Lineare Systeme

Signale, Systeme und Sensoren: Vorlesung 12

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

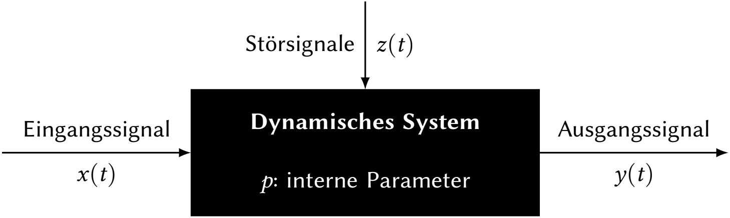
Übersicht

Übersicht

1. Lineare und nichtlineare Systeme
2. Elementare lineare Systeme
3. Frequenzgang

Dynamische Systeme

Ein **dynamisches System** ist eine *Black Box*, die zeitabhängige Eingangssignale $x(t)$ in zeitabhängige Ausgangssignale $y(t)$ umwandelt, z.B. Schaltkreise, Neuronen, Programme, etc.



Die Ausgangsgrößen können zusätzlich von externen, nicht beeinflussbaren Störgrößen $z(t)$ und von internen Parametern p abhängen.

Systemtypen

Durch den hohen Abstraktionsgrad des Systembegriffs kann man das Verhalten äußerst unterschiedlicher Systeme modellieren, z.B. Tiere, Herden, Fahrzeuge, Märkte, Unternehmen, Gesellschaften.

- **Zeitinvariante** oder **stationäre Systeme:** die Umwandlung von Eingangssignalen in Ausgangssignale ändert sich zeitlich nicht (d.h. die internen Parameter bleiben konstant).
- **Eingrößensysteme:** Systeme mit nur einem Eingangs- und einem Ausgangssignal.
- **Kausale Systeme:** Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal nur vom momentanen Eingangswert und von vergangenen Eingangswerten abhängt.
- **Speicherfreie Systeme:** das Ausgangssignal hängt nur vom momentanen Eingangssignal ab. Bei Systemen mit Speicher hängt das Ausgangssignal auch von vergangenen Werten des Eingangssignal ab.

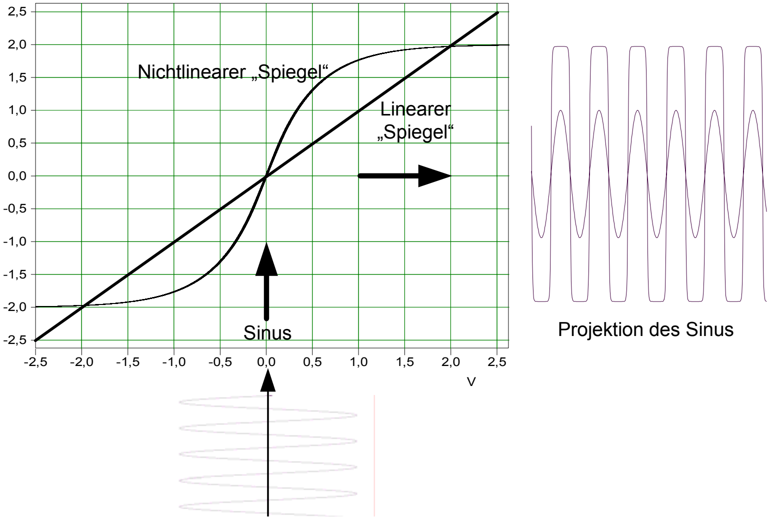
Lineare Systeme

Definition: Wird auf den Eingang (oder die Eingänge) eines Systems ein sinusförmiges Signal beliebiger Frequenz gegeben und erscheint am Ausgang lediglich ein sinusförmiges Signal genau dieser Frequenz, so ist der Prozess **linear**, anderenfalls **nichtlinear**.

- Ob eine oder mehrere neue Frequenzen hinzu gekommen sind, erkennt man exakt nur im Frequenzbereich.
- Die Sinus-Schwingung des Ausgangssignals darf sich jedoch in Amplitude und Phase ändern. Die Amplitude kann also größer werden (Verstärkung) oder kleiner (Dämpfung). Die Phasenverschiebung ist eine zeitliche Verschiebung der Ausgangs-Sinus-Schwingung gegenüber der Eingangs-Sinus-Schwingung.

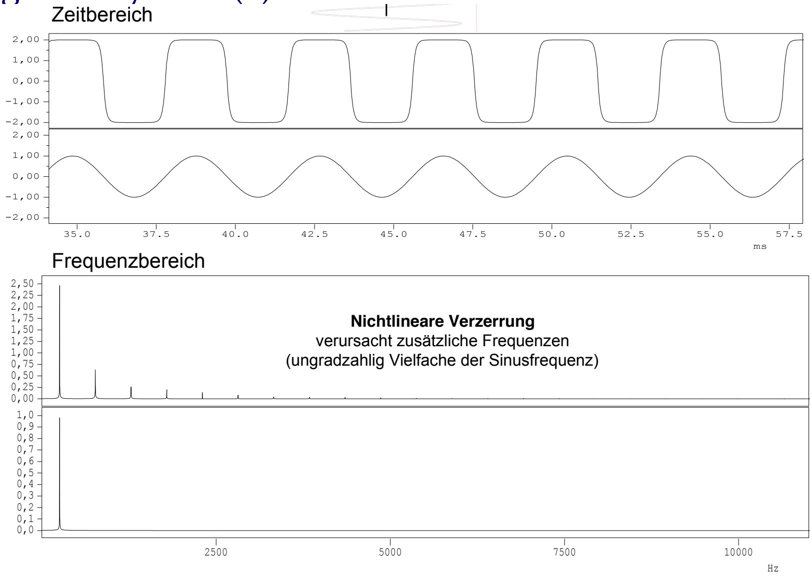
Beispiele: Leitung für elektrische Signale, Vakuum für elektromagnetische Strahlung, Luft für Schall, Kamerabild, Schaltungen aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen.

Beispiel: speicherloses lineares und nichtlineares Eingrößensystem (1)



Quelle: Karrenberg, 2012

Beispiel: speicherloses lineares und nichtlineares Eingrößensystem (2)



Quelle: Karrenberg, 2012

Lineare und nichtlineare Systeme

- Nichtlineare Systeme erzeugen Verformungen des Sinussignals, die im Frequenzbereich zusätzliche Frequenzen, also nichtlineare Verzerrungen hervorrufen.
- Soll der Frequenzbereich eines Signals verändert - z.B. in einen anderen Bereich verschoben - werden, so gelingt dies nur durch nichtlineare Systeme.
- Sollen die in einem Signal enthaltenen Frequenzen auf keinen Fall verändert oder keinesfalls neue hinzugefügt werden, so gelingt dies nur durch lineare Systeme.
- Lineare Systeme sind das „Arbeitspferd“ der Signalverarbeitung. Sie lassen sich sehr genau analysieren.
- Das Verhalten linearer Systeme lässt sich durchweg leichter verstehen als das nichtlinearer Systeme. Diese können sogar zu chaotischem, d.h. prinzipiell nicht vorhersagbarem Verhalten führen.

Übersicht

Proportionalsysteme

Interessanterweise lassen sich alle real vorkommenden linearen Systeme aus wenigen elementaren Systemen zusammensetzen. Das einfachste lineare System ist das **Proportionalsystem**: den Ausgangswert erhält man durch Multiplikation des Eingangssignals mit einer Konstanten:

$$y(t) = K \cdot x(t).$$

- Das Proportionalsystem erfüllt die Linearitätsbedingung: die Amplitude jeder eingehende Sinusschwingung wird um den gleichen Faktor K verstärkt oder gedämpft, andere Frequenzen entstehen nicht.
- Proportionalsysteme sind speicherlos.
- Eine exakt lineare Verstärkung lässt sich technisch immer nur über einen bestimmten Wertebereich realisieren, im Analogen beliebig aufwendig, im Digitalen sehr einfach.

Verzögerungsglieder

- **Verzögerungsglieder** (auch Totzeitglieder) verschieben das Eingangssignal auf der Zeitachse um die Totzeit T_t nach rechts:

$$y(t) = x(t - T_t)$$

- Das Ausgangssignal ist phasenverschoben, d.h. zeitlich verzögert gegenüber dem Eingangssignal. Nach dem ersten Verschiebungssatz (s. Vorlesung 8) gilt mit $x(t) = \cos(\omega t - \varphi)$:

$$y(t) = \cos(\omega t - \varphi - T_t) = e^{-i\omega T_t} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

  d.h. die Amplitude und Frequenz der Eingangs-Sinus-Schwingung bleibt unverändert, nur die Phase ändert sich um den Phasenfaktor $e^{-i\omega T_t}$. Damit ist auch dieses System linear.
- Während es in der Analogtechnik kaum möglich ist, beliebige Signale präzise um einen gewünschten Wert zu verzögern, gelingt dies mit der digitalen Signalverarbeitung sehr einfach.

Addition zweier Signale

- Auch die Addition zweier Signale ist ein linearer Prozess:

  $$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

  Werden zwei Sinus-Schwingungen addiert, so enthält das Ausgangssignal genau diese beiden Frequenzen. Es sind keine neuen hinzugekommen, und damit ist der Prozess linear.
- Durch Addition, Verzögerung und Multiplikation mit einer Konstanten kann man aus diesen Elementarsystemen komplexere lineare Eingrößensysteme zusammensetzen:

  $$y(t) = K_1 \cdot x(t) + K_2 \cdot x(t - T_2) + K_3 \cdot x(t - T_3) + \cdots$$

- Man kann zeigen, dass jedes praktisch realisierbare digitale System so zusammengesetzt werden kann. Bei analogen System kommen noch zwei Grenzfälle hinzu: Differenzierer und Integrierer.

Differenzierer

Das Ausgangssignal eines **Differenzierers** ist die Ableitung des Eingangssignals nach der Zeit:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t).$$

Auch Differenzierer sind lineare Systeme, denn es gilt:

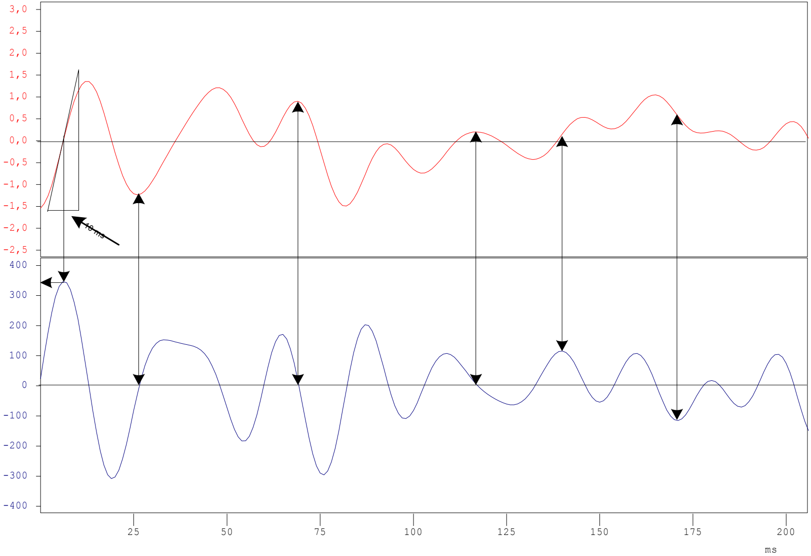
$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t$$

d.h. die Frequenz einer Sinusschwingung ändert sich nicht, nur ihr Betrag um ω und ihre Phase um $-\frac{\pi}{2}$.

Allgemein gilt (**Differentiationseigenschaft** der Fouriertransformation):

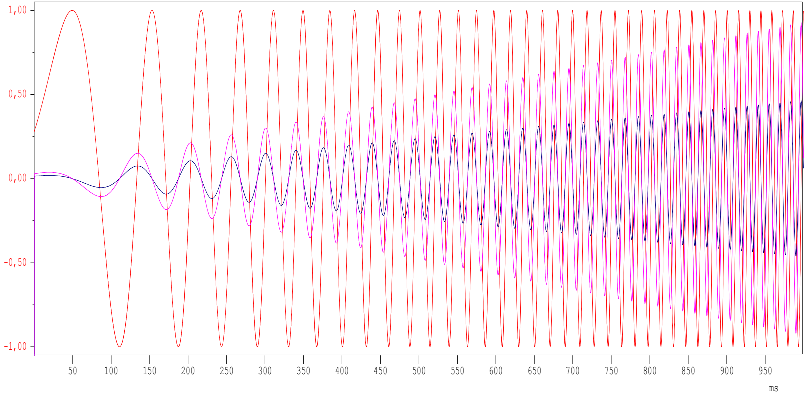
$$\frac{d}{dt} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad i\omega \cdot F(\omega).$$

Beispiel: Differenzierer



Quelle: Karrenberg, 2012

Beispiel: Differentiation eines Wobbelsignals



Quelle: Karrenberg, 2012

Eigenschaften des Differenzierers

- Die Ableitung ist groß, wenn sich das Eingangssignal schnell ändert, und klein, wenn sich wenig verändert. Differenzierer eignen sich daher zur Detektion von plötzlichen Ereignissen (z.B. Sprünge oder Kanten im Signal) und zur Unterdrückung eines langsam veränderlichen Hintergrundsignals.
- Beispiele für analoge Differenzierer: Spule (je größer die Stromänderung, desto größer die Induktionsspannung), Kondensatoren (je größer die Spannungsänderung, desto größer der Lade- bzw. Entladestrom).
- Der Differenzierer ist speicherlos.
- Die Ableitung im Frequenzbereich ist besonders einfach: simple Multiplikation um den Faktor $i\omega$!

Integrierer

Das Ausgangssignal eines **Integrierers** ist das Integral des Eingangssignals über die Zeit:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau.$$

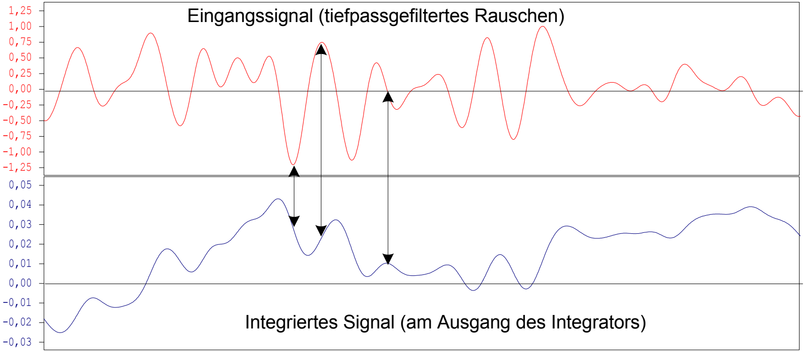
Für $y(t_0) = 0$ (Bedingung der anfänglichen Ruhe) verhalten sich Integrierer ebenfalls als lineare Systeme, da in diesem Fall

$$\int_{t_0}^{t} \cos \omega\tau \, d\tau = \tfrac{1}{\omega} \sin \omega t \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{t} \sin \omega\tau \, d\tau = -\tfrac{1}{\omega} \cos \omega t.$$

Allgemein gilt für ein integrierbares Signal $f(t)$ mit Mittelwert 0 die **Integrationseigenschaft** der Fouriertransformation:

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{i}{\omega} \cdot F(\omega).$$

Beispiel: Integrierer



Quelle: Karrenberg, 2012

Der Integrierer ist nicht in der Lage, schnellen Veränderungen zu folgen und glättet daher das Eingangssignal. Er kann zur Rauschunterdrückung eingesetzt werden.

Übersicht

Wirkung eines linearen Systems auf Sinusschwingungen

Beobachtungen:

- Jede Sinusschwingung kann beim Durchgang durch ein lineares System in ihrer Amplitude und Phase verändert werden, aber nicht in ihrer Frequenz.
- Jedes lineare System kann durch Addition und Hintereinanderschalten von Verzögerungsgliedern, Proportionalsystemen, Differenzierern und Integrierern zusammengesetzt werden.
- Die Veränderung der Sinusschwingung geschieht rein multiplikativ: entweder durch Multiplikation mit einem rein reellen Faktor K (Proportionalsystem), einem rein imaginären Faktor $i\omega$ (Differenzierer) oder $-\frac{i}{\omega}$ (Integrierer), oder einem Phasenfaktor $e^{-i\omega T_t}$ (Verzögerungsglied).

Frequenzgang eines linearen Systems

- Man kann also die Wirkung eines linearen Systems für jede Frequenz durch eine Multiplikation mit einem komplexwertigen Faktor

$$H(\omega) = A \cdot e^{-i\omega\varphi}$$

  beschreiben: der Betrag A gibt an, um welchen Faktor die Amplitude verändert wird, der Phasenwinkel φ, um wie viel die Sinusschwingung zeitlich verschoben wurde.
- Da jedes Signal aus Sinusschwingungen zusammengesetzt werden kann, charakterisiert der Faktor $H(\omega)$ das System vollständig, wenn er für jede Frequenz bekannt ist.
- Die Funktion $H(\omega)$ in Abhängigkeit von der Frequenz ω heißt **Frequenzgang** des Systems.

Wirkung eines linearen Systems in der Fourierdomäne

- Ein beliebiges Eingangssignal besteht in komplexer Schreibweise aus einzelnen Sinusschwingungen $X(\omega)e^{i\omega t}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega.$$

- Wirkung des Systems auf eine einzelne Sinusschwingung:

$$X(\omega)e^{i\omega t} \quad \rightarrow \quad H(\omega) \cdot X(\omega)e^{i\omega t}.$$

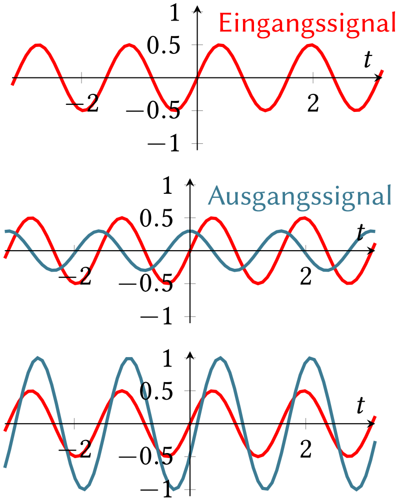
- Das Ausgangssignal ist daher:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot X(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega.$$

- Die Wirkung eines Systems in der Fourierdomäne ist somit

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega).$$

Betrag und Phase des Frequenzgangs



Polardarstellung des Frequenzgangs:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\angle H(\omega)}$$

Amplitudengang: gibt für jede Frequenz an, wie die einzelnen Sinusschwingungen verstärkt oder abgeschwächt werden.

Phasengang: gibt für jede Frequenz an, wie stark die Phase der Sinusschwingungen verschoben wird. Der Phasengang ist meistens negativ, d.h. der Ausgang folgt verzögert dem Eingang.

Frequenzgang des Proportionalsystems und Verzögerungsgliedes

Proportionalsystem: $H(\omega) = K = K \cdot e^{i \cdot 0}$

- Jede Frequenz wird um den gleichen Faktor K verändert, d.h. der Amplitudengang $|(H(\omega)|$ ist konstant K.
- Die Phase der Eingangsschwingung bleibt unverändert, d.h. der Phasengang $\angle H(\omega)$ ist konstant 0.

Verzögerungsglied: $H(\omega) = e^{-i\omega T_t} = 1 \cdot e^{i(-\omega T_t)}$

- Die Amplitude bleibt bei jeder Frequenz unverändert, d.h. der Amplitudengang ist konstant 1.
- Die Phase ist $\angle H(\omega) = -\omega T_t$, d.h. eine Ursprungsgerade mit Steigung $-T_t$.

Frequenzgang des Differenzierers

Differenzierer: $H(\omega) = i\omega = \omega e^{i(-\frac{3}{2}\pi)}$

- Jede Sinussignal wird proportional zu seiner Frequenz verstärkt, d.h. der Amplitudengang ist eine Gerade mit Steigung 1.
- Die Phase der Eingangsschwingung wird um $\frac{3}{2}\pi$ verschoben, d.h. der Phasengang ist konstant $-\frac{3}{2}\pi$.

Integrierer:

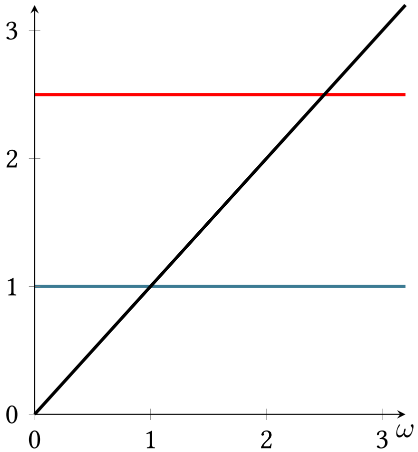
Hier lässt sich kein Frequenzgang angeben. Grund: Sinusschwingungen erstrecken sich unendlich weit in die Vergangenheit. Dadurch konvergiert das Integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \sin \omega\tau \, d\tau = -\tfrac{1}{\omega} \cos \omega\tau \big|_{-\infty}^{t} = -\tfrac{1}{\omega} \cos \omega t + ?$$

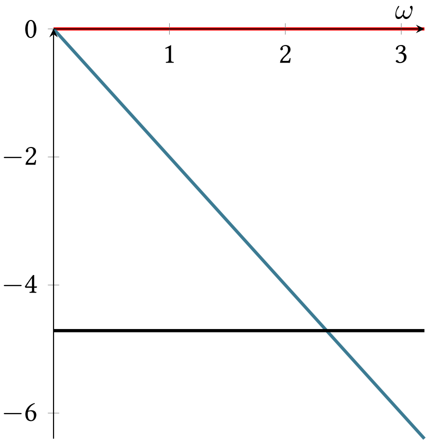
nicht, d.h. der Integrierer hat für Sinus-Input keinen definierten Ausgangswert.

Quiz: Welche Farbe gehört zu welchem System?

Amplitudengang:



Phasengang:

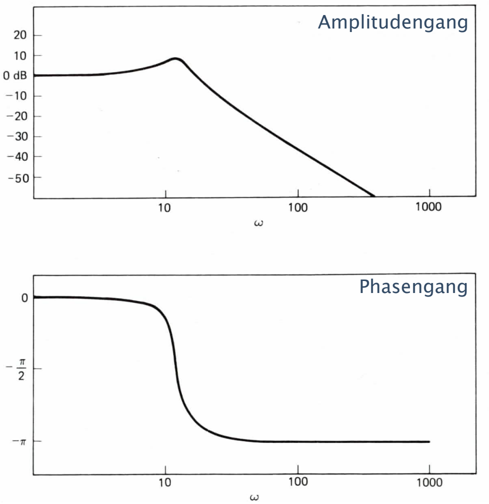


Bode-Diagramme

Bode-Diagramm: Darstellung des Frequenzgangs anhand der Größen $\angle H(\omega)$ und $20 \log_{10} |H(\omega)|$ in Abhängigkeit von der logarithmierten Frequenz.

Der Amplitudengang wird in **Dezibel** (dB) gemessen:

- 0 dB = 1
- 20 dB = 10
- 40 dB = 100 usw.
- -20 dB = 0.1
- -40 dB = 0.01 usw.



[Quelle: Oppemheim & Willsky]