_1\ ,\ \ldots\ ,\ \overline{u}_N) \in \mathbb{R}^N\ ,\ \overline{u}_i = u(x_i)$$

<u>Intervallzerlegung:</u>

$$I = \bigcup_{i=1}^{N-1} [x_i, x_{i+1}]$$



$\bar{u}$ = [
2.0
1.8
1.6
1.4
1.5
1.9
2.3
....];



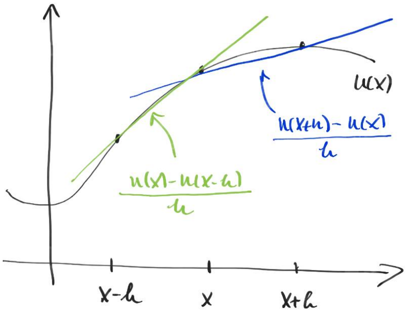
Beispiel

Soweit können Sie das schon mal implementieren. Zum Beispiel für $u(x) = \sin(2\,\pi\,x)$.

```
I = [0,1];                      % waehlbar
N = 10;                         % waehlbar

%% ab hier stellt sich alles automatisch ein
h = (I(2)-I(1))/(N-1);          % Gitter-/Schrittweite
func = @(x) sin(2*pi*x);        % kontinuierliche Funktion

x   = I(1):h:I(2);              % Feld x
u   = func(x);                  % diskrete Funktion

plot(x,u,'k-');
```

Source/src/DiskreteAbleitung1.m

Differenzenquotient:

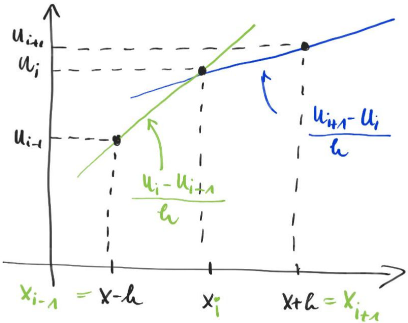


$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \qquad \text{vorwärst}$$

$$\approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \qquad \text{rückwärst}$$

$$\approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2\,h} \qquad \text{gemittelt}$$

Für die Zerlegung $I = [0, 1] = \bigcup_{i=1}^{N-1} [x_i, x_{i+1}]$ und die diskrete Funktion $u = (u_1, \ldots, u_N)$ mit $u_i = u(x_i)$ gilt



$$u_i' \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \qquad \text{vorwärst}$$

$$\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \qquad \text{rückwärst}$$

$$\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\,h} \qquad \text{gemittelt}$$

Es ist $h = 0.5$.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix}_v' = \left(\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{h} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\\0\end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix}_r' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\\3\end{pmatrix}\right)\frac{1}{h} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

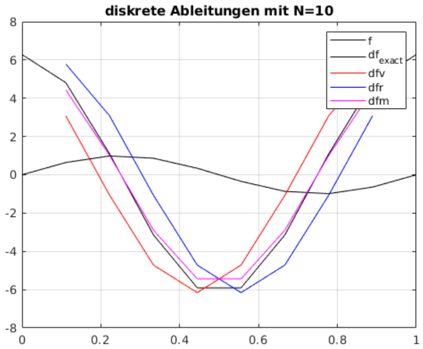
$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix}_m' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix}_v' + \begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\\1\end{pmatrix}_r'\right)\frac{1}{2} = \left(\begin{pmatrix}2\\4\\-2\\-4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\4\\-2\\-4\end{pmatrix}\right)\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}2\\6\\2\\-6\\-4\end{pmatrix}\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

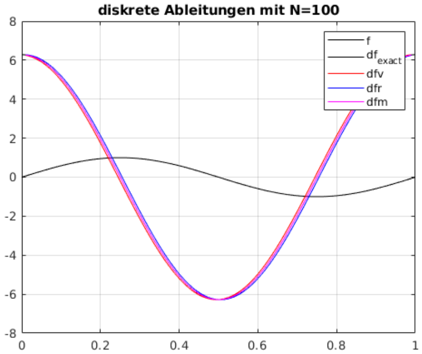
Beispiel: am Rechner

```
I = [0,1]; N = 10; h = (I(2)-I(1))/(N-1);
func = @(x) sin(2*pi*x);
dfunc = @(x) 2*pi*cos(2*pi*x);

x   = I(1):h:I(2);
u   = func(x);
d1u = dfunc(x); % exakte/kontinuierliche erste Ableitung

%% erste Ableitung (vorwaerts, rueckwaerts und gemittelt)
duv = zeros(1,N); dur = zeros(1,N); dum = zeros(1,N);
for i=1:N
    if i<N; duv(i) = (u(i+1)-u(i))/h; end
    if i>1; dur(i) = (u(i)-u(i-1))/h; end
    if i<N & i>1; dum(i) = (u(i+1)-u(i-1))/2/h; end
end

plot(x,u,'k-',x,d1u,'k-');
plot(x(2:N-1),duv(2:N-1),'r-');
plot(x(2:N-1),dur(2:N-1),'b-');
plot(x(2:N-1),dum(2:N-1),'m-');
```

Source/src/DiskreteAbleitung2.m

Beispiel: am Rechner





Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)$$

diskrete Ableitung als Matrix-Operation

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h}\,(u_{i+1} - u_{i-1})$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} \\ ? & ? & -1 & ? & ? & ? & ? \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} \\ ? & ? & -1 & 0 & ? & ? & ? \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} & & & & & & \\ ? & ? & -1 & 0 & 1 & ? & ? \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h} \left(u_{i+1} - u_{i-1} \right)$$

Ziel: Wir suchen eine lineare Abbildung, die das Tupel mit Funktionswerten auf das Tupel mit Ableitungswerten abbildet.

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,h} \begin{pmatrix} \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

i-te Zeile:

$$du_i = \frac{1}{2\,h} \left(u_{i+1} - u_{i-1} \right)$$

Sukkzessive für alle Zeilen so fortfahren.

Matrix-Vektor-Darstellung der ersten diskreten Ableitung, gemittelt in den inneren Knoten:

$$\frac{1}{2\,h}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_2 - u_1}{h} \\ \vdots \\ \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\,h} \\ \vdots \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{vorwärts} \\ \vdots \\ \text{gemittelt} \\ \vdots \\ \text{rückwärts} \end{matrix}$$

Beispiel:

Memo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_m' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2\,\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Beispiel:

Memo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_m' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Memo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_m' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(Wie man die Werte am Rand behandelt hängt ovn der Problemstellung ab. Für uns gerade nicht so wichtig.)

Implementierung:

`diag([[1 2];[3 4]])` `diag([1 4])` `diag([1,4],1)` `diag([1 4],-1)`

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Am besten Sie probieren das einfach mal aus.

```
I = [0,1];
N = 10;
h = (I(2)-I(1))/(N-1);
func = @(x) sin(2*pi*x);
dfunc = @(x) 2*pi*cos(2*pi*x);

%%
x   = I(1):h:I(2);
f   = func(x);
d1f = dfunc(x);

% erste Ableitung (gemittelt) als Matrix
D1 = diag(ones(N-1,1),1)-diag(ones(N-1,1),-1);
D1(1,1:2) = [-2 2]; D1(N,N-1:N) = [-2 2]; D1 = D1/2/h;

df = D1*f';

%%
plot(x,f,'k-',x,d1f,'o');
hold on
plot(x,df,'r-');
```

Source/src/DiskreteAbleitung3.m

Für die diskrete Verteilungsfunktion (sto, S. 126, nach der Definition “Verteilungsfunktion”)

$$\overline{u} = \left(0, \frac{1}{25}, \frac{3}{25}, \frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{15}{25}, \frac{19}{25}, \frac{22}{25}, \frac{24}{25}, 1\right)^T$$

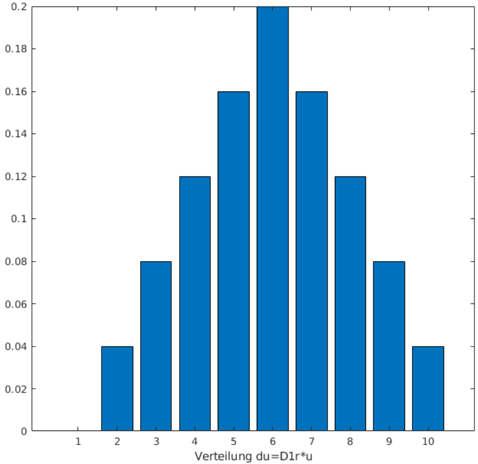
lässt sich nun mit einer Multiplikation der Matrix zum Rückwärtsdifferenzenquotient die zugehörige Verteilung berechnen:

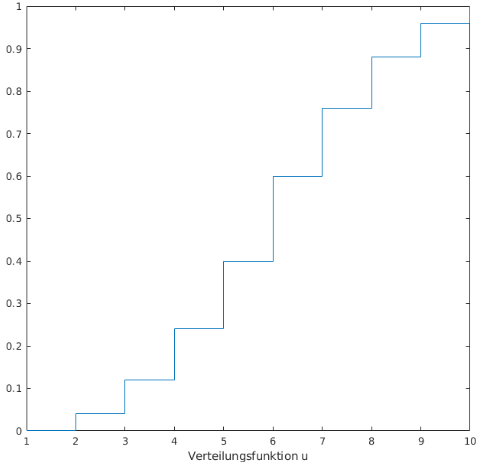
$$\overline{du} = D^0_{1,r} \cdot \overline{u}\,,$$

wobei

$$\left(D^0_{1,r}\right)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = 1\,,\ j = 2 \\ \left(D_{1,r}\right)_{ij} & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Beispiel: diskrete Verteilung





Damit wird auch im Sinne der Differentiation der Zusammenhang zwischen Verteilung und Verteilungsfunktion etwas klarer. Rechnen Sie das als Übung gerne nach.

Differenzenquotient für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} u''(x) &\approx \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient} \\ &\approx \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} && \text{Rückwärtsdifferenzenquotient} \\ &= \frac{1}{h^2}\left(u(x+h) - 2\,u(x) + u(x-h)\right) \end{aligned}$$

Differenzenquotient für die zweite Ableitung:

$$
\begin{aligned}
u''(x) &\approx \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient} \\
&\approx \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} && \text{Rückwärtsdifferenzenquotient} \\
&= \frac{1}{h^2}\left(u(x+h) - 2\,u(x) + u(x-h)\right)
\end{aligned}
$$

angewandt auf diskrete Funktionen

$$
u_i'' = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}\right)
$$

Memo:

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}\right)$$

erste Ableitung vorwärts und zweite rückwärts:

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ \\ \vdots \\ \\ u_N'' \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:D_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_N \end{pmatrix}$$

diskrete Ableitung zweiter Ordnung

Memo:

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}\right)$$

erste Ableitung vorwärts und zweite rückwrts:

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ \\ \vdots \\ \\ u_N'' \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:D_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_N \end{pmatrix}$$

Variante für eine Ableitung zweiter Ordnung:

$$\tilde{D}_2 = D_1^2$$

Probieren Sie das mal aus (Labor) und diskutieren Sie das Ergebnis.

diskrete Ableitung zweiter Ordnung

Memo:

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}\right)$$

erste Ableitung vorwärts und zweite rückẅrts:

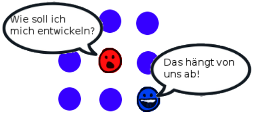
$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ \\ \vdots \\ \\ u_N'' \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:D_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_N \end{pmatrix}$$

Variante für eine Ableitung zweiter Ordnung:

$$\tilde{D}_2 = D_1^2$$

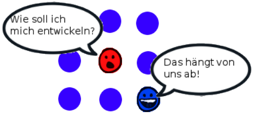
Probieren Sie das mal aus (Labor) und diskutieren Sie das Ergebnis.

Die diskreten Ableitungen sind nicht eindeutig. Da gibt es Varianten, die zu unterschiedlichen Matrizen führen. Alle liefern Approximationen. Wichtig ist, dass es eine Konvergenz zu **der** Ableitung gibt für $h \to 0$. (Numerik)

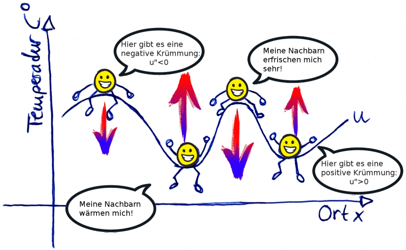


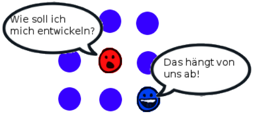
Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die besagt, dass die zeitliche Entwicklung von Wärme an einem Ort, von der Wärmeverteilung der unmittelbaren Umgebung abhängt.

ODEs an ausgewählten Beispielen: Die Diffusionsgleichung



Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die besagt, dass die zeitliche Entwicklung von Wärme an einem Ort, von der Wärmeverteilung der unmittelbaren Umgebung abhängt.



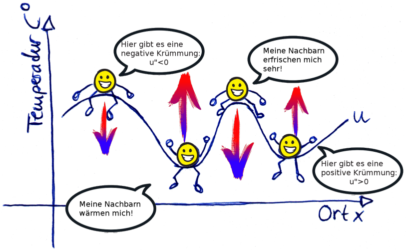


Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die besagt, dass die zeitliche Entwicklung von Wärme an einem Ort, von der Wärmeverteilung der unmittelbaren Umgebung abhängt.

Plausibilitätserklärung in einer Raumdimension: Wärmeentwicklung in der Zeit wird vom Krümmungsverhalten im Ort der Temperaturkurve bestimmt: $u : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = u(t, x)$

$$u_t \sim u'' , \text{ bzw. } u_t = C\, u''$$

Proportionalitätskonstante: C ist eine Materialkonstante, die die Wärmeleitfähigkeit des Materials beschreibt.



ODEs an ausgewählten Beispielen: Die Diffusionsgleichung

Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u\ :\ [0,T]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ mit

$$u_t - C\,u'' = 0$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{Anfangswert}$$

$$u(t,a) = u_a(t) \qquad \text{Randwert}$$

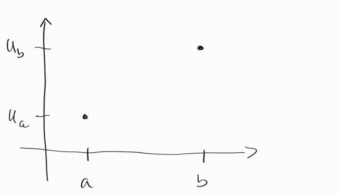
$$u(t,b) = u_b(t) \qquad \text{Randwert}$$

Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u \ : \ [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$u_t - C\,u'' = 0$$

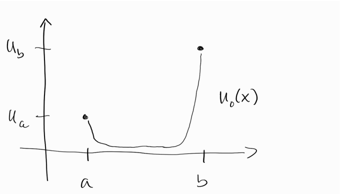
$u(0,x) = u_0(x)$	Anfangswert
$u(t,a) = u_a(t)$	Randwert
$u(t,b) = u_b(t)$	Randwert



Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u\ :\ [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

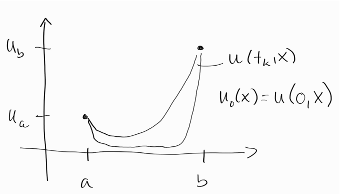
$$
\begin{aligned}
u_t - C\,u'' &= 0 & \\
u(0, x) &= u_0(x) & \text{Anfangswert} \\
u(t, a) &= u_a(t) & \text{Randwert} \\
u(t, b) &= u_b(t) & \text{Randwert}
\end{aligned}
$$



Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u \; : \; [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
u_t - C\, u'' &= 0 \\
u(0, x) &= u_0(x) && \text{Anfangswert} \\
u(t, a) &= u_a(t) && \text{Randwert} \\
u(t, b) &= u_b(t) && \text{Randwert}
\end{aligned}
$$

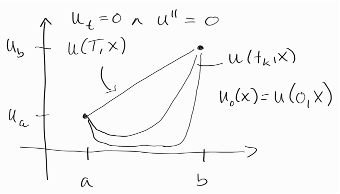


ODEs an ausgewählten Beispielen: Die Diffusionsgleichung

Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u\ :\ [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} u_t - C\,u'' &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{Anfangswert} \\ u(t, a) &= u_a(t) && \text{Randwert} \\ u(t, b) &= u_b(t) && \text{Randwert} \end{aligned}$$



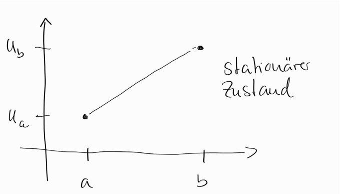
ODEs an ausgewählten Beispielen: Die Diffusionsgleichung

Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u \ : \ [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$u_t - C\, u'' = 0$$

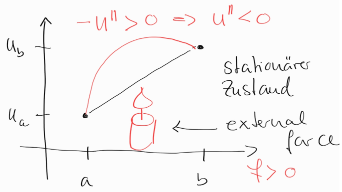
$u(0, x) = u_0(x)$	Anfangswert
$u(t, a) = u_a(t)$	Randwert
$u(t, b) = u_b(t)$	Randwert



Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u \;:\; [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
u_t - C\,u'' &= {\color{red} f} \\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{Anfangswert} \\
u(t,a) &= u_a(t) && \text{Randwert} \\
u(t,b) &= u_b(t) && \text{Randwert}
\end{aligned}
$$

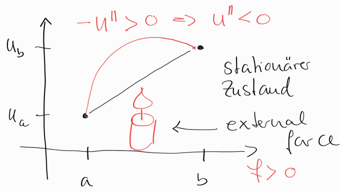


Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u \; : \; [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$u_t - C\, u'' = f$$

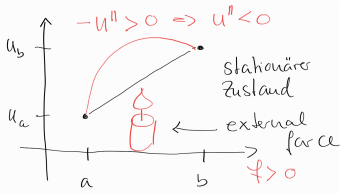
$u(0, x) = u_0(x)$	Anfangswert
$u(t, a) = u_a(t)$	Randwert (Dirichletrandwert)
$u(t, b) = u_b(t)$	Randwert (Dirichletrandwert)



Anfangs-/Randwertproblem:

gegeben: C, u_0, u_a, u_b
gesucht: $u \; : \; [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
u_t - C\,u'' &= {\color{red} f} & & \\
u(0, x) &= u_0(x) & & \text{Anfangswert} \\
u(t, a) &= u_a(t) & & \text{Randwert} \\
& & & \text{(Dirichletrandwert)} \\
u'(t, b) &= u_B(t) & & \text{Randwert} \\
& & & \text{(Neumannrandwert)}
\end{aligned}
$$



Zeitableitung gegen Differenzenquotient austauschen

$$u_t(t_k, x) \approx \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{t_k - t_{k-1}}$$

Zeitableitung gegen Differenzenquotient austauschen

$$u_t(t_k, x) \approx \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{t_k - t_{k-1}}$$

Wir definieren:

$$u^k(x) := u(t_k, x)\,,\ \delta := t_k - t_{k-1}\ \forall k \text{ (äquidistant)}$$

Zeitableitung gegen Differenzenquotient austauschen

$$u_t(t_k, x) \approx \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{t_k - t_{k-1}}$$

Wir definieren:

$$u^k(x) := u(t_k, x)\,,\ \delta := t_k - t_{k-1}\ \forall k \text{ (äquidistant)}$$

Dann steht da kurz:

$$u_t^k \approx \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta}$$

Zeitableitung gegen Differenzenquotient austauschen

$$u_t(t_k, x) \approx \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{t_k - t_{k-1}}$$

Wir definieren:

$$u^k(x) := u(t_k, x)\,,\ \delta := t_k - t_{k-1}\ \forall k\ (\text{äquidistant})$$

Dann steht da kurz:

$$u_t^k \approx \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta}$$

Eingesetzt in das Modell: $u_t - u'' = 0$

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{\delta} - u^{k-1''} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^k = u^{k-1} + \delta\, u^{k-1''}$$

Zeitableitung gegen Differenzenquotient austauschen

$$u_t(t_k, x) \approx \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{t_k - t_{k-1}}$$

Wir definieren:

$$u^k(x) := u(t_k, x)\,,\ \delta := t_k - t_{k-1}\ \forall k\ \text{(äquidistant)}$$

Dann steht da kurz:

$$u_t^k \approx \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta}$$

Eingesetzt in das Modell: $u_t - u'' = 0$

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{\delta} - u^{k-1\,\prime\prime} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^k = u^{k-1} + \delta\, u^{k-1\,\prime\prime}$$

diskret: i-te Zeile

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \delta\, \left(D_2\, u^{k-1}\right)_i$$

Im Programm

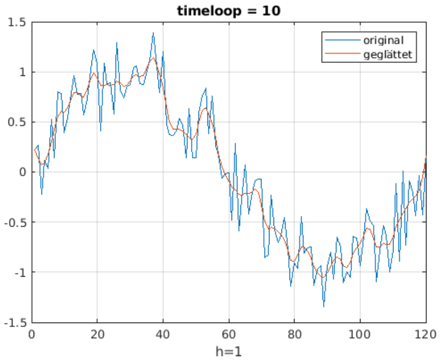
```
T = linspace(1,M,M);
R = sin(T*2*pi/120)'...
  +(rand(M,1)-0.5);

% zweite Ableitung
D2 = -2*diag(ones(M,1)) ...
    + diag(ones(M-1,1),1) ...
    + diag(ones(M-1,1),-1);
D2(1,:) = 0; D2(M,:) = 0;

plot(T,R)
hold on
for k=1:LOOP
    d2R = D2*R;
    R = R + 0.1*d2R;
end
plot(T,R)
```

Source/src/Smooth.m

Im Programm

```
T = linspace(1,M,M);
R = sin(T*2*pi/120)'...
  +(rand(M,1)-0.5);

% zweite Ableitung
D2 = -2*diag(ones(M,1)) ...
     + diag(ones(M-1,1),1) ...
     + diag(ones(M-1,1),-1);
D2(1,:) = 0; D2(M,:) = 0;

plot(T,R)
hold on
for k=1:LOOP
     d2R = D2*R;
     R = R + 0.1*d2R;
end
plot(T,R)
```

Source/src/Smooth.m

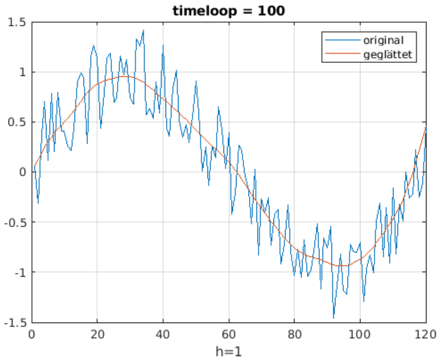


bissl wenig

Im Programm

```
T = linspace(1,M,M);
R = sin(T*2*pi/120)'...
  +(rand(M,1)-0.5);

% zweite Ableitung
D2 = -2*diag(ones(M,1)) ...
     + diag(ones(M-1,1),1) ...
     + diag(ones(M-1,1),-1);
D2(1,:) = 0; D2(M,:) = 0;

plot(T,R)
hold on
for k=1:LOOP
    d2R = D2*R;
    R = R + 0.1*d2R;
end
plot(T,R)
```

Source/src/Smooth.m

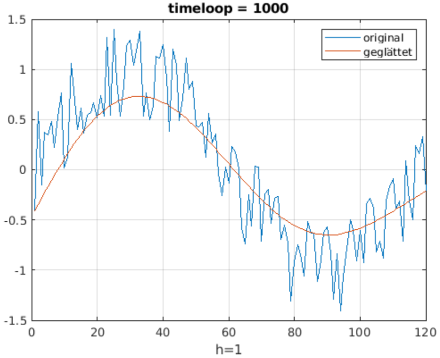


sieht gut aus

Im Programm

```
T = linspace(1,M,M);
R = sin(T*2*pi/120)'...
  +(rand(M,1)-0.5);

% zweite Ableitung
D2 = -2*diag(ones(M,1))  ...
     + diag(ones(M-1,1),1)  ...
     + diag(ones(M-1,1),-1);
D2(1,:) = 0; D2(M,:) = 0;

plot(T,R)
hold on
for k=1:LOOP
    d2R = D2*R;
    R = R + 0.1*d2R;
end
plot(T,R)
```

Source/src/Smooth.m



bissl viel

Lernziele

- aus den Anwendungen
  - Charakteristische Merkmale wie kritische Punkte und Wendepunkte einer Funktion sind für Sie kein Buch mit Sieben Siegeln.
  - Sie wissen wie man die Form eines Graphen durch Streckung/Stauchung, Verschiebung und Skalierung variieren kann.
  - Sie haben die Grundstruktur einer Optimierungsrechnen verstanden und können dies anhand eines Beispiels erklären.
  - Die Gleichungen für exponentielles und logistisches Wachstum sind Ihnen plausibel, dass die angegebenen Lösungsfunktionen eben solche sind können Sie nachrechnen und die zigehörigen Graphen passen Ihrer Meinung nach zur Problemstellung.
- diskrete Ableitungen
  - Sie können erste und zweite Ableitung für diskrete Funktionen berechnen.
  - Sie können auch die dritte Ableitung für diskrete Funktionen berechnen.
  - Sie können den Ausdruck D_1^2 berechnen und interpretieren.
  - Ihnen ist die Diffusionsgleichung plausibel und Sie erkennen ihre Glättungseigenschaft.
  - Sie können die Beispiele implementieren (Labor) und verrauschte Daten glätten.