Blatt 11: Determinante, Eigenwerte und -vektoren

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Determinante

Aufgabe 1:

Geben Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$ an, für die die Determinante der folgenden Matrix verschwindet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 2:

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 mit

$$\det(A - \lambda_i\, E_2) = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Diese λ_i sind Eigenwerte der Matrix A.

(b) Sind $\lambda_i \in \mathbb{R}$ Eigenwerte von A so sind die $v_i \in \mathbb{R}^2$ mit $A\,v = \lambda_i\,v$ Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_i. Berechnen Sie zu jedem Eigenwert aus (a) die Menge der zugehörenden Eigenvektoren gemäß (warum?)

$$\mathrm{Kern}\,(A - \lambda_i\, E_2)\,.$$

(c) Überprüfen Sie, ob die von Ihnen berechneten Eigenvektoren die Eigenschaft $A\,v = \lambda\,v$ erfüllen.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

Aufgabe 3: komplexe Eigenwerte

Gegeben sind die Matrizen

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1.6+i & -0.8 \\ -0.8 & 0.4+i \end{pmatrix} \quad (b)\ A = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{4}\,i & \frac{1}{2}\,i \\ -i & \frac{1}{2}+\frac{3}{4}\,i \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie jeweils Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Zu einer gegebenen Matrix $A \in (\mathbb{C}^{2\times 2}, \mathbb{C})$ sei

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor. Welche der angegebenen Vektoren sind dann auch Eigenvektoren von A zum gleichen Eigenwert?

$$\square\ v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\,i \end{pmatrix} \quad \square\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \square\ v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square\ v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie alle (!!!) richtigen Antworten an.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4: Scherung

Die Abbildung

$$\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1 + 2\,x_2)$$

beschreibt eine Scherung an einer Geraden

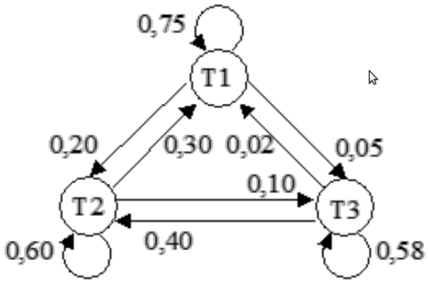
$$g\ :\ t\,v\,.$$

Wie lautet der Richtungsvektor v?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Aufgabe 5: Prozessmatrix

Geben Sie die Matrix A an, die folgendes Übregangsdiagramm darstellt.



Welchen stationären Zustand $x^\star$ mit

$$x^\star = A\,x^\star$$

erhalten Sie? Angenommen es handelt sich bei diesem Übergangsdiagramm um die Entwicklung von Kundenzugehörigkeiten verschiedener Tarifgruppen einer Versicherungsgesellschaft, wieviele Kunden wählen langfristig den Tarif T2, wenn insgesamt 3400 Kunden versichert sind?

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

Lösung 1

Wir berechnen zunächst die Determinante und führen den Parameter a mit.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der dritten Zeile ist hire am sinnvollsten

$$= 1 \cdot \det A_{31} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nach der zweiten Spalte jetzt:

$$= a \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = a\,(2 - a^2)$$

Damit folgt, dass

$$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,(2-a^2) = 0 \quad \Rightarrow a \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}\,.$$

Lösung 2

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$\det(A - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{5, 6\}$$

(b)

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(A - \lambda_1\,E) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,,\ t \in \mathbb{R} \right\} \\ \operatorname{Kern}(A - \lambda_2\,E) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} t\,,\ t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

(c) Test

$$\begin{aligned} A\,v_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1\,v_1 \\ A\,v_2 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_2\,v_2 \end{aligned}$$

Lösung 3

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 + i & -0.8 \\ -0.8 & 0.4 + i \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \{\lambda_1\,,\ \lambda_2\} = \{i\,,\ 2+i\}$$

$$\lambda \in \{v_1\,,\ v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$A = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{4}\,i & \frac{1}{2}\,i \\ -i & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,i \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \{\lambda_1\,,\ \lambda_2\} = \{i\,,\ 2+i\}$$

$$\lambda \in \{v_1\,,\ v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Erkenntnis:</u> Eine Matrix kann zu komplexen EWen sowohl reelle als auch komplexe EVen besitzen.

(c)

$$\boxtimes\, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\,i \end{pmatrix} i = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \square\, v = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \square\, v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxtimes\, v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\nexists \alpha \in \mathbb{C}\ :\ \binom{-1}{-i} = \alpha \binom{1}{-i}$ und $\nexists \alpha \in \mathbb{C}\ :\ \binom{-i}{1} = \alpha \binom{1}{-i}$.

Lösung 4

Matrix der Abbildung

$$\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1 + 2\,x_2)$$

lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat den EW $\lambda = 1$ und den zugehörigen EV

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Schergerade gegeben durch

$$g \, : \, t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung 5

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.3 & 0.02 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \\ 0.05 & 0.1 & 0.58 \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen den Kern von $A - E_3$ und bringen dazu die Matrix $100\,(A - E_3)$ (ohne Brüche geht's besser) auf Stufenform:

$$\begin{pmatrix} -25 & 30 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 10 & -42 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\,\mathrm{III}+\mathrm{I})/4+4\,\mathrm{II}]{(25\,\mathrm{II}+\mathrm{I})/4} \begin{pmatrix} -25 & 30 & 2 \\ 0 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir den Unterraum

$$U_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} t \, , \; t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Bei insgesamt 3400 Kunden verteilen sich die Gruppen zu

$$v = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{3400}{16 + 13 + 5} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1300 \\ 500 \end{pmatrix} .$$

Es werden also langfristig 1300 Personen bei Tarifgruppe T2 versichert sein.