Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

5 Integration

5.1 unbest. Integration
5.2 bestimmte Integration
5.3 uneig. Integration

Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Integration

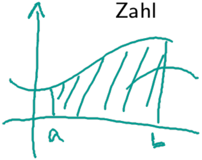
- Übersicht
- unbestimmte Integration - Stammfunktion
- bestimmte Integration - Riemannintegral
- uneigentliche Integration

unbestimmte Integration	bestimmte Integration	uneigentliche Integration
Stammfunktion	Riemann-Integral	
$F(x) = \int f(x)\ dx$	$\int\limits_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$	$\lim_{c \to b} \int\limits_a^c f(x)\ dx \in \mathbb{R}$
Funktion	Zahl	Grenzwert

unbestimmte Integration	bestimmte Integration	uneigentliche Integration
Stammfunktion	Riemann-Integral	
$F(x) = \int f(x)\ dx$	$\int\limits_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$	$\lim_{c\to b} \int\limits_a^c f(x)\ dx \in \mathbb{R}$
Funktion	Zahl	Grenzwert

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int f\,dx"] \end{tikzcd}$$

unbestimmte Integration	bestimmte Integration	uneigentliche Integration
Stammfunktion	Riemann-Integral	
$F(x) = \int f(x)\ dx$	$\int\limits_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$	$\lim_{c \to b} \int\limits_a^c f(x)\ dx \in \mathbb{R}$
Funktion	Zahl	Grenzwert



$$\int_a^b f\, dx = \sum_i f_i\, dx_i$$

unbestimmte Integration	bestimmte Integration	uneigentliche Integration
Stammfunktion	Riemann-Integral	
$F(x) = \int f(x)\ dx$	$\int_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$	$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\ dx \in \mathbb{R}$
Funktion	Zahl	Grenzwert

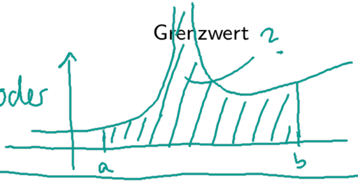
HDI:

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

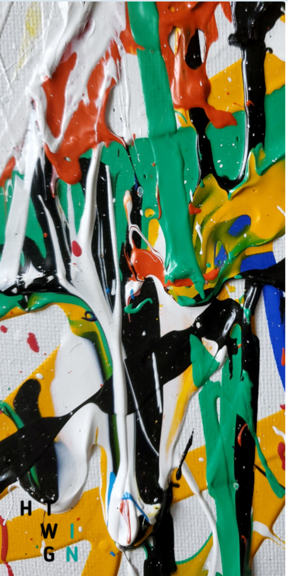
$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

unbestimmte Integration	bestimmte Integration	uneigentliche Integration
Stammfunktion	Riemann-Integral	
$F(x) = \int f(x)\ dx$	$\int\limits_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$	$\lim_{c \to b} \int\limits_a^c f(x)\ dx \in \mathbb{R}$
Funktion	Zahl	Grenzwert ?

$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ oder

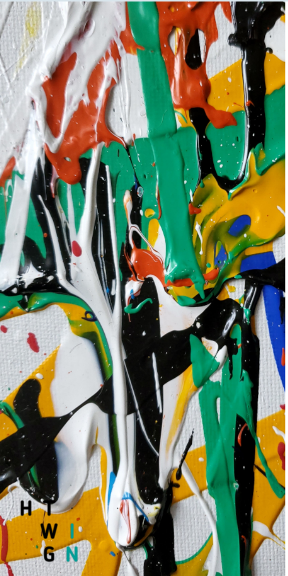


“Integrieren ist eine Kunst”



Bemerkung: Wir werden elementare Funktionen integrieren können aber nicht jedes Produkt, jeden Quotienten oder jede Verkettung von elementaren Funktionen wie es beim Differenzieren der Fall war. Es gibt aber eine kleine Trickkiste.

"Integrieren ist eine Kunst"



Bemerkung: Wir werden elementare Funktionen integrieren können aber nicht jedes Produkt, jeden Quotienten oder jede Verkettung von elementaren Funktionen wie es beim Differenzieren der Fall war. Es gibt aber eine kleine Trickkiste.

Definition: Stammfunktion & unbestimmtes Integral

F heißt *Stammfunktion* zu f auf dem Intervall I, wenn $\forall x \in I$:

$$F'(x) = f(x) .$$

Wir sagen auch F ist ein *unbestimmtes Integral* von f auf I oder auch F *ist eine Stammfunktion von* f. In Leibnizscher Symbolik schreiben wir für das unebstimmte Integral

$$\int f(x)\ dx \quad \text{oder} \quad \int f\ dx .$$

Wir sagen "Integral f von x dx" oder "Integral f dx". f bezeichnen wir als *Integranden* und x als *Integrationsvariable*.

Beispiel

$$\frac{d}{dx}\, x^2 = 2\,x \quad \Rightarrow \quad \int x \; dx = \frac{1}{2}\, x^2$$

Beispiel

$$\frac{d}{dx}\,x^2 = 2\,x \quad \Rightarrow \quad \int x\;dx = \frac{1}{2}\,x^2 + C$$

Beispiel

$$\frac{d}{dx}\,x^2 = 2\,x \quad \Rightarrow \quad \int x \; dx = \frac{1}{2}\,x^2 + C$$

$$\int F' \; dx = F + C\,.$$

Beispiel

$$\frac{d}{dx}\,x^2 = 2\,x \quad \Rightarrow \quad \int x\;dx = \frac{1}{2}\,x^2 + C$$

$$\int F'\;dx = F + C\,.$$

Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^p\;dx = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1} + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1. $$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C \, , \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1. $$\int x^5 \; dx = \frac{1}{6}\,x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\,x^6 + C\right) = x^5$$

2. $$\int \sqrt{x} \; dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1.
$$\int x^5 \; dx = \frac{1}{6} x^6 + C \,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \; dx = \int x^{\frac{1}{2}} \; dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6}x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C \,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6}x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1.
$$\int x^5 \; dx = \frac{1}{6}\, x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\, x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \; dx = \int x^{\frac{1}{2}} \; dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\, \sqrt{x}^3 + C$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \; dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1. $$\int x^5 \; dx = \frac{1}{6}\, x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\, x^6 + C\right) = x^5$$

2. $$\int \sqrt{x} \; dx = \int x^{\frac{1}{2}} \; dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\, \sqrt{x}^3 + C$$

3. $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \; dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \; dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1.
$$\int x^5 \; dx = \frac{1}{6}\, x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\, x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \; dx = \int x^{\frac{1}{2}} \; dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,\sqrt{x}^3 + C$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \; dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \; dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \; dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1. $$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C \,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

2. $$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 + C$$

3. $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \, dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} + C$$

“rückwärts denken”

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6}\,x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\,x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,\sqrt{x}^3 + C$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \, dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1}\,x^{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{2}{3}} + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 + C$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \, dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + C$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1. $$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6}x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^6 + C\right) = x^5$$

2. $$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$$

3. $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}^5} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \, dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1}x^{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} + C$$

4. Sonderfall:
$$\int \frac{1}{x} \, dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C \,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 + C$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \, dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + C$$

4. Sonderfall:
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-1} \, dx$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

“rückwärts denken”

1. $$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6}x^6 + C\,, \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^6 + C\right) = x^5$$

2. $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$$

3. $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\, dx = \int x^{-\frac{5}{3}}\, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1}x^{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + C$$

4. Sonderfall:
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx = \text{“}\frac{1}{0}x^0\text{“} + C? \quad \textbf{sicher nicht!}$$

Beispiele: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

"rückwärts denken"

1.
$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C \, , \quad \text{Test:} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) = x^5$$

2.
$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 + C$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}^5} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \, dx = \int x^{-\frac{5}{3}} \, dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} + C = -\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} + C$$

4. Sonderfall:
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-1} \, dx = \ln x + C$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}, \; p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}, \; p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

<u>Anmerkung:</u> $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p \neq -q$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

<u>Anmerkung:</u> $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x|$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}, \; p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

<u>Anmerkung:</u> $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{x^2}$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q}\, x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}\,,\; q \in \mathbb{N}\,,\; p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

<u>Anmerkung:</u> $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\, \frac{d}{dx}\sqrt{x^2}$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}, \; p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

Anmerkung: $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{1}{2} (x^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2\, x$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\,,\ p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

Anmerkung: $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{1}{2} (x^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2\,x = \frac{x}{|x|^2}$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q}\, x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\,,\ p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

<u>Anmerkung:</u> $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\, \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\, \frac{1}{2}\, (x^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2\,x = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2}$$

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \, x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{q}{p+q} \, x^{\frac{p+q}{q}} + C \qquad p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\,,\ p \neq -q$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

<u>Anmerkung:</u> $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \, \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \, \frac{1}{2} \, (x^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2\,x = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Satz: Linearität des unbestimmten Integrals

Das integral ist linear, das heißt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\; dx = \alpha \int f\; dx + \beta \int g\; dx\,.$$

Integrationsregeln: Linearität

Satz: Linearität des unbestimmten Integrals

Das integral ist linear, das heißt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx\,.$$

Beispiel:

$$\int 2\,x^3 + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{a}{x}\ dx$$

Integrationsregeln: Linearität

Satz: Linearität des unbestimmten Integrals

Das integral ist linear, das heißt für $\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\;dx = \alpha \int f\;dx + \beta \int g\;dx\,.$$

Beispiel:

$$\int 2\,x^3 + \frac{1}{3}\,\sqrt{x} - \frac{a}{x}\;dx = 2\int x^3\;dx + \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\;dx - a\int \frac{1}{x}\;dx$$

Satz: Linearität des unbestimmten Integrals

Das integral ist linear, das heißt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\; dx = \alpha \int f\; dx + \beta \int g\; dx\,.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int 2\,x^3 + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{a}{x}\; dx &= 2\int x^3\; dx + \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\; dx - a\int \frac{1}{x}\; dx \\ &= 2\,\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - a\,\ln|x| + C\end{aligned}$$

Satz: Linearität des unbestimmten Integrals

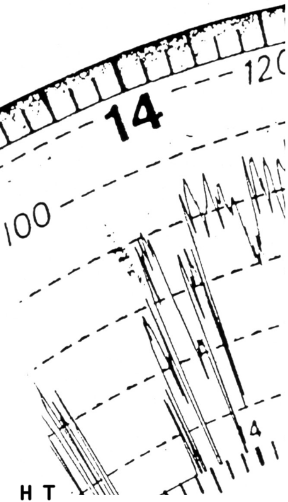
Das integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx\,.$$

Beispiel:

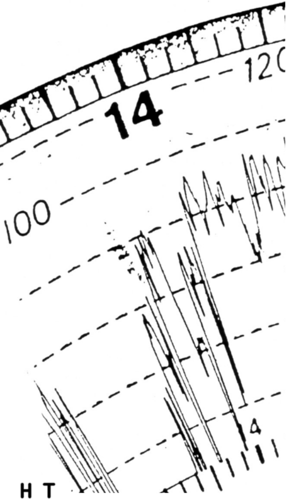
$$\begin{aligned}\int 2\,x^3 + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{a}{x}\ dx &= 2\int x^3\ dx + \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ dx - a\int \frac{1}{x}\ dx\\ &= 2\,\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - a\,\ln|x| + C\\ &= \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{2}{9}\,\sqrt{x}^3 - a\,\ln|x| + C\end{aligned}$$

Die Wahl der Integrationskonstanten



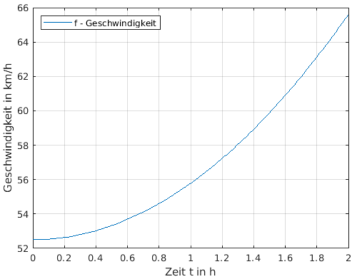
Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber

Die Wahl der Integrationskonstanten

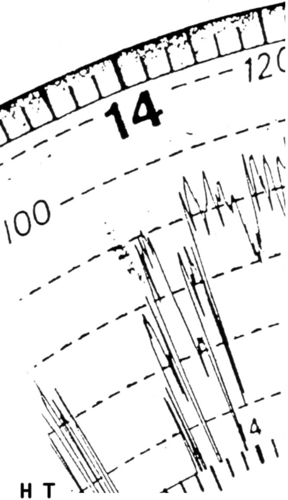


Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber
Geschwindigkeit: zu einem Zeitpunkt t, $[t] = h$, $[f(t)] = \frac{km}{h}$

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)$$



Die Wahl der Integrationskonstanten



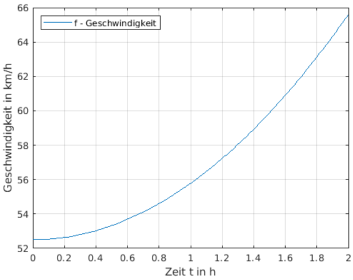
Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber

Geschwindigkeit: zu einem Zeitpunkt t, $[t] = h$, $[f(t)] = \frac{km}{h}$

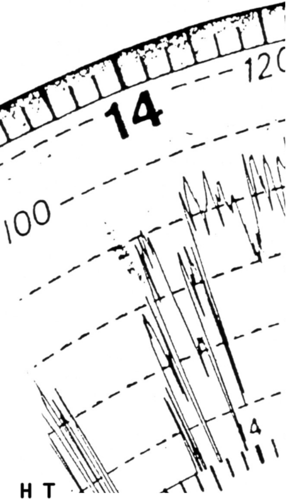
$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)$$

Weg: $[F] = km = [f\ dt] = \frac{km}{h}\ h$

$$F(t) = \int f(t)\ dt = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$



Die Wahl der Integrationskonstanten

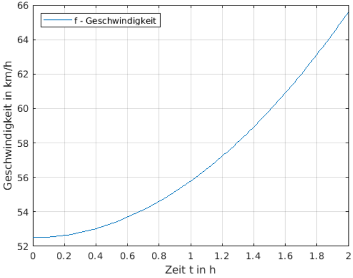


Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber
Geschwindigkeit: zu einem Zeitpunkt t, $[t] = h$, $[f(t)] = \frac{km}{h}$

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)$$

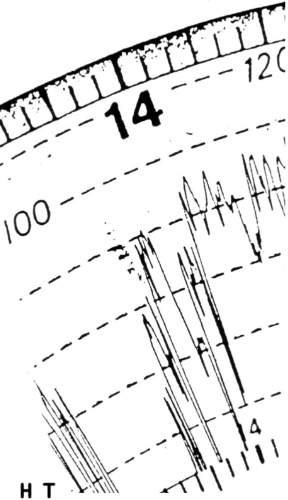
Weg: $[F] = km = [f\ dt] = \frac{km}{h}\ h$

$$F(t) = \int f(t)\ dt = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$



Frage: Wo war der LKW-Fahrer nach 2 Stunden Fahrt?
Antwort: Je nachdem "wo" die Messung begann.

Die Wahl der Integrationskonstanten

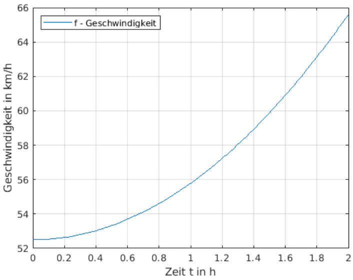


Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber
Geschwindigkeit: zu einem Zeitpunkt t, $[t] = h$, $[f(t)] = \frac{km}{h}$

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)$$

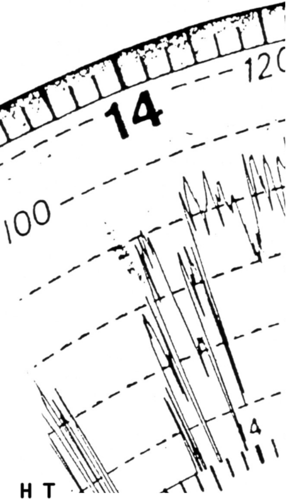
Weg: $[F] = km = [f \ dt] = \frac{km}{h} \ h$

$$F(t) = \int f(t) \ dt = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$



Frage: Wo war der LKW-Fahrer nach 2 Stunden Fahrt?
Antwort: Je nachdem "wo" die Messung begann.
Etwa: $F(0) = 120 \ km$ Dann ist: $C = 120$

Die Wahl der Integrationskonstanten

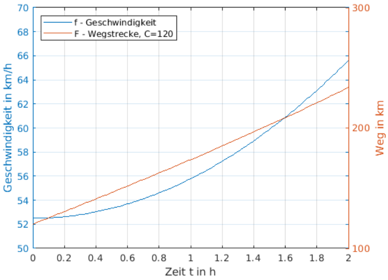


Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber
Geschwindigkeit: zu einem Zeitpunkt t, $[t] = h$, $[f(t)] = \frac{km}{h}$

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)$$

Weg: $[F] = km = [f \ dt] = \frac{km}{h} \ h$

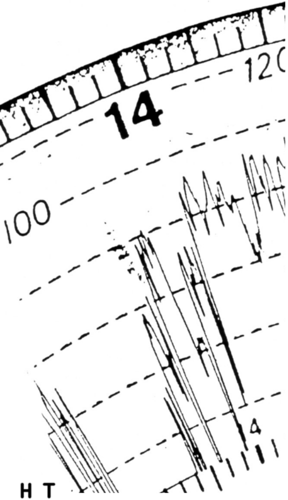
$$F(t) = \int f(t) \ dt = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$



Frage: Wo war der LKW-Fahrer nach 2 Stunden Fahrt?
Antwort: Je nachdem “wo” die Messung begann.
Etwa: $F(0) = 120 \ km$ Dann ist: $C = 120$ Und es folgt:

$$F(2) = \frac{105}{2}\left(2 + \frac{1}{48}2^3\right) + 120 = 233.75$$

Die Wahl der Integrationskonstanten

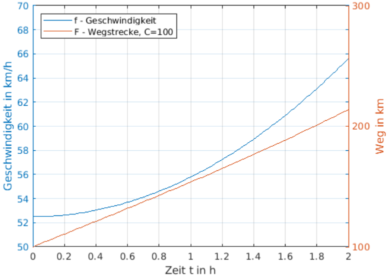


Beispiel: LKW-Fahrtenschreiber
Geschwindigkeit: zu einem Zeitpunkt t, $[t] = h$, $[f(t)] = \frac{km}{h}$

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)$$

Weg: $[F] = km = [f\ dt] = \frac{km}{h}\ h$

$$F(t) = \int f(t)\ dt = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$



Frage: Wo war der LKW-Fahrer nach 2 Stunden Fahrt?
Antwort: Je nachdem "wo" die Messung begann.
Etwa: $F(0) = 120\ km$ Dann ist: $C = 120$ Und es folgt:

$$F(2) = \frac{105}{2}\left(2 + \frac{1}{48}2^3\right) + 120 = 233.75$$

Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

"rückwärts denken":

$$\int \mathrm{e}^x \; dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + C$$

"rückwärts denken":

$$\int \mathrm{e}^x \; dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a}\, a^x + C$$

Korrektur um einen konstanten (!!!) Faktor:

$$\int \mathrm{e}^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha}\, \mathrm{e}^{\alpha\, x} + C$$

$$\int a^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha \ln a}\, a^{\alpha\, x} + C$$

Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

“rückwärts denken”:

$$\int \mathrm{e}^x \; dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + C$$

<u>Korrektur um einen konstanten (!!!) Faktor:</u>

$$\int \mathrm{e}^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha} \, \mathrm{e}^{\alpha\, x} + C$$

$$\int a^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha \, \ln a} \, a^{\alpha\, x} + C$$

Das funktionier nicht mehr wenn $\alpha = \alpha(x)$, denn

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha(x)} \, \mathrm{e}^{\alpha(x)\, x} \right)$$

Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

"rückwärts denken":

$$\int e^x \; dx = e^x + C$$
$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + C$$

Korrektur um einen konstanten (!!!) Faktor:

$$\int e^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha} \, e^{\alpha\, x} + C$$
$$\int a^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha \, \ln a} \, a^{\alpha\, x} + C$$

Das funktionier nicht mehr wenn $\alpha = \alpha(x)$, denn

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha(x)} \, e^{\alpha(x)\, x} \right) \neq \left(\frac{d}{dx} \, \frac{1}{\alpha(x)} \right) e^{\alpha(x)\, x}$$

Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

“rückwärts denken”:

$$\int \mathrm{e}^x \; dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a}\, a^x + C$$

<u>Korrektur um einen konstanten (!!!) Faktor:</u>

$$\int \mathrm{e}^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha}\, \mathrm{e}^{\alpha\, x} + C$$

$$\int a^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha\, \ln a}\, a^{\alpha\, x} + C$$

Das funktionier nicht mehr wenn $\alpha = \alpha(x)$, denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha(x)}\, \mathrm{e}^{\alpha(x)\, x}\right) = \left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\alpha(x)}\right) \mathrm{e}^{\alpha(x)\, x} + \frac{1}{\alpha(x)}\,\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{\alpha(x)\, x}$$

Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

"rückwärts denken":

$$\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + C$$

Korrektur um einen konstanten (!!!) Faktor:

$$\int \mathrm{e}^{\alpha\, x} \, dx = \frac{1}{\alpha} \, \mathrm{e}^{\alpha\, x} + C$$

$$\int a^{\alpha\, x} \, dx = \frac{1}{\alpha \, \ln a} \, a^{\alpha\, x} + C$$

Das funktionier nicht mehr wenn $\alpha = \alpha(x)$, denn

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha(x)}\,\mathrm{e}^{\alpha(x)\,x}\right) &= \left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\alpha(x)}\right)\mathrm{e}^{\alpha(x)\,x} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha(x)}\,\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{\alpha(x)\,x} \\ &= \frac{-\alpha'(x)}{\alpha^2(x)}\,\mathrm{e}^{\alpha(x)\,x} \\ &\quad + \frac{\alpha'(x)\,x + \alpha(x)}{\alpha(x)}\,\mathrm{e}^{\alpha(x)\,x}\end{aligned}$$

"rückwärts denken":

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + C$$

Korrektur um einen konstanten (!!!) Faktor:

$$\int e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} \, e^{\alpha x} + C$$
$$\int a^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha \ln a} \, a^{\alpha x} + C$$

Das funktionier nicht mehr wenn $\alpha = \alpha(x)$, denn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha(x)} \, e^{\alpha(x)\,x}\right) &= \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha(x)}\right) e^{\alpha(x)\,x} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha(x)} \frac{d}{dx} e^{\alpha(x)\,x} \\
&= \frac{-\alpha'(x)}{\alpha^2(x)} \, e^{\alpha(x)\,x} \\
&\quad + \frac{\alpha'(x)\,x + \alpha(x)}{\alpha(x)} \, e^{\alpha(x)\,x} \\
&\neq e^{\alpha(x)\,x}
\end{aligned}$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$(g\,f)' = g'f + gf'$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& (g\,f)' = g'f + gf' \\
\Leftrightarrow \quad & \int (g\,f)'\;dx = \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx
\end{aligned}
$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g'f + gf' \\
\Leftrightarrow & & \int (g\,f)' \; dx &= \int g'f \; dx + \int g\,f' \; dx \\
\Leftrightarrow & & g\,f &= \int g'f \; dx + \int g\,f' \; dx
\end{aligned}
$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g'f + gf' \\
&\Leftrightarrow & \int (g\,f)'\ dx &= \int g'f\ dx + \int g\,f'\ dx \\
&\Leftrightarrow & g\,f &= \int g'f\ dx + \int g\,f'\ dx \\
&\Leftrightarrow & \int g'f\ dx &= g\,f - \int g\,f'\ dx
\end{aligned}
$$

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g'f + gf' \\
&\Leftrightarrow & \int (g\,f)'\;dx &= \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
&\Leftrightarrow & g\,f &= \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
&\Leftrightarrow & \int g'f\;dx &= g\,f - \int g\,f'\;dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g'f + gf' \\
&\Leftrightarrow & \int (g\,f)'\,dx &= \int g'f\,dx + \int g\,f'\,dx \\
&\Leftrightarrow & g\,f &= \int g'f\,dx + \int g\,f'\,dx \\
&\Leftrightarrow & \int g'f\,dx &= g\,f - \int g\,f'\,dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g'f\,dx = g\,f - \int g\,f'\,dx$$

Beispiel:

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
 & (g\,f)' = g'f + gf' \\
\Leftrightarrow \quad & \int (g\,f)'\;dx = \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
\Leftrightarrow \quad & g\,f = \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx$$

Beispiel:

$$\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g'} \underbrace{x}_{=f}\;dx = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g} \underbrace{x}_{f} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} \cdot \underbrace{1}_{=f'}\;dx$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& (g\,f)' = g'f + gf' \\
\Leftrightarrow \quad & \int (g\,f)'\;dx = \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
\Leftrightarrow \quad & g\,f = \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{e^x}_{=g'} \underbrace{x}_{=f}\;dx &= \underbrace{e^x}_{=g}\underbrace{x}_{f} - \int \underbrace{e^x}_{g}\cdot\underbrace{1}_{=f'}\;dx \\
&= e^x\,x - e^x = e^x\,(x-1)
\end{aligned}
$$

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g'f + gf' \\
&\Leftrightarrow & \int (g\,f)'\;dx &= \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
&\Leftrightarrow & g\,f &= \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
&\Leftrightarrow & \int g'f\;dx &= g\,f - \int g\,f'\;dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g'}\,\underbrace{x}_{=f}\;dx &= \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g}\,\underbrace{x}_{f} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g}\cdot\underbrace{1}_{=f'}\;dx \\
&= \mathrm{e}^x\,x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,(x-1)
\end{aligned}
$$

$$\int \ln(x)\;dx = \int \underbrace{1}_{=f'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{=g}\;dx$$

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g'f + gf' \\
&\Leftrightarrow & \int (g\,f)'\;dx &= \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
&\Leftrightarrow & g\,f &= \int g'f\;dx + \int g\,f'\;dx \\
&\Leftrightarrow & \int g'f\;dx &= g\,f - \int g\,f'\;dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g'f\;dx = g\,f - \int g\,f'\;dx$$

Beispiel:

$$\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g'}\;\underbrace{x}_{=f}\;dx = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g}\;\underbrace{x}_{f} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g}\cdot\underbrace{1}_{=f'}\;dx$$

$$= \mathrm{e}^x\,x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,(x-1)$$

$$\int \ln(x)\;dx = \int \underbrace{1}_{=f'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{=g}\;dx$$

$$= \underbrace{x}_{=f}\;\underbrace{\ln x}_{=g} - \int \underbrace{x}_{=f}\;\underbrace{\frac{1}{x}}_{=g'}\;dx$$

Frage: Welche Funktion besitzt den Logarithmus als Ableitungsfunktion?

Trick:

$$
\begin{aligned}
& & (g\,f)' &= g' f + g f' \\
&\Leftrightarrow & \int (g\,f)'\,dx &= \int g' f\,dx + \int g\,f'\,dx \\
&\Leftrightarrow & g\,f &= \int g' f\,dx + \int g\,f'\,dx \\
&\Leftrightarrow & \int g' f\,dx &= g\,f - \int g\,f'\,dx
\end{aligned}
$$

partielle Integration

$$\int g' f\,dx = g\,f - \int g\,f'\,dx$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{e^x}_{=g'} \underbrace{x}_{=f}\,dx &= \underbrace{e^x}_{=g} \underbrace{x}_{f} - \int \underbrace{e^x}_{g} \cdot \underbrace{1}_{=f'}\,dx \\
&= e^x\,x - e^x = e^x\,(x-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \ln(x)\,dx &= \int \underbrace{1}_{=f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=g}\,dx \\
&= \underbrace{x}_{=f} \underbrace{\ln x}_{=g} - \int \underbrace{x}_{=f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g'}\,dx \\
&= x\,\ln x - x = x\,(\ln x - 1)
\end{aligned}
$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Memo:

$$\int \ln(x)\ dx = x\,(\ln x - 1) + C$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x\ dx$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Memo:

$$\int \ln(x)\,dx = x\,(\ln x - 1) + C$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Memo:

$$\int \ln(x)\ dx = x\,(\ln x - 1) + C$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\begin{aligned}\int \log_a x\ dx &= \int \frac{\ln x}{\ln a}\ dx \\ &= \frac{1}{\ln a} \int \ln x\ dx\end{aligned}$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Memo:

$$\int \ln(x)\ dx = x\,(\ln x - 1) + C$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x\ dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\ dx$$
$$= \frac{1}{\ln a}\int \ln x\ dx = \frac{x}{\ln a}\,(\ln x - 1)$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x \; dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \; dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln x \; dx = \frac{x}{\ln a} (\ln x - 1)$$

"rückwärts denken"

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x \; dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \; dx$$
$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln x \; dx = \frac{x}{\ln a} (\ln x - 1)$$

"rückwärts denken"

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$\Rightarrow \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)} \; dx = \ln |g(x)| + C$$

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x \; dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \; dx$$
$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln x \; dx = \frac{x}{\ln a} (\ln x - 1)$$

"rückwärts denken"

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$\Rightarrow \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)} \; dx = \ln |g(x)| + C$$

Beispiele:

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x \, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx = \frac{x}{\ln a} (\ln x - 1)$$

"rückwärts denken"

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln |g(x)| + C$$

Beispiele:

1. $$\int \frac{2\,x}{x^2 + 4} \, dx = \ln |x^2 + 4| + C$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x \; dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \; dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \; dx = \frac{x}{\ln a} (\ln x - 1)$$

"rückwärts denken"

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)} \; dx = \ln |g(x)| + C$$

Beispiele:

1. $$\int \frac{2\,x}{x^2+4} \; dx = \ln |x^2 + 4| + C$$

2. $$\int \frac{x^2}{x^3 - 10} \; dx = \frac{1}{3} \int \frac{3\,x^2}{x^3 - 10} \; dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 10| + C$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

beliebige Logarithmusfunktion:

$$\int \log_a x \; dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \; dx$$
$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln x \; dx = \frac{x}{\ln a} (\ln x - 1)$$

"rückwärts denken"

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$\Rightarrow \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)} \; dx = \ln |g(x)| + C$$

Beispiele:

1.
$$\int \frac{2\,x}{x^2+4} \; dx = \ln |x^2+4| + C$$

2.
$$\int \frac{x^2}{x^3-10} \; dx = \frac{1}{3} \int \frac{3\,x^2}{x^3-10} \; dx$$
$$= \frac{1}{3} \ln |x^3 - 10| + C$$

3.
$$\int \frac{1}{x \ln x} \; dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \; dx = \ln |\ln x| + C$$

Stammfunktionen von Logarithmusfunktionen

Stammfunktionen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \log_a x \, dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln|g(x)| + C$$

Stammfunktionen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \log_a x \, dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln |g(x)| + C$$

Es gibt Funktionen, die keine analytische Darstellung einer Stammfunktion besitzen, etwa:

$$\mathrm{e}^{x^2}\,, \quad \cos x^2\,, \quad \ldots$$

sofort klar:

Stammfunktionen von Sinusfunktionen

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x \; dx = \ln|\sin x| + C$$

sofort klar:

Stammfunktionen von Sinusfunktionen

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$
$$\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x \; dx = \ln|\sin x| + C$$

Stammfunktionen zu den Arkusfunktionen lassen sich wieder mit partieller Integration berechnen. (ÜA)

sofort klar:

Stammfunktionen von Sinusfunktionen

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$
$$\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x \; dx = \ln|\sin x| + C$$

Stammfunktionen zu den Arkusfunktionen lassen sich wieder mit partieller Integration berechnen. (ÜA)

Noch was aus der Trickkiste:

Substitutionsregel

Es sei F eine Stammfunktion von f. Man substituiere gemäß $x = g(t)$. Dann ist $dx = g'(t) \; dt$ und es gilt

$$\int f(x) \; dx = \int f(g(t))g'(t) \; dt.$$

sofort klar:

Stammfunktionen von Sinusfunktionen

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$
$$\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x \; dx = \ln|\sin x| + C$$

Stammfunktionen zu den Arkusfunktionen lassen sich wieder mit partieller Integration berechnen. (ÜA)

Noch was aus der Trickkiste:

Substitutionsregel

Es sei F eine Stammfunktion von f. Man substituiere gemäß $x = g(t)$. Dann ist $dx = g'(t)\; dt$ und es gilt

$$\int f(x)\; dx = \int f(g(t))g'(t)\; dt.$$

Denn:

$$\begin{aligned}\int f(g(t))g'(t)\; dt &= \int F(g(t))'\; dt \\ &= F(g(t)) + C = F(x) + C\end{aligned}$$

Beispiele: Substitution

1.

$$\int (2-3t)^4 \; dt$$

Beispiele: Substitution

1.

$$\int (2-3t)^4 \; dt \qquad \text{Substitution:} \qquad g = 2-3t$$

Beispiele: Substitution

1.

$$\int (2-3t)^4 \; dt$$

Substitution: $g = 2 - 3t$

$$\frac{dg}{dt} = -3$$

Beispiele: Substitution

1. $$\int (2-3t)^4 \; dt$$

Substitution: $g = 2 - 3t$

$$\frac{dg}{dt} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad dt = -\frac{1}{3} \; dg$$

Beispiele: Substitution

1.

$$\int (2-3t)^4 \, dt$$

Substitution: $g = 2 - 3t$

$$\frac{dg}{dt} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad dt = -\frac{1}{3}\, dg$$

g und dt einsetzen. Es darf kein "t" mehr übrig bleiben:

$$= -\frac{1}{3} \int g^4 \, dg$$

Beispiele: Substitution

1.

$$\int (2-3t)^4 \; dt$$

Substitution: $g = 2-3t$

$$\frac{dg}{dt} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad dt = -\frac{1}{3}\; dg$$

g und dt einsetzen. Es darf kein "t" mehr übrig bleiben:

$$= -\frac{1}{3}\int g^4 \; dg$$

$$= -\frac{1}{15} g^5 + C$$

Beispiele: Substitution

1.

$$\int (2-3t)^4 \, dt$$

Substitution: $g = 2-3t$

$$\frac{dg}{dt} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad dt = -\frac{1}{3}\, dg$$

g und dt einsetzen. Es darf kein "t" mehr übrig bleiben:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\int g^4 \, dg \\ &= -\frac{1}{15} g^5 + C \\ &= -\frac{1}{15}(2-3t)^5 + C \end{aligned}$$

Beispiele: Substitution

2.
$$\int \frac{x}{x-1}\,dx$$

Beispiele: Substitution

2.

$$\int \frac{x}{x-1}\, dx \qquad \text{Substitution:} \qquad s = x - 1$$

Beispiele: Substitution

2.

$$\int \frac{x}{x-1}\, dx$$

Substitution: $s = x - 1$

$$ds = dx$$

Beispiele: Substitution

2.

$$\int \frac{x}{x-1}\, dx$$

Substitution: $s = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = s + 1$

$ds = dx$

$$= \int \frac{s+1}{s}\, ds$$

Beispiele: Substitution

2.

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx$$

Substitution: $s = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = s + 1$

$$ds = dx$$

$$= \int \frac{s+1}{s}\,ds$$
$$= \int 1 + \frac{1}{s}\,ds$$

Beispiele: Substitution

2.

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx$$

Substitution: $s = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = s + 1$

$ds = dx$

$$= \int \frac{s+1}{s}\,ds$$
$$= \int 1 + \frac{1}{s}\,ds$$
$$= s + \ln|s| + C$$

Beispiele: Substitution

2.

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx$$

Substitution: $s = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = s + 1$

$$ds = dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{s+1}{s}\,ds \\
&= \int 1 + \frac{1}{s}\,ds \\
&= s + \ln|s| + C \\
&= x - 1 + \ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2\,x}}}\;dx$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\, dx$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{e}^x$

$$dx = \frac{1}{t}\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x\, dx = dt$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{e}^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x\,dx = dt$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad e^x\,dx = dt$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dt}{ds} = \cos s$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad e^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad e^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\,ds$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad e^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\,ds = \int 1\,ds$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad e^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\,ds = \int 1\,ds = s + C$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{e}^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\,ds = \int 1\,ds = s + C$$

$$= \arcsin t + C$$

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{e}^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\,ds = \int 1\,ds = s + C$$

$$= \arcsin t + C = \arcsin \mathrm{e}^x + C$$

3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{e}^x$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\,ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\,ds = \int 1\,ds = s + C$$

$$= \arcsin t + C = \arcsin \mathrm{e}^x + C$$

Test: $(\arcsin \mathrm{e}^x)'$, ÜA

Beispiele: Substitution

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Substitution: $x = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x$

$$dx = \frac{1}{t}\, dt \quad \Leftrightarrow \quad e^x\, dx = dt$$

$$= \int \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 s}}\, ds$$

Substitution: $t = \sin s \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \cos s$

$$= \int \frac{\cos s}{|\cos s|}\, ds = \int 1\, ds = s + C$$

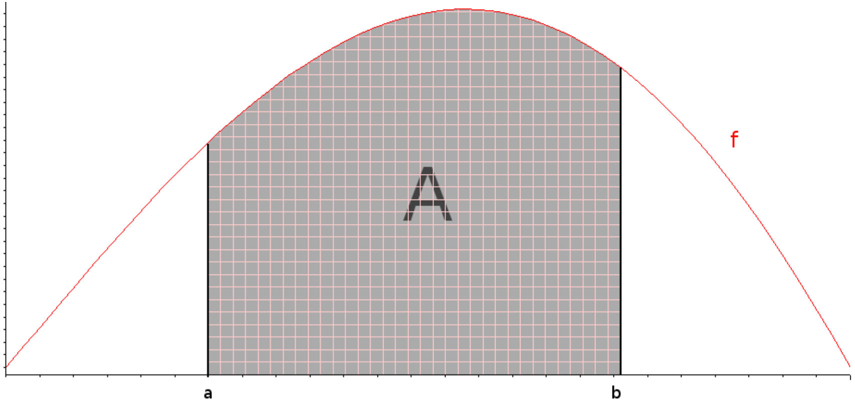
$$= \arcsin t + C = \arcsin e^x + C$$

Test: $(\arcsin e^x)'$, ÜA
Gesamtsubstitution: $x = \ln(\sin(s))$, ÜA

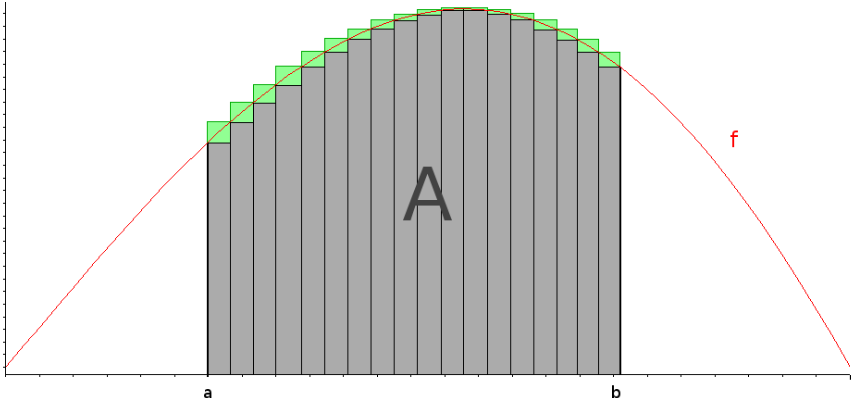
Lernziele

- Sie kennen die Stammfunktionen der elementaren Funktionen.
- Sie können Stammfunktionen von Linearkombinationen aus elementaren Funktionen berechnen.
- Sie können die partielle Integration berechnen.
- Sie können die Substitutionsregel anwenden.

Flächeninhalt unter einem Graphen



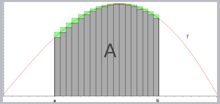
Flächeninhalt unter einem Graphen



Bernhard Riemann
1826-1866

Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

$$f \ : \ I = [a, b] \to \mathbb{R}$$

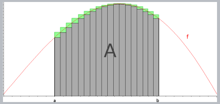


Bernhard Riemann
1826-1866

Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

$$f \; : \; I = [a,b] \to \mathbb{R}$$



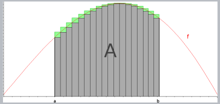
Bernhard Riemann
1826-1866

Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

$$m_i := \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)\,,\; M_i := \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$f \,:\, I = [a, b] \to \mathbb{R}$$



Bernhard Riemann
1826-1866

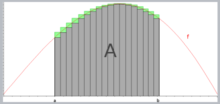
Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

$$m_i := \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)\,, \quad M_i := \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$s_n := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{b-a}{n} \text{ (Untersumme)}$$

$$f \;:\; I = [a,b] \to \mathbb{R}$$



Bernhard Riemann
1826-1866

Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

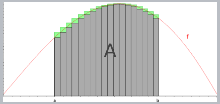
$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

$$m_i := \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\,, \quad M_i := \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

$$s_n := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, \frac{b-a}{n} \quad \text{(Untersumme)}$$

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \, \frac{b-a}{n} \quad \text{(Obersumme)}$$

$$f \;:\; I = [a,b] \to \mathbb{R}$$



Bernhard Riemann
1826-1866

Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

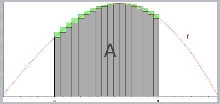
$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

$$m_i := \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\,,\;\; M_i := \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

$$s_n := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{b-a}{n} \text{ (Untersumme)}$$

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{b-a}{n} \text{ (Obersumme)}$$

$$f \;:\; I = [a,b] \to \mathbb{R}$$



Wenn

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = A$$

gilt,

Bernhard Riemann
1826-1866

Definition: Riemann-Integral/bestimmtes Integral

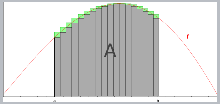
$$[a,b] = [x_0,x_1] \cup \cdots [x_{n-1},x_n]$$

$$m_i := \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\,,\ M_i := \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

$$s_n := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{b-a}{n} \text{ (Untersumme)}$$

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{b-a}{n} \text{ (Obersumme)}$$

$$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$$



Wenn

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = A$$

gilt, dann heißt f *Riemann-integrierbar* und das *bestimmte Integral*

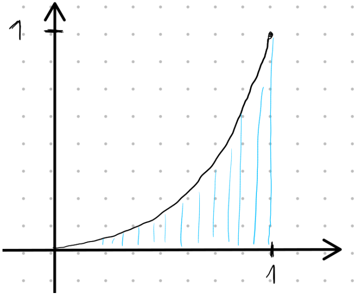
$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

heißt *Riemann-Integral*.

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$



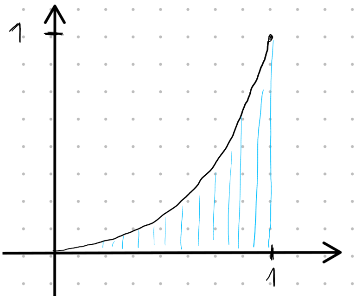
Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$\begin{aligned} f \ : \ [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] .$$



Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

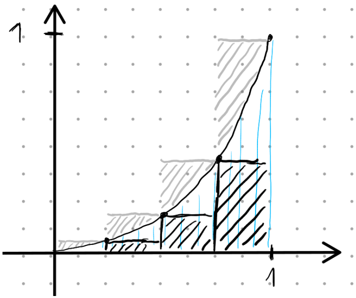
Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right].$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$



Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$\begin{aligned} f \;:\; [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

Obersumme:

$$S_n = \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f \; : \; [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n} \right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n} \right)^2$$

Obersumme:

$$S_n = \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2}$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right].$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

Obersumme:

$$S_n = \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Fläche unter dem Graphen:

$$\begin{aligned} f\ :\ [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right].$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

Obersumme:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} \\ &\overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\, \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} \end{aligned}$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$\begin{aligned} f \; : \; [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n} \right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n} \right)^2$$

Obersumme:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} \\ &\overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} \\ &\overset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

Memo: Obersumme: $S_n \to \frac{1}{3}$, $(n \to \infty)$

Untersumme:

$$s_n = \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f \;:\; [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right].$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

Memo: Obersumme: $S_n \to \frac{1}{3}$, $(n \to \infty)$

Untersumme:

$$s_n = \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2}$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$\begin{aligned} f \; : \; [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n} \right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n} \right)^2$$

Memo: Obersumme: $S_n \to \frac{1}{3}$, $(n \to \infty)$

Untersumme:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \end{aligned}$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$\begin{aligned} f \; : \; [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n} \right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n} \right)^2$$

> Memo: Obersumme: $S_n \to \frac{1}{3}$, $(n \to \infty)$

Untersumme:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \, \frac{(n-1)\, n\, (2\, n - 1)}{6} \end{aligned}$$

Beispiel

Fläche unter dem Graphen:

$$f \; : \; [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Zerlegung von $[0,1]$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] .$$

Minima und Maxima:

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

Memo: Obersumme: $S_n \to \frac{1}{3}$, $(n \to \infty)$

Untersumme:

$$s_n = \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$
$$= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)\, n\, (2\, n-1)}{6}$$
$$\overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

Fläche unter dem Graphen:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Untersumme:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$$

Obersumme:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

Also ist $f(x) = x^2$ auf $I = [0,1]$ Riemann-integrierbar und das Riemann-Integral lautet

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}\,.$$

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

gegeben.

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b$$

gegeben.

<u>Beispiel:</u>

$$\int_0^1 x^2\, dx$$

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b$$

gegeben.

<u>Beispiel:</u>

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1$$

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\; dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

gegeben.

Beispiel:

$$\int_0^1 x^2\; dx = \frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\,(1^3 - 0^3)$$

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b$$

gegeben.

Beispiel:

$$\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\,(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

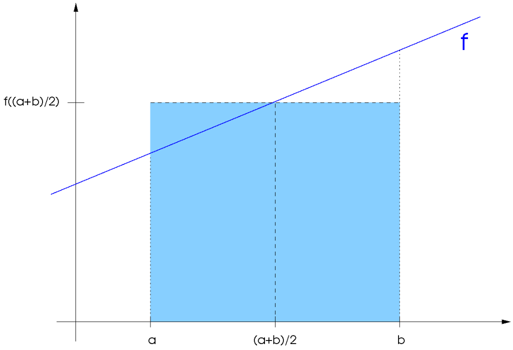
$$f(x) = m\,x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2} m x^2 + c x$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$



Plausibilitätserklärung:

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

speziell Geraden:

$$f(x) = m\,x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + cx$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

$$f(x) = m x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2} m x^2 + c x$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$
$$= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\right)(b-a)$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

$$f(x) = m x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2} m x^2 + c x$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$\begin{aligned} A &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \\ &= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\right)(b-a) \\ &= \frac{1}{2} m(b+a)(b-a) + c(b-a) \end{aligned}$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

$$f(x) = m x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2} m x^2 + c x$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$\begin{aligned} A &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \\ &= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\right)(b-a) \\ &= \frac{1}{2} m(b+a)(b-a) + c(b-a) \\ &= \frac{1}{2} m(b^2 - a^2) + c(b-a) \end{aligned}$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

$$f(x) = m\,x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + cx$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$\begin{aligned} A &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \\ &= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\right)(b-a) \\ &= \frac{1}{2}m(b+a)(b-a)+c(b-a) \\ &= \frac{1}{2}m(b^2-a^2)+c(b-a) \\ &= \left(\frac{1}{2}mb^2+cb\right)-\left(\frac{1}{2}ma^2+ca\right) \end{aligned}$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

$$f(x) = m\,x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2} m x^2 + c x$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$\begin{aligned}
A &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \\
&= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\right)(b-a) \\
&= \frac{1}{2} m(b+a)(b-a) + c(b-a) \\
&= \frac{1}{2} m(b^2-a^2) + c(b-a) \\
&= \left(\frac{1}{2} m b^2 + c b\right) - \left(\frac{1}{2} m a^2 + c a\right) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Plausibilitätserklärung:

speziell Geraden:

$$f(x) = m\,x + c$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + cx$$

Flächeninhalt (geometrisch):

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$\begin{aligned}
A &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \\
&= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\right)(b-a) \\
&= \frac{1}{2}m(b+a)(b-a) + c(b-a) \\
&= \frac{1}{2}m(b^2-a^2) + c(b-a) \\
&= \left(\frac{1}{2}mb^2 + cb\right) - \left(\frac{1}{2}ma^2 + ca\right) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Plausibilitätserklärung:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

Plausibilitätserklärung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}(x)\,dx$$

Plausibilitätserklärung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tilde{F}(x_{i+1}) - \tilde{F}(x_i) \right) \qquad \text{(Das ist eine Teleskopsumme)}$$

Plausibilitätserklärung:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}(x)\,dx\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\tilde{F}(x_{i+1})-\tilde{F}(x_i)\right) \qquad \text{(Das ist eine Teleskopsumme)}\\ &= \tilde{F}(x_1)-\tilde{F}(x_0)+\tilde{F}(x_2)-\tilde{F}(x_1)+\tilde{F}(x_3)-\tilde{F}(x_2)+\cdots+\tilde{F}(x_{n-2})-\tilde{F}(x_{n-3})+\tilde{F}(x_{n-1})-\tilde{F}(x_{n-2})\end{aligned}$$

Plausibilitätserklärung:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tilde{F}(x_{i+1}) - \tilde{F}(x_i)\right) \qquad \text{(Das ist eine Teleskopsumme)} \\
&= \tilde{F}(x_1) - \tilde{F}(x_0) + \tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) + \tilde{F}(x_3) - \tilde{F}(x_2) + \cdots + \tilde{F}(x_{n-2}) - \tilde{F}(x_{n-3}) + \tilde{F}(x_{n-1}) - \tilde{F}(x_{n-2}) \\
&= \tilde{F}(x_{n-1}) - \tilde{F}(x_0)
\end{aligned}
$$

Plausibilitätserklärung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\tilde{F}(x_{i+1}) - \tilde{F}(x_i)\right) \qquad \text{(Das ist eine Teleskopsumme)}$$

$$= \tilde{F}(x_1) - \tilde{F}(x_0) + \tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) + \tilde{F}(x_3) - \tilde{F}(x_2) + \cdots + \tilde{F}(x_{n-2}) - \tilde{F}(x_{n-3}) + \tilde{F}(x_{n-1}) - \tilde{F}(x_{n-2})$$

$$= \tilde{F}(x_{n-1}) - \tilde{F}(x_0) \approx F(b) - F(a)$$

Plausibilitätserklärung:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tilde{F}(x_{i+1}) - \tilde{F}(x_i)\right) \qquad \text{(Das ist eine Teleskopsumme)} \\
&= \tilde{F}(x_1) - \tilde{F}(x_0) + \tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) + \tilde{F}(x_3) - \tilde{F}(x_2) + \cdots + \tilde{F}(x_{n-2}) - \tilde{F}(x_{n-3}) + \tilde{F}(x_{n-1}) - \tilde{F}(x_{n-2}) \\
&= \tilde{F}(x_{n-1}) - \tilde{F}(x_0) \approx F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$

Wir können also Berechnungen von bestimmten Integralen auf Berechnungen von Stammfunktionen zurückführen.

Regeln der bestimmten Integration: Zerlegung des Integrals

Das Integral auf $[x_0, x_n]$ läßt sich in die Summe von n Integralen auf nicht notwendigerweise äquidistante Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, \ldots, n-1)$ mit $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ zerlegen:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

Regeln der bestimmten Integration: Zerlegung des Integrals

Das Integral auf $[x_0, x_n]$ läßt sich in die Summe von n Integralen auf nicht notwendigerweise äquidistante Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, \dots, n-1)$ mit $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ zerlegen:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

Stetige Funktionen sind R–integrierbar.

Manche nicht stetigen Funktionen sind ebenfalls R-integrierbar: bei abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen

Vorsicht bei Polstellen: uneigentliches Integral

1. Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist.

Beispiele

1. Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

eine Stammfunktion.

1. Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

eine Stammfunktion. Damit und dem HDI berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^1$$

Beispiele

1. Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

eine Stammfunktion. Damit und dem HDI berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 + C - 0^3 - C\right)$$

1. Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

eine Stammfunktion. Damit und dem HDI berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 + C - 0^3 - C\right) = \frac{1}{3}\,.$$

Das ging doch deutlich schneller.

1. Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

eine Stammfunktion. Damit und dem HDI berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 + C - 0^3 - C\right) = \frac{1}{3}.$$

Das ging doch deutlich schneller.

<u>Bemerkung:</u> Die Integrationskonstante C müssen wir bei der Berechnung von bestimmten Integralen nicht beachten.

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx$$

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Beispiele

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3. $$\int_1^2 \ln(2\,x) \; dx$$

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3.

$$\int_1^2 \ln(2\,x) \ dx = [x\,(\ln(2\,x) - 1)]_1^2$$

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3.

$$\int_1^2 \ln(2\,x) \; dx = [x\,(\ln(2\,x) - 1)]_1^2 = (2\,(\ln(4) - 1)) - (1\,(\ln(2) - 1))$$

Beispiele

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3.

$$\int_1^2 \ln(2\,x) \; dx = [x\,(\ln(2\,x) - 1)]_1^2 = (2\,(\ln(4) - 1)) - (1\,(\ln(2) - 1)) = 3\,\ln(2) - 1 \approx 1.08$$

Linearität des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx\,.$$

Linearität des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx\,.$$

Beweis:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx$$

Linearität des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx\,.$$

<u>Beweis:</u>

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx \overset{\text{HDI}}{=} \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a)$$

Linearität des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx\,.$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx &\overset{\text{HDI}}{=} \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a)\\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a))\end{aligned}$$

Linearität des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx\,.$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx &\overset{\text{HDI}}{=} \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) \\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) \\ &\overset{\text{HDI}}{=} \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx\,.\end{aligned}$$

Partielle Integration

Für $g, f \in C^1((a,b))$ gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx\,.$$

<u>Beweis:</u>

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = \int_a^b (f(x)g(x))'\ dx - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

Beispiel

$$\int_1^2 x \ln x \; dx$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \, dx$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\ln x}_{=f} \Big|_1^2$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\ln x}_{=f} \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'} \, dx$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\ln x}_{=f} \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'} \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}2^2 \ln 2\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 \ln 1\right) - \int_1^2 \frac{1}{2}x \, dx$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \; dx = \underbrace{\frac{1}{2} x^2}_{=g} \underbrace{\ln x}_{=f} \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2} x^2}_{=g} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'} \; dx$$

$$= (\frac{1}{2} 2^2 \; \ln 2) - (\frac{1}{2} 1^2 \; \ln 1) - \int_1^2 \frac{1}{2} x \; dx$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\ln x}_{=f} \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'} \, dx$$

$$= (\frac{1}{2}2^2 \ln 2) - (\frac{1}{2}1^2 \ln 1) - \int_1^2 \frac{1}{2}x \, dx$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2)$$

Beispiel

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{=g'} \underbrace{\ln x}_{=f} \; dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\ln x}_{=f} \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{=g} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'} \; dx$$

$$= (\frac{1}{2}2^2 \; \ln 2) - (\frac{1}{2}1^2 \; \ln 1) - \int_1^2 \frac{1}{2}x \; dx$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2)$$

$$= \ln 4 - \frac{3}{4}$$

Substitutionsregel/Transformationsformel

Mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)\ dt$ gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\ dt\,.$$

Substitutionsregel/Transformationsformel

Mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)\ dt$ gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\ dt\,.$$

Beweis:

$$c := g^{-1}(a) \quad \Leftrightarrow \quad g(c) = a$$

$$d := g^{-1}(b) \quad \Leftrightarrow \quad g(d) = b \qquad d.h. \quad g\ :\ [c,d] \to [a,b]$$

Substitutionsregel/Transformationsformel

Mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)\ dt$ gilt

$$\int\limits_{g(c)}^{g(d)} f(x)\ dx = \int\limits_{c}^{d} f(g(t))g'(t)\ dt\,.$$

Beweis:

$$\begin{array}{lcll} c := g^{-1}(a) & \Leftrightarrow & g(c) = a & \\ d := g^{-1}(b) & \Leftrightarrow & g(d) = b & d.h. \quad g\ :\ [c,d] \to [a,b] \end{array}$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\; dt$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\; dt = \int_c^d F'(g(t))\, g'(t)\; dt$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\; dt = \int_c^d F'(g(t))\, g'(t)\; dt$$

$$= \int_c^d F(g(t))'\; dt$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\;dt &= \int_c^d F'(g(t))\,g'(t)\;dt\\ &= \int_c^d F(g(t))'\;dt\\ &= F(g(t))\Big|_c^d\end{aligned}$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\;dt &= \int_c^d F'(g(t))\,g'(t)\;dt \\
&= \int_c^d F(g(t))'\;dt \\
&= F(g(t))\Big|_c^d = F(g(d)) - F(g(c))
\end{aligned}$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\ dt &= \int_c^d F'(g(t))\,g'(t)\ dt \\ &= \int_c^d F(g(t))'\ dt \\ &= F(g(t))\Big|_c^d = F(g(d)) - F(g(c)) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\ dt &= \int_c^d F'(g(t))\, g'(t)\ dt \\
&= \int_c^d F(g(t))'\ dt \\
&= F(g(t))\Big|_c^d = F(g(d)) - F(g(c)) \\
&= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx
\end{aligned}$$

Stammfunktion von f:

$$F' = f$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\ dt &= \int_c^d F'(g(t))\, g'(t)\ dt \\
&= \int_c^d F(g(t))'\ dt \\
&= F(g(t))\Big|_c^d = F(g(d)) - F(g(c)) \\
&= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx
\end{aligned}$$

Mit $a = g(c)$ und $b = g(d)$ gilt auch $c = g^{-1}(a)$ und $d = g^{-1}(b)$ folgt die Behauptung.

$\square$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad\qquad g(x) = 2(x+1)$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx$$

$$g(x) = 2(x+1)$$

$$\frac{dg}{dx} = 2$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx$$

$$g(x) = 2(x+1)$$

$$\frac{dg}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{1}{2}\, dg$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad g(x) = 2(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(2)} g^2 \; dg \qquad \frac{dg}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{1}{2}\,dg$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx$$

$$g(x) = 2(x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(2)} g^2 \; dg = \frac{1}{2} \int_2^6 g^2 \; dg = \frac{1}{6} \left[g^3\right]_2^6 = \otimes$$

$$\frac{dg}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{1}{2}\, dg$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad\qquad g(x) = 2(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(2)} g^2 \; dg = \frac{1}{2}\int_2^6 g^2 \; dg = \frac{1}{6}\left[g^3\right]_2^6 = \otimes \qquad\qquad \frac{dg}{dx} = 2$$

$$\otimes = \frac{1}{6}\left(6^3 - 2^3\right) = \frac{104}{3} \qquad\qquad dx = \frac{1}{2}\, dg$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad\qquad g(x) = 2(x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(2)} g^2 \; dg = \frac{1}{2} \int_2^6 g^2 \; dg = \frac{1}{6} \left[g^3\right]_2^6 = \otimes \qquad\qquad \frac{dg}{dx} = 2$$

$$\otimes = \frac{1}{6}\left(6^3 - 2^3\right) = \frac{104}{3} \qquad\qquad dx = \frac{1}{2}\, dg$$

oder

$$\otimes = \frac{1}{6}\left[2^3(x+1)^3\right]_0^2$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad\qquad g(x) = 2(x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(2)} g^2 \; dg = \frac{1}{2} \int_2^6 g^2 \; dg = \frac{1}{6} \left[g^3\right]_2^6 = \otimes \qquad\qquad \frac{dg}{dx} = 2$$

$$\otimes = \frac{1}{6} \left(6^3 - 2^3\right) = \frac{104}{3} \qquad\qquad dx = \frac{1}{2}\, dg$$

oder

$$\otimes = \frac{1}{6} \left[2^3 (x+1)^3\right]_0^2 = \frac{2^3}{6} \; \left((2+1)^3 - (0+1)^3\right)$$

Beispiel

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad\qquad g(x) = 2(x+1)$$

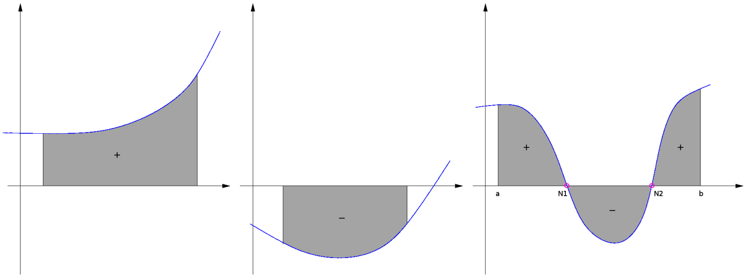
$$= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(2)} g^2 \; dg = \frac{1}{2} \int_2^6 g^2 \; dg = \frac{1}{6} \left[g^3\right]_2^6 = \otimes \qquad\qquad \frac{dg}{dx} = 2$$

$$\otimes = \frac{1}{6} \left(6^3 - 2^3\right) = \frac{104}{3} \qquad\qquad dx = \frac{1}{2} \, dg$$

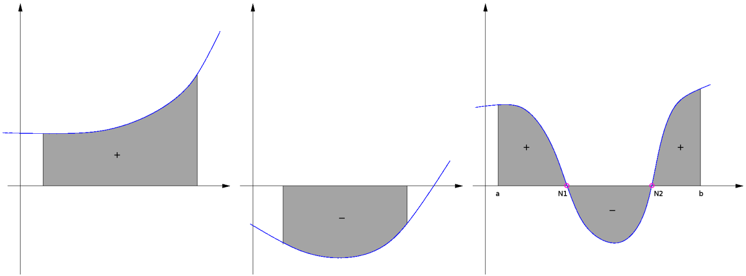
oder

$$\otimes = \frac{1}{6} \left[2^3(x+1)^3\right]_0^2 = \frac{2^3}{6} \; \left((2+1)^3 - (0+1)^3\right) = \frac{4}{3} \; \left(3^3 - 1\right) = \frac{104}{3}$$

“tatsächlich” Flächeninhalte berechnen

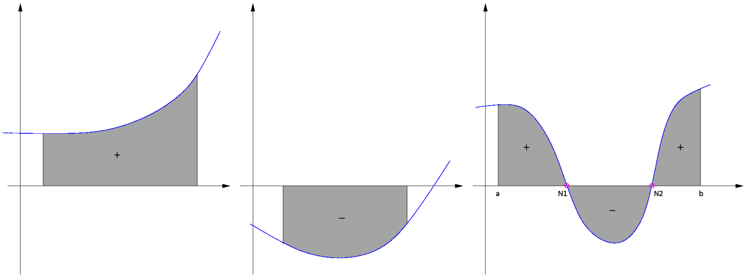


“tatsächlich” Flächeninhalte berechnen



$$A = \int_{a}^{N1} f(x)\ dx - \int_{N1}^{N2} f(x)\ dx + \int_{N2}^{b} f(x)\ dx$$

“tatsächlich” Flächeninhalte berechnen



$$A = \int_{a}^{N1} f(x)\ dx - \int_{N1}^{N2} f(x)\ dx + \int_{N2}^{b} f(x)\ dx$$

oder

$$A = \left|\int_{a}^{N1} f(x)\ dx\right| + \left|\int_{N1}^{N2} f(x)\ dx\right| + \left|\int_{N2}^{b} f(x)\ dx\right|$$

Beispiele

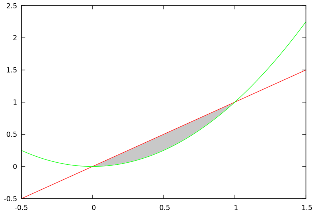
1. Flächeninhalt A zwischen $f(x) = \cos x$ und der x-Achse über dem Intervall $[0, 2\pi]$:

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \; dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \; dx \\ &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= 2 - (-2) = 4 \end{aligned}$$

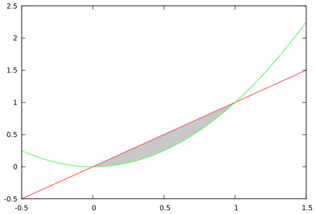
Beispiele

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



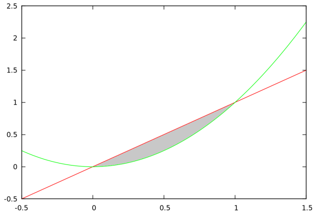
Beispiele

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



$$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}.$$

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



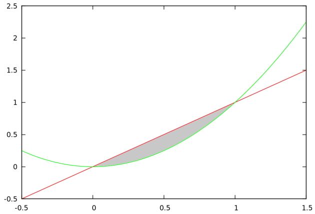
$$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}.$$

Dazwischen gilt

$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5).$$

Beispiele

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



$$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}.$$

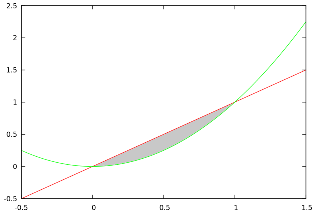
Dazwischen gilt

$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5).$$

gesuchter Flächeninhalt:

$$A = \int_0^1 f(x)\ dx - \int_0^1 g(x)\ dx$$

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



$$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}\,.$$

Dazwischen gilt

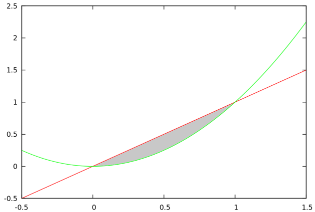
$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5)\,.$$

gesuchter Flächeninhalt:

$$A = \int_0^1 f(x)\ dx - \int_0^1 g(x)\ dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\ dx = \int_0^1 x - x^2\ dx$$

Beispiele

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



$$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0,1\}\,.$$

Dazwischen gilt

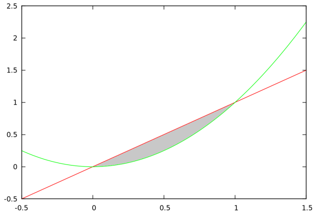
$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5)\,.$$

gesuchter Flächeninhalt:

$$A = \int_0^1 f(x)\;dx - \int_0^1 g(x)\;dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\;dx = \int_0^1 x - x^2\;dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

2. Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist:



$$f(x) - g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}.$$

Dazwischen gilt

$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5).$$

gesuchter Flächeninhalt:

$$A = \int_0^1 f(x)\ dx - \int_0^1 g(x)\ dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\ dx = \int_0^1 x - x^2\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Lernziele

- Sie verstehen in welchem Sinne die bestimmte Integration einer Summation entspricht.
- Sie verstehen den Zusammenhang zwischen Stammfunktion/unbestimmter Integration und Riemann-Integral/bestimmter Integration, der durch den HDI gegeben ist.
- Sie sind in der Lage bestimmte Integrale zu berechnen sofern Sie auch in der Lage sind eine Stammfunktion des Integranten zu bestimmten.
- Sie können Linearität, partielle Integration und Substitution anwenden.
- Sie können Flächeninhalte zwischen Graphen und x-Achse über einem Intervall $[a, b]$ berechnen, auch wenn der Integrant auf diesem Intervall sein Vorzeichen ändert.

Motivation

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \, dx = ?$$

Motivation

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = ?$$

Mit

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}$$

Motivation

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = ?$$

Mit

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x}$$

und

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = ?$$

Mit

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x}$$

und

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

erhalten wir ein “falsches” Ergebnis. Warum?

Motivation

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = ?$$

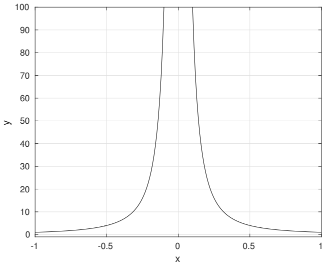
Mit

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x}$$

und

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

erhalten wir ein “falsches” Ergebnis. Warum? Siehe Graphik rechts.



$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = ?$$

Mit

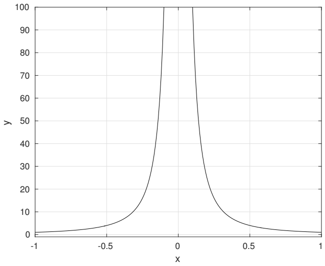
$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x}$$

und

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

erhalten wir ein “falsches” Ergebnis. Warum? Siehe Graphik rechts.

Was ist passiert? Wo steckt der Fehler?



$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = ?$$

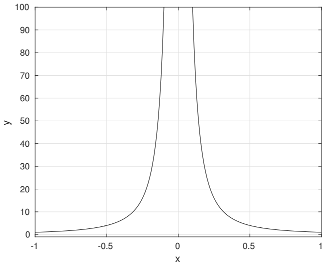
Mit

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x}$$

und

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

erhalten wir ein "falsches" Ergebnis. Warum? Siehe Graphik rechts.



Was ist passiert? Wo steckt der Fehler? Das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

existiert gar nicht. Was bedeutet das?

Definition: uneigentliches Integral (Teil 1/2)

1. Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, R]$, $a < R < \infty$ Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\, dx$ existiert, heißt das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\, dx$$

konvergent. Analog definiert man das Integral für $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

2. Sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\epsilon, b]$, $a < a+\epsilon < b$, Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$ existiert, so heißt das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$$

konvergent. Analog definiert man das Integral für $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

...

Definition: uneigentliches Integral (Teil 2/2)

...

3. Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a,b[$ Riemann–integrierbar ist und sei $c \in]a,b[$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x)\,dx$$

und

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

existieren, heißt das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

konvergent. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $c \in]a,b[$.

Beispiele

1. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx$$

konvergiert für $s < 1$. Denn:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^s}\, dx$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \frac{\epsilon^1}{\epsilon^s}\right) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \frac{\epsilon^1}{\epsilon^s}\right) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty & s > 1 \\ [\ln x]_\epsilon^1 = -\ln \epsilon \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty & s = 1 \end{cases}$$

Beispiele

2. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

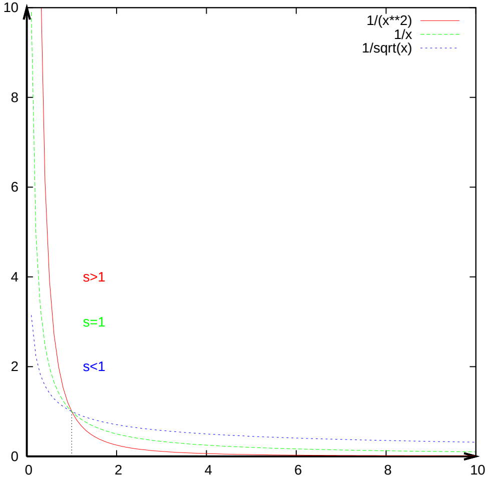
konvergiert für $s > 1$. Denn:

$$\int_1^c \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^c & = \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s}-1\right) & \xrightarrow{c\to\infty} \infty & s<1 \\ \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^c & = \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s}-1\right) & \xrightarrow{c\to\infty} \frac{-1}{1-s} & s>1 \\ [\ln x]_1^c & = \ln c & \xrightarrow{c\to\infty} \infty & s=1 \end{cases}$$

Beispiele zusammengefasst

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & \text{für} \quad s < 1 \\ \infty & \text{für} \quad s > 1 \\ \infty & \text{für} \quad s = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad s < 1 \\ \frac{-1}{1-s} & \text{für} \quad s > 1 \\ \infty & \text{für} \quad s = 1 \end{cases}$$



Beispiel: Cauchyscher Hauptwert

Die Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx \quad \text{und} \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$$

existieren jeweils nicht.

Beispiel: Cauchyscher Hauptwert

Die Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx \quad \text{und} \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$$

existieren jeweils nicht. Unter *Cauchyschem Hauptwert* verstehen wir die Zahl

$$\lim_{b \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \right) = \lim_{b \searrow 0} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - 1 + 1 - \frac{1}{b^2} \right) = 0$$

Beispiel: Cauchyscher Hauptwert

Die Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx \quad \text{und} \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$$

existieren jeweils nicht. Unter *Cauchyschem Hauptwert* verstehen wir die Zahl

$$\lim_{b \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \right) = \lim_{b \searrow 0} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - 1 + 1 - \frac{1}{b^2} \right) = 0$$

Wegen der "Rechenregeln für den Limes" ist

$$\lim_{b \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \right) \neq \lim_{b \searrow 0} \int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx + \lim_{b \searrow 0} \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx\,.$$

Da die beiden Limes auf der rechten Seite nicht konvergent sind.

Beispiel: Cauchyscher Hauptwert

Die Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$$

existieren jeweils nicht. Unter *Cauchyschem Hauptwert* verstehen wir die Zahl

$$\lim_{b\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\right) = \lim_{b\searrow 0} \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - 1 + 1 - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

Wegen der "Rechenregeln für den Limes" ist

$$\lim_{b\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\right) \neq \lim_{b\searrow 0}\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx + \lim_{b\searrow 0}\int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\,.$$

Da die beiden Limes auf der rechten Seite nicht konvergent sind. Deshalb ist Cauchyscher Hauptwert nicht gleichzusetzen mit dem uneigentlichen Integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \overset{!!!}{\neq} \lim_{b\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\right)\,.$$

Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital 1661-1704

Johann I Bernoulli 1667-1748

Satz: von de l'Hospital

Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall (a, b) und $g'(x) \neq 0,\ x \in (a, b)$. Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 \qquad \wedge \qquad \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty \qquad \wedge \qquad \lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty\,.$$

Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

falls der rechts stehende Limes existiert. Das Analoge gilt für $x \nearrow b$.

Bemerkung: Dieser Satz wird uns das Leben mit Grenzwertbildung enorrrm vereinfachen. Bisher ging es darum, Ableitungen herzuleiten und de l'Hospital verwendet Ableitungen, weshalb wir ihn bislang nicht verwenden durften.

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Egal wie "klein" n ist:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Egal wie "klein" n ist:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{n\, x^{n-1}}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Egal wie "klein" n ist:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\,x^n} = 0$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Egal wie "klein" n ist:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\,x^n} = 0$$

3. Egal wie "groß" n ist:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Egal wie "klein" n ist:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n\,x^n} = 0$$

3. Egal wie "groß" n ist:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n\,x^{n-1}}$$

Beispiele: Grenzwertberechnung mit de l'Hospital

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

2. Egal wie "klein" n ist:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\,x^n}=0$$

3. Egal wie "groß" n ist:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{n\,x^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{n!}=\infty$$

Lernziele

- Ihnen ist die Notwendigkeit von uneigentlichen Integralen klar.
- Sie wissen wie Sie mit uneigentlichen Integralen methodisch umgeht, sofern Sie das "Uneigentliche" erkannt haben.
- Sie wissen wie und wann die Regel von de l'Hospital angewendet werden kann.