Digitalisierung

Signale, Systeme und Sensoren: Vorlesung 15

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

Zeitliche Abtastung

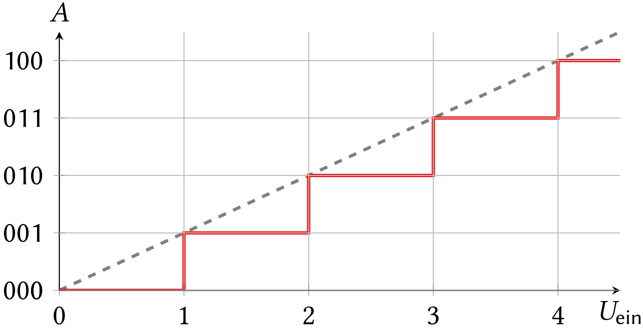
- Für die digitale Signalverarbeitung müssen die von den Sensoren gelieferten analogen Spannungen in eine digitale Form, d.h. in eine binäre Zahlenkette umgewandelt werden. Dies geschieht durch einen **Analog-Digital-(A/D)-Wandler**.
- Das Signal wird dazu in regelmäßigen Abständen zeitlich abgetastet. Jeder A/D-Wandler braucht dazu eine bestimmte Zeit. Je kürzer diese ist, desto höher kann die **Abtastfrequenz**, gemessen in Abtastwerten (Samples) pro Sekunde bzw. Hz, sein.
- Im Idealfall findet die A/D-Wandlung in immer exakt gleichen Zeitabständen statt. Durch zufällige Variationen der Abstände tritt jedoch **Jitter** auf, der zu einer Verfälschung des digitalen Signals führt.

Quantisierung des Abtastwertes

- Die zeitlich abgetasteten Signale müssen auch in ihren Werten quantisiert werden. Dies begrenzt durch die Anzahl der Quantisierungsstufen die Auflösung des Eingangssignals.
- Beim Ausgangssignal zeigt sie sich im Ziffernschritt auf der niederwertigsten Stelle (**Least Significant Bit – LSB**). Die infolge der Quantisierung entstehende Abweichung nennt man **Quantisierungsfehler**. Hinzu kommt auch noch das Wärmerauschen der Elektronik.
- Der Jitter führt zu weiteren Fehlern, die die Quantisierungsstufe nicht überschreiten sollten. So darf z.B. der Jitter bei einem 1 kHz-Signal und 8-Bit-Abtastung nicht mehr als 1.2 ms betragen, bei 16-Bit-Abtastung nicht mehr als 4.9 µs.
- **Dynamikumfang:** Quotient aus dem größten und kleinsten darstellbaren Wert., üblicherweise in Dezibel angegeben. Beispiele: 8-Bit-A/D-Wandler - 48 dB (entspricht Audiocassette), CD mit 16 Bit - 96 dB.

Quantisierungskennlinie

Die **Quantisierungskennlinie** beschreibt den Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung U_{ein} und dem Ausgangssignal A eines Quantisierers. Ihr Verlauf ist treppenförmig.



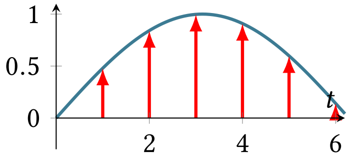
Der Messbereich des Eingangssignals wird durch den Quantisierer in Intervalle unterteilt. Die **Quantisierungsstufe** ist der Ausgabewert, auf den alle Werte aus einem Intervall abgebildet werden.

Lineare und nichtlineare Quantisierung

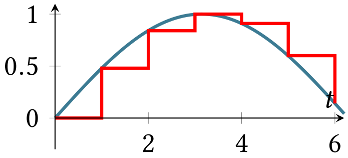
- Eine **lineare Quantisierungskennlinie** hat gleiche breite Stufen über den gesamten Eingangsbereich; im Grenzfall extrem kleiner Stufen erscheint sie als Gerade. Solche Kennlinien werden in der Messtechnik und in der Telekommunikation bei hochwertigen Signalen genutzt.
- Eine **nichtlineare Quantisierungskennlinie** hat innerhalb ihres Wertebereiches eine unterschiedlich feine Stufung. Solche Kennlinien werden bei Audio- und Videosignalen verwendet, um diese zu komprimieren. Das menschliche Gehör nimmt durch eine feinere Stufung bei leisen Signalen diese in geringerem Umfang wahr als bei linearer Kennlinie.
- Fehler in der Quantisierungskennlinie sind eine weitere Fehlerquelle in digitalen Signalen, z.B. Nullpunktfehler, Verstärkungsfehler, ungewollte Nichtlinearitäten, unterschiedlich breite und hohe Stufen.

Pulsabtastung und “Sample and Hold”

Pulsabtastung:



Sample and hold:

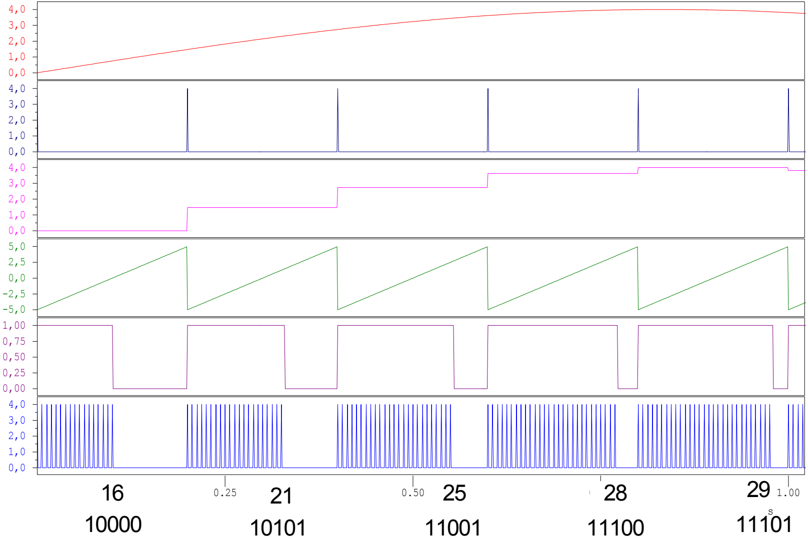


- **Pulsabtastung:** Bei der Abtastung ist man nur an Signalwerten an diskreten Zeitpunkten interessiert. Die Pulsabtastung dient v.a. als theoretisches Modell.
- **Sample and hold:** In der Praxis lassen sich enge Pulse nur schwer erzeugen und übertragen. Es ist oft bequemer, das abgetastete Signal als Haltewert zu erzeugen. Der Zeitraum, in dem der Wert gehalten wird, wir meist von der Auswerteelektronik des A/D-Wandlers gebraucht.

Verfahren der A/D-Wandlung

- **Zählverfahren:** es wird abgezählt, wie oft man eine dem LSB entsprechende Referenzspannung addieren muss, um die Eingangsspannung zu erhalten. Die Zahl der Schritte ist gleich dem Ergebnis. Es geht dementsprechend langsam, der Aufwand dafür ist aber klein.
- **Parallelverfahren:** man vergleicht die Eingangsspannung gleichzeitig mit n Referenzspannungen und stellt fest, zwischen welchen beiden sie liegt. Man braucht dafür nur einen Schritt, der Aufwand ist aber sehr groß.
- **Wägeverfahren:** man vergleicht zuerst die Eingangsspannung mit einer Referenzspannung, die die Hälfte des Wertebereiches markiert (bestimmt die höchste Stelle der Binärzahl). Ist die Spannung größer, setzt man die höchste Stelle auf Eins und subtrahiert die Referenzspannung. Den Rest vergleicht man mit der nächstniedrigeren Stelle usw. Man benötigt also so viele Vergleichsschritte, wie die Zahl Stellen besitzt und ebenso viele Referenzspannungen.

Beispiel für ein Zählverfahren: Sägezahnverfahren



Quelle: Karrenberg, 2012

Übersicht

Hilfsmittel 1: Modulationseigenschaft der Fouriertransformation

Beispiel: Verschiebungssätze

$$f(t-a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$$

$$f(t) \cdot e^{iat} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega - a)$$

Die gleiche Verschiebungsoperation im Zeit- wie im Frequenzbereich führt zum gleichen Effekt im jeweils anderen Bereich.

Für die Faltung haben wir gesehen, dass gilt:

$$h(t) * f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega) \cdot F(\omega).$$

Auch hier gilt die Umkehrung (**Modulationseigenschaft**):

$$h(t) \cdot f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega) * F(\omega),$$

d.h. Multiplikation im Zeitbereich führt zur Faltung im Frequenzbereich!

Hilfsmittel 2: Faltung mit Impulsfunktionen

Faltung im Frequenzbereich:

$$h(t) * f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega) \cdot F(\omega).$$

Für die Impulsfunktion gilt $\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad 1$, d.h.

$$\delta(t) * f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad 1 \cdot F(\omega) = F(\omega).$$

Ein Faltung mit der Impulsfunktion lässt eine Funktion also **unverändert**:

$$\delta(t) * f(t) = f(t)$$

Verschobene Impulsfunktion: $\delta(t - t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-i\omega t_0} \cdot 1 = e^{-i\omega t_0}$ (Verschiebungssatz). Faltung mit verschobener Impulsfunktion:

$$\delta(t - t_0) * f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-i\omega t_0} \cdot F(\omega), \quad \text{d.h.}$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$

Die Faltung mit einer verschobenen Impulsfunktion **verschiebt** also die ganze Funktion um den gleichen Betrag.

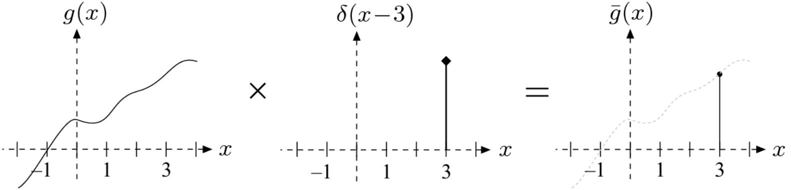
Abtastung mit dem Dirac-Impuls

Wird ein kontinuierliches Signal $f(t)$ punktweise mit dem Dirac-Impuls multipliziert und dann integriert, so erhält man (Ausblendeeigenschaft)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t)\, dt = f(0)$$

d.h. einen einzelnen, **diskreten Abtastwert** bei 0. Durch Verschiebung von $\delta(t)$ an t_0 kann $f(t)$ an *beliebigen Stellen* abgetastet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$



Quelle: Burger & Burge, 2005

Modellierung der Pulsabtastung

Um eine Funktion an mehreren Stellen abzutasten (z.B. t_1 und t_2), werden zuerst 2 verschobene Exemplare von $\delta(t)$ mit $f(t)$ multipliziert und dann addiert:

$$\begin{aligned}\bar{f}(t) &= f(t)\delta(t-t_1) + f(t)\delta(t-t_2)\\ &= f(t)[\delta(t-t_1)+\delta(t-t_2)]\end{aligned}$$

Die einzelnen Abtastwerte erhält man durch Integration in einer Umgebung um beide Zeitpunkte (entspricht Sample and Hold):

$$f(t_1) = \int_{t_1-\Delta t}^{t_1+\Delta t} \bar{f}(t)\,dt, \quad f(t_2) = \int_{t_2-\Delta t}^{t_2+\Delta t} \bar{f}(t)\,dt$$

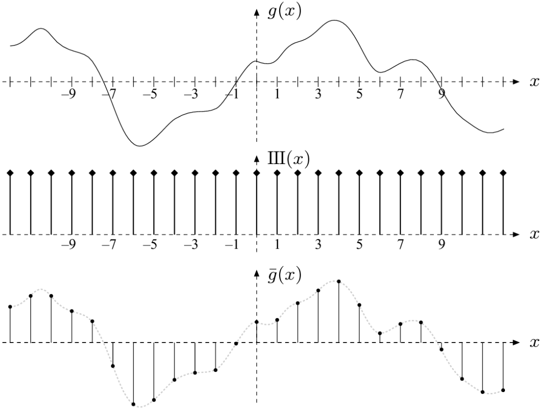
Die Pulsbtastung einer Funktion an einer *Folge* von n Zeitpunkten $t_i = 1, 2, \ldots, n$ kann daher als Summe von n Einzelabtastungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\bar{f}(t) &= f(t)[\delta(t-1)+\delta(t-2)+\ldots+\delta(t-n)]\\ &= f(t)\sum_{i=1}^{n}\delta(t-i)\end{aligned}$$

Pulsabtastung mit der Kammfunktion

Kammfunktion: Verlängerung der Pulsfolge nach ∞ und $-\infty$

$$\text{III}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - i)$$



Pulsabtastung:

$$\bar{f}(t) = f(t) \cdot \text{III}(t)$$

Abtastung im Abstand τ:

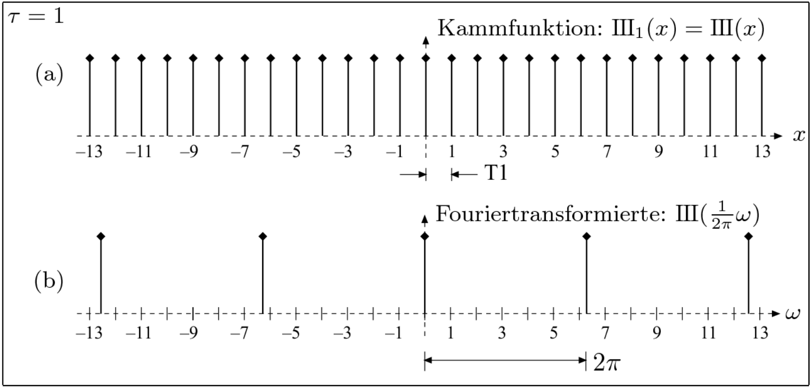
$$\bar{f}(t) = f(t) \cdot \text{III}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Quelle: Burger & Burge, 2005

Fouriertransformierte der Kammfunktion (1)

Die Fouriertransformierte der Kammfunktion ist wieder eine Kammfunktion:

$$\mathrm{III}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{III}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right)$$

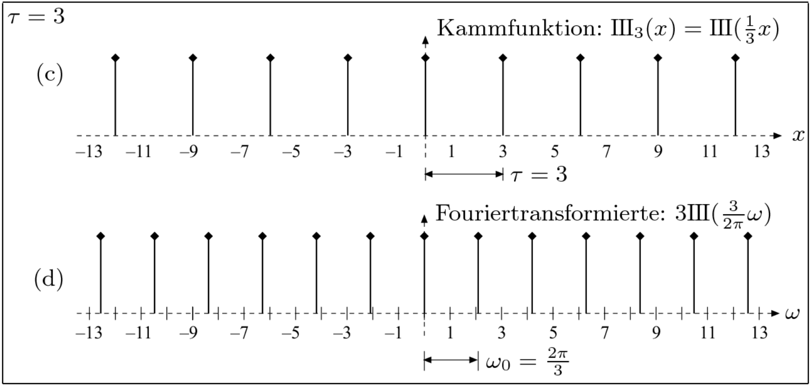


Quelle: Burger & Burge, 2005

Fouriertransformierte der Kammfunktion (2)

Kammfunktion mit Abtastinterval τ:

$$\mathrm{III}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tau\,\mathrm{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$



Quelle: Burger & Burge, 2005

Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (1)

- Dem Produkt im Ortsraum entspricht die Faltung im Spektralraum (Modulationseigenschaft):

$$f(t) \cdot \mathrm{III}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) * \tau\, \mathrm{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$

- Faltung mit der Impulsfunktion ergibt wieder die Originalfunktion:

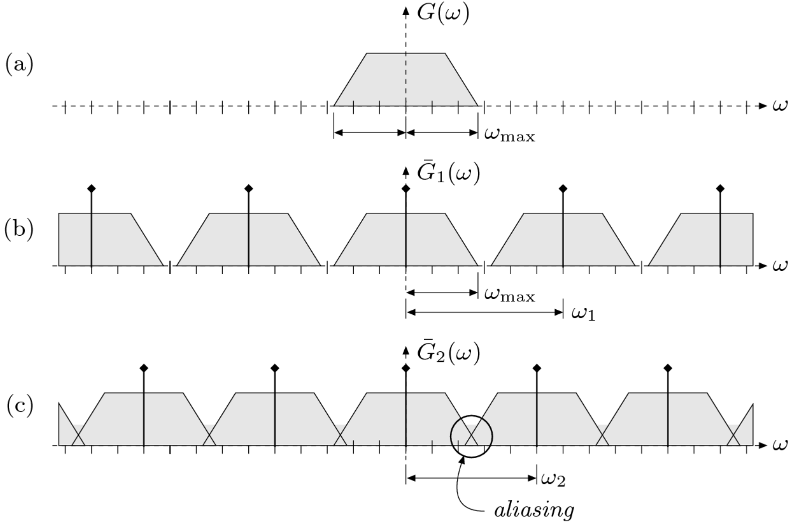
$$F(\omega) * \delta(\omega) = F(\omega)$$

- Faltung mit einem um d verschobenen Impuls reproduziert ebenfalls die Funktion, aber verschoben um Distanz d :

$$F(\omega) * \delta(\omega - d) = F(\omega - d)$$

- Fouriertransformierte einer pulsabgetasteten Funktion: **Spektrum des ursprünglichen, nicht abgetasteten Signals wird unendlich oft an jedem Puls der Kammfunktion repliziert.** Das resultierende Spektrum ist also **periodisch** mit Periode $\omega_s = \frac{2\pi}{\tau}$ (Abtastfrequenz).

Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (2)



Quelle: Burger & Burge, 2005

Abtasttheorem

- Solange sich die replizierten Spektren des Originalsignals nicht überlappen, kann das ursprüngliche Signal **ohne Verlust** aus einer der Kopien im Spektrum bzw. aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden.
- Spektrum muss dafür bandbegrenzt sein: Maximalfrequenz ω_{max} darf also die halbe Abtastfrequenz $\frac{\omega_s}{2}$ (**Nyquistfrequenz**) nicht überschreiten:

  $$\omega_{\text{max}} \leq \frac{1}{2}\omega_s \quad \text{bzw.} \quad \omega_s \geq 2\omega_{\text{max}}$$

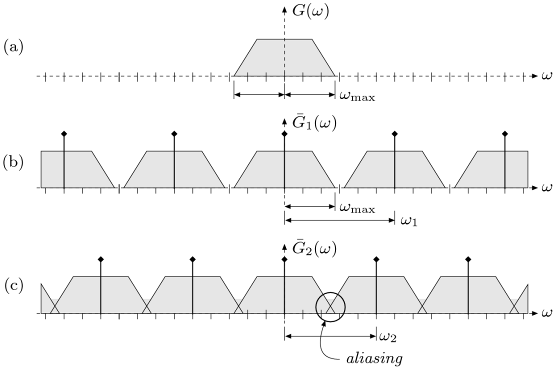
  Die Abtastfrequenz muss mindestens das Doppelte der Bandbreite betragen (**Abtasttheorem**).
- Wird diese Bedingung nicht eingehalten, kann das kontinuierliche Signal nicht mehr fehlerfrei aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden: **Aliasing**.

Übersicht

Aliasing

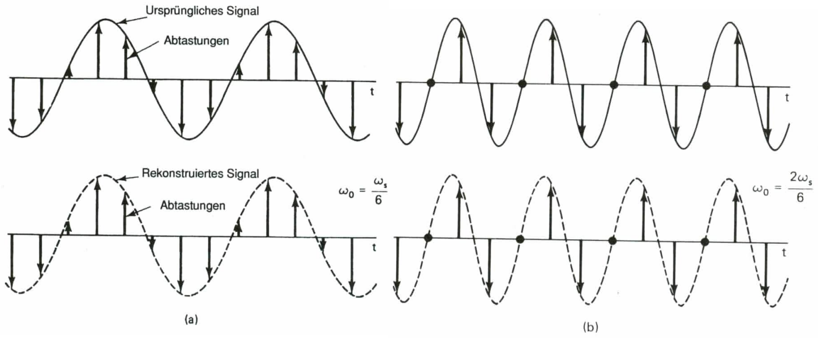
Ist die Abtastfrequenz kleiner als die doppelte Grenzfrequenz des Signals, so überlappen die Kopien des Spektrums.

Folge: **Aliasing** bzw. Überlappung



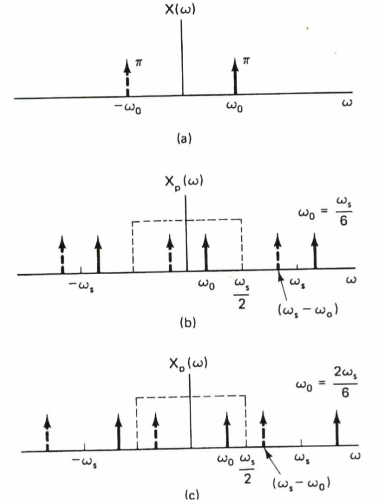
Damit ein analoges Signal unverfälscht digital verarbeitet werden kann, muss sein Spektrum bandbegrenzt sein. Bevor ein analoges Signal digitalisiert wird, sollte es daher über einen analogen Tiefpass (**Anti-Aliasing-Filter**) bandbegrenzt werden.

Ausreichend dichte Abtastung im Zeitbereich



[Quelle: Oppenstein & Willsky.]

Ausreichend dichte Abtastung im Frequenzbereich

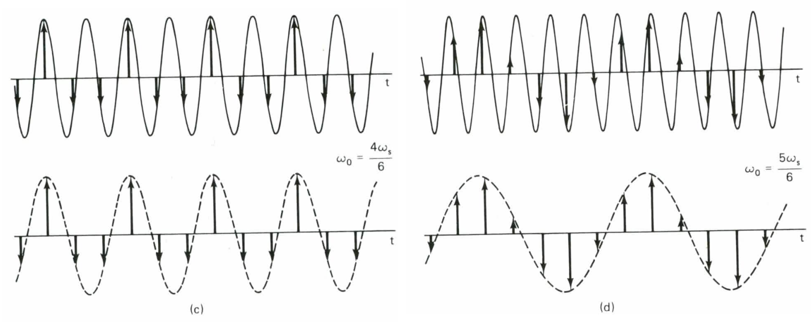


$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{6}; \quad x_r(t) = \cos\omega_0 t = x(t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6}; \quad x_r(t) = \cos\omega_0 t = x(t)$$

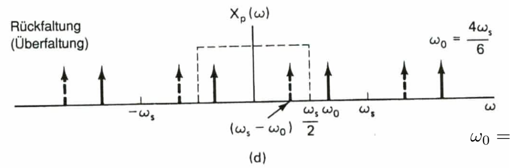
[Quelle: Oppenstein & Willsky.]

Unterabtastung im Zeitbereich

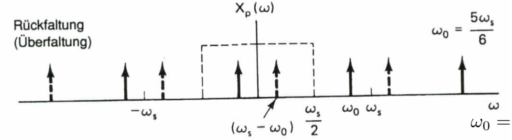


Ist die Frequenz genau gleich der Abtastfrequenz, ergibt sich ein konstantes Signal!

Unterabtastung im Frequenzbereich



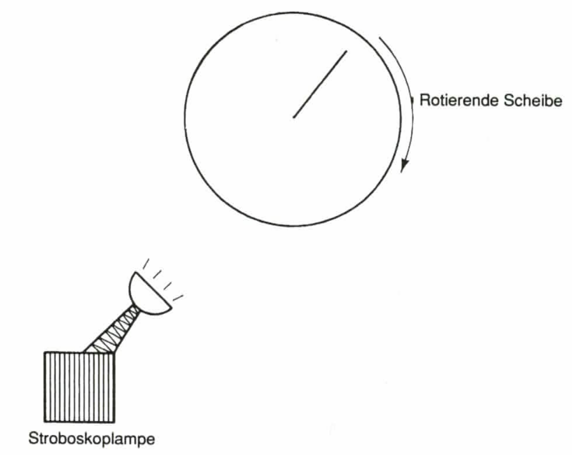
$$\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6}; \quad x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$$



$$\omega_0 = \frac{5\omega_s}{6}; \quad x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$$

Ist die Frequenz größer als die Nyquistfrequenz, aber kleiner als die Abtastfrequenz, nimmt die scheinbare Frequenz der Rekonstruktion immer weiter mit $\omega_s - \omega_0$ ab.

Stroboskopeffekt



[videoclips]