Übungsblatt 5

Diskrete Verteilungen

Stochastik@AIN2
Prof. Dr. Barbara Staehle
Sommersemester 2021
HTWG Konstanz

|Einfache und mittelschwere Aufgaben|

Hinweis: Die Aufgaben lassen sich alle per Hand (eigenständige Überlegungen) lösen, schneller geht es aber, wenn Sie die vorkommenden Zufallsvariablen als binomial-, geometrisch oder poissonverteilt modellieren.

AUFGABE 5.1 3 PUNKTE

Ein 10-seitiger fairer Würfel (W10) wird 5 mal geworfen. Wir betrachten die Zufallsvariablen $X =$ Anzahl der geworfenen Einsen.

a) Überlegen Sie sich, wie X verteilt ist. Geben Sie dann den Ereignisraum des Zufallsexperimentes (andeutungsweise), sowie den Wertebereich von X an.

b) Geben Sie die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an (konkret also für jeden Wert, den X annehmen kann, dessen Wahrscheinlichkeit).

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   - in 5 Würfen höchstens zwei Einsen zu haben
   - in 5 Würfen mindestens drei Einsen zu haben

d) Wie viele Einsen kann man bei 5 Würfen des W10 auf lange Sicht erwarten (Geben Sie den Erwartungswert an)?

AUFGABE 5.2 3 PUNKTE

Sie lesen in einer Zeitung, dass es am Gardasee im August durchschnittlich an 8 Tagen regnet. Sie möchten das Wetter am Gardasee im Jahr 2021 simulieren und nehmen an, dass jeder Tag des Augusts in Ihrer Simulation die gleiche Regenwahrscheinlichkeit hat (die Sie aus der Zeitungsaussage ableiten).

Betrachten Sie die Zufallsvariablen

- R: ist gleich 1, falls der 8.8.2021 am Gardasee ein Regentag ist, 0 sonst
- A: Anzahl der Tag im August 2021 , die am Gardasee verregnet sind
- W: Anzahl der Tage, die man am Gardasee ab dem 1.82021 bis zum ersten Regentag warten werden muss

a) Geben Sie an wie und mit welchen Parametern die Zufallsvariablen R, A, W jeweils verteilt sind.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es im August 2021 am Gardasee mehr als 3 Regentage geben?

c) Was ist (auf lange Sicht, beobachtet über mehrere Jahre) der Erwartungswert der Anzahl der Tage, die man ab dem 1. August auf Regen warten werden muss?

Aufgabe 5.3 2 Punkte

Ein Software-Hersteller hat für seine Kunden eine Hotline eingerichtet. An Werktagen rufen zwischen 20.00 und 21.00 Uhr durchschnittlich 5 Kunden an. Man nimmt an, dass die Anzahl der Anrufe pro Stunde poissonverteilt ist. Die Hotline ist so besetzt, dass sie in dieser Zeit 4 Anrufe entgegennehmen kann.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 20 und 21 Uhr genau 3 Kunden anrufen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hotline überlastet ist?

Aufgabe 5.4 2 Punkte

Ein Stoppschild wird von 10% aller Fahrzeuge ignoriert. Sie machen einen Ferienjob in der Verkehrsüberwachung und müssen Übertretungen beobachten und protokollieren.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Fahrzeugen mehr als 2 das Stoppschild ignorieren?

b) Wie groß ist der Erwartungswert der ignorierenden Fahrzeuge bei 50 beobachteten Fahrzeugen?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchstens 5 Fahrzeuge beobachten müssen, um das erste Fahrzeug (in Ihrer Beobachtung) zu sehen, welches das Stoppschild ignoriert?

d) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Fahrzeuge die Sie beobachten müssen, bis das erste Fahrzeug das Stoppschild ignoriert?

Aufgabe 5.5 2 Punkte

Im Durchschnitt muss ein Kaffeeautomat 180 Anforderungen pro Stunde bedienen. Man nimmt an, dass die Anzahl der Anforderungen poissonverteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von drei Minuten mehr als 5 Anforderungen eintreten?

Aufgabe 5.6 3 Punkte

Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils an, wie die Zufallsvariablen, welche das Szenario beschreiben, verteilt sind und berechnen Sie deren Mittelwert und Varianz. Finden Sie weiterhin die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

a) Carol ist Bowlen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 schafft sie einen Strike (und legt alle Kegel auf einmal um).
Wenn sie 10 Versuche hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie weniger als 3 Strikes macht?

b) Im Mittel hält an einer bestimmten Bushaltestelle alle 15 Minuten ein Bus.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem 15 Minuten-Intervall kein Bus anhält?

c) 20% aller Müsli-Schachteln enthalten ein Gratis-Spielzeug.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie weniger als 4 Schachteln öffnen, bis Sie ein Spielzeug finden?

|Mittelschwere und schwere Aufgaben|

Aufgabe 5.7 2 Punkte

Sind die folgenden Zufallsvariablen binomialverteilt? Begründen Sie Ihre Meinung!

a) Ziehen von 5 Kugeln aus einer Urne mit 10 roten und 10 weißen Kugeln ohne Zurücklegen. X_1 ist die Anzahl der roten Kugeln.

b) Wiederholtes Würfeln mit einem W6. X_2 ist die Anzahl der Würfe bis zur ersten 6.

c) Zehnmaliges Würfeln mit einem W6. X_3 ist die Anzahl der gewürfelten 6n.

d) Jeder der 100 Mitarbeiter von Firma Müller ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 7% krank. X_4 ist die Anzahl der Erkrankten an einem bestimmten Tag.

e) 11 % der Bevölkerung Deutschlands haben Blutgruppe B. X_5 ist die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in Familie Schmidt.

f) 11 % der Bevölkerung Deutschlands haben Blutgruppe B. X_6 ist die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in einer zufällig ausgewählten Gruppe von 100 Deutschen.

Aufgabe 5.8 3 Punkte

Über einen fehlerbehafteten Nachrichtenkanal werden Bits (0 bzw. 1) gesendet. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit (d.h., dass eine gesendete Null als eine Eins ankommt oder umgekehrt), ist $p = 0.3$.
Betrachte nun X = Übertragungserfolg für ein Bit, Y = Anzahl der Bitfehler in einer zufällig gesendeten Bitfolge der Länge 3, sowie Z = Anzahl der Übertragungsversuche bis zum ersten **falsch** übertragenem Bit und Z_2 = Anzahl der Übertragungsversuche bis zum ersten **korrekt** übertragenem Bit.

a) Geben Sie an, wie die Zufallsvariablen X, Y, Z und Z_2 verteilt sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Übertragung von 3 Bits (mindestens) ein Bitfehler auftritt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste falsch übertragene Bit erst im 3. Versuch auftritt?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste korrekt übertragene Bit erst im 3. Versuch auftritt?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 5 Versuche bis zum ersten Übertragungserfolg (korrekt übertragenes Bit) benötigt werden?

f) Was ist der Erwartungswert für die Anzahl der bis zum ersten Erfolg notwendigen Übertragungen?

g) Wie viele Bits müssen mindestens übertragen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% das erste Mal ein Bit **verfälscht** übertragen wurde?

h) Wie viele Bits müssen mindestens übertragen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% das erste Mal ein Bit **fehlerfrei** übertragen wurde?

Aufgabe 5.9 3 Punkte

Eine Lieferung enthält $N = 100$ Transistoren, die aus einer Massenproduktion mit 5% Ausschuss stammen. Bei der Anlieferung der Ware wird vom Kunden eine Abnahmekontrolle in Form einer Stichprobe vom Umfang $n = 4$ (ohne Zurücklegen) durchgeführt. Die entnommenen Transistoren werden dabei auf ihre Funktionstüchtigkeit überprüft.

a) Beschreiben Sie das Szenario mit Hilfe der Zufallsvariable X. Geben Sie die Verteilung von X an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die durchgeführte Stichprobe nur einwandfreie Ware?

Aufgabe 5.10 3 Punkte

Die Serienproduktion von Glühbirnen erfolge mit einem Ausschussanteil von 1%, d. h. im Mittel befindet sich unter 100 Glühbirnen eine unbrauchbare (defekte). Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält diese Stichprobe drei oder mehr defekte Glühbirnen?

Lösen Sie diese Aufgabe

a) exakt,

b) approximativ

Aufgabe 5.11

Emil sitzt in der HTWG-Strandbar und beobachtet die vorbeifahrenden Boote.
Annahme: Emil beobachtet immer nur ein Boot auf einmal!

Teilaufgabe 5.11.1 4 Punkte

Ein von Emil beobachtetes Boot ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.25$ ein Segelboot.

Modellieren Sie die Beobachtungen von Emil mit Hilfe der Zufallsvariablen

- X: Anzahl der Boote die Emil beobachten muss, bis er das erste Segelboot sieht
- Y: Anzahl der Segelboote innerhalb einer Serie von 10 Booten

a) Geben Sie an, wie die Zufallsvariablen X und Y verteilt sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 10 von Emil beobachteten Booten mindestens zwei Segelboote sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst das 5. von Emil beobachtete Boot das erste von ihm beobachtete Segelboot ist?

d) Wie viele Boote muss Emil mindestens beobachten, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Segelboot dabei war?

Teilaufgabe 5.11.2 3 Punkte

Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Motorboote M, die Emil pro Stunde beobachtet, poissonverteilt mit Rate $\lambda_M = 5$ ist. Nehmen Sie weiterhin an, dass die Anzahl Ruderboote R, die Emil pro Stunde beobachtet, poissonverteilt mit Rate $\lambda_R = 10$ ist.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von M.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet Emil innerhalb von einer Stunde genau 10 Ruderboote?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet Emil innerhalb einer Stunde weniger als 2 Motorboote?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet Emil innerhalb einer Stunde mindestens 2 Boote, die entweder Motor- oder Ruderboot sein können?

Aufgabe 5.12 Jobsuche, 2 Punkte

Um nach Ihrem Studium einen Job zu finden, nutzen Sie verschiedene Möglichkeiten.

- Auf ungeheuer.de finden Sie im Mittel 3.5 passende Stellen pro Woche. Die Anzahl der gefundenen Stellen pro Woche sei Zufallsvariable Z_1.
- Auf trittstein.de finden Sie täglich mit 15% Wahrscheinlichkeit eine passende Stelle. Die Wahrscheinlichkeit einen Job an einem bestimmten Tag zu finden jeweils unabhängig von den anderen Tagen.
  - Die Anzahl der Tage, die Sie suchen müssen, bis Sie eine passende Stelle gefunden haben sei Zufallsvariable Z_2.
  - Die Anzahl der Stellen, die Sie nach 20 Tagen gefunden haben, sei Zufallsvariable Z_3.

a) Geben Sie an, wie und mit welchen Parametern die Zufallsvariablen Z_1, Z_2, Z_3 verteilt sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf ungeheuer.de mindestens einen Job in einer Woche finden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf trittstein.de nach höchstens 3 Tagen eine Stelle finden?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf trittstein.de nach 20 Tagen genau 20 Stellen finden?

|Aufgaben aus [ZwKo99] |

Anmerkung: [ZwKo99] stammt noch aus der Zeit, in der man viele Aufgaben nur mittels Nachschlagen in Tabellen lösen konnte (welche in diesem Buch enthalten sind). Daher wirken manche der Rechenwege in den Musterlösungen etwas merkwürdig.

AUFGABE 5.13 1 PUNKT

A biased coin has a probability of heads of 0.75. What is the probability of obtaining 5 or more heads in 8 flips?

AUFGABE 5.14 2 PUNKTE

The probability a randomly selected home in Columbia County will lose power during a summer storm is 0.25. Suppose 14 homes in this county are selected at random. What is the probability exactly (a) 4 homes will lose power, (b) more than 6 will lose power, and (c) between 2 and 7 (inclusive) will lose power

AUFGABE 5.15 1 PUNKT

When flipping a biased coin (so that heads occur only 30% of the time), what is the probability that the first head occurs on the 10th flip?

AUFGABE 5.16 2 PUNKTE

The probability a randomly selected customer has the correct change when making a purchase at the local donut shop is 0.1. (a) What is the probability the first person to have correct change will be the fifth customer? (b) What is the probability the first person with correct change will be at least the sixth customer?

AUFGABE 5.17 2 PUNKTE

The number of black bear sightings in Northeastern Pennsylvania during a given week has a Poisson distribution with $\lambda = 3$. For a randomly selected week, what is the probability of (a) exactly 2 sightings, (b) more than 5 sightings, (c) between 4 and 7 sightings (inclusive)?

Quelle: [ZwKo99] Zwillinger und Kokoska: “CRC standard probability and statistics tables and formulae”, Chapman & Hall/CRC Press, 1999.