

LÖSUNG ÜBUNGSBLATT FOURIERTRANSFORMATION

Achtung: es werden hier nicht alle Zwischenschritte angegeben, aber in der Klausur sind diese unbedingt notwendig.

1. Symmetrie von Signalen

a.

$$f(-t) = \frac{1}{(-t)^n} = \begin{cases} f(t) & \text{für } n = 0, n \text{ gerade} \\ -f(t) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \text{gerade} \\ \Rightarrow \text{ungerade} \end{matrix}$$

b.

$$f(-t) = (-t)^n - t = \begin{cases} -f(t) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \text{keine Symmetrie} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \Rightarrow \text{ungerade}$$

c.

$$f(-t) = -t + 1 - 2\cos^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 t \Rightarrow \text{keine Symmetrie}$$

d.

$$f(-t) = \sin t + n(-t)^{n-1} \begin{cases} -f(t) & \text{für } n = 0, n \text{ gerade} \\ \text{keine Symmetrie} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow \text{ungerade}$$

e.

$$f(-t) = \frac{(-t)^{1-n}}{1-n} = \begin{cases} f(t) & \text{für } n \text{ ungerade} \geq 3 \\ -f(t) & \text{für } n \text{ gerade} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \text{gerade} \\ \Rightarrow \text{ungerade} \end{matrix}$$

2. Rechnen mit δ -Funktionen

a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin t \, dt = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

b.

$$\int_{-\infty}^0 \delta(t - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin t \, dt = 0$$

c.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(4 + t - T) \cdot e^{2t} \, dt = e^{2T-8}$$

3. Linearität der Fouriertransformation

a.

$$F(\omega) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{256}} - \frac{\sqrt{\pi}}{16}e^{-i(\frac{\omega^2}{256}-\frac{\pi}{4})} + 14\pi\delta(\omega) \quad (\text{Nr. 41, 38, 20})$$

b.

$$F(\omega) = \frac{1}{15b - 3i\omega} + \frac{i\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\pi) \quad (\text{Nr. 30, 26})$$

c.

$$f(t) = -4i\delta(t) + \frac{1}{2}|t|e^{-3|t|} + \frac{1}{2\pi} \quad (\text{Nr. 19, 35, 20})$$

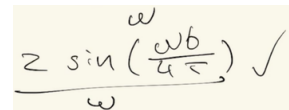
d.

$$f(t) = \frac{i}{2}(e^{-\sqrt{A}|t|} - B)\operatorname{sgn}t + \frac{1}{2}\operatorname{rect}\frac{t}{2C} \quad (\text{Nr. 32, 22, 28})$$

4. Rechenregeln der Fouriertransformation

a.

$$F(\omega) = \frac{2 \sin \frac{b\omega}{2}}{\omega} \quad (\text{Nr. 28})$$



b.

$$F(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (\text{Nr. 21})$$

c.

$$F(\omega) = \frac{-16e^{-i5\omega}}{4 + \omega^2} \quad (\text{Nr. 31})$$

d.

$$F(\omega) = 2\pi e^{-\frac{2}{3}\omega} \delta(\omega - 3) \quad (\text{Nr. 23})$$

e.

$$F(\omega) = i\sqrt{\pi} \cos\left(-\frac{1}{4}(\omega - 4)^2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{Nr. 39})$$

f.

$$F(\omega) = 2\frac{e^{i4\omega}}{i\omega} \quad (\text{Nr. 22})$$

g.

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{7}} e^{-i\left(\frac{1}{28}(\omega-1)^2 - 3\omega + \frac{\pi}{4} + 3\right)} \quad (\text{Nr. 38})$$

5. Diskrete Spektren

- a. Abtastfrequenz: 1000 Hz; Grundperiode: 0.5 s; Grundfrequenz: 2 Hz; Frequenz für Wellenzahl 2: 4 Hz; Nyquistfrequenz: 500 Hz.
- b. Gesamtlänge des Druckmusters: 15 cm; Grundfrequenz: $1/15$ Zyklen/cm = 0.6667 cm^{-1} ; Nyquistfrequenz: 60 Zyklen/cm.
- c. Frequenz für Wellenzahl 6000: 30000 Hz; Nyquistfrequenz: 22050 Hz, d.h. kann nicht fehlerfrei rekonstruiert werden.