Blatt 2: Aussagen und Beweismethoden

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Mathe als Sprache

Sprachaufgabe 1:

Erstellen Sie ein Vokabelheft.

$\forall$	
$\exists$	
$\exists_1$	
$\exists_2$	
$\in$	
$\notin$	

$:$	
$\mid$	
$\Rightarrow$	
$\Leftrightarrow$	
$\wedge$	
$\vee$	

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 7

Sprachaufgabe 2:

Übersetzen Sie die beiden folgenden Ausdrücke in verbale Sprache und überlegen Sie sich den Wahrheitsgehalt:

$$(a)\ \forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\ :\ x < y \qquad (b)\ \exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\ :\ x > y$$

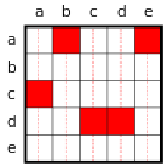
Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 7

Aufgabe 3: Quantoren in der Liebe

Es beschreibe Lxy die Aussage "x liebt y", bzw. "y wird von x geliebt". Im Folgenden ist je eine Aussage dargestellt in Quantorenschreibweise, in Umgangssprache und graphisch, wobei die graphische Darstellung jeweils nur ein Beispiel darstellt und nicht alle möglichen Fälle abdeckt. Achtung: Es wird jeweils die zweite Komponente von L auf die x- und das erste Argument auf die y-Achse aufgetragen.

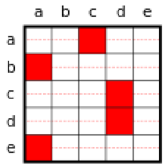
Füllen Sie die jeweils fehlende Komponente aus.



1. $\forall x\, \exists y \; : \; Lyx$

   ____

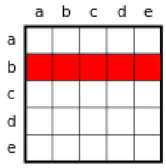
   ____



2. $\forall x\, \exists y \; : \; Lxy$

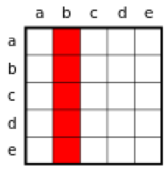
   ____

   ____



3. ____________________

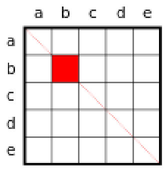
   Jemand liebt alle.



4. $\exists x\, \forall y \; : \; Lyx$

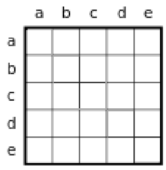
   ____

   ____



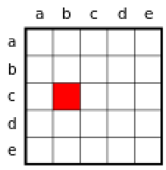
5. ____________________

   Jemand liebt sich selbst.



6. $\forall x \; : \; Lxx$

   Alle lieben sich selbst.

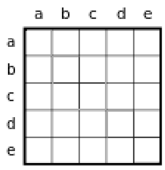


7. ____________________

   Einer liebt einen.

8. ____________________

   Einer wird von einem geliebt.



9. $\forall x\, \forall y \; : \; Lxy$

   Jeder liebt jeden.

10. ____________________

    Jeder wird von jedem geliebt.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 7

Sprachaufgabe 4:

(a) Es gilt folgende Definition: $a_1, \ldots, a_n$ sind gleich $:\Leftrightarrow$

$$\forall a_i, a_j \in \{a_1, \ldots, a_n\} \ : \ a_i = a_j$$

Formulieren Sie in mathematischer Symbolik die Negation dieser Aussage, nämlich "$a_1, \ldots, a_n$ sind verschieden."

(b) Wir sagen $a_1, \ldots, a_n$ sind paarweise (pw) verschieden, wenn je zwei beliebig gewählte a_i und a_j mit $i \neq j$ verschieden sind. Geben Sie die mathematische Formulierung dieser Eigenschaft an.

(c) Diskutieren Sie die beiden Formulierungen: "$a_1, \ldots, a_n$ sind paarweise verschieden und $a_1, \ldots, a_n$ sind verschieden."

Überlegen Sie sich ein einfaches Zahlenbeispiel.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Sprachaufgabe 5:

Schreiben Sie folgende Sätze in mathematischer Symbolik:

(a) Für alle reellen Zahlen x gilt, dass ihr Quadrat größer oder gleich Null ist.

(b) Es gibt eine komplexe Zahl x, deren Quadrat kleiner als Null ist.

(c) Jeder hat genau einen Seelenverwandten. (Gemeint sind Menschen.)

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Sprachaufgabe 6:

Zeigen Sie, dass die Summe von drei aufeinander folgenden, natürlichen Zahlen immer durch drei teilbar ist. (Die Rechnung ist einfach. Die Aufgabe besteht darin, ordentlich zu schreiben.)

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Wahrheitstafel

Aufgabe 7: Aussagen

Es seien A und B Aussagen. Untersuchen Sie die Gleichungen

$$\neg\neg A = A \qquad \text{(Vorlesung)}$$
$$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B) = (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad \text{(Vorlesung)}$$
$$(A \Leftrightarrow B) = ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \Leftrightarrow B)$$
$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B \qquad \text{(Vorlesung)}$$
$$\neg(A \Leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

mithilfe der Wahrheitstafel. Überlegen Sie sich Alltagssituationen, die in die Aussagen hineinpassen. (Einige Zeilen haben wir bereits in der Vorlesung behandelt.)

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Aufgabe 8: De Morgansche Regeln

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die sogenannten De Morganschen Regeln für logische Aussagen:

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)\,, \qquad \text{(Vorlesung)}$$
$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)\,,$$
$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)\,,$$
$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\,,$$

wobei A, B, C Aussagen sind. Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 9

Aufgabe* 9: Lerngruppe

Micha, Ralf, Simone und Inge hatten geplant, sich zu treffen, um für den Mathetest zu lernen. Treffpunkt ist ein Raum, für den nur Ralf und Inge einen Schlüssel haben. Micha und Simone wohnen auf dem Land. Simone hat ein Auto und muss Micha abholen, damit er zum Treffpunkt kommen kann. Simone und Ralf sind Geschwister. Da ihre Mutter krank ist und sie sie pflegen müssen können sie nicht gleichzeitig erscheinen. Am Morgen vor dem Treffen gab es Streit, woraufhin Simone sagte: "Wenn Inge kommt, komme ich nicht."

Wer kommt zum Treffen, an dem mehr als eine Person erscheint?

Tipp: Definieren Sie Variablen M, R, S und I für die beteiligten Personen. Die Variablen sind $wahr/falsch$ oder auch 1/0, wenn die entsprechende Person erscheint/nicht erscheint. Beschreiben Sie aussagenlogisch die Abhängigkeiten, die im Text beschrieben sind.

R	M	I	S						
0	0	0	0						
1	0	0	0						
0	1	0	0						
0	0	1	0						
0	0	0	1						
1	1	0	0						
1	0	1	0						
1	0	0	1						
0	1	1	0						
0	1	0	1						
0	0	1	1						
1	1	1	0						
1	1	0	1						
1	0	1	1						
0	1	1	1						
1	1	1	1						

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 10

Vollständige Induktion

Aufgabe 10: VI

Zeigen Sie, dass $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 5\ :$

$$2^n > n^2$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 11

Aufgabe 11: VI: Geometrische Reihe

Zeigen sie $\forall\, n \in \mathbb{N}_0\ \forall q \neq 1\ :$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 12

Aufgabe 12: VI

Zeigen Sie $\forall\, n \in \mathbb{N}\ :$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 13

Aufgabe 13: VI

Zeigen Sie $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geq m\;$:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}\,.$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 14

Aufgabe 14: VI

Zeigen Sie $\forall n \in \mathbb{N}\,,\; n \geq 2$:

$$\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2\,n}\,.$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 15

Lösung 1

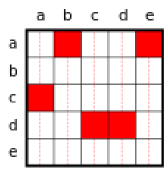
$\forall$	für alle	$:$	für den/die/das gilt
$\exists$	es existiert	$\mid$	mit der Eigenschaft
$\exists_1$	es existiert genau ein	$\Rightarrow$	daraus folgt
$\exists_2$	es exitieren genau zwei	$\Leftrightarrow$	ist äquivalent zu
$\in$	ist Element von	$\wedge$	und
$\notin$	ist nicht Element von	$\vee$	oder

Lösung 2

Für jede natürliche Zahl x gibt es eine natürliche Zahl y, die größer ist als x. (wahr)

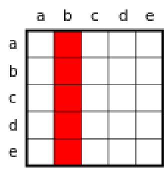
Es gibt eine natürliche Zahl x, so dass alle natürlichen Zahlen y kleiner sind als x. (falsch, denn es würde bedeuten, dass es eine größte natürliche Zahl gibt.)

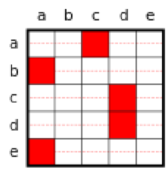
Lösung 3



1. $\forall x\, \exists y \;:\; Lyx$

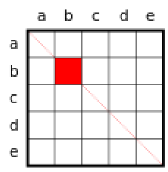
   Jeder wird von jemandem geliebt.

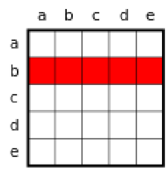




2. $\forall x\, \exists y \;:\; Lxy$

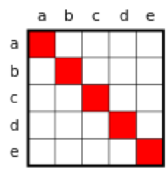
   Jeder liebt jemanden.





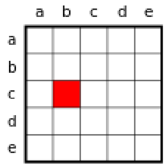
3. $\exists x \forall y \;:\; Lxy$

   Jemand liebt alle.



4. $\exists x \forall y \ : \ Lyx$

   Jemand wird von allen geliebt.

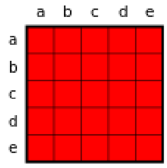


5. $\exists x \ : \ Lxx$

   Jemand liebt sich selbst.

6. $\forall x \ : \ Lxx$

   Alle lieben sich selbst.



7. $\exists x \exists y \ : \ Lxy$

   Einer liebt einen.

8. $\exists x \exists y \ : \ Lyx$

   Einer wird von einem geliebt.

9. $\forall x \forall y \ : \ Lxy$

   Jeder liebt jeden.

10. $\forall x \forall y \ : \ Lyx$

    Jeder wird von jedem geliebt.

Lösung 4

(a) $\{a_1, \dots, a_n\}$ sind verschieden meint, dass $\{a_1, \dots, a_n\}$ nicht gleich sind, also:

$$\neg(\forall a_i, a_j \in \{a_1, \dots, a_n\} \ : \ a_i = a_j) \ \Leftrightarrow \ \exists a_i, a_j \in \{a_1, \dots, a_n\} \ : \ a_i \neq a_j$$

(b)

$$\forall a_i, a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}, \ i \neq j \ : \ a_i \neq a_j$$

(c) "$a_1, \dots, a_n$ sind paarweise verschieden" bedeutet, dass je zwei beliebige a_i und a_j ($i \neq j$) verschieden sind, was bedeutet, dass es keine zwei gleichen gibt, man es also mit n verschiedenen Ausdrücken zu tun hat.

Zahlenbeispiel:

"$1, 2, 2, 2, 2, 2$ sind verschieden"

"$1, 2, 3, 4, 5, 6$ sind pw verschieden"

Lösung 5

(a)

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0$$

(b)

$$\exists x \in \mathbb{C} \mid x^2 < 0$$

(c) Es sei M die Menge der Menschen. Dann gilt:

$$\forall m \in M \ \exists! n \in M \ : \ n \text{ ist seelenverwandt mit } m$$

Lösung 6

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Das funktioniert im Übrigen immer bei ungeradzahlig vielen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Überlegen Sie sich das mal.

Lösung 7 Die dritte Zeile:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$	$\neg A \Leftrightarrow B$	$\neg(\neg A \Leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W	F	W
W	F	F	F	W	F	W	F
F	F	W	W	W	W	F	W
F	W	F	W	F	F	W	F

Die fünfte Zeile:

A	B	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
W	W	F	F	F	F
W	F	W	W	F	W
F	F	F	F	F	F
F	W	W	F	W	W

Eine mögliche Alltagssituation:

A: Es regnet.
B: Die Straße ist nass.

$A \Rightarrow B$: Es regnet und folglich ist die Straße nass.
$\neg B \Rightarrow \neg A$: Die Straße ist nicht nass. Folglich regnet es nicht.
$\neg A \vee B$: Entweder ist die Straße nass, oder es regnet nicht.

Lösung 8 Aus der Wahrheitstabelle

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	W
F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W

lesen wir

$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
F	F	F	F
W	F	W	F
W	W	W	W
W	F	W	F

und lesen direkt

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)\,,$$
$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

ab. Aus einer neuen Wahrheitstafel (für A, B, C gibt es nun $2^3 = 8$ Möglichkeiten)

A	W	W	W	W	F	F	F	F
B	W	W	F	F	W	W	F	F
C	W	F	W	F	W	F	W	F
$A \wedge B$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(A \wedge B) \vee C$	W	W	W	F	W	F	W	F
$A \vee C$	W	W	W	W	W	F	W	F
$B \vee C$	W	W	W	F	W	W	W	F
$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	W	W	W	F	W	F	W	F
$A \vee B$	W	W	W	W	W	W	F	F
$(A \vee B) \wedge C$	W	F	W	F	W	F	F	F
$A \wedge C$	W	F	W	F	F	F	F	F
$B \wedge C$	W	F	F	F	W	F	F	F
$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	W	F	W	F	W	F	F	F

lesen wir

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)\,,$$
$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

ab.

Lösung 9

Variablenzuweisung:

R = Ralf
M = Micha
I = Inge
S = Simone

Aussagen beschreiben:

Ralf oder Inge müssen kommen:

$$R \vee I$$

muss wahr sein.

Ralf und Simone können nicht gleichzeitig kommen:

$$\neg(R \wedge S)$$

muss wahr sein.

Micha kann nur kommen wenn Simone kommt. Simone kann alleine kommen:

$$M \Rightarrow S$$

muss wahr sein.

Wenn Inge kommt, kommt Simone nicht:

$$I \Rightarrow \neg S$$

muss wahr sein.

Wahrheitstabelle erstellen:

R	M	I	S	¬ S	R∧ S	R∨ I	¬(R∧ S)	I⇒ ¬ S	M⇒ S
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1

Ergebnis auswerten:

Die letzten vier Spalten in einer jeweiligen Zeile müssen alle wahrsein. Daraus ergibt sich, dass

Ralf und Inge kommen.

Lösung 10

Behauptung Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt

$$2^n > n^2$$

Induktions-anfang $n = 5$:

$$32 = 2^5 > 5^2 = 25 \quad \checkmark$$

Induktions-voraussetzung

$$A(k): \qquad 2^k > k^2$$

Induktions-schritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit:

$$A(k+1): \qquad 2^{k+1} > (k+1)^2$$

Induktions-beweis Es ist

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2\,.$$

Wenn jetzt $k^2 \cdot 2 > (k+1)^2$ erfüllt ist, sind wir fertig. Mal sehen.

$$\begin{aligned}
& & k^2 \cdot 2 &> (k+1)^2 \\
&\Leftrightarrow & k^2 \cdot 2 &> k^2 + 2k + 1 \\
&\Leftrightarrow & k^2 &> 2k + 1 \\
&\Leftrightarrow & k^2 - 2k - 1 &> 0 \\
&\Leftrightarrow & k(k-2) &> 1
\end{aligned}$$

Das ist für $k \geq 5$ erfüllt (sehen sie das?). Insgesamt erhalten wir

$$2^{k+1} > (k+1)^2\,,$$

was gerade unserer Behauptung entspricht. $\square$

Lösung 11

Behauptung

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{1}$$

Induktions-anfang (1) gilt für $n = 0$

$$q^0 = \frac{1-q^1}{1-q} = 1 \qquad \checkmark$$

Induktions-voraussetzung (1) gelte für $n = k$:

$$A(k): \qquad \sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

Induktions-schritt Zu zeigen ist, dass dann auf (1) für $n = k+1$ geschlossen werden kann.

$$A(k+1): \qquad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}$$

Induktions–beweis Wir starten mit der linken Seite von $A(k+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1}\\ &= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1}\\ &= \frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}(1-q)}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{k+2}}{1-q}\end{aligned}$$

$\square$

Lösung 12

Behauptung

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktions–anfang

$$1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

$$A(k): \qquad \sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Induktions–schritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit

$$A(k+1): \qquad \sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Induktionsbeweis

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

Lösung 13

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq m\ :$

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Induktionsanfang $n = m$:

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!0!} = \frac{(m+1)!}{(m+1)!0!} = \binom{m+1}{m+1} \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung Es gelte für ein $l \in \mathbb{N}\,,\ l \geq m$:

$$\mathcal{A}(l)\ :\ \sum_{k=m}^{l} \binom{k}{m} = \binom{l+1}{m+1}$$

Induktionsschritt Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A}(l) \Rightarrow \mathcal{A}(l+1)$$

mit

$$\mathcal{A}(l+1)\ :\ \sum_{k=m}^{l+1} \binom{k}{m} = \binom{l+2}{m+1}.$$

Induktions–beweis

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{l+1}\binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{l}\binom{k}{m}+\binom{l+1}{m}\\ &= \binom{l+1}{m+1}+\binom{l+1}{m}\\ &= \binom{l+2}{m+1}\end{aligned}$$

$\square$

Lösung 14

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2$:

$$\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2\,n}$$

Induktions–anfang $n = 2$:

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)}_{=\frac{3}{4}} = \frac{2+1}{\underbrace{2\cdot 2}_{=\frac{3}{4}}} \quad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 2$:

$$\mathcal{A}(k)\ :\ \prod_{j=2}^{k}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) = \frac{k+1}{2\,k}$$

Induktions–schritt Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$$

mit

$$\mathcal{A}(k+1)\ :\ \prod_{j=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) = \frac{k+2}{2\,k+2}$$

Induktions–beweis

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) &= \prod_{j=2}^{k}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{k+1}{2\,k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{k+1}{2\,k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\\
&= \frac{1}{2\,k}\cdot\frac{k^2+2\,k}{k+1}\\
&= \frac{1}{2\,k}\cdot\frac{k\,(k+2)}{k+1}\\
&= \frac{k+2}{2\,k+2}
\end{aligned}
$$

$\square$