Blatt 3: Relationen und Äquivalenzklassen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Mathe als Sprache

Sprachaufgabe 1:

(a) Erklären Sie den Begriff "Relation" in Worten und überlegen Sie sich ein anschauliches Beispiel.

(b) Erklären Sie in Worten (anschaulich, gerne mir Beispiel) wann eine Relation eine "Äquivalenzrelation" ist.

(c) Erklären Sie in Worten was eine "Äquivalenzklasse" ist.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

(Äquivalenz-) Relationen & Äquivalenzklassen

Fingerübung 2:

Es seien die Mengen

$$\begin{aligned} \text{M} &= \{\text{Audi, VW, Porsche}\} \\ \text{C} &= \{\text{rot, schwarz, weiß}\} \\ \text{A} &= \{\text{Anhängerkuppling, Einparkhilfe, Schiebedach}\} \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Kann eine Relation gemäß

$$R := \{(\text{Audi, schwarz, Einparkhilfe}), \\ (\text{Porsche, rot, Einparkhilfe}), (\text{Audi, weiß, Schiebedach})\} \subseteq M \times C \times A$$

eine Äquivalenzrelation darstellen? Ist das überhaupt eine Relation? Diskutieren Sie das mit Ihrem Nachbarn.

(b) Skizzieren Sie die Relation

$$S = \{(Audi, rot), \ (Audi, weiß), \ (VW, schwarz), \ (Porsche, rot)\} \subseteq M \times C \, .$$

(c) Wir definieren jetzt mal

$$B := M \times C \times A$$

und dann die Relation

$$S \subseteq B \times B$$

gemäß

$$b_1 S b_2 \ :\Leftrightarrow \ P(b_1) = P(b_2) \, ,$$

wobei $P(b) = P(Marke, Farbe, Ausstattung)$ den Preis des Autos mit der Marke "Marke" der Farbe "Farbe" und der Austattung "Ausstattung" beschreibt. Handelt es sich nun bei der Teilmenge S um eine ÄR? Beschreiben Sie in Worten die ÄK, die man nun bilden kann.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 4

Fingerübung 3:

Welche der folgenden Relationen ist eine Äquivalenzrelation?

(a) "x und y gehen in die selbe Klasse" auf der Menge aller Schüler

(b) "$x \geq y$" auf der Menge der reellen Zahlen

(c) "x und y sind ungerade" auf $\mathbb{N}$

(d) "x und y besitzen den selben Rest bei der Division durch 2" auf $\mathbb{N}_0$

(e) "x=y" auf einer beliebigen, nichtleeren Grundmenge M

Skizzieren Sie jeweils die Relationen und benennen Sie falls vorhanden jeweils die Äquivalenzklassen. Überzeugen Sie sich davon, dass die ÄK paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung wieder die gesamte Grundmenge ergibt.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4: Ordnung

Untersuchen Sie die folgenden Relationen darauf ob Sie reflexiv, symmetrisch, transitiv oder antisymmetrisch sind.

(a)

$$R := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \, k \in \mathbb{N} \ : \ b = k \, a\}$$

(b)
$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; x \geq y \;\wedge\; \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

(c) Skizzieren Sie jeweils die Relationen in ein Achsenkreuz.

Selbsteinschätzung: $\square$ Lösung auf Seite 6

Lösung 1

(a) Eine Relation beschreibt für je zwei Elemente einer Menge eine Bezieung, in der diese Elemente zueinander stehen. Zum Beispiel könnte die Menge aus allen Menschen der Welt bestehen und die Relation wäre die Beziehung "spricht die gleiche Sprache". Zwei Menschen, die Englisch sprechen stehen dann in diesem Sinne in einer Beziehung zueinander.

(b) Eine Relation wird dann zu einer Äquivalenzrelation, wenn

- Jedes Element zu sich selbst in Relation steht, d.h. für das Beispiel: Jeder spricht die Sprache, die er selbst spricht. (sicher immer erfüllt)
- Wenn ein Element zum anderen in Relation steht und das andere folglich auch zu ersterem. Im Beispiel: Wenn einer die gleiche Sprache spricht wie der andere, dann spricht der andere auch die gleiche Sprache wie erster. (klingt vernñftig)
- Wenn ein Element zu einem weiteren in Relation steht und letzteres zu einem dritten, dann steht auch das erste Element zum dritten in Relation. Wenn die erste Person die gleiche Sprache spricht wie die zweite, diese die gleiche wie die dritte dann sprechen die erste und dritte Person auch die gleiche Sprache.

(c) Eine Äquivalenzklasse ist eine Teilmenge einer Ursprungsmenge, die Elemente enthält die paarweise zu einer gegebenen Relation in einer Beziehung zueinander stehen. Diese zugrundeliegende Relation stellt eine Äquivalenzrelation dar was dazu führt das die Grundmenge in disjunkte Teilmengen, jeweils Äquivalenzklassen, vollständig zerlegt wird.

Lösung 2

(a) Damit eine Relation eine Äquivalenzrelation sein kann, muss sie auf jeden Fall binär sein, also zweistellig. Man kann sonst die Axiome (R1), (R2) und (R3) gar nicht überprüfen.

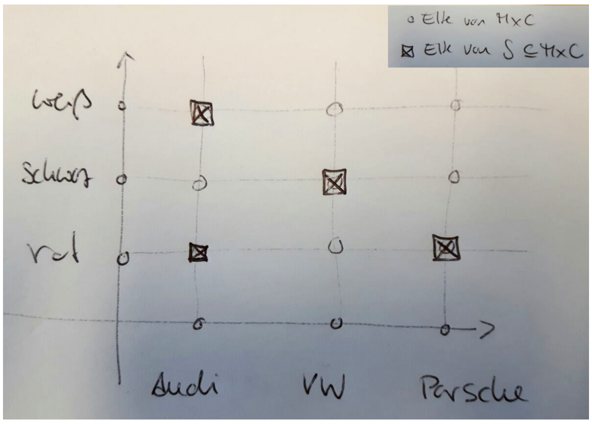
Des Weiteren muss die Relation eine Teilmenge der Produktmenge ein und der selben Menge M sein. Etwa die Reflexivität für $R \subseteq M \times C$ (und auch die anderen Kriterien) lassen sich nicht überprüfen:

$$\text{Audi} R \text{Audi} \quad \text{ist gar nicht definiert.}$$

Es ließe sich auch nicht eine Menge in disjunkte Teilmengen zerlegen lassen. Welche denn überhaupt? M oder C?

Eine Relation an sich ist es schon. Eine Relation ist einfach eine Teilmenge einer Produktmenge. Mehr Eigenschaften braucht es zunächst nicht.

(b)



(c) Ja eine ÄR ist das. Die Klassen beinhalten nun jeweils Kombinationen aus Modellen, Farbe und Ausstattung, die in der Summe auf den gleichen Verkaufspreis kommen.

Lösung 3

(a) "x und y gehen in die selbe Klasse" auf der Menge aller Schüler ist eine ÄR. Äk sind die einzelnen Schulklassen.

(b) "$x \geq y$" auf der Menge der reellen Zahlen ist keine ÄR, da Symmetrie nur für $x = y$ gilt. Es gibt also auch keine ÄK.

(c) "x und y sind ungerade" auf $\mathbb{N}$ ist keine ÄR, da Reflexivität nicht für alle $x \in \mathbb{N}$ sondern nur für die ungeraden Zahlen in $\mathbb{N}$ gilt.

(d) "x und y besitzen den selben Rest bei der Division durch 2" auf $\mathbb{N}_0$ ist eine R̈, denn:

(R1) xRx $\Leftrightarrow$ x besitzt bei Division den gleichen Rest wie x. jo. Kann man wohl meinen.

(R2) xRy $\Leftrightarrow$ x und y besitzen den gleichen Rest bei Division durch 2 $\Rightarrow$ y und x besitzen den gleichen Rest bei Division durch 2 $\Leftrightarrow$ yRx.

(R3) $xRy \wedge yRz$ $\Leftrightarrow$ x und y besitzen den gleichen Rest bei Division durch 2 und y und z besitzen den gleichen Rest bei Division durch 2. Dann gilt auch x und z besitzen den gleichen Rest bei Division durch 2 $\Leftrightarrow$ xRz

Alle möglichen Äquivalenzklassen sind gegeben durch:

$$[0]_R = \{x \in \mathbb{N} \mid \mod(x, 2) = 0\} = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$$
$$[1]_R = \{x \in \mathbb{N} \mid \mod(x, 2) = 1\} = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$$

Es gilt

$$[0]_R \cap [1]_R = \emptyset$$

und

$$\mathbb{N}_0 = [0]_R \cup [1]_R \,.$$

(e) "x=y" auf einer beliebigen, nichtleeren Grundmenge M ist eine ÄR. Um konkrete ÄK zu benennen, muss M konkret benannt werden.

Lösung 4

(a)

$$R := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, b = k\, a\}$$

reflexiv: Frage in Worten: Existiert eine natürliche Zahl k ($\exists\, k \in \mathbb{N}$), so dass $a = k\, a$ ist? Klar. $k = 1$. Die Relation ist reflexiv.

symmetrisch: Wenn wir für ein $k \in \mathbb{N}$ die Darstellung $b = k\, a$ haben muss es noch lange kein $l \in \mathbb{N}$ geben mit $a = l\, b$. Beispiel: $(1, 2) \in R$ es gibt aber kein $l \in \mathbb{N}$ mit $1 = l \cdot 2$. Die Relation ist nicht symmetrisch.

transitiv: Die Frage ist: Folgt aus aRb und bRc, dass auch aRc erfüllt ist. Ja, denn:

$$\exists\, k, l \in \mathbb{N} \,:\, b = k\, a \quad \wedge \quad c = l\, b$$

und damit ist doch

$$c = l\, b = l\, k\, a\,.$$

Es ist ja $l \cdot k \in \mathbb{N}$ und damit gilt die Relation für a und c ebenfalls.

antisymmetrisch:

$$\begin{aligned} aRb \;&:\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{N}' : b = k\, a \\ bRa \;&:\Leftrightarrow\; \exists\, l \in \mathbb{N}' : a = l\, b \\ &\qquad\qquad\Rightarrow a = l\, k\, a \\ &\qquad\qquad\Rightarrow l = k = 1 \\ &\qquad\qquad\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

Die Relation ist also antisymmetrisch und folglich handelt es sich hierbei um eine Ordnung.

(b) und (c)

R ist reflexiv und transitiv, nicht aber symmetrisch; dafür aber antisymmetrisch.
Die rosa markierten Punkte im Bild rechts sind Elemente von R.