Blatt 5: symbolisch rechnen mit Matlab

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Ableiten mit `diff`

Wir veranlassen Matlab zum symbolischen Rechnen sobald wir ein Symbol deklariert haben. Der Befehl `syms` erledigt das. Mit `syms x` etwa wird `x` als Variable behandelt, der nicht ein Wert zugewiesen werden muss. Mehrere Variablen erklären wir mit `syms x y z` ohne seziellen Separator.

Source

```
syms x  % Variable definieren

f(x) = sin(2*pi*x)
%%
df(x)  = diff(f(x),x)   % f'
d2f(x) = diff(f(x),x,x) % f''
```

Ausgabe

```
f(x) =
 sin(2*pi*x)

df(x) =
 2*pi*cos(2*pi*x)

d2f(x) =
 -4*pi^2*sin(2*pi*x)
```

Graphische Ausgabe im Anschluss:

Source

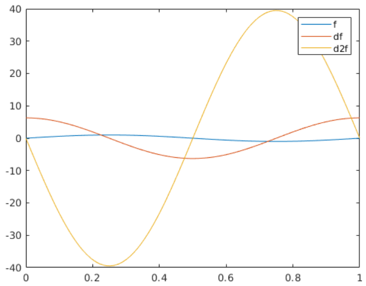
```
...

I = [0,1];
N = 100;

xx = linspace(I(1),I(2),N);
yy = f(xx); dy = df(xx); d2y = d2f(xx);

plot(xx,yy,xx,dy,xx,d2y)
legend('f','df','d2f')
```

Ausgabe



Sie können damit Ihre Ergebnisse der Ableitungsaufgaben überprüfen.

Aufgabe 1: Ableitung

Berechnen Sie erste und zweite Ableitung des Areatangens Hyperbolikus aus Blatt 4, Aufgabe 7. Achten Sie beim Plot auf die Definitionsbereiche der beteiligten Funktionen.

Hinweis: Im Englischen heißen die Areafunktionen wie Arkusfunktionen, also Arkustangens Hyperbolikus. Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Optimierungsaufgaben, Gleichungen auflösen mit solve

In Blatt 4, Aufgabe 8 sollte eine optimale Schachtel, im Sinne maximalen Volumens, aus einem Rechteck konstruiert werden. Die Variable war die Einschnittlänge a.

Source

```
syms a
L = 16; H = 10;

V(a) = a*(16-2*a)*(10-2*a);

%%
dV(a)  = diff(V(a),a)
d2V(a) = diff(V(a),a,a)
```

Ausgabe

```
dV(a) =
 (2*a - 10)*(2*a - 16)
      + 2*a*(2*a - 10)
      + 2*a*(2*a - 16)

d2V(a) =
 24*a - 104
```

Bei der Ausgabe von `dV(a)` schreit das Herz nach einer ordentlichen Termvereinfachung. Man kann Matlab darum bitten mit dem Befehl `simplify`, was oft aber nicht immer gut funktioniert. Hier sieht das dann so aus:

Source

```
simplify(diff(V(a),a))
```

Ausgabe

```
dV(a) =
 12*a^2 - 104*a + 160
```

Das braucht man aber nur, wenn man den Ausdruck wirklich "sehen" will.

Wir suchen also die Nullstelle der ersten Ableitung. Für das Auflösen von Gleichungen nach einer Variablen ist die Funktion `solve` zuständig.

Source

```
a_sol = solve(dV(a)==0,a)
```

Ausgabe

```
a_sol =
    2
 20/3
```

Wir erhalten für a_sol ein Feld mit zwei Einträgen, weil es eben zwei Lösungen gibt. Natürlich können wir uns überlegen, dass 20/3 kein zulässiger Wert ist (warum?) aber wir wollen mit der zweiten Ableitungen unsere Kandidatin ermitteln. Für ein Maximum sollte die zweite Ableitung negativ sein (warum?). Also setzen wir beide Werte in die zweite Ableitung ein und prüfen das.

Source

```
...
a_sol = solve(dV(a)==0,a);

Ind = find(d2V(a_sol)<0);
fprintf('Der gesuchte Wert fuer a = %.2f\n',a_sol(Ind));
fprintf('Die Schachtel hat dann das Volumen V = %.2f\n',V(a_sol(Ind)))
```

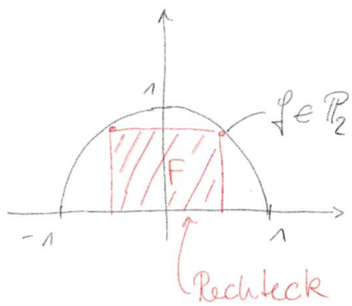
Ausgabe

```
Der gesuchte Wert fuer a = 2.00
Die Schachtel hat dann das Volumen V = 144.00
```

Die Funktion `find(Bedingung an Feld)` liefert das Indexfeld `Ind`, bei dem `Feld(Ind)` die gegebene Bedingung erfüllt.

Aufgabe 2:

Welchen Flächeninhalt F hat das Rechteck, das - wie in der Abbildung rechts - unter den Graphen f eingefasst ist. D.h. die oberen beiden Ecken liegen auf dem Graphen. f selbst ist ein quadratisches Polynom mit $f(-1) = f(1) = 0$ und $f(0) = 1$.



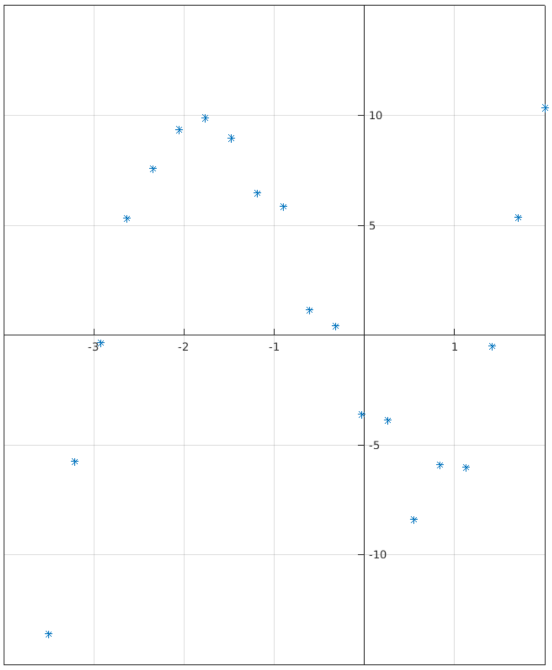
Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

“wünsch’ dir was”

Aufgabe 3: (Folie S. 13)

Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Daten in der rechtsstehenden Graphik möglichst gut beschreibt. Untersuchen Sie die Daten nach deren charakteristischen Merkmalen wie kritische und Wendepunkte. (Die Daten finden Sie auch auf moodle->Labormaterial->Blatt_5_Aufgabe_3_WuenschDirWas.dat.



1. Ansatzfunktion: Welche “Art” Funktion finden Sie passend? Stellen Sie sie allgemeingültig (parametrisiert, wie $f(x) = a\,e^{\beta\,x}$ zum Beispiel) auf.
2. Finden Sie charakteristische Merkmale im Datensatz (schätzungsweise)
3. Berechnen Sie die nötigen Ableitungen Ihrer Ansatzfunktion.
4. Berechnen Sie Parameter aufgrund der Merkmale im Datensatz.

Mit einem plot können Sie Ihr Ergebnis qualitativ beurteilen. Verwenden Sie Matlab zur Hilfe wo Sie es brauchen können ;-)

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 6

diskrete Ableitungen als Matrix-Vektor-Multiplikation

Aufgabe 4: diskrete Ableitung erster Ordnung

Es sei

D_1^m der Ableitungsoperator erster Ordnung als Matrix mit gemitteltem Differenzenquotient und

D_2^m der Ableitungsoperator zweiter Ordnung als Matrix, wobei je eine Ableitungsordnung mit Vorwärts- und eine mit Rückwärtsdifferenzenquotient berechnet wurde.

1. Implementieren Sie die angegebenen Ableitungsmatrizen in $\mathbb{R}^{N\times N}$, $N = 100$.
2. Erstellen Sie die diskrete Funktion zu $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}}$ auf $I = [0, 2]$ mit $N = 100$ Stützstellen.
3. Berechnen Sie erste und zweite Ableitung der diskreten Funktion und vergleichen Sie das Ergebnis in einem plot mit den analytischen Funktionen f' und f''.
4. Untersuchen Sie
$$D_1^m \cdot D_1^m \quad \text{versus} \quad D_2^m\,.$$

Selbsteinschätzung: $\boxed{}$ Lösung auf Seite 8