

# 1

## Einführung

Das Anfertigen von Modellen ist ein wichtiger Schritt in den frühen Phasen der Herstellung ganz unterschiedlicher Objekte: Ein Architekt erstellt ein dreidimensionales Modell für den Neubau eines besonders exponierten Gebäudes. Daran werden mit dem Auftraggeber die äußere Gestaltung und die Integration des Gebäudes in das Stadtbild diskutiert. Um die Raumaufteilung zu planen, die Sicherheit zu prüfen und die Durchführung des Baus zu steuern, werden andere Modelle erstellt, wie Bauzeichnungen und Berechnungen der Statik.

Solch ein Vorgehen ist auch typisch für Entwicklungsprozesse in der Informatik: Aufgaben und Lösungsvorschläge werden mit Modellen beschrieben, bevor mit der Herstellung einer Lösung in Software oder Hardware begonnen wird. An den Modellen können Auftraggeber und Entwickler prüfen, ob die Aufgabenstellung richtig verstanden wurde, welche Eigenschaften die vorgeschlagene Lösung haben wird und ob diese akzeptabel sind.

Jede Branche hat Techniken der Modellbildung, die sich für ihre Aufgaben besonders gut eignen, z. B. Gebäudemodelle, Bauzeichnungen und Berechnungen der Statik für die Herstellung von Gebäuden oder Schaltpläne für das Anfertigen elektrischer Anlagen. Produkte der Informatik wirken meist durch ihre Funktionen – seltener durch ihr Aussehen. Deshalb überwiegen hier abstrakte Modelle, die mit formalen Kalkülen erstellt werden. Aufgaben von unterschiedlicher Art aus einem sehr breiten Spektrum werden mit Informatikmethoden gelöst. Deshalb werden in der Informatik sehr viele verschiedene Kalküle eingesetzt, die jeweils unterschiedliche Aspekte der Aufgaben möglichst gut modellieren können. Informatiker müssen sie als ihr „Handwerkszeug“ beherrschen, um für ihre Aufgaben nützliche Modelle mit geeigneten Kalkülen anzufertigen.

### 1.1 Einführendes Beispiel

Wir wollen einen ersten Einblick in das Modellieren der Informatik geben. Als Beispiel betrachten wir folgende Denksportaufgabe:

#### **Beispiel 1.1: Flussüberquerung**

Ein Mann steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf am linken Ufer eines Flusses, den er überqueren will. Er hat ein Boot, das gerade groß genug ist, ihn und ein weiteres Objekt zu transportieren, sodass er immer nur eines der drei mit sich hinübernehmen kann. Falls der Mann allerdings den Wolf mit

der Ziege oder die Ziege mit dem Kohlkopf unbewacht an einem Ufer zurücklässt, wird einer gefressen werden.

Ist es möglich, den Fluss zu überqueren, ohne dass die Ziege oder der Kohlkopf gefressen wird?

Solche Aufgaben sind deswegen reizvoll, weil man eine Weile daran herumknobelt und dann – wie mit einem Geistesblitz – die Lösung findet. Mit solch einem Vorgehen geht man allerdings das Risiko ein, die Lösung nicht zu finden. Bei ernsthaften Aufgaben wäre das fatal. Deshalb zeigen wir hier ein systematisches Vorgehen unter Einsatz von Informatik-Kalkülen – auch wenn dabei vielleicht der Spaß an der Knochelei verloren geht.

Zunächst klären wir, welche Aufgabe gelöst werden soll: Die Antwort auf die Frage am Ende des Textes kann „ja“ oder „nein“ lauten. In jedem Fall müssen wir eine Begründung angeben, entweder indem wir einen Plan für eine sichere Flussüberquerung entwickeln oder erklären, weshalb es einen solchen nicht gibt.

Dann beginnen wir die Modellierung, indem wir die Beschreibung der Aufgabe auf die unbedingt notwendigen Objekte, Eigenschaften und Aktionen reduzieren: Als Objekte kommen in Frage: Mann, Wolf, Ziege, Kohlkopf, Fluss, linkes Ufer und rechtes Ufer, Boot. Es ist wichtig, als Eigenschaft zu beschreiben, welche der Objekte Wolf, Ziege und Kohlkopf sich gemeinsam an jedem der beiden Ufer aufhalten; denn damit wird entschieden, ob einer von ihnen gefressen werden kann. Als Aktionen benötigen wir das Transportieren jeweils eines der drei Objekte von einem zum anderen Ufer oder Leerfahrten jeweils in beide Richtungen.

Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann kann man sie als eine Folge solcher Fahrten über den Fluss beschreiben. Jede Fahrt verändert den Zustand des Systems. Die Zustände des Systems modellieren wir, indem wir angeben, welche der Objekte Mann, Wolf, Ziege und Kohlkopf sich an welchem Ufer befinden. Formal ist der Zustand ein Paar von Mengen  $(l, r)$ , mit  $l, r \subseteq \{M, W, Z, K\}$ , wobei wir Abkürzungen für die vier Objekte verwenden. Da keines der Objekte verschwinden und keines hinzukommen kann, muss für jedes Paar  $(l, r)$  gelten

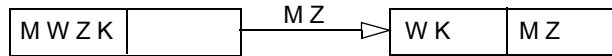
$$l \cap r = \emptyset \quad \text{und} \quad l \cup r = \{M, W, Z, K\}$$

Nun können wir auch formal beschreiben, wann ein Zustand  $(l, r)$  unzulässig ist, weil die Ziege oder der Kohlkopf gefressen werden könnte:

$$\begin{aligned} M \notin l \text{ und } (\{W, Z\} \subseteq l \text{ oder } \{Z, K\} \subseteq l) \text{ oder} \\ M \notin r \text{ und } (\{W, Z\} \subseteq r \text{ oder } \{Z, K\} \subseteq r) \end{aligned}$$

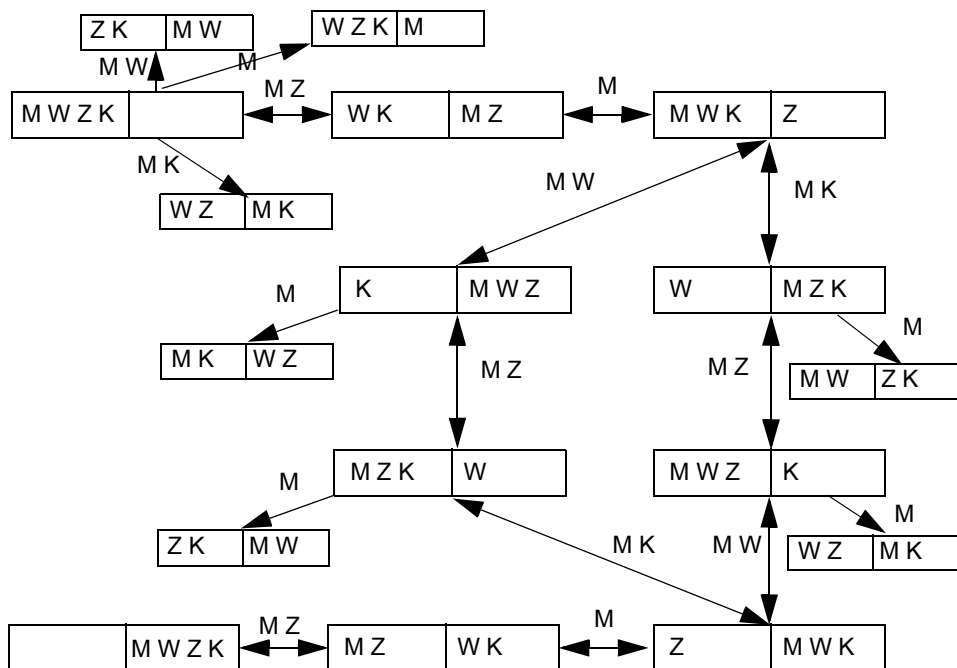
Wenn z. B. im Zustand  $(\{M, W, Z, K\}, \emptyset)$  die Ziege an das rechte Ufer transportiert wird, geht das System in den Zustand  $(\{W, K\}, \{M, Z\})$  über. Beide Zustände sind gemäß obiger Bedingung zulässig. Wir müssen noch begründen, dass es nicht nötig ist, den Zustand während der Überfahrt zu modellieren: Ist während der Überfahrt das gerade verlassene Ufer unzulässig, so ist es auch unzulässig im Zustand, der die Ankunft modelliert. Entsprechendes gilt für den Zustand vor der Abfahrt und das zu erreichende Ufer.

Die Zustandsübergänge kann man sehr anschaulich grafisch beschreiben. Abb. 1.1 zeigt den Übergang, den wir oben als Beispiel beschrieben haben. Die Rechtecke geben die Zustände mit dem Paar von Mengen an. Der beschriftete Pfeil verbindet die Zustände vor und nach dem Transport.



**Abbildung 1.1:** Ein Zustandsübergang

Wir haben nun das Prinzip des Modells entworfen. Wir brauchen es nur noch vollständig auszufüllen, indem wir alle zulässigen Zustände und Übergänge angeben. Abb. 1.2 zeigt das vollständige Modell. Es sind auch einige unzulässige Zustände angegeben, um zu zeigen, welche Entscheidungen nicht getroffen werden dürfen. Die Übergänge zwischen zulässigen Zuständen sind natürlich jeweils in beiden Richtungen möglich, obwohl es im Sinne der Aufgabe nicht sinnvoll ist, in einen früheren Zustand zurück zu rudern. In Abb. 1.2 können wir nun leicht ablesen, dass es mehrere Lösungen für die Transportaufgabe gibt:



**Abbildung 1.2:** Modellierung der Flussüberquerung

Jeder Weg vom Startzustand zum Zielzustand beschreibt eine Lösung. Es gibt zwei verschiedene, die mit 7 Überfahrten auskommen. Alle anderen Transportfolgen enthalten überflüssige Überfahrten.

Für die Modellierung unserer Aufgabe haben wir den Kalkül der endlichen Automaten angewandt. Er eignet sich besonders gut, wenn Abläufe in Systemen mit Übergängen zwischen verschiedenen Zuständen beschrieben werden sollen. Der Kalkül wird in Abschnitt 7.1.2 vorgestellt. Die grafische Veranschaulichung des Automaten in Abb. 1.2 benutzt den Kalkül der gerichteten Graphen, der in Abschnitt 5.1 eingeführt wird. Zu Beginn der Modellierung haben wir die Zustände des Systems durch Paare von Mengen beschrieben. Solche Abstraktionen führen wir in Kapitel 2 ein.

In den folgenden Kapiteln dieses Buches werden wir die Kalküle jeweils an typischen Beispielen vorstellen. Eine Modellierungsaufgabe werden wir dabei durchgängig immer wieder aufgreifen: Die Bedienung eines Getränkeautomaten soll modelliert werden. Das Gerät soll Getränke wie Kaffee, Tee und Kakao gegen Bezahlung mit Münzen abgeben. Man soll Varianten der Getränke wählen können, z. B. mit oder ohne Milch oder Zucker. Die Modellierung soll berücksichtigen, dass im Gerät nur begrenzte Vorräte für die Zubereitung der Getränke untergebracht werden können. Die Beschreibung der Aufgabe ist hier absichtlich unscharf gehalten. Es entspricht dem Vorgehen in der Realität, dass die Beschreibung der Aufgabe erst im Zuge der Modellierung präzisiert wird.

## 1.2 Modellbegriff

Der Begriff des *Modells* ist vom lateinischen Wort *modulus* für Maß, Maßstab abgeleitet. Er wird in vielen verschiedenen Zusammenhängen mit recht unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Er kann das Abbild eines vorhandenen Originals bezeichnen, z. B. ein Schiffsmodell, oder das Vorbild für ein herzustellendes Original, z. B. ein Gebäudemodell oder ein Vorbild für Maler oder Bildhauer. Das Modell kann konkret sein, wie das Schiffsmodell, oder abstrakt, wie ein Modell zur Rentenberechnung. Auch das Modellerte kann konkret sein, wie das Schiff, oder abstrakt, wie die zahlenmäßige Entwicklung der Bevölkerung. In Abb. 1.3 haben wir die Erklärung des Modellbegriffes aus einem allgemeinen Lexikon angegeben. Für unsere Zwecke ist darin die Variante zum „Sprachgebrauch verschiedener Wissenschaften“ zutreffend. Die Modelle in der Informatik sind im Allgemeinen abstrakte Abbilder oder Vorbilder zu konkreten oder abstrakten Originalen. So ist das Modell der Flussüberquerung im vorigen Abschnitt ein abstrakter, endlicher Automat. Auch das Modellerte ist in diesem Beispiel abstrakt: der schrittweise Ablauf der Flussüberquerung mit den dabei durchlaufenen Zuständen.

Man beachte, dass in der Logik, einem Teilgebiet der Mathematik und Informatik, der Begriff Modell mit einer sehr speziellen, anderen Bedeutung verwendet wird: *Eine Struktur  $S$  ist ein Modell der logischen Formeln  $F$ , wenn alle Formeln aus  $F$  für  $S$  gelten* (siehe auch Kapitel 4).

**Modell** [italien., zu lat. *modulus* „Maß, Maßstab“], allg. Muster, Vorbild, Entwurf.  
 – Mensch (auch Tier), der (das) als Vorbild für künstler. Studien oder Kunstwerke dient („sitzt“).  
 – in der Bildhauerei meist in verkleinerter Form ausgeführter Entwurf einer Plastik oder Tonarbeit, die in Bronze gegossen werden soll. - †Architekturmodell.  
 – in der Modebranche Bez. für 1. ein nur einmal oder in eng begrenzter Anzahl hergestelltes Kleidungsstück. (*M.kleid*); 2. die Vorlage für eine Vervielfältigung; 3. svw. Mannequin.  
 – im Sprachgebrauch verschiedener Wiss. (Philosophie, Naturwiss., Soziologie, Psychologie, Wirtschaftswiss., Politikwiss., Kybernetik u.a.) ein Objekt materieller oder ideeller (Gedanken-M.) Natur, das von einem Subjekt auf der Grundlage einer Struktur-, Funktions- oder Verhaltensanalogie für ein anderes Objekt (*Original*) eingesetzt und genutzt wird, um Aufgaben zu lösen, deren Durchführung unmittelbar am Original selbst nicht möglich bzw. zu aufwendig ist (z. B. Flugzeug-M. im Windkanal). Die **Modellmethode** vollzieht sich in vier Schritten: 1. Auswahl (Herstellung eines dem [geplanten] Original entsprechenden M.; 2. Bearbeitung des M., um neue Informationen über das M. zu gewinnen (**Modellversuch**; †Ähnlichkeitsgesetze); 3. Schluss auf Informationen über das Original (meist Analogieschluß); ggf. 4. Durchführung der Aufgabe am Original. Infolge der Relationen zw. Subjekt, Original und M. (**Modellsystem**) ist ein M. einsetzbar u. a. zur Gewinnung neuer Informationen über das Original (z. B. Atom-M.), zur Demonstration und Erklärung (z. B. Planetarium), zur Optimierung des Originals (z. B. Netzplan), zur Überprüfung einer Hypothese oder einer techn. Konstruktion (z. B. Laborversuch). - Abweichend von diesem M.begriff versteht die *mathemat. Logik* unter M. eine Interpretation eines Axiomensystems, bei der alle Axiome dieses Systems wahre Aussagen darstellen. Diese **Modelltheorie** liefert grundlegende Verfahren zur Behandlung von Fragen der Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit und Definierbarkeit.

**Abbildung 1.3:** Modellbegriff aus *Meyers Neues Lexikon* [20]


Modelle sind absichtlich nicht originalgetreu; sie heben bestimmte Eigenschaften hervor und lassen andere weg. Der intendierte Verwendungszweck des Modells bestimmt, welche Eigenschaften modelliert werden und welches Kalkül zu deren Beschreibung besonders geeignet ist. So werden beim Hausbau für verschiedene Zwecke ganz unterschiedliche Arten von Modellen verwendet:

- ein Gebäudemodell zur Vermittlung des optischen Eindruckes,
- ein Grundriss zur Einteilung der Räume und des Grundstückes,
- ein Kostenplan zur Finanzierung und
- ein Gewerkeplan zur Durchführung des Baus.



**4** HN Wendeschleife → Westfriedhof → Hauptbahnhof → Husener Straße  
→ Uni/Südring → Im Lichtenfelde → Dahl

**SONN- UND FEIERTAG**

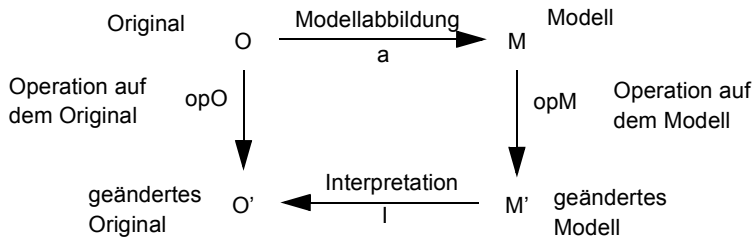


8... Uhr	9 Uhr	10... Uhr	11 Uhr	12... Uhr	13...-19... Uhr	20... Uhr	21... Uhr	22... Uhr	23... Uhr
8	9	8	9	8	24	9	8	24	9
HN Wendeschleife						33			
Damaschkestraße	08		08		08 41	08 41	08 34	24	09
Technisches Rathaus	09		09		09 42	09 42	09 35	25	10
Westfriedhof	10		10		10 43	10 43	10 36	26	11
Friedrich-Ebert-Straße	11		11		11 44	11 44	11 37	27	12
Hauptbahnhof	14	14	14	14	14 46	14 46	12 14 39 43	12 29	12 14 14
Westertor	16	16	16	16	16 48	16 48	14 16 40 45	14 30 45	14 45 15 16 45
Zentralstation	18	18	18	18	18 50	18 50	15 18 42 47	15 32 47	15 47 17 47
Rathausplatz	19	19	19	19	19 51	19 51	16 43 48	16 33 48	16 48 18 48
Kamp	20	20	20	20	20 52	20 52	17 44 49	17 34 49	17 49 19 49
Kasseler Straße	21	21	21	21	21 53	21 53	18 50 18	50 18 50	20 50
Winfriedstraße	24	22 24	22 24	22 24	55 22	55 19	51 19	51 19 51	21 51
Josefskrankenhaus	25	24 25	24 25	24 25	56 24	56 20	52 20	52 20 52	22 52
Frauenklinik	26	25 26	25 26	25 26	57 25	57 21	53 21	53 21 53	23 53
Im Springsfelde	27	27 27	27 27	27 27	58 27	58 21	54 21	54 21 54	23 54
Südring	29	29 29	29 29	29 29	59 29	59 22	55 22	55 22 55	24 55
Uni/Südring	30	30 30	30 30	30 30	00 30	00 23	56 23	56 23 56	25 56
Hochstiftstraße	31	31 31	31 31	31 31	01 31	01 24	57 24	57 24 57	26 57
Im Lichtenfelde	32	32 32	32 32	32 32	02 32	02 24	58 24	58 24 58	26 58
Kleingärten Dahle Weg	33	33	33	33	03	03 25	25	25	27
Iggelhauser Weg	34	34	34	34	04	04 26	26	26	28
Langefeld	35	35	35	35	05	05 27	27	27	29
Bergsohle	35	35	35	35	05	05 27	27	27	29
Dahle Heide	36	36	36	36	06	06 28	28	28	30
Brakenberg	37	37	37	37	07	07 28	28	28	30
Dahl Post	38	38	38	38	08	08 29	29	29	31
Lülingsberg	39	39	39	39	09	09 30	30	30	32
Pastorskamp	41	41	41	41	11	11 32	32	32	34

Abbildung 1.5: Busfahrplan von Paderborner Buslinien [21]

- das Modell kann der Kommunikation dienen zwischen Auftraggeber und Hersteller des Originals, wie beim Hausbau, oder zwischen dem Anbieter und dem Nutzer eines Dienstes, wie die Buspläne in Abb. 1.4 und 1.5;
- bei solchen Auseinandersetzungen wird häufig das Modell so lange angepasst, bis Einigkeit über die beschriebenen Eigenschaften hergestellt ist. Dann fixiert das Modell dieses Ergebnis, z. B. als Anforderungen und Spezifikation in der Software-Erstellung.

Der letzte Aspekt ist von besonderer Bedeutung: An Modellen kann man prüfen und nachweisen, dass alle für den Zweck relevanten Eigenschaften korrekt und vollständig erfasst sind. Man bezeichnet den Vorgang auch als Validierung des Modells oder engl. *model checking*. So kann man prüfen, ob der Finanzplan alle Kosten erfasst, sie korrekt aufsummiert und die Kostengrenze eingehalten wird. Formale Modellierungskalküle erlauben es, solche Prüfungen auch systematisch oder automatisch auszuführen. So kann man z. B. an dem endlichen Automaten für die Flussüberquerung in Abb. 1.2 nachweisen, dass es keine weiteren zulässigen Zustände außer den angegebenen gibt.



**Abbildung 1.6:** Bezug zwischen Original und Modell

Zwischen Modell und Original muss ein enger Bezug bestehen, damit das Modell die oben beschriebenen Zwecke erfüllen kann. Das Diagramm in Abb. 1.6 beschreibt diese Relationen: Die Modellabbildung führt vom Original zum Modell. Dabei wird meist vergrößert, abstrahiert, formalisiert und Irrelevantes weggelassen. Die Interpretation des Modells führt wieder zum Original. Wir verlangen, dass Änderungen am Original denen am Modell bezüglich dieser Abbildungen entsprechen. Für alle relevanten Operationen  $opO$  am Original muss das Diagramm kommutieren, d.h.

$$opO(O) = I(opM(a(O)))$$

Soll z. B. im Neubau eines Hauses die Position einer Tür verändert werden, so muss dies durch eine entsprechende Modifikation des Grundrisses eindeutig verändert werden können. Soll jedoch das mit KIND beschriftete Zimmer nicht als Kinderzimmer, sondern als Arbeitszimmer genutzt werden, ist diese Änderung irrelevant für den Grundriss und wird nicht vom Modell erfasst.

Ein Modell beschreibt immer nur bestimmte Aspekte des Originals und seiner Teile. Wir geben im Folgenden an, welche Kalküle sich besonders zur Beschreibung der Aspekte eignen. Die Beispiele entnehmen wir dem Modell der Flussüberquerung aus Abschnitt 1.1.

1. **Struktur:** Zusammensetzung des Originals aus Bestandteilen, z. B. ein Zustand ist ein Paar von Teilmengen von  $\{M, W, Z, K\}$ .  
*Kalküle:* Wertebereiche, Entity-Relationship, Kontextfreie Grammatiken.
2. **Eigenschaften** von Teilen des Originals, z. B. ein Zustand ist zulässig oder unzulässig.  
*Kalküle:* Wertebereiche, Entity-Relationship, Logik.
3. **Beziehungen** zwischen Teilen des Originals, z. B. der Wolf frisst die Ziege, die Ziege frisst den Kohlkopf.  
*Kalküle:* Logik, Entity-Relationship.
4. **Verhalten** des Originals bei Operationen, z. B. die Folgen von Zustandsübergängen.  
*Kalküle:* endliche Automaten, Petri-Netze, Algebren, Graphen.

Zum Schluss möchten wir dafür plädieren, dass Modelle möglichst *deklarativ* oder *deskriptiv* formuliert werden. Das bedeutet, dass das Modell Aussagen über Struktur, Eigenschaften, Beziehungen und Verhalten des Originals macht, die immer gelten.



Im Gegensatz dazu stehen *operationale* Beschreibungen, die angeben, wie sich das Original unter bestimmten Operationen verhält. Diese werden häufig durch Beispiele von Abläufen gegeben und sind eher unpräzise. Deshalb erfüllen sie die Anforderungen an die Modellierung weniger gut als präzise deklarative Aussagen. Wir demonstrieren die beiden Arten der Beschreibung an einer Balkenwaage, wie sie in Abb. 1.7 abstrahiert ist.

**Deklarativ:** Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn sich die Gewichte  $x$  und  $y$  *umgekehrt proportional* zu den Längen der Balken  $a$  und  $b$  verhalten:  $x * a = y * b$ .

**Operational:** Wenn ich auf den Balken der Länge  $a$  ein Gewicht  $x$  auflege, muss ich auf den Balken der Länge  $b$  ein Gewicht  $y = x * a/b$  auflegen, damit die Waage wieder im Gleichgewicht ist.

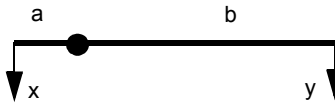


Abbildung 1.7: Modell einer Balkenwaage

## Übungen

### 1.1 Getränkeautomat

In der Firma Kastens AG steht ein Getränkeautomat. Damit man gut zu ihm hin findet, ist er rot lackiert. Man kann Cola, Fanta, Sprite und Wasser kaufen. Jedes Getränk kostet 1 Euro. Der Automat hält genügend viele 1-Euro-Stücke zum Wechseln bereit. Ein Mitarbeiter möchte nun eine Cola kaufen. Er hat ein 2-Euro-Stück und ein 0,50-Euro-Stück in der Geldbörse.

- Geben Sie die relevanten Objekte an, die zum Modellieren des Bezahlens benötigt werden.
- Beschreiben Sie die Zustände des Systems. Welche Informationen liefern diese Zustände?
- Modellieren Sie das Bezahlen analog zum Beispiel in Abschnitt 1.1.

### 1.2 Schokolade

Gegeben seien 3 Stapel aus Schokolade. Der erste besteht aus 4 Tafeln, der zweite aus 6 Tafeln und der dritte aus 14 Tafeln. Die Stapel sollen nun ausgeglichen werden, so dass auf jedem Stapel genau 8 Tafeln liegen. Allerdings darf in jedem Schritt nur zwischen genau zwei Stapeln umgeschichtet werden. Zudem müssen auf einen Stapel immer so viele Tafeln gelegt werden, wie bereits darauf liegen. Modellieren Sie das Problem analog zum Beispiel in Abschnitt 1.1.

**Hinweis:** Zweimal Umschichten genügt!

### **1.3 Modelle aus dem Alltag**

Geben Sie 3 Modelle aus dem Alltag an, die nicht im Kapitel 1 vorkommen. Schreiben Sie zu jedem Modell auf:

- a) Was wird modelliert?
- b) Welchem Zweck dient das Modell?
- c) Was sind die wichtigen Objekte, Eigenschaften, Zusammenhänge und Operationen?