Stochastik (AIN)

Prof. Dr. Barbara Staehle

HTWG Konstanz
Fakultaet für Informatik

SS 2021

Teil II

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Teil II Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abschnitt 1

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beispiel: Roulette

Abschnitt I: Beschreibung und Analyse von Ereignissen der Vergangenheit.
Dieser Abschnitt: Vorhersage von möglichen Ereignissen in der Zukunft.

Beispiel: Sie besuchen ein Casino in Las Vegas und spielen Roulette. Was sind Ihre Chancen auf einen Gewinn?

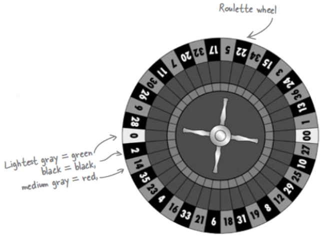


Bild: US Roulette-Rad [Griffith, 2014]

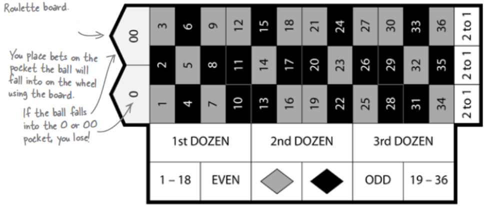


Bild: US Roulette-Feld [Griffith, 2014]

Lösung: später, erstmal folgen ein paar Begriffe, mit denen wir dieses und andere Zufallsexperimente handhaben können.

Zufallsexperimente

Definition

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der

- beliebig oft unter gleichartigen Bedingungen wiederholt werden kann
- und dessen Ergebnis nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann.

Die Menge aller möglichen (sich gegenseitig ausschließenden) Ergebnisse des Zufallsexperiments wird Ergebnismenge, Ereignismenge oder Ergebnisraum genannt und mit Ω bezeichnet.

Beispiele:

- Ein klassisches Zufallsexperiment: Werfen eines (normalen) sechsseitigen Würfels (W6). $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Drehen des US-Roulette-Rads. $\Omega = \{0, 00, 1, 2, \ldots, 36\}$
- Sie erhalten eine Lieferung von 10 Grafikkarten und zählen die Anzahl der defekten Grafikkarten. $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

Ereignisse

Definition

- Ein Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω und heißt eingetreten, wenn das Ergebnis des Experiments ein Element von A ist.
- Die einelementigen Teilmengen von Ω enthalten genau die möglichen Ergebnisse des Experiments und heißen Elementarereignisse.
- Ω selbst heißt das sichere Ereignis, da es auf jeden Fall eintritt.
- Die leere Menge $\emptyset$ steht für ein Ereignis, das nie eintritt und heißt das unmögliche Ereignis.

Beispiele:

- Würfeln mit einem W6: Geben Sie die Ereignisse $A =$ „Wurf einer geraden Augenzahl" und $B =$ „Wurf einer 5" an.
  Lösung: $A = \{2, 4, 6\}, B = \{5\}$, B ist ein Elementarereignis
- US-Roulette: Geben Sie die Ereignisse $C =$ „ungerade Zahl" und $D =$ „Null" an. Lösung: $C = \{1, 3, \ldots, 35\}, D = \{0, 00\}$

Verknüpfung von Ereignissen

Definition

Gegeben sind die Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$

- Das Ereignis A und B entspricht dem Durchschnitt $A \cap B$.
- Das Ereignis A oder B entspricht der Vereinigung $A \cup B$.
- Das Gegenereignis von A ist jenes Ereignis, das eintritt, wenn A nicht eintritt. Schreibweise: $\bar{A}$. Es entspricht dem Komplement $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- A, B heißen unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$, sie nicht gleichzeitig eintreten können, andernfalls heißen A, B vereinbar.

Beispiel: Sie würfeln mit einem W6 ($\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$); Gegeben seien die Ereignisse $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{1, 3\}$. Geben Sie an

- $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{2\}$, A und B sind vereinbar
- $A \cap C = \emptyset$, A und C sind unvereinbar

Beispiele zum Mitdenken

- Sie werfen zweimal hintereinander eine Münze (Ausgang jeweils K(opf) oder Z(ahl)). Geben Sie an
  - $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$
  - A: „Wurf von mindestens einem Kopf" $= \{KK, KZ, ZK\}$
  - B: „Wurf von höchstens einem Kopf" $= \{KZ, ZK, ZZ\}$
  - $A \cap B = \{KZ, ZK\}$ ($=$ „Wurf von genau einer Zahl")
- Sie spielen US-Roulette. Gegeben seien die Ereignisse $A = \{7\}, B = \{2, 4, \ldots, 36\}, C = \{13, 14, \ldots, 24\}$. Geben Sie an
  - $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, \ldots, 24, 26, 28, \ldots 36\}$
  - $A \cap B \cap C = \emptyset$
- Sie wählen zufällig europäische Städte aus dem folgenden Ereignisraum aus: $\Omega = \{$$N$ürnberg, Konstanz, München, Venedig, Salzburg, Würzburg, Hamburg, Innsbruck, Düsseldorf, Paris $\}$. Geben Sie die folgenden Ereignisse an:
  - D: „Stadt liegt in Deutschland" $=\{N, K, M, W, H, D\}$
  - S: „Stadt liegt südlich der Donau" $=\{K, M, V, S, I\}$
  - $S \cap D = \{K, M\}$ ($=$ „deutsche Stadt südlich der Donau")

Laplace-Wahrscheinlichkeiten I

Frage: Und was sind jetzt die Chancen, dass mein Roulette-Tipp gewinnt?

Lösung: Ganz einfach, wir müssen nur die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \{7\}$, $P(A)$, berechnen. (P wie **P**robability)

Roulette ist ein Laplace-Experiment, daher darf man $P(A)$ berechnen als

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{1}{38} = 0.026$$

Leider ist das keine sehr gute Chance:

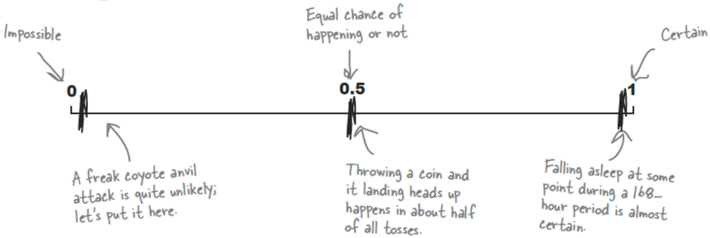


Bild: Beispiel für Wahrscheinlichkeiten [Griffith, 2014]

Laplace-Wahrscheinlichkeiten II

Definition

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit folgenden Eigenschaften:

- Das Zufallsexperiment hat nur endlich viele mögliche Ergebnisse.
- Jedes dieser Ergebnisse ist gleich wahrscheinlich.

Satz

Bei einem Laplace-Experiment mit n möglichen Ergebnissen hat jedes dieser Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$. Wenn ein Ereignis A in k dieser Fälle eintritt, dann ist die Wahrscheinlichkeit von A gleich

$$P(A) = \frac{\textit{Anzahl der für } A \textit{ günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{k}{n}.$$

Beispiele zum Mitdenken

- Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten für (US-)Roulette:
  - $n = 38$ Zahlen, davon 18 schwarz, 18 rot, 2 grün.
  - $P(9) = \frac{1}{38} = 0.026$
  - $P(\text{grün}) = \frac{2}{38} = \frac{1}{19} = 0.053$ (Die 0 und die 00 sind grün.)
  - $P(\text{schwarz}) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} = 0.474$ (Es gibt 18 schwarze Zahlen.)
  - $P(38) = 0$ (Das Ereignis kann nicht eintreten.)
- Bestimmen Sie für einen fairen W6 die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
  - A: „gerade Augenzahl“ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$
  - B: „Augenzahl durch 3 teilbar“ $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$
- Eine Lieferung von 100 Grafikkarten enthält 15 defekte Karten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
  - C: „defekte Grafikkarte“ $P(C) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0.15$
  - D: „intakte Grafikkarte“ $P(D) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} = 0.85$
    Beobachtung: $P(D) = 1 - P(C)$ da D das Gegenereignis von C ist.
- Sind alle Zufallsexperimente Laplace-Experimente? Lösung: Nein! Beispiele: gezinkter Würfel, Lieblingsessen in der Mensa, ...

Verallgemeinerung: Wahrscheinlichkeitsmaß I

Jedem Ereignisraum Ω muss noch ein geeignetes Warscheinlichkeitsmaß $P : \Omega \to [0, 1]$ zugeordnet werden, um für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ festzulegen, mit der A eintritt.

Definition (Axiome von Kolmogorov)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Omega \to [0, 1]$ muss folgendes erfüllen:

1. Die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses ist eine reelle Zahl zwischen 0 und 1:
$$\forall_{A \subseteq \Omega}\ 0 \leq P(A) \leq 1$$
2. Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1:
$$P(\Omega) \ = 1$$
3. Additionsregel: Für abzählbar viele unvereinbare Ereignisse $A_i \subseteq \Omega$, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung dieser Ereignisse gleich der Summe der Einzel-Wahrscheinlichkeiten:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i \in I} P(A_i) \ \text{ falls } \forall_{i,j \in I, i \neq j}\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

Verallgemeinerung: Wahrscheinlichkeitsmaß II

Bemerkungen:

- Vorherige Definition der Kolmogorov-Axiome gilt nur für endliche Ereignisräume. Für unendliche Ereignisräume (nicht in dieser Vorlesung) ist die Betrachtung von σ-Algebren notwendig.
- Folgerung aus der Additionsregel:

$$P(\emptyset) = 0,$$

die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist also gleich 0.

Beispiele: Werfen eines W6

- Für jedes Elementarereignis und alle zusammengesetzten Ereignisse A gilt $0 \leq P(A) \leq 1$ ✓
- $P(\{1, 2, \dots, 6\}) = 1$ ✓
- $P(\text{gerade Zahl}) + P(\text{ungerade Zahl}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = P(\Omega)$ ✓

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten (und Lösen von Aufgaben) erleichtern folgende Eigenschaften:

Satz (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten)

1. *Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von A ist*
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
2. *Additionsregel für beliebige Ereignisse A und B:*
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
3. *Die Wahrscheinlichkeit ist monoton:*
$$P(A) \leq P(B) \quad \text{für } A \subseteq B,$$
wenn A eine Teilmenge von B ist, ist $P(A)$ kleiner oder gleich $P(B)$.

Beispiele zum Mitdenken

- Wir würfeln mit einem W6. Berechnen Sie
  - $P(\text{Zahl ungleich } 5) = 1 - P(5) = \frac{5}{6}$ (Gegenereignis)
  - $P(\text{gerade Zahl}) = \frac{3}{6}$
    (Laplace, Anzahl günstiger Fälle durch Anzahl möglicher Fälle)
  - $P(\text{Zahl} \leq 3) = \frac{3}{6}$
    (Laplace, Anzahl günstiger Fälle durch Anzahl möglicher Fälle)
  - $P(\text{gerade Zahl } \cup \text{ Zahl } \leq 3) =$
    $P(\text{gerade})) + P(\leq 3) - P(\text{gerade} \cap \leq 3) = 1/2 + 1/2 - 1/6 = \frac{5}{6}$

- Wir würfeln mit einem **gezinkten** W6, für den $P(1) = \frac{1}{12}, P(6) = \frac{1}{4}$ gilt, die übrigen Zahlen treten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auf. Berechnen Sie
  - $P(\text{gerade Zahl}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0.58$ (da Ereignisse unvereinbar)
  - $P(\text{ungerade Zahl}) = 1 - P(\text{gerade Zahl}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} = 0.42$ (Gegenereignis)

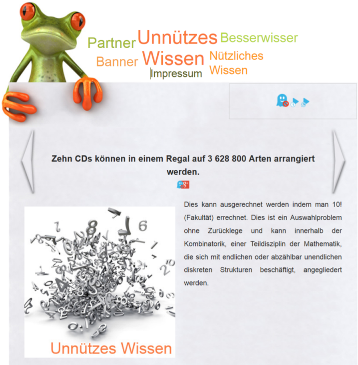
Beispiele zum Mitdenken

Sie ziehen ein Los aus einer Lostrommel, in der es einen Hauptgewinn, 9 Nebengewinne und 490 Nieten gibt.

Geben Sie an

- Ereignisraum $\Omega = \{$ Hauptgewinn, Nebengewinn, Niete $\}$
- Anzahl der Lose in der Lostrommel $n = 1 + 9 + 490 = 500$
- Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
  - A : das Los ist der Hauptgewinn
    $P(A) = \frac{1}{500} = 0.002$
  - B : das Los ist ein Gewinn
    $P(B) = \frac{1+9}{500} = 0.02$
  - C : das Los ist nicht der Hauptgewinn
    $P(C) = \frac{9+490}{500} = 0.998$
    Alternativ: $P(C) = 1 - P(A) = 0.998$

Exkurs: Kombinatorik



Quelle: Unnützes Wissen

Kombinatorik beschäftigt sich mit der Frage, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, Objekte anzuordnen bzw. auszuwählen.
$\Rightarrow$ kein unnützes Wissen sondern grundlegende Voraussetzung für die Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten.

Summenregel

Beispiel: Eine Mietwagenfirma hat 12 Kleinwagen (Eigenschaft a) und 7 Mittelklassewagen (Eigenschaft b) im Angebot. Ein Auto ist entweder Klein- oder Mittelklasse, aber nicht beides gleichzeitig.
Frage: Wie viele Autos hat die Mietwagenfirma im Angebot?
Lösung: Es gibt 12 (Eigenschaft a) + 7 (Eigenschaft b) = 19 verschiedene Autos.

Satz

Für zwei endliche, disjunkte Mengen A und B (deren Elemente jeweils unterschiedliche Eigenschaften haben) ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Verallgemeinerung für disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|.$$

Produktregel

Beispiel: Es gibt 3 verschiedene Routen, um von Konstanz nach München zu fahren, und 4 Routen, um von München nach Wien zu fahren.
Frage: Wie viele Wege gibt es, um von Konstanz über München nach Wien zu kommen?
Lösung: Es gibt 3 (KN-M) $\cdot$ 4 (M-W) $=$ 12 verschiedene Routen.

Satz

Wenn A_1 und A_2 beliebige endliche Mengen sind, welche die Möglichkeiten für den ersten und zweiten Schritt eines Prozesses beschreiben, dann ist die Anzahl der Möglichkeiten den gesamten Prozess durchzuführen, beschrieben durch:

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|.$$

Verallgemeinerung für k Schritte $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Beispiele zum Mitdenken

- Alice konstruiert sich ein Alphabet, das aus allen lateinischen Klein- und Großbuchstaben (jeweils 26) und allen griechischen Klein- und Großbuchstaben (jeweils 24) besteht. Wieviele Buchstaben hat dieses Alphabet?
  Lösung: $n = 2 \cdot 26 + 2 \cdot 24 = 52 + 48 = 100$ (Summenregel)

- Eine Online-Datingbörse überlegt, wie viele (auch sinnlose) Möglichkeiten es für das Feld „Geburtsdatum“ gibt, wenn
  - als Tag Zahlen von 1-31,
  - als Monat Zahlen von 1-12,
  - als Jahr Zahlen von 1920 - 2000 erlaubt sind.

  Lösung: $n = 31 \cdot 12 \cdot 81 = 30132$ (Produktregel)

Permutationen und Variationen

Beispiele:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 CDs in einem Regal anzuordnen?
  Lösung: Es gibt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1 = 10! = 3628800$ Möglichkeiten
- Beim Berlin Marathon werden die ersten 3 Plätze üblicherweise unter den (vorher bekannten) 10 schnellsten Läufern ausgemacht. Wie viele Möglichkeiten für das Siegerpodest gibt es?
  Lösung: Es gibt 10 Möglichkeiten für den 1. Platz, 9 bzw. 8 Möglichkeiten für den 2. und 3. Platz. Insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ mögliche Anordnungen.

Definition

Eine Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Elementen, bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt, nennt man eine geordnete Auswahl (oder eine k-Variation oder eine k-Permutation).
Der Spezialfall $k = n$, bei dem also alle Elemente ausgewählt und angeordnet werden, wird Permutation genannt.

Anzahl von Variationen und Permutationen

Satz

Die Anzahl der k-Variationen aus einer Menge mit n Elementen wird mit $V(n,k)$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$V(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Speziell gibt es

$$V(n,n) = P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

verschiedene Permutationen bzw. Anordnungen von n Elementen.

Bemerkungen:

- Die Anzahl der CD-Anordnungen ist eine Permutation und ergibt sich als $V(10,10) = P(10) = 10!$
- Die Anzahl der Podestanordnungen ist eine 3-Permutation oder Variation und ergibt sich als $V(10,3) = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$.
- Taschenrechner: Tasten **!** und **nPr**

Kombinationen

Beispiel: Eine Eisdiele bietet 40 verschiedene Eissorten an, sowie Eisbecher mit jeweils 3 Kugeln verschiedener Eissorten. Wie viele verschiedene Eisbecher bietet die Eisdiele an?

Lösung:

- Wir wissen, dass es mit $n = 40, k = 3$ genau $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{40!}{37!} = 59280$ Möglichkeiten gäbe, wenn es wichtige wäre, in welcher Reihenfolge die Eissorten in den Eisbecher gelegt werden.
- Dies ist das aber nicht der Fall, daher wurde jeder mögliche Eisbecher 6-mal gezählt, da es $3! = 6$ Möglichkeiten gibt, drei Kugeln in einen Eisbecher zu legen.
- Die 59280 Möglichkeiten müssen noch durch 6 dividiert werden, es gibt also $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{40!}{37! \cdot 3!} = 9880$ mögliche Eisbecher.

Definition

Eine Auswahl von k aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge nennt man eine $k-$Kombination oder eine ungeordnete Auswahl.

Anzahl von Kombinationen I

Satz

Die Anzahl der möglichen Kombinationen von k Elementen aus n Elementen wird mit $C(n,k)$ bezeichnet und ist gleich

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Für $k > n$ ist $C(n,k) = 0$.

Bemerkungen:

- Eine k-Kombination aus einer Menge ist eine Teilmenge (Reihenfolge der Elemente ist nicht wichtig).
- Eine k-Variation aus einer Menge ist ein Tupel (Reihenfolge der Elemente ist wichtig).
- Die Anzahl der möglichen Eisbecher ergibt sich als $C(40,3) = \frac{40!}{3! \cdot 7!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9880$

Anzahl von Kombinationen II

Bemerkung: Für die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge gibt es eine bekanntere Schreibweise:

Definition

Der Binomialkoeffizient für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Sprechweise: „n über k“ oder „k aus n“. Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} = 0$.

Wichtige Eigenschaften: (für $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$)

- $C(n, k) = \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Taschenrechner: Taste **nCr**

Beispiele zum Mitdenken

- Dagobert Duck möchte in den 5 Stockwerken seines Geldspeichers jeweils eine seiner 100 Lieblingsmünzen ausstellen. Wie viele Möglichkeiten der Münzanordnung N_1 hat er, wenn es ihm wichtig ist, welche Münze in welchem Stockwerk ist?
  Lösung: $N_1 = V(100, 5) = \frac{100!}{(100-5)!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \approx 9 \times 10^9$
- Selbe Problemstellung, aber Dagobert platziert seinen ersten selbstverdienter Taler im obersten und seine einzige viereckige Münze im untersten Stockwerk. Wie viele Möglichkeiten N_2 gibt es nun ?
  Lösung: $N_2 = V(98, 3) = \frac{98!}{(98-3)!} = 98 \cdot 97 \cdot 96 = 912576 \approx 9 \times 10^5$
- Dagobert steckt 5 seiner 100 Lieblingsmünzen in seine Tasche. Wie viele Möglichkeiten der Auswahl N_3 hat er?
  Lösung: $N_3 = C(100, 5) = \frac{100!}{5!(100-5)!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \approx 75 \times 10^6$
- Selbe Problemstellung, aber er nimmt sich seinen ersten selbstverdienten Taler und seine einzige viereckige Münze, die restlichen Münzen wählt er zufällig. Wie viele Möglichkeiten N_4 gibt es nun?
  Lösung: $N_4 = C(98, 3) = \frac{98!}{3!(98-3)!} = \frac{98 \cdot 97 \cdot 96}{3 \cdot 2} \approx 15 \times 10^4$

Permutationen oder Variationen mit Wiederholungen

Beispiele:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Lieder in einer Playlist mit 4 Plätzen anzuordnen, wenn jedes Lied mehrfach vorkommen darf?
  Lösung: Es gibt $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 1000$ Möglichkeiten
- Wie viele verschiedene Passwörter gibt es, wenn diese nur aus Klein- und Großbuchstaben bestehen und genau 5 Zeichen lang sein dürfen?
  Lösung: Es gibt $26 + 26 = 52$ mögliche Zeichen. Insgesamt also $52 \cdot 52 \cdot \ldots \cdot 52 = 52^5 = 380204032 \approx 380$ Mio Passwörter.

Definition

Eine Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Elementen, bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt und jedes Objekt mehrmals vorkommen darf, nennt man eine geordnete Auswahl mit Wiederholungen (oder eine k-Variation oder eine k-Permutation mit Wiederholungen).

Anzahl von Variationen mit Wiederholungen

Satz

Die Anzahl der k-Variationen aus einer Menge mit n Elementen, wobei jedes Element mehrfach vorkommen darf, wird mit $V^W(n,k)$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$V^W(n,k) = n^k.$$

Bemerkungen:

- Da jedes Element mehrfach (wiederholt) vorkommen darf, darf $n < k$ gelten.
- Die Anzahl der möglichen Lied-Anordnungen auf der Playlist ist gegeben durch $V^W(10,4) = 10^4$
- Die Anzahl der möglichen Passwörter ergibt sich als $V^W(52,5) = 52^5$

Beispiele zum Mitdenken

- Dagobert Duck verwendet zur Sicherung seines Geldspeichers eine 17-stellige Dualzahlenkombination (aus 0en und 1en). Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Dagobert zur Auswahl?
  Lösung: Dagobert hat $N_1 = V^W(2, 17) = 2^{17} = 131072$ Möglichkeiten.
- Eines der liebsten Hobbys von Dagobert ist das Aufschreiben großer Zahlen. Wie viele Dezimalzahlen mit 15 Stellen (ohne führende Nullen) hat er z.B. zur Auswahl?
  Lösung: Dagobert hat $N_2 = 9 \cdot V^W(10, 14) = 9 \times 10^{14}$ Möglichkeiten

Bemerkung: Bei Variationen mit Wiederholungen darf $k > n$ gelten, im Gegensatz zu Variationen ohne Wiederholungen ($k \leq n$).
Beispiel: Beim Erstellen einer Playlist, wo jedes von 5 Liedern nur einmal vorkommen darf, darf diese nur maximal 5 Positionen lang sein. Dürfen Lieder wiederholt werden, kann die Playlist unendlich lange sein.

Kombinationen mit Wiederholungen

Beispiel: Beim Würfelspiel „Mäxchen“ würfeln die Spieler mit zwei W6. Die größere Zahl gibt die Zehner-, die kleinere Zahl gibt die Einerstelle an (z.B. $\{4, 5\} \mathrel{\widehat{=}} 54$). Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Lösung:

- Wir wissen, dass es $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten für die Kombination „erster Wurf“, „zweiter Wurf“ gibt.
- Wenn die Reihenfolge nicht interessiert, dann sind z.B. die Kombinationen „4/5“ und „5/4“ gleichwertig.
- Es gibt also $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ mögliche Kombinationen.

Definition

Eine Auswahl von k aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge nennt man eine $k-$Kombination mit Wiederholungen oder eine ungeordnete Auswahl mit Wiederholungen.

Anzahl von Kombinationen mit Wiederholungen

Satz

Die Anzahl der möglichen Kombinationen von k Elementen aus n Elementen wobei jedes Element mehrfach vorkommen darf, wird mit $C^W(n,k)$ bezeichnet und ist gleich

$$C^W(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Bemerkungen:

- Eine k-Kombination mit Wiederholungen aus einer Menge ist eine Teilmenge (Reihenfolge der Elemente ist nicht wichtig).
- Eine k-Variation mit Wiederholungen aus einer Menge ist ein Tupel (Reihenfolge der Elemente ist wichtig).
- Die Anzahl der möglichen Augensummen ergibt sich als $C^W(6,2) = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$

Beispiel zum Mitdenken: Das Gummibärchenorakel

Quelle: gummibaerchen-orakel.ch

Zur Befragung des Gummibärchenorakels wählt man $k = 5$ Gummibärchen aus einer vollen Tüte mit $n = 5$ verschiedenen Farben aus. Die Reihenfolge der Bären ist nicht wichtig, lediglich die Anzahl der Bären in der gleichen Farbe (z.B. 3 rote, 1 gelbes, 1 grünes).

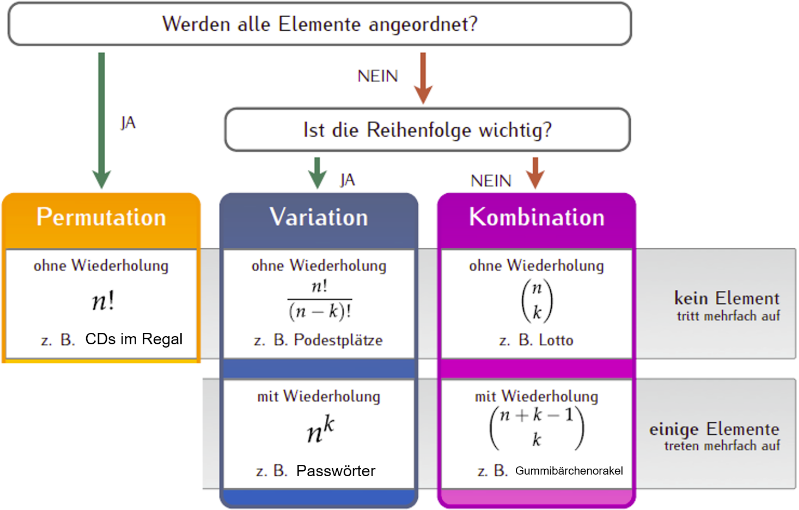
Frage: Wie viele verschiedene mögliche Farbkombinationen G gibt es?

Hinweis: Es sind von jeder Farbe mehr als 5 Bärchen vorhanden, verwende daher „Ziehen mit Zurücklegen“.

Lösung:

$$G = C^W(n,k) = C^W(5,5) = \binom{5+5-1}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \binom{9}{5} = 126.$$

Übersicht der verschiedenen Zählverfahren



Quelle: [Schmidt, 2015]

Beispiele zum Mitdenken: Angewandte Kombinatorik I

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- P_1 werden in der nächsten Lotto-Ziehung (6 aus 49, ohne Zusatzzahl) die Zahlen 1,2,3,4,5,6 gezogen?
  Lösung: (LaPlace & 1 günstige Möglichkeit)
  - Es gibt $N_1 = \binom{49}{6} = 13983816$ mögliche gezogene Zahlenreihen.
  - Folglich: $P_1 = \frac{1}{N_1} = 7.1511 \times 10^{-8} = 0.0000071511\%$
- P_2 errät Alice mit einem Versuch die PIN (4 Ziffern) ihrer EC-Karte?
  Lösung: (LaPlace & 1 günstige Möglichkeit)
  - Es gibt $N_2 = 10^4 = 10000$ mögliche PINs.
  - Folglich: $P_2 = \frac{1}{N_2} = \frac{1}{10000} = 0.1\%$
- P_3 gewinnt Bob den Berlin-Marathon, falls er einer der 10 Favoriten ist, die die ersten 10 Plätze belegen?
  Lösung: (LaPlace & x günstige Möglichkeiten)
  - Es gibt $N_3 = 10! = 3628800$ Möglichkeiten für die ersten 10 Plätze.
  - Bei $x = 9!$ Möglichkeiten gewinnt Bob, da die Reihenfolge der anderen Teilnehmer egal ist.
  - Folglich: $P_3 = \frac{x}{N_3} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10} = 10\%$

Beispiele zum Mitdenken: Angewandte Kombinatorik II

Ein Hacker hat drei Minuten Zeit, in einen Computer einzubrechen und kann dabei pro Sekunde 1000 Passwörter ausprobieren. Das Passwort besteht aus sechs Zeichen, nämlich vier Ziffern und zwei unterschiedlichen Kleinbuchstaben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P_4 hat der Hacker Erfolg?

Lösung: (LaPlace & x günstige Möglichkeiten)

- Es gibt $N_4 = \binom{6}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10^4 = 97.5 \cdot 10^6$ mögliche Passwörter (zwei unterschiedliche Buchstaben: $26 \cdot 25$, 4 beliebige Ziffern: 10^4, $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die Position der Buchstaben).
- Der Hacker führt $x = 1000 \cdot 60 \cdot 3 = 180 \cdot 10^3$ Versuche durch (1000 Versuche mal 60 Sekunden mal 3 Minuten).
- Folglich: $P_4 = \frac{x}{N_4} = \frac{180 \cdot 10^3}{97.5 \cdot 10^6} = 0.00185 = 0.185\%$

Beispiel: weiße und schwarze Kugeln

Frage: In einer Urne befinden sich 3 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es werden zufällig nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_2 ist die **2.** gezogene Kugel weiß?

Lösung: Unterscheide zwei Fälle:

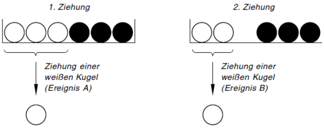


Bild: Fall 1: Die 1. gezogene Kugel ist weiß. [Papula, 2016]

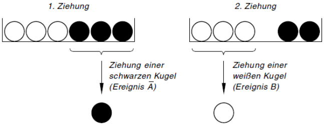


Bild: Fall 2: Die 1. gezogene Kugel ist schwarz. [Papula, 2016]

Vor der 2. Ziehung sind 2 weiße und 3 schwarze Kugeln in der Urne, damit ist $p_2 = \frac{2}{5}$.

Vor der 2. Ziehung sind 3 weiße und 2 schwarze Kugeln in der Urne, damit ist $p_2 = \frac{3}{5}$.

Folgerung: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist abhängig vom Ergebnis der 1. Ziehung. Es lassen sich daher in diesem Beispiel nur Wahrscheinlichkeiten unter bestimmten Bedingungen angeben.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Seien A, B Ereignisse über dem selben Ereignisraum Ω. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass Ereignis A eingetreten ist, heißt bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ und ist definiert als

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Bemerkung: Die Menge aller möglichen Ereignisse reduziert sich von Ω auf A. Von B sind nur jene Ergebnisse als „günstig“ zu zählen, die auch in A liegen.

Beispiel: Modellierung von studentischen Kaffeevorlieben für das Studentenwerk (siehe nächste Folie).

Beispiel: Kaffeevorlieben I

Bekannt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% trinkt ein:e Student:in den Kaffee mit Zucker, mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% mit Milch. 25% der Student:innen nehmen Zucker und Milch in ihren Kaffee.

1. Modellierung mit den Ereignissen
   - M: ein:e Student:in nimmt Milch in den Kaffee
   - Z: ein:e Student:in nimmt Zucker in den Kaffee
2. Gegebene Wahrscheinlichkeiten (und Gegenwahrscheinlichkeiten)
   - $P(M) = 0.8 \Rightarrow P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0.2$
   - $P(Z) = 0.4 \Rightarrow P(\overline{Z}) = 1 - P(Z) = 0.6$
   - $P(M \cap Z) = 0.25$
3. Berechnung weiterer Wahrscheinlichkeiten durch Vierfeldertafel

	M	$\overline{M}$	
Z	$P(Z \cap M) = 0.25$	$P(Z \cap \overline{M}) = 0.15$	$P(Z) = 0.4$
$\overline{Z}$	$P(\overline{Z} \cap M) = 0.55$	$P(\overline{Z} \cap \overline{M}) = 0.05$	$P(\overline{Z}) = 0.6$
	$P(M) = 0.8$	$P(\overline{M}) = 0.2$	$\Sigma = 1$

Beispiel: Kaffeevorlieben II

Vierfeldertafel

	M	$\overline{M}$	
Z	$P(Z \cap M) = 0.25$	$P(Z \cap \overline{M}) = 0.15$	$P(Z) = 0.4$
$\overline{Z}$	$P(\overline{Z} \cap M) = 0.55$	$P(\overline{Z} \cap \overline{M}) = 0.05$	$P(\overline{Z}) = 0.6$
	$P(M) = 0.8$	$P(\overline{M}) = 0.2$	$\Sigma = 1$

Fragen:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt ein:e Student:in Milch in den Kaffee, wenn (unter der Bedingung, dass) er/sie schon Zucker genommen hat?
  Lösung: $P(M \mid Z) = \frac{P(M \cap Z)}{P(Z)} = \frac{0.25}{0.4} = 0.625$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt ein:e Student:in Zucker in den Kaffee, wenn (unter der Bedingung, dass) er/sie schon Milch genommen hat?
  Lösung: $P(Z \mid M) = \frac{P(M \cap Z)}{P(M)} = \frac{0.25}{0.8} = 0.3125$

Beispiele zum Mitdenken

Zufallsexperiment: Zweimaliges Werfen eines fairen W6.

- $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$
- $n = |\Omega| = 36$
- A : Augensumme $= 5$; $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.111$ (Laplace)
- B : mindestens eine 1; $P(B) = \frac{11}{36} = 0.305$ (Laplace)
- $A \cap B$: Augensumme 5 und mindestens eine 1 dabei; $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.055$ (Laplace)
- $A|B$: Augensumme 5, unter der Bedingung dass mindestens eine 1 dabei ist; $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11} = 0.181$
- $B|A$: mindestens eine 1 unter der Bedingung dass die Augensumme 5 ist; $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\Rightarrow$ **Die Ereignisse $A \cap B = B \cap A$, $A|B$, $B|A$ sind unterschiedlich!!**

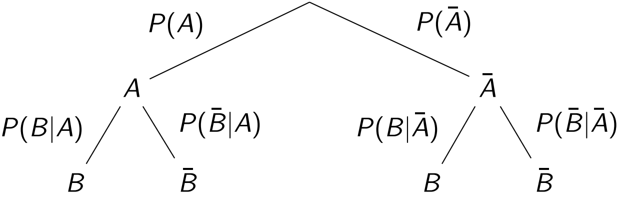
Folgerung aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten

Satz (Multiplikationssatz)

Gegeben sind Ereignisse A und B über dem selben Ereignisraum Ω mit Wahrscheinlichkeiten ungleich null. Dann gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Anschaulich: Die Verbundwahrscheinlichkeit ergibt sich durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen des Pfades im Wahrscheinlichkeitsbaum.



Beispiele zum Mitdenken

In einer Lade befinden sich 5 alte und 10 neue Batterien, die optisch nicht unterscheidbar sind. Alice entnimmt nun hintereinander zwei zufällig gewählte Batterien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

- A: zwei neue Batterien
- B: zuerst eine alte und dann eine neue Batterie
- C: insgesamt eine alte und eine neue Batterie zu ziehen

Hinweis: Modellieren Sie das Problem mit den Ereignissen E: erste Batterie ist neu und Z: zweite Batterie ist neu sowie bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Lösung:

- $P(E) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- $P(Z|E) = \frac{9}{14}$
- $P(A) = P(E \cap Z) = P(E)P(Z|E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7} = 0.429$
- $P(B) = P(\bar{E} \cap Z) = P(\bar{E})P(Z|\bar{E}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{50}{210} = \frac{5}{21} = 0.238$
- $P(C) = P(\bar{E} \cap Z) + P(E \cap \bar{Z}) = P(B) + P(E)P(\bar{Z}|E) = \frac{5}{21} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21} = 0.476$

Totale Wahrscheinlichkeit I

Beispiel: Ein Computerhersteller bezieht Festplatten von drei verschiedenen Lieferanten, in unterschiedlichen Anteilen und in unterschiedlicher Qualität:

	Lieferant 1	**Lieferant 2**	**Lieferant 3**
Anteil	0.4	0.25	0.35
Ausschuss	0.02	0.01	0.03

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, des Ereignisses A : eine gelieferte Festplatte ist fehlerhaft?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte Festplatte vom Lieferanten 1 stammt?

Lösung:

- $P(A) = P(A \cap 1) + P(A \cap 2) + P(A \cap 3) = P(1)P(A|1) + P(2)P(A|2) + P(3)P(A|3) = 0.4 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.35 \cdot 0.03 = 0.021$
- $P(1|A) = ?$; Nutze Multiplikationssatz: $P(1) \cdot P(A|1) = P(A) \cdot P(1|A) \Rightarrow P(1|A) = \frac{P(1) \cdot P(A|1)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.021} = 0.38$

Totale Wahrscheinlichkeit II

Verallgemeinerung des Falls der Festplatten-Lieferanten: Wird Ω in unvereinbare Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ zerteilt mit

$$\Omega = E_1 \cup \ldots \cup E_n, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

so heißt $E_1, \ldots, E_n$ Partition von Ω.

Satz (von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Für eine Partition $E_1, \ldots, E_n$ von Ω und ein beliebiges Ereignis $A \subseteq \Omega$ gilt

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) P(A|E_k)$$

Beispiel: In der Notation von oben berechnet sich die Wahrscheinlichkeit einer kaputten Festplatte als

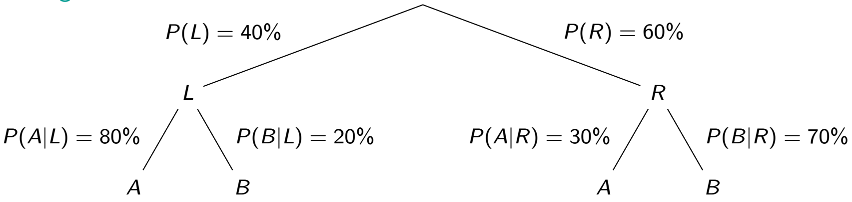
$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(A \cap k) = \sum_{k=1}^{3} P(k) P(A|k) =$$

$$P(1)P(A|1) + P(2)P(A|2) + P(3)P(A|3)$$

Beispiele zum Mitdenken

Angenommen, Konstanz wird für die nächste Bürgermeisterwahl in zwei Wahlbezirke L (links des Rheins) und R (rechts des Rheins) eingeteilt und nur die Kandidaten Alice (A) und Bob (B) zur Wahl stehen zur Wahl. Alle Wähler geben eine gültige Stimme für einen der beiden Kandidaten ab. 60% der Wähler kommen aus R, 40% aus L. Bei der Wahl erhält Alice im Wahlbezirk R 30% der Stimmen, im Wahlbezirk L 80%. Wie viel Prozent der Stimmen bekommt Alice insgesamt?

Lösung:



$$P(A) = P(L)P(A|L) + P(R)P(A|R) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.5 = 50\%$$

Formel von Bayes

Die letzten Ergebnisse zusammengesetzt:

Satz (Formel von Bayes)

Gegeben ist eine beliebige Partition $E_1, \dots, E_n$ von Ω und ein beliebiges Ereignis $A \subseteq \Omega$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ereignisse E_j unter der Bedingung von A eintritt, ist

$$P(E_j|A) = \frac{P(E_j)P(A|Ej)}{P(A)} = \frac{P(E_j)P(A|Ej)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_k)P(A|E_k)}$$

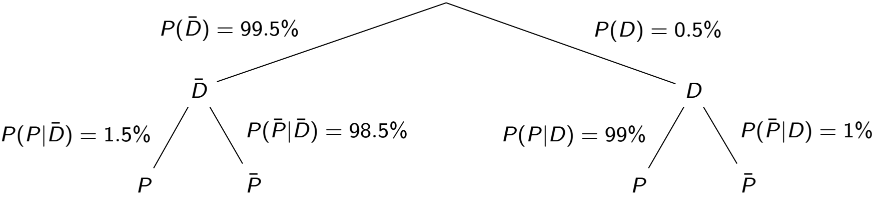
Bemerkung: Meistens ist $n = 2$ und $E_1 = E, E_2 = \bar{E}$, und damit

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E) + P(\bar{E})P(A|\bar{E})}.$$

Beispiele zum Mitdenken

Die Ergebnisse eines Drogentests sind für Drogenkonsumenten zu 99% korrekt und zu 98.5% für Nicht-Drogenkonsumenten. 0.5% der getesteten Menschen haben die Droge genommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die positiv getestet wurde, auch tatsächlich die Droge konsumiert hat?

Lösung: Verwende Ereignisse P : Test ist positiv, D : Person nimmt Drogen.



$$P(D|P) = \frac{P(D)P(P|D)}{P(D)P(P|D) + P(\bar{D})P(P|\bar{D})} = \frac{0.005 \cdot 0.99}{0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.015} = 0.249$$

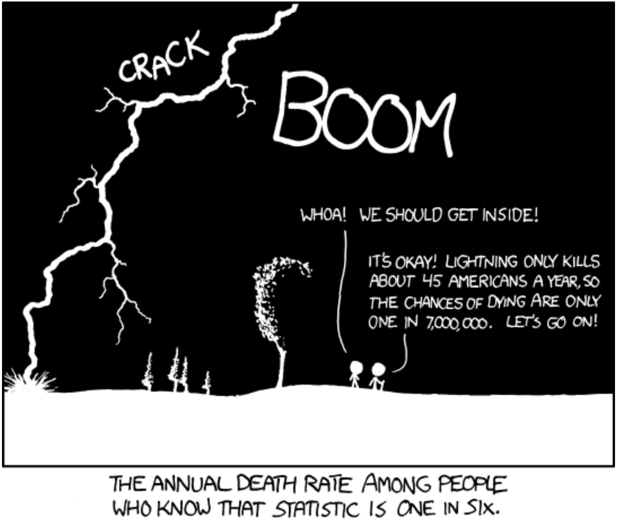
Anwendung: Bayes'scher SPAM-Filter Quelle: KIT

1. Annahmen:
   - Spam- und Ham-Mails sind gleich wahrscheinlich:
     $P(H) = P(S) = 0.5$
   - Die betrachteten Worte treten in Ham (echte Mails) und Spam voneinander stochastisch unabhängig auf:
     $P(\mathrm{wort}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{wort}_n | H) = P(\mathrm{wort}_1 | H) \cdot \ldots P(\mathrm{wort}_n | H)$
     $P(\mathrm{wort}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{wort}_n | S) = P(\mathrm{wort}_1 | S) \cdot \ldots P(\mathrm{wort}_n | S)$
2. Anlernphase: Analyse von 100 Ham- und 100 Spam-Mails ergibt:
   $$\begin{array}{lcllcl} P(\mathrm{haben}|H) & = & 0.30 & P(\mathrm{haben}|S) & = & 0.07 \\ P(\mathrm{online}|H) & = & 0.03 & P(\mathrm{online}|S) & = & 0.08 \end{array}$$
3. In einer Mail kommt „online“ vor. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies eine Spam-Mail ist, berechnet sich zu

$$P(S|o) = \frac{P(S)P(o|S)}{P(S)P(o|S) + P(\bar{S})P(o|\bar{S})} = \frac{P(S)P(o|S)}{P(S)P(o|S) + P(H)P(o|H)} =$$

$$\frac{0.5 \cdot 0.08}{0.5 \cdot 0.08 + 0.5 \cdot 0.03} = 0.727$$

Letztes Beispiel zu bedingten Wahrscheinlichkeiten



Quelle: xkcd.com

Unabhängige Ereignisse

Bemerkung: Die Sätze von der totalen Wahrscheinlichkeit und von Bayes sind nur bei abhängigen Ereignissen nötig. Einfacher kann man mit unabhängigen Ereignissen rechnen:

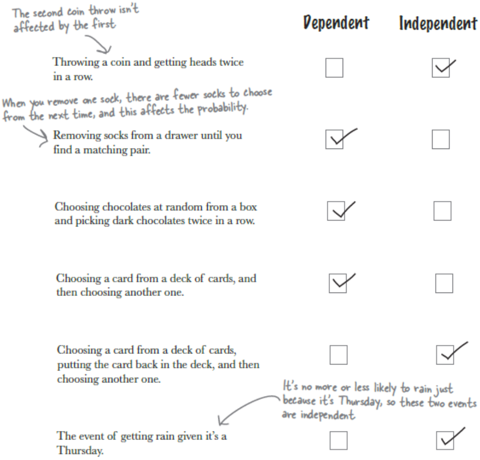
Definition

Zwei Ereignisse A und B über dem selben Ereignisraum Ω heißen unabhängig, wenn eine (und damit alle drei) der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- $P(B|A) = P(B) \quad$ (falls $P(A) > 0$)
- $P(A|B) = P(A) \quad$ (falls $P(B) > 0$)
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
  Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse

Beispiel: Zufällige Auswahl von 2 Personen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(D_1) = P(D_2) = 0.005$ eine Droge konsumiert haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Personen eine Droge konsumiert? $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2) = 0.005 \cdot 0.005 = 0.000025$

Sind abhängige oder unabhängige Ereignisse im Spiel?


The second coin throw isn't affected by the first

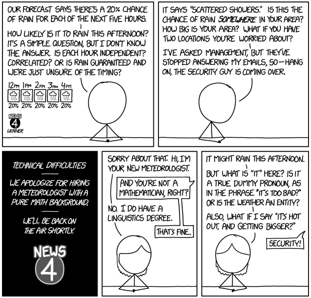
When you remove one sock, there are fewer socks to choose from the next time, and this affects the probability.

It's no more or less likely to rain just because it's Thursday, so these two events are independent

	Dependent	Independent
Throwing a coin and getting heads twice in a row.	☐	☑
Removing socks from a drawer until you find a matching pair.	☑	☐
Choosing chocolates at random from a box and picking dark chocolates twice in a row.	☑	☐
Choosing a card from a deck of cards, and then choosing another one.	☑	☐
Choosing a card from a deck of cards, putting the card back in the deck, and then choosing another one.	☐	☑
The event of getting rain given it's a Thursday.	☐	☑

Quelle: [Griffith, 2014]

Allerletztes Beispiel zu unabhängigen Wahrscheinlichkeiten



Quelle: xkcd.com

Warum ist das witzig?

The first meteorologist, Cueball, has a background in pure math. His forecast states that each of the next five hours has a 20% chance of rain. As a mathematician he sees how limited that information is. There is no information about whether or how those probabilities are correlated. This becomes obvious if you ask the question "How likely is it to rain this afternoon" (a question even some non-mathematicians might be interested in). Cueball states that he does not know (as no one only getting the information about 20% rain in each hour can know). And then lists some scenarios that all fit the the description, but have totally different results for "How likely is it to rain this afternoon?"

The first thing a mathematician would ask (and Cueball does here) is asking if those 5 events are independent. Events are independent if the outcome of one of them is unrelated to the outcome out of the others, i.e. knowing whether it rained at 3 pm has no effect on whether it rains at 4 pm, in which case the probability of any rain over the 5 hours is $1 - (1 - 0.2)^5 = 67.2\%$. (Rain is very seldom independent, as usually having rain in one hour increases the chance to rain in another hour, as systems of rainy weather usually persist for many hours). Another common extreme in probability theory is a set of mutually exclusive events. In this example that would be the scenario that the chance of rain is $5 \times 20\% = 100\%$, but it will only rain in exactly one hour and not rain at all for the other four. (Also possible but quite unlikely).

Quelle: www.explainxkcd.com

Abschnitt 2

Zufallsvariablen

Beispiel: Spielautomat I

Done: Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
ToDo: Bestimmung der Auswirkungen von Ereignissen.

Beispiel: Sie besuchen wieder ein Casino in Las Vegas und spielen diesmal am Spielautomaten. Lohnt sich das Spiel?

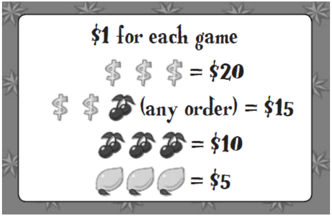


Bild: Gewinne am Spielautomaten [Griffith, 2014]

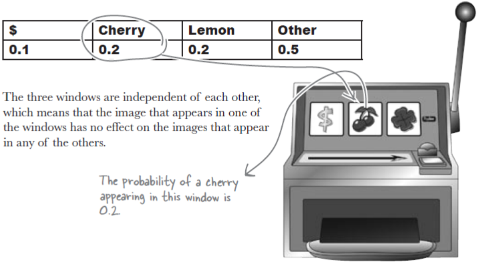
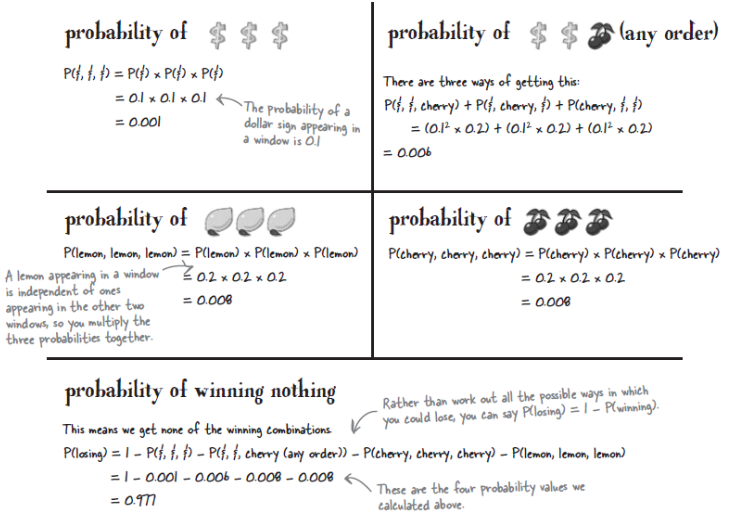


Bild: Wahrscheinlichkeiten des Spielautomatens [Griffith, 2014]

Lösung: Schwierig. Erste Schritt: Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ereignisse.

Beispiel: Spielautomat II



probability of \$ \$ \$

$P(\$, \$, \$) = P(\$) \times P(\$) \times P(\$)$

$= 0.1 \times 0.1 \times 0.1$

$= 0.001$

The probability of a dollar sign appearing in a window is 0.1

probability of \$ \$ (any order)

There are three ways of getting this:

$P(\$, \$, \text{cherry}) + P(\$, \text{cherry}, \$) + P(\text{cherry}, \$, \$)$

$= (0.1^2 \times 0.2) + (0.1^2 \times 0.2) + (0.1^2 \times 0.2)$

$= 0.006$

probability of

$P(\text{lemon, lemon, lemon}) = P(\text{lemon}) \times P(\text{lemon}) \times P(\text{lemon})$

$= 0.2 \times 0.2 \times 0.2$

$= 0.008$

A lemon appearing in a window is independent of ones appearing in the other two windows, so you multiply the three probabilities together.

probability of

$P(\text{cherry, cherry, cherry}) = P(\text{cherry}) \times P(\text{cherry}) \times P(\text{cherry})$

$= 0.2 \times 0.2 \times 0.2$

$= 0.008$

probability of winning nothing

This means we get none of the winning combinations.

Rather than work out all the possible ways in which you could lose, you can say P(losing) = 1 – P(winning).

$P(\text{losing}) = 1 - P(\$, \$, \$) - P(\$, \$, \text{cherry (any order)}) - P(\text{cherry, cherry, cherry}) - P(\text{lemon, lemon, lemon})$

$= 1 - 0.001 - 0.006 - 0.008 - 0.008$

$= 0.977$

These are the four probability values we calculated above.

Quelle: [Griffith, 2014]

Beispiel: Spielautomat III

Done: Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

Combination	**None**	**Lemons**	**Cherries**	**Dollars/cherry**	**Dollars**
Probability	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

Quelle: [Griffith, 2014]

ToDo: Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Gewinns

Lösung: Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns:

Combination	**None**	**Lemons**	**Cherries**	**$s/cherry**	**Dollars**
Gain	**-$1**	**$4**	**$9**	**$14**	**$19**
Probability	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

We lose $1 if we don't hit a winning combination.

These are the same probabilities, just written in terms of how much we'll gain.

Our gain for hitting each winning combination: the payoff minus the $1 we paid to play.

Quelle: [Griffith, 2014]

Beispiel: Spielautomat IV

Formeller: Fasse Gewinn als Zufallsvariable X auf und gebe deren Wahrscheinlichkeitsverteilung an:

The value of each combination's winnings is represented by x.

Here x is 19.

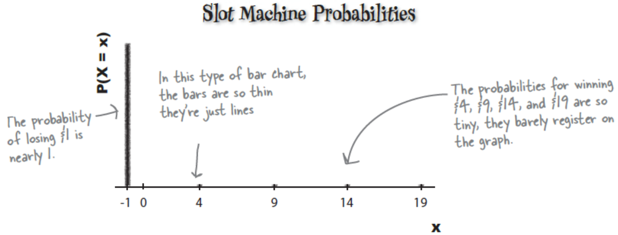
Combination	None	Lemons	Cherries	$s/cherry	Dollars
x	**-1**	**4**	**9**	**14**	**19**
P(X = x)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

X is the variable.

The probability that the variable X is 9—in other words, that the value of the winnings is $9.

Quelle: [Griffith, 2014]

Graphische Darstellung der Verteilung:



Quelle: [Griffith, 2014]

Zufallsvariablen

Definition

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion, die zu einem Zufallsexperiment mit Ereignisraum Ω gehört und die jedem Elementarereignis dieses Zufallsexperimentes eine reelle Zahl zuordnet: $X : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega)$.

Beispiele:

- Wurf mit zwei W6 (Diskrete Zufallsvariable)
  - Ereignisraum: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$
  - Zufallsvariable X = Augensumme der Würfel;
    $X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (\omega_1, \omega_2) \mapsto X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$.
  - Mögliche Realisierungen von X: 2,3,4, . . . , 12.
- Ladedauer der www.spiegel.de-Seite (Stetige Zufallsvariable)
  - Ereignisraum: $\Omega = (0, 5]$ Sekunden
  - Zufallsvariable X = Ladedauer der Seite in Sekunden;
    $X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega) = \omega$
  - Mögliche Realisierungen von X: $(0, 5]$

Diskrete Zufallsvariablen

Eine diskrete Zufallsvariable X

- kann nur **endlich** ($T = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$) oder **abzählbar unendlich viele** ($T = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$) $T = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ annehmen; T heißt Träger von X (oder Wertemenge von X).
- hat Realisierungen x_i; das Ereignis $X = x_i$ tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p_i = P(X = x_i)$ eintritt. Die Realisierungen x_i gemeinsam mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i heißen (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung der Zufallsvariablen.

Beispiele:

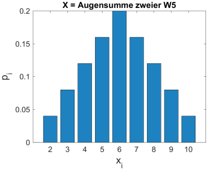
- Augensumme von zwei W6 ($T = \{2, 3, \dots, 12\}$)
- Anzahl der Sonnentage pro Jahr ($T = \{0, 1, \dots, 366\}$)
- Anzahl der Male, die beim Mensch ärgere dich gewürfelt werden muss bis die 6 kommt $T = \mathbb{N}$, abzählbar unendlich

Beispiele zum Mitdenken

Betrachten Sie die Zufallsvariable X = Augensumme von zwei W5.
Geben Sie an

- die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$



- die Wahrscheinlichkeit, dass $X = 5$ ist. $P(X = 5) = 0.16$
- $P(X \leq 7) = P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = 7) = \frac{19}{25} = 0.76$
- $P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 0.24$

Verteilungsfunktion

Für die Fragestellung $P(X \leq 7)$ gibt es eine eigene Funktion:

Definition

Für eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable X heißt die Funktion

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion (CDF) (E: cumulative distribution function) von X.

Bemerkungen:

- Die Verteilungsfunktion einer ZV X gibt $F(x) = P(X \leq x)$ an, die Verteilung gibt $P(X = x)$ (für $x \in \Omega$) an.
- Für eine diskrete ZV X berechnet sich $F(x)$ als $F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i$.

Beispiel: Augensumme zweier W5 (Verteilung siehe letzte Folie)

- $P(X \leq 7) = F(7) = p_1 + p_2 + \ldots p_7 = 0.76$
- $P(X > 7) = 1 - F(7) = 0.24$
- $F(7.5) = P(X \leq 7.5) = P(X \leq 7) = F(7)$

Verteilung und Verteilungsfunktion I

Beispiel: Augensumme zweier W5

Verteilung

$$P(X=x)=\begin{cases} 0 & x \notin T \\ 1/25 & x=2 \\ 2/25 & x=3 \\ 3/25 & x=4 \\ 4/25 & x=5 \\ 5/25 & x=6 \\ 4/25 & x=7 \\ 3/25 & x=8 \\ 2/25 & x=9 \\ 1/25 & x=10 \end{cases}$$

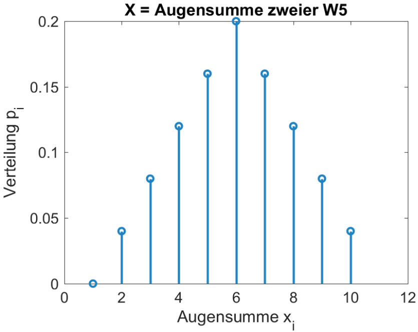
Verteilungsfunktion

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ 1/25 & 2\leq x<3 \\ 3/25 & 3\leq x<4 \\ 6/25 & 4\leq x<5 \\ 10/25 & 5\leq x<6 \\ 15/25 & 6\leq x<7 \\ 19/25 & 7\leq x<8 \\ 22/25 & 8\leq x<9 \\ 24/25 & 9\leq x<10 \\ 1 & 10\leq x \end{cases}$$

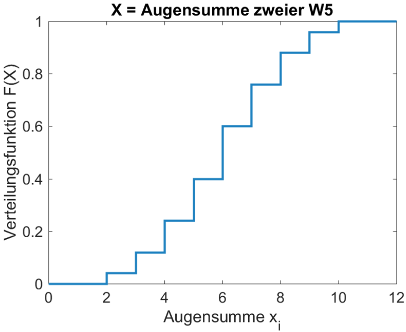
Verteilung und Verteilungsfunktion II

Beispiel: Augensumme zweier W5

Verteilung



Verteilungsfunktion



Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Ist $F(x)$ die Verteilungsfunktion einer (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen X, so gilt:

- $F(x)$ wächst monoton von 0 bis 1:
  - $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
  - $$F(x) \leq F(y) \text{ für } x < y$$
  - $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
- Wenn $F(x)$ an einer Stelle x_0 springt, so ist die Sprunghöhe genau $P(X = x_0)$.

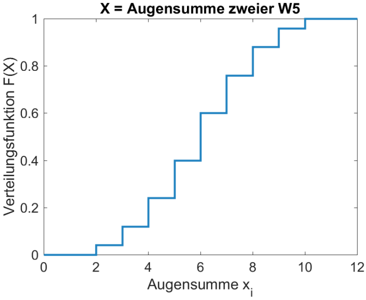


Bild: Beispiel: CDF der Augensummer zweier W5

Beispiel: Spielautomat

Done: Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für ein Spiel:

The value of each combination's winnings is represented by x.

Here x is 19.

Combination	None	Lemons	Cherries	$s/cherry	Dollars
x	**-1**	**4**	**9**	**14**	**19**
P(X = x)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

X is the variable.

The probability that the variable X is 9—in other words, that the value of the winnings is $9.

Quelle: [Griffith, 2014]

ToDo: Berechnung des langfristigen Gewinns über mehrere Spiele.

Lösung: Verwende den Erwartungswert.

Multiply each value by its probability.

E(X) is the expectation of X

$$\mathbf{E(X) = \sum xP(X = x)}$$

Once you've done multiplying, add the whole lot up together.

Quelle: [Griffith, 2014]

Erwartungswert I

Erwartungswert für den Gewinn am Spielautomaten:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= -1 \cdot 0.977 + 4 \cdot 0.008 + 9 \cdot 0.008 + 14 \cdot 0.006 + 19 \cdot 0.001 \\
&= -0.977 + 0.032 + 0.072 + 0.084 + 0.019 \\
&= -0.77
\end{aligned}
$$

Wenn man sehr oft am Spielautomaten spielt, verliert man also im Mittel 0.77 $ pro Spiel, nach 100 Spielen würde man 77 $ verloren haben.

Definition

Für eine diskrete Zufallsvariable X ist der Erwartungswert, $\mathrm{E}(X)$ oder μ_X die mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Summe über alle Realisierungen x_i (aus dem Träger T) von X:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i \in T} x_i p_i$$

Erwartungswert II

Bemerkungen:

- Genauso wie das arithmetische Mittel die Lage einer Stichprobe charakterisiert (siehe Abschnitt I) tut dies der Erwartungswert für die Werte einer Zufallsvariablen.
- Die für den Erwartungswert (und später für die Varianz) verwendeten unendlichen Summen müssen rein theoretisch nicht konvergieren. Für die von uns betrachteten ZV konvergieren diese Summen aber immer.

Beispiele: Berechnen Sie den Erwartungswert der ZV

- X : Augensumme eines W5
  Lösung: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{5} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$
- B : Wert eines Zufallsbits (zufällig ausgewähltes Bit)
  Lösung: Ein Zufallsbit ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit 0 oder 1, daher gilt $\mathrm{E}(B) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 1) = 0.5$

Eigenschaften des Erwartungswertes

Für zwei beliebige Zufallsvariablen X, Y, $a, b \in \mathbb{R}$, sowie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

- Der Erwartungswert ist linear, daher
  - $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
  - $\mathrm{E}(aX) = a\mathrm{E}(X)$
  - $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$
- Auch $g(X)$ ist eine Zufallsvariable, daher

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{x_i \in T} g(x_i) p_i$$

  Achtung: Meist gilt $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$.
- Sind X und Y unabhängig, dann gilt

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$$

Beispiele zum Mitdenken

Wir betrachten die Zufallsvariablen

- X, Y: Ergebnis beim Würfeln mit einem W5
- $A = 2 \cdot X \quad B = X + Y \quad C = 2 \cdot Y + 3$

Wert von X, Y	1	2	3	4	5
Wert von A	2	4	6	8	10
Wert von C	5	7	9	11	13
Auftrittswahrscheinlichkeit P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Tabelle: Verteilung der Zufallsvariablen X, Y, A, C; Träger von B viel größer

Berechnen Sie (für A, B, C nicht per Hand!)

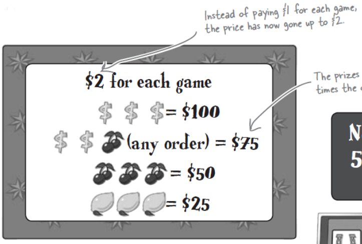
- $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = \frac{15}{5} = 3$
- $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(2 \cdot X) = 2 \cdot \mathrm{E}(X) = 2 \cdot 3 = 6$
- $\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 3 + 3 = 6$
- $\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(2 \cdot Y + 3) = 2 \cdot \mathrm{E}(Y) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

Beispiele zum Mitdenken

Das Casino hat die Bedingungen am Automaten geändert.
Müssen Sie den Erwartungswert des Gewinns, $\mathrm{E}(Y)$, per Hand ausrechnen oder geht es einfacher?

Lösung: Beobachte, dass $Y = 5 \cdot X + 3$. Damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(5 \cdot X + 3) \\ &= 5 \cdot \mathrm{E}(X) + 3 \\ &= 5 \cdot -0.77 + 3 \\ &= -0.85 \quad (\$) \end{aligned}$$



new probability distribution.

y	-2	23	48	73	98
P(Y = y)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

Here x is 19.

The value of each combination's winnings is represented by x.

Combination	None	Lemons	Cherries	$s/cherry	Dollars
x	-1	4	9	14	19
P(X = x)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

X is the variable.

The probability that the variable X is 9—in other words, that the value of the winnings is $9.

Quelle: [Griffith, 2014]

Die letzten Beispiele zum Mitdenken

Wir betrachten wieder einmal den Wurf zweier W5 und definieren
$X_1 =$ Augenzahl des ersten Würfels,
$X_2 =$ Augenzahl des zweiten Würfels.

Erinnern Sie sich, dass $\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = 3$ und berechnen Sie

- $\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) = 3 \cdot 3 = 9$
  (X_1 und X_2 sind unabhängig.)
- $\mathrm{E}(X_1 \cdot X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) = \frac{1}{5}(1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 11$
  (X_1 ist nicht unabhängig von sich selbst, verwende daher $g(x) = x^2$.)

Beispiel: Spielautomat I

Done: Berechnung des langfristigen Gewinns (0.77$) über mehrere Spiele.

Here x is 19.

The value of each combination's winnings is represented by x.

Combination	None	Lemons	Cherries	$s/cherry	Dollars
x	-1	4	9	14	19
P(X = x)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

X is the variable.

The probability that the variable X is 9—in other words, that the value of the winnings is $9.

Quelle: [Griffith, 2014]

ToDo: Berechnung der Streubreite des Gewinns. Man verliert ja nicht in jedem Spiel 0.77$, sondern es besteht immer noch die Chance auf den Jackpot.

Lösung: Verwende die Varianz.

μ is the alternative way of writing E(X).

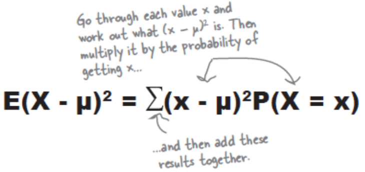
This is the variance. A shorthand way of referring to the variance of X is Var(X).

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - \mu)^2$$

We need to find the expectation of $(X - \mu)^2$—but how?

Quelle: [Griffith, 2014]

Beispiel: Spielautomat II



Quelle: [Griffith, 2014]

Berechnung der Varianz:

Varianz für den Gewinn am Spielautomaten: (mit $\mu_X = -0.77$)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= (-1+0.77)^2 \cdot 0.977 + (4+0.77)^2 \cdot 0.008 \\
&+ (9+0.77)^2 \cdot 0.008 + (14+0.77)^2 \cdot 0.006 + (19+0.77)^2 \cdot 0.001 \\
&= 0.051 + 0.182 + 0.764 + 1.309 + 0.391 \\
&= 2.697
\end{aligned}
$$

Übersetzung: Der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert -0.77\$ beträgt 2.697 $\$^2$.

Besser verständliches Streuungsmaß: Die Standardabweichung.

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1.642 \ \$.$$

Grob vereinfacht kann man sagen, dass die Gewinne jedes Spiels im Mittel 1.642 \$ vom Erwartungswert abweichen werden.

Varianz

Definition

Für eine diskrete Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ_X ist die Varianz, $\mathrm{Var}(X)$ oder σ_X^2 die mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Summe über die quadratische Abweichung aller Realisierungen x_i (aus dem Träger T) von X vom Erwartungswert:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x_i \in T} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Die Standardabweichung von X ist $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Bemerkungen:

- Genauso wie die Stichproben-Varianz s^2 die Streuungsbreite einer Stichprobe charakterisiert (siehe Abschnitt I), tut dies die Varianz σ^2 für die Werte einer Zufallsvariablen.
- Genauso wie für den Erwartungswert konvergieren die verwendeten unendlichen Summen in den von uns betrachteten Beispielen immer.

Vereinfachte Varianz-Berechnung

Satz

Für eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2 gilt

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2$$

Beispiel: Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung für die ZV

- X : Augensumme eines W5 ($\mu_X = 3$)
  Lösung:
  - $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{5} \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 11$
  - $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2 = 11 - 9 = 2$
  - $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{2}$
- B : Zufallsbit ($\mu_B = 0.5$)
  Lösung:
  - $\mathrm{E}(B^2) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 1) = 0.5$
  - $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mu_B^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$
  - $\sigma_B = \sqrt{\mathrm{Var}(B)} = 0.5$

Eigenschaften der Varianz

Für zwei beliebige Zufallsvariablen X, Y, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$
- Für $Y = aX + b$ gilt: $\sigma_Y = |a|\sigma_X$
- Nur wenn X und Y unabhängig sind, gilt $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Achtung: wird ein Experiment n-mal wiederholt, so sind die Einzelergebnisse unabhängig und es gilt:

- $\mathrm{E}(X(1) + X(2) + \ldots + X(n)) = n\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{Var}(X(1) + X(2) + \ldots + X(n)) = n\mathrm{Var}(X)$
- Vergleich: n-maliges Vielfaches von X : $\mathrm{Var}(nX) = n^2\mathrm{Var}(X)$

$\Rightarrow$ Je mehr Wiederholungen eines Experiments in einen Mittelwert einfließen, desto besser!

Beispiele zum Mitdenken

Erinnerung: Zufallsvariablen

- X, Y: Ergebnis beim Würfeln mit einem W5
- $A = 2 \cdot X \quad B = X + Y \quad C = 2 \cdot Y + 3$
- $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 3 \quad \mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 6 \quad \mathrm{E}(C) = 9$

Wert von X, Y	1	2	3	4	5
Wert von A	2	4	6	8	10
Wert von C	5	7	9	11	13
Auftrittswahrscheinlichkeit P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Tabelle: Verteilung der Zufallsvariablen X, Y, A, C; Träger von B viel größer

Berechnen Sie (für A, B, C nicht per Hand!)

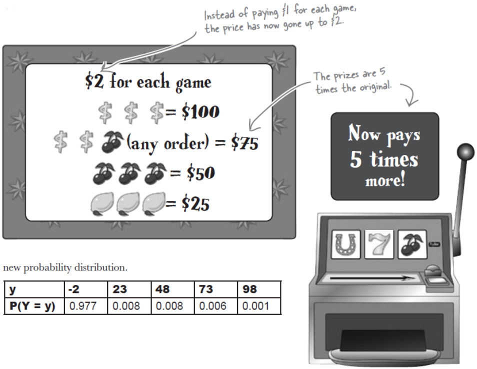
- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) =$
  $\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{1}{5} \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) - 3^2 = 11 - 9 = 2$
- $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(2 \cdot X) = 2^2 \cdot \mathrm{E}(X) = 4 \cdot 2 = 8$
- $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 2 + 2 = 4$
- $\mathrm{Var}(C) = \mathrm{Var}(2 \cdot Y + 3) = 2^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) = 4 \cdot 2 = 8$

Beispiele zum Mitdenken

Zurück zu den geänderten Bedingungen am Spielautomaten.
Müssen Sie die Varianz des Gewinns, $\mathrm{Var}(Y)$, per Hand ausrechnen oder geht es einfacher?

Lösung: Beobachte, dass $Y = 5 \cdot X + 3$. Damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(5 \cdot X + 3) \\ &= 5^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \\ &= 25 \cdot 2.679 \\ &= 66.975 \quad (\$^2) \end{aligned}$$



new probability distribution.

y	-2	23	48	73	98
P(Y = y)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

Here x is 19.

The value of each combination's winnings is represented by x.

Combination	None	Lemons	Cherries	$s/cherry	Dollars
x	-1	4	9	14	19
P(X = x)	0.977	0.008	0.008	0.006	0.001

X is the variable.

The probability that the variable X is 9—in other words, that the value of the winnings is $9.

Quelle: [Griffith, 2014]

Abschnitt 3

Wichtige diskrete Verteilungen

Bernoulli-Experimente

Definition

- Ein Zufallsexperiment bei dem ein Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p eintritt oder nicht heißt Bernoulli-Experiment.
- Falls Ereignis A eintritt heißt dies Erfolg, falls A nicht eintritt, ist dies ein Misserfolg.
- $p = P(A)$ heißt auch Erfolgswahrscheinlichkeit, $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs.

Beispiele:

- Wurf einer Münze:
  - Ereignis A: Kopf (Gegenereignis: Zahl)
  - Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.5$ (Gegenwahrscheinlichkeit: $q = 0.5$)
- Pünktlichkeit von Zügen
  - Ereignis A: Zug ist pünktlich (Gegenereignis: Zug kommt zu spät)
  - Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.8$ (Gegenwahrscheinlichkeit: $q = 0.2$)

Bernoulli-Verteilung

Modellierung eines Bernoulli-Experiments durch Zufallsvariablen:

Definition

Eine Zufallsvariable X, welche mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 1 (Erfolg), mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ den Wert 0 (Misserfolg) annimmt, heißt Bernoulli-verteilt: $X \sim Ber(p)$.

Beispiele:

- Wurf einer Münze:
  - Zufallsvariable X: 1, falls Münze Kopf zeigt, 0, falls Münze Zahl zeigt
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung:
    $P(X = 1) = p = 0.5, P(X = 0) = q = 0.5$
- Stabilität von Online-Konferenztools
  - Zufallsvariable X: 1, falls Alice sich auf Anhieb einwählen kann, 0, falls die Einwahl nicht klappt
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung:
    $P(X = 1) = p = 0.8, P(X = 0) = q = 0.2$

Fakten zur Bernoulli-Verteilung

Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable X, $X \sim Ber(p)$ gilt

Wertebereich $X \in \{0, 1\}$

Parameter p: Erfolgswahrscheinlichkeit, $q = 1 - p$

Verteilung $P(X = x) = \begin{cases} q & \text{falls } x = 0, \\ p & \text{falls } x = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Verteilungsfunktion $P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ q & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$

Erwartungswert $\mathrm{E}[X] = p$

Varianz $\mathrm{Var}[X] = pq$

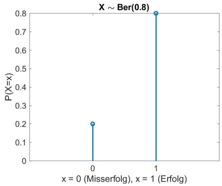


Bild: Verteilung

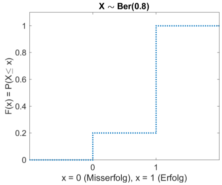


Bild: Verteilungsfunktion

Bernoulli-Ketten

Definition

Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal hintereinander unter denselben Bedingungen ausgeführt, und sind die Experimente unabhängig voneinander, so spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Beispiele:

- 100-maliges Werfen einer Münze (und jeweils Beobachtung des Ausgangs Kopf oder Zahl) ist Bernoulli-Kette der Länge 100.
- Drahtloses Kommunikationsnetz (WLAN): Verschicken von 50 Datenpaketen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p_w ankommen oder nicht, ist Bernoulli-Kette der Länge 50.
- ein betrunkener Fußgänger, der 200 Schritte macht, davon jeden mit der Wahrscheinlich p_f vorwärts, ansonsten rückwärts, wird durch eine Bernoulli-Kette der Länge 200 beschrieben.

Spannende Fragestellungen zu Bernoulli-Ketten

Graphische Darstellung einer Bernoulli-Kette

○ ○ ● ● ○ ● ○ ○ ● ● ○ ● ○ ○ ● ○ ○ ○ ●

Legende:
- ● Ereignis tritt ein (Erfolg)
- ○ Ereignis tritt nicht ein (Misserfolg)

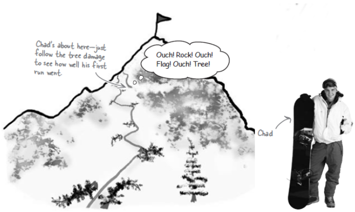
Spannende Fragestellungen:

- Wie viele Versuche G sind nötig, bis ein Erfolg eintritt?
  Am Beispiel: $G = 3$
  Generell gilt: G ist geometrisch verteilt.
- Wie viele Erfolge B habe ich bei n Versuchen?
  Am Beispiel: $n = 19, B = 8$
  Generell gilt: B ist binomial verteilt.

Chad, der glücklose Snowboarder I

Beispiel:

- Chad liebt Snowboarden, aber als Pechvogel trifft er garantiert jeden Baum, der an der Piste steht.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass er eine erfolgreiche Abfahrt (ohne Baumberührung) macht, ist daher nur 0.2.
- Chad will unbedingt eine erfolgreiche Abfahrt machen, um seine Clique zu beeindrucken.
- Chad versucht es daher so lange immer wieder aufs neue, bis er eine erfolgreiche Abfahrt hatte.
- Nach einer erfolgreichen Abfahrt hört er auf und widmet sich dem Après-Ski.



Quelle: [Griffith, 2014]

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht Chad genau 2 Versuche, um eine erfolgreiche Abfahrt hinzulegen?

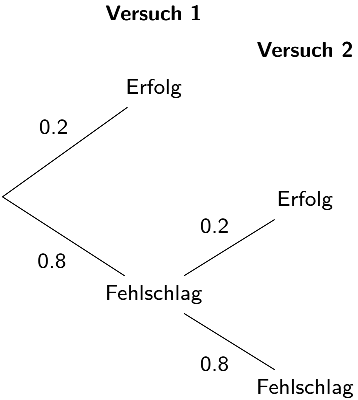
Lösung: Modelliere Chads Versuche als Bernoulli-Kette.

Chad, der glücklose Snowboarder II

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht Chad genau 2 Versuche, um eine erfolgreiche Abfahrt hinzulegen?

Lösung:

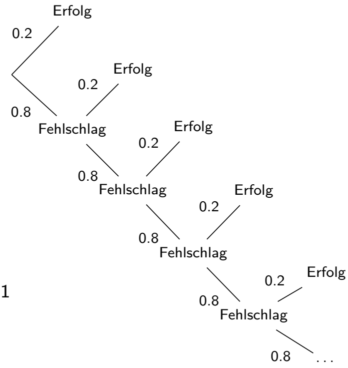
- Definiere die Zufallsvariable $X =$ Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg
- Zeichne Wahrscheinlichkeitsbaum der Bernoulli-Kette
- Bedenke: Chad stoppt, sobald er einen Erfolg hatte!



$$\Rightarrow \quad P(X=2) = P(\text{Fehlschlag in Versuch 1}) \cdot P(\text{Erfolg in Versuch 2})$$
$$= 0.8 \cdot 0.2 = 0.36$$

Chad, der glücklose Snowboarder III

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht Chad genau $r \in \mathbb{N}$ Versuche, um eine erfolgreiche Abfahrt hinzulegen?



Lösung:

x	$P(X = x)$
1	0.2
2	$0.2 \cdot 0.8$
3	$0.2 \cdot 0.8^2$
4	$0.2 \cdot 0.8^3$
5	$0.2 \cdot 0.8^4$
...	
r	$0.2 \cdot 0.8^{r-1}$

Zusammenfassung:

$$P(X = r) = p \cdot q^{r-1}$$

mit $p = 0.2$,

$$q = 1 - 0.2 = 0.8;$$

X ist geometrisch verteilt

$$X \sim geom(p)$$

Die geometrische Verteilung

Definition

Gegeben sei eine Bernoulli-Kette mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Die Anzahl X der Versuche, die bis zum 1. Erfolg unternommen werden müssen, ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter p: $X \sim geom(p)$.
Es gilt

$$P(X = x) = p \cdot q^{x-1}$$

Bemerkungen:

- Eine geometrisch Verteilte Zufallsvariable nennt man auch Wartezeit bis zum 1. Erfolg.
- Anwendungen: Lebensdauer eines Bauteils (Wartezeiten bis zum 1. Ausfall), Anzahl der zur Datenpaketübertragung benötigten Versuche, Anzahl der überprüften Codezeilen bis zum 1. Fehler, ...
- Achtung: Manche Autoren definieren auch die *Anzahl Fehlversuche vor dem 1. Erfolg* $Y = X - 1$ als geometrisch verteilt.

Fakten zur geometrischen Verteilung

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable $X \sim geom(p)$ gilt

Wertebereich $X \in \mathbb{N}$

Parameter p: Erfolgswahrscheinlichkeit, $q = 1 - p$

Verteilung $P(X = x) = \begin{cases} pq^{x-1} & \text{falls } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Verteilungsfunktion $P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{falls } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Erwartungswert $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p}$

Varianz $\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2}$

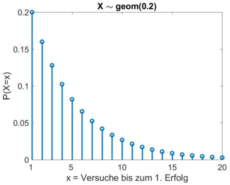


Bild: Verteilung

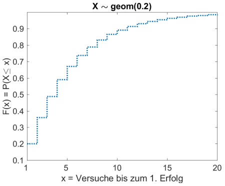


Bild: Verteilungsfunktion

Britta, die bessere Snowboarderin

Britta absolviert mit $p = 0.4$ eine erfolgreiche Abfahrt. Die Anzahl der Abfahrten X die Britta bis zum 1. Erfolg braucht ist also $X \sim geom(0.4)$.

Berechnen Sie:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta im 2. Versuch einen Erfolg hat.
  $P(X = 2) = p \cdot q = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta höchsten 4 Versuche bis zur 1. erfolgreichen Abfahrt braucht.
  $P(X \leq 4) = F(4) = 1 - q^4 = 1 - 0.6^4 = 1 - 0.1296 = 0.8704$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta mehr als 4 Versuche bis zur 1. erfolgreichen Abfahrt braucht.
  $P(X > 4) = q^4 = 0.6^4 = 0.1296$
- Den Erwartungswert der Abfahrten, die sie bis zum 1. Erfolg braucht.
  $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{0.4} = \frac{10}{4} = 2.5$
- Die Varianz für die Anzahl der Abfahrten bis zum 1. Erfolg.
  $\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2} = \frac{0.6}{0.4^2} = 3.75$

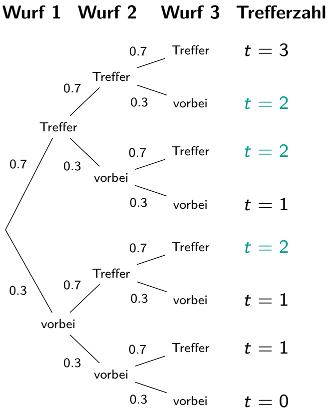
Schneeballschlacht I

Chad und Britta liefern sich eine Schneeballschlacht. Chad wirft besser als er fährt und trifft sein Ziel Britta mit $p = 0.7$.

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er in $n = 3$ Würfen $t = 2$ mal?

Lösung:

- Definiere die Zufallsvariable $X =$ Anzahl der Treffer
- Zeichne Wahrscheinlichkeitsbaum der Bernoulli-Kette
- Verwende Wahrscheinlichkeiten der Fälle mit $t = 2$
- $P(X = 2)$
  $= 0.7^2 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7$
  $= 3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.441$



Schneeballschlacht II

Beobachtung: In der Schneeballschlacht mit $n = 3$ Bällen gilt

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= 1 \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^3 \\
P(X=1) &= 3 \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^2 \\
P(X=2) &= 3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^1 \\
P(X=3) &= 1 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^0
\end{aligned}$$

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Chad in n Fällen t mal?

Lösung:

- Chad trifft t mal und wirft $n - t$ mal daneben
  $\Rightarrow\ P(X = t) = C \cdot 0.7^t \cdot 0.3^{n-t}$
- C beschreibt die Anzahl von Möglichkeiten, wie sich t Treffer über n Würfe verteilen können
  $\Rightarrow\ C = \binom{n}{t}$
  (siehe Kombinatorik: „ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge“)
- Insgesamt: $P(X = t) = \binom{n}{t} \cdot p^t \cdot q^{n-t}$ (mit $p = 0.7, q = 0.3$)
  X ist binomialverteilt , $\quad X \sim Bin(n, p)$

Die Binomialverteilung

Definition

Gegeben sei eine Bernoulli-Kette der Länge n mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Die Anzahl X der erfolgreichen Versuche, ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p: $X \sim Bin(n, p)$.
Es gilt

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Bemerkungen:

- $X \sim Bin(n, p)$ kann auch als Summe unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen aufgefasst werden (X_i ist jeweils im Erfolgsfall 1, sonst 0): $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
- Anwendungen: Anzahl kaputter Bauteile in einer Lieferung, Anzahl von Covid19-Infizierten in einer Gruppe Menschen, Anzahl von Paketfehlern in einer Datenübertragung, ...

Fakten zur Binomialverteilung

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable $X \sim Bin(n, p)$ gilt

Wertebereich $X \in \mathbb{N}_0, X \leq n$

Parameter p: Erfolgswahrscheinlichkeit, n: Anzahl der durchgeführten Versuch

Verteilung $P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Verteilungsfunktion $P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{falls } 0 \leq x \leq n, \\ 1 & \text{falls } x > n. \end{cases}$

Erwartungswert $\mathrm{E}[X] = np$

Varianz $\mathrm{Var}[X] = npq$

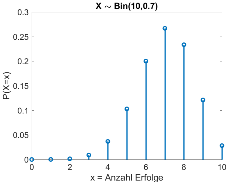


Bild: Verteilung

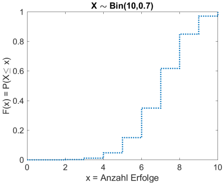


Bild: Verteilungsfunktion

Britta, die schlechtere Schneeballwerferin

Britta wirft $n = 5$ Schneebälle auf Chad, aber trifft nur mit $p = 0.25$. Die Anzahl der Treffer in den 5 Würfen ist also $X \sim Bin(5, 0.25)$.

Berechnen Sie:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta genau 2 Mal trifft.
  $P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 \cdot q^3 = 10 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^3 = 10 \cdot 0.0264 = 0.264$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta 2 oder 3 Mal trifft.
  $P(X = 2 \vee X = 3) = P(X = 2) + P(X = 3) =$
  $0.264 + \binom{5}{3} 0.25^3 \cdot 0.75^2 = 0.264 + 0.0879 = 0.3519$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta gar nicht trifft.
  $P(X = 0) = q^5 = 0.75^5 = 0.237$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Britta höchstens 3 Mal trifft.
  $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{5}{k} p^k q^{5-k} = 0.237 + 5 \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^4 + 0.264 + 0.0879 = 0.237 + 0.396 + 0.264 + 0.0879 = 0.984$
- Den Erwartungswert und die Varianz der Trefferzahl.
  $\mathrm{E}[X] = np = 5 \cdot 0.25 = 1.25$
  $\mathrm{Var}[X] = npq = 5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.9375$

Beispiele zum Mitdenken

Eine Serienproduktion von Festplatten erfolgt mit einem gleichbleibenden Ausschussanteil von $p = 3\%$. Es werden $n = 50$ (mit Zurücklegen) Festplatten für einen Test entnommen.
Vorüberlegung: Verwende ZV X = Anzahl der fehlerhaften Festplatten, $X \sim \; Bin(50, 0.03)$ mit $p = 0.03, q = 0.97$
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den $n = 50$ Festplatten die folgenden Anzahlen fehlerhaft sind:

- keine
  $P(X = 0) = q^{50} = 0.97^{50} = 0.218.$
- genau zwei
  $P(X = 2) = \binom{50}{2} p^2 q^{48} = 1225 \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^{48} = 0.256.$
- höchstens zwei
  $P(X \leq 2) = F(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
  $0.218 + 50 \cdot 0.03 \cdot 0.97^{49} + 0.256 = 0.811.$

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für die Zufallsvariable X
$\mathrm{E}[X] = np = 50 \cdot 0.03 = 1.5$
$\mathrm{Var}[X] = npq = 50 \cdot 0.03 \cdot 0.97 = 1.46$

Die unzuverlässige Popcornmaschine

Problem bei dem Sie als Experte hinzugezogen werden:

- Das Kino von Statistingen hat eine unzuverlässige Popcornmaschine, die im Schnitt 3.4 Mal pro Woche ausfällt.
- Nächste Woche werden rund um die Uhr alle Star Wars Filme gezeigt, daher muss immer Popcorn zur Verfügung stehen.
- Sind in dieser Woche mit hoher Wahrscheinlichkeit mehr als zwei Ausfälle zu erwarten? Falls ja, wird sich das Kino eine neue Maschine kaufen, falls nein, dann tut es die alte.

Quelle: [Griffith, 2014]

Lösung:

- Das Problem lässt sich nicht als Bernoulli-Kette modellieren, auch helfen uns die Binomal- oder die geometrische Verteilung nicht.
- Statt dessen haben wir die Rate der Ausfälle, $\lambda = 3.4$ Ausfälle pro Woche gegeben und suchen die Anzahl der Ausfälle der Woche.

$\Rightarrow$ Die Zufallsvariable X = Ausfälle der Maschine pro Woche ist Poisson-verteilt mit Rate λ : $X \sim Po(\lambda)$

Poisson-Verteilung

Definition

Eine Zufallsvariable X, die jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

annehmen kann, heißt poissonverteilt mit dem Parameter λ.
Kurzschreibweise: $X \sim Po(\lambda)$.

Bemerkungen:

- Anwendungen: Anzahl der Vorkommnisse (Paketverluste, Unfälle, ankommende Kunden, ...) in einem bestimmten Intervall, wenn diese mit konstanter Rate auftreten.
- Zusammenhang zur Exponentialverteilung: (siehe Abschnitt II) Ist die Zeit zwischen zwei Ankünften exponentialverteilt mit Rate λ, so ist die Anzahl der Ankünfte in einem Intervall der Länge Δt poissonverteilt mit Rate $\lambda \cdot \Delta t$.

Fakten zur Poisson-Verteilung

Für eine poissonverteilte Zufallsvariable $X \sim Po(\lambda)$ gilt

Wertebereich $X \in \mathbb{N}_0$

Parameter $\lambda > 0$: Auftrittsrate

Verteilung $P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Verteilungsfunktion $P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k}{k!} & \text{falls } 0 \leq x. \end{cases}$

Erwartungswert $\mathrm{E}[X] = \lambda$

Varianz $\mathrm{Var}[X] = \lambda$

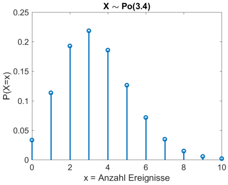


Bild: Verteilung

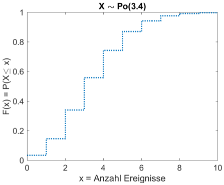


Bild: Verteilungsfunktion

Fragen an die Experten

Das Kino von Statsville erwartet von Ihnen, dass Sie folgende Fragen beantworten (Für die Popcornmaschine, die 3.4 mal pro Woche ausfällt):
Vorüberlegung: $X =$ Anzahl der Ausfälle pro Woche mit $X \sim Po(3.4)$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Maschine in der Star Wars Woche nicht ausfallen?
  $P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3.4}3.4^0}{0!} = \frac{0.033 \cdot 1}{1} = 0.033$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Maschine in der Star Wars Woche 2 Mal ausfallen?
  $P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3.4}3.4^2}{2!} = \frac{0.033 \cdot 11.56}{2} = 0.193$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Maschine in der Star Wars Woche höchstens 2 Mal ausfallen?
  $P(X \leq 2) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{2}\frac{\lambda^k}{k!} = 0.033 + \frac{e^{-3.4}3.4^1}{1!} + 0.193$
  $= 0.033 + 0.113 + 0.193 = 0.34$
- Was sind Erwartungswert und Varianz der Anzahl der Ausfälle?
  $\mathrm{E}[X] = \lambda = 3.4 \qquad \mathrm{Var}[X] = \lambda = 3.4$

Beispiele zum Mitdenken

Example (taken from [Diez et al., 2015]): Customers at a coffee shop.

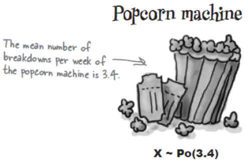
Given: A coffee shop serves an average of 75 customers per hour during the morning rush.

1. Which distribution we have studied is most appropriate for calculating the probability for a given number of customers X arriving within one hour during this time of day? Answer: Poisson distribution with $\lambda = 75$ [customers per hour]
2. What are the mean and the standard deviation of the number of customers this coffee shop serves in one hour during this time of day? Answer: $\mathrm{E}[X] = \lambda = 75, \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{75} = 8.66$
3. Calculate the probability that exactly 70 customers showed up in this coffee shop in one hour during this time of day? Answer: $P(X = 70) = \frac{\lambda^{70}}{70!} e^{-\lambda} = \frac{75^{70}}{70!} e^{-75} = 0.0402$
4. Would it be considered unusually low if at most 70 customers were served in one hour during this time of day? Answer: $P(X \leq 70) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{70} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-75} \sum_{k=0}^{70} \frac{75^k}{k!} \overset{TR}{=} 0.3066$ $\Rightarrow$ yes, this is an unusually low number of customers.

Die unzuverlässigen Popcorn- und Getränkemaschinen I

Neue Fragestellung:

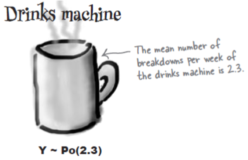
- Das Kino entschließt, sich keine neue Popcornmaschine zu kaufen.
- Aber: auch die Getränkemaschine arbeitet unzuverlässig. Und Popcorn macht Durst.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen weder die Popcorn- noch die Getränkemaschine während der Star Wars Woche aus?



Quelle: [Griffith, 2014]

Wir wissen:

- Anzahl der Ausfälle der Popcornmaschine (pro Woche) wird modelliert von $X \sim Po(3.4)$
- Anzahl der Ausfälle der Gegränkemaschine (pro Woche) wird modelliert von $Y \sim Po(2.3)$
- X und Y sind unabhängig
- Wir suchen: $P(X + Y = 0)$



Quelle: [Griffith, 2014]

Die unzuverlässigen Popcorn- und Getränkemaschinen II

Erinnerung: Für alle unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt:

- $P(A+B) = P(A) + P(B)$
- $\mathrm{E}(A+B) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(B)$
- $\mathrm{Var}(A+B) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{Var}(B)$

Spezialfall Poisson-Verteilung

Für unabhängige Zufallsvariablen $A \sim Po(\lambda_A)$ und $B \sim Po(\lambda_B)$ gilt

$$A + B \sim Po(\lambda_A + \lambda_B)$$

Zurück zum Beispiel:

- Was ist die Verteilung von $X + Y$?
  $X + Y \sim Po(\lambda_X + \lambda_Y) = Po(5.7)$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen weder die Popcorn- noch die Getränkemaschine während der Star Wars Woche aus?
  $P(X + Y = 0) = \frac{e^{-5.7} 5.7^0}{0!} = 0.003$

BULLET POINTS

- The **geometric distribution** applies when you run a series of independent trials, there can be either a success or failure for each trial, the probability of success is the same for each trial, and the main thing you're interested in is how many trials are needed in order to get your first success.
- If the conditions are met for the geometric distribution, X is the number of trials needed to get the first successful outcome, and p is the probability of success in a trial, then

  $X \sim Geo(p)$

- The following probabilities apply if $X \sim Geo(p)$:

  $P(X = r) = pq^{r-1}$
  $P(X > r) = q^r$
  $P(X \leq r) = 1 - q^r$

- If $X \sim Geo(p)$ then

  $E(X) = 1/p$
  $Var(X) = q/p^2$

- The **binomial distribution** applies when you run a series of finite independent trials, there can be either a success or failure for each trial, the probability of success is the same for each trial, and the main thing you're interested in is the number of successes in the n independent trials.
- If the conditions are met for the binomial distribution, X is the number of successful outcomes out of n trials, and p is the probability of success in a trial, then

  $X \sim B(n, p)$

- If $X \sim B(n, p)$, you can calculate probabilities using

  $P(X = r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$

  where

  $${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- If $X \sim B(n, p)$, then

  $E(X) = np$
  $Var(X) = npq$

- The **Poisson distribution** applies when individual events occur at random and independently in a given interval, you know the mean number of occurrences in the interval or the rate of occurrences and this is finite, and you want to know the number of occurrences in a given interval.
- If the conditions are met for the Poisson distribution, X is the number of occurrences in a particular interval, and λ is the rate of occurrences, then

  $X \sim Po(\lambda)$

- If $X \sim Po(\lambda)$ then

  $$P(X = r) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$$
  $E(X) = \lambda$
  $Var(X) = \lambda$

- If $X \sim Po(\lambda_x)$, $Y \sim Po(\lambda_y)$ and X and Y are independent,

  $X + Y \sim Po(\lambda_x + \lambda_y)$

- If $X \sim B(n, p)$ where n is large and p is small, you can approximate it with $X \sim Po(np)$.

Quelle: [Griffith, 2014]

Beispiele zum Mitdenken (Klausur WS 18/19) I

Die Stadt Konstanz lässt die Statistiker Frank, Grace und Heidi die über die Europa-Brücke fahrenden Autos betrachten. Jedes Auto wird entweder als **verbotenes Auto** (Diesel mit Euro-Norm 4 oder schlechter) oder als **erlaubtes Auto** (andernfalls) eingestuft.

- Frank zählt die Anzahl von verbotenen Autos in einer Serie von 10 Autos. Die Anzahl der von Frank gezählten verbotenen Autos sei die Zufallsvariable F.
- Grace beobachtet die Autos so lange, bis sie ein verbotenes Auto entdeckt. Die Anzahl der Autos die Grace untersuchen muss, bis sie ein verbotenes Auto findet, sei die Zufallsvariable G.
- Heidi beobachtet die Autos eine Stunde lang und zählt die Anzahl der verbotenen Autos. Man kann annahmen, dass die Anzahl der verbotenen Autos die von Heidi gezählt werden eine Poisson-verteilte Zufallsvariable H mit Erwartungswert 10 ist.

Annahmen: Man nimmt an, dass ein über die Europa-Brücke fahrende Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.1$ ein verbotenes Auto ist. Die Autos werden jeweils einzeln betrachtet, sind voneinander völlig unabhängig und es kann erkannt werden ob das Auto verboten oder erlaubt ist.

Beispiele zum Mitdenken (Klausur WS 18/19) I

1. Geben Sie an, wie (und mit welchen Parametern) die Zufallsvariablen F, G, H verteilt sind.
   Lösung:
   - $F \sim Bin(n, p) = Bin(10, 0.1)$
   - $G \sim geom(p) = geom(0.1)$
   - $H \sim Po(\lambda) = Po(10)$ (da $\mathrm{E}(H) = 10 = \lambda$)
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Stichprobe von Frank genau 2 verbotene Autos befinden?
   Lösung: $P(F = 2) = \binom{n}{2} \cdot p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot (0.9)^8 \overset{\text{TR}}{=} 0.1937$
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Grace mindestens 10 Autos betrachten muss, bis sie das erste Mal ein verbotenes Auto entdeckt?
   Lösung:
   $P(G \geq 10) = 1 - P(G \leq 9) = 1 - (1 - (1-p)^9) = 0.9^9 = 0.38742$
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Heidi weniger als 3 verbotene Autos beobachtet?
   Lösung: $P(H < 3) = P(H \leq 2) \overset{\text{TR}}{=} 0.00277$

Das Keksrätsel I

- Sie machen einen Ferienjob als Qualitätskontrolleur in einer Keksfabrik.
- Kurz vor Feierabend stellt Ihnen Ihre Chefin folgendes Problem:
  - Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 ist ein Keks zerbrochen.
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Box mit 100 Keksen 15 zerbrochene sind.
- Sie erkennen schnell, dass die gesuchte Anzahl von zerbrochenen Keksen X in einer Kiste binomialverteilt ist. Allerdings kann Ihr (sehr einfacher) Taschenrechner $\binom{100}{15}$ nicht berechnen, da die Zahl zu groß ist.
- Ihrer Chefin ist das egal, Sie möchte die Wahrscheinlichkeit morgen früh auf dem Schreibtisch liegen haben und verabschiedet sich.
- Was tun Sie?
- Sie denken ein wenig nach, erinnern sich an Ihre Stochastik-Vorlesung, tippen ein paar Zahlen in den Taschenrechner und machen pünktlich Feierabend.

Das Keksrätsel II

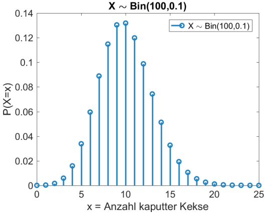


Bild: Verteilung der kaputten Kekse pro Kiste

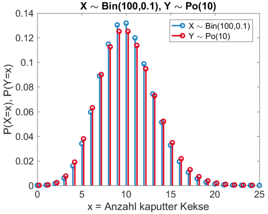


Bild: Verteilung der kaputten Kekse pro Kiste und Poisson-Verteilung im Vergleich

Faustregel

Wenn $n \gtrapprox 50$ und $p \lessapprox 0.1$ ist, dann kann eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p durch die Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = n \cdot p$ angenähert werden.

Antwort für die Chefin:

$$P(X = 15) = \binom{100}{15} \cdot 0.1^{15} \cdot 0.9^{85} \approx \frac{e^{-10} \cdot 10^{15}}{15!} = 0.0347$$

Verwendete oder empfohlene Literatur I

[Diez et al., 2015] Diez, D. M., Barr, C. D., and Çetinkaya Rundel, M. (2015).
OpenIntroStatistics.
openintro.org.
Online verfügbar unter www.openintro.org.

[Downey, 2014] Downey, A. B. (2014).
Think Stats - Exploratory Data Analysis in Python.
O'Reilly.
Online verfügbar unter www.greenteapress.com.

[Griffith, 2014] Griffith, D. (2014).
Head First Statistics / Statistik von Kopf bis Fuß.
O'Reilly.

Verwendete oder empfohlene Literatur II

[Haslwanter, 2016] Haslwanter, T. (2016).
An Introduction to Statistics with Python.
Springer.
Python Notebooks auf github verfügbar.

[Papula, 2016] Papula, L. (2016).
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3.
Springer Vieweg, 7. Auflage.
Als eBook in der HTWG-Bibliothek verfügbar.

[Schmidt, 2015] Schmidt, J. (2015).
Basiswissen Mathematik.
Springer Spektrum, 2. Auflage.
Als eBook in der HTWG-Bibliothek verfügbar.

Verwendete oder empfohlene Literatur III

[Teschl and Teschl, 2014] Teschl, G. and Teschl, S. (2014).
Mathematik für Informatiker: Band 2: Analysis und Statistik.
Springer Vieweg, 3. Auflage.
Als eBook in der HTWG-Bibliothek verfügbar.