Fakultät Informatik
SG Angewandte Informatik

Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Semesterendprüfung Mathe II - SPO3 SoSe 20

Datum	27.07.2020	Zeit, Dauer	10:30-12:00 Uhr, 90 min.
Dozentin/Aufsicht	R. Axthelm/S. Düsterhöft	Ort	Konzil-EG (A-G)
Aufsicht	K. Eiermann	Ort	Konzil-1.OG (H-Z)

Folgende Hilfsmittel sind erlaubt:

1. Das vorlesungseigene Kurzskript (mit Markierungen, ohne Notizen)
2. 4 DIN A4 Blätter (8 Seiten) eigenhändisch geschriebener Notizen
3. Einen nicht graphikfähigen Taschenrechner (Grundrechenfunktionen zur Kontrolle)

Es sind **keine weiteren elektronischen Hiflsmittel** erlaubt! Denken Sie bei der etwaigen Benutzung des Taschenrechners daran, dass immer **alle Zwischenresultate** anzugeben sind. Des weiteren ist **gut leserlich** zu schreiben!

Geben Sie die Aufgabenzettel und Ihre Lösungsblätter zusammen ab. Notieren Sie bei Zeiten (nicht erst bei Abgabe!!!) auf allen abzugebenden Blättern Ihren vollständigen **Namen**; gerne auch auf dieser Seite in das dafür vorgesehene Kästchen.

Die gelösten Aufgaben bitte zusammenhängend und in der richtigen Reihenfolge sortiert abgeben. Geben Sie nur eine Lösung zu jeder Aufgabe ab. Jede weitere wird nicht bewertet.

Alle Ergebnisterme müssen so weit wie möglich **vereinfacht** werden. Sie müssen die Ergebnisse nicht in Dezimalzahlen ausdrücken. Es darf zum Beispiel $\sqrt{2}$ oder $\frac{e}{3}$ so als Ergebnis stehen bleiben.

Name	Punkte (30 + 5 Boni)	Note

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1: (Folgen & Reihen, 6 Punkte)

(a) Wie lautet die Bildungsvorschrift der Folge

$$(a_n)_n = (10\,,\ 7\,,\ 4\,,\ 1\,,\ -2\,,\ -5\,,\ \ldots)$$

(b) Beantworten Sie die Frage: Worin besteht der Unterschied zwischen einer Folge und der Menge aller Folgenglieder?

(c) Wie lautet der Limes $\lim_{n\to\infty}$ der Folge

$$b_n = \sqrt{n^2+1} - n\,?$$

Tipp: zu (ii): $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(d) Prüfen Sie die Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Aufgabe 2: (Verkettung & Grenzwert, 6 Punkte)

(a) Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = |x|\,,\ g(x) = x^3 - 3\,.$$

(i) Berechnen Sie $f(g(-2))$

(ii) Berechnen Sie $g(f(-2))$

(iii) Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'(1)$.

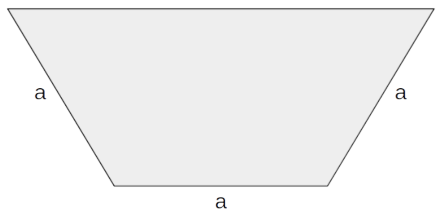
(b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2\,x + 1}{\ln\left(\cos^2(2\,\pi\,x)\right)}\,.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an der Stelle $x = 1$. **Tipp:** de L'Hospital.

Aufgabe 3: (Optimierung, 4 Punkte)

Eine Regenrinne mit symmetrisch geformtem Querschnitt soll maximales Fassungsvermögen haben. Die Höhe der Seitenwände a entspricht genau der Breite des Bodens. Wie groß ist beim maximalen Fassungsvermögen der Flächeninhalt des Querschnitts in Abhängigkeit von a? **Tipp:** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, Substitution: $x = \sin\alpha$



Aufgabe 4: (Integration, 6 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale

(a)
$$f(x) = \int e^{x} \, \sin(x) \, dx$$

Tipp: partielle Integration

(b)
$$\int_0^1 \frac{2\,e^{x}}{1+e^{x}} \, dx$$

Tipp: Zähler ist Ableitung vom Nenner?

(c)
$$\int_0^\infty e^{-2\,s} \, ds$$

Tipp: uneigentliche Integration

Aufgabe 5: (Ableitung multivariat, 5 Punkte)

(a) Wie groß ist die maximale Steigung von

$$u(x) = \sqrt[y]{x}$$

im Punkt $P = \left(e, \frac{1}{2}\right)$ und in welcher Richtung verläuft dort (in P) die Höhenlinie von u?

(b) Es bezeichnen u und f Funktionen mit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Kreuzen Sie alle korrekten Alternativen an:

- ☐ Die Hessematrix von u ist gleich der Jakobimatrix von $\operatorname{grad} u$.
- ☐ Die Hessematrix von u ist gleich der Jakobimatrix von ∇u.
- ☐ Die Jakobimatrix von u ist gleich $\operatorname{grad} u$.
- ☐ Die Jakobimatrix von u ist gleich $\nabla\, u$.
- ☐ Die Jakobimatrix von f ist gleich $\operatorname{grad} f$.
- ☐ Die Jakobimatrix von f ist gleich $\nabla\, f$.
- ☐ Der Laplace von u ist gleich der Spur der Hessematrix von u
- ☐ Der Laplace von u ist gleich der Spur der Jakobimatrix von ∇u
- ☐ Der Laplace von f ist gleich der Spur der Jakobimatrix von f.
- ☐ Multivariates Ableiten ist einfach.

Aufgabe 6: (Laborfragen, 8 Punkte)

(a) Ordnen Sie folgenden Funktionen entsprechende Eigenschaften zu:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$$

☐ surjektiv
☐ injektiv
☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

☐ surjektiv
☐ injektiv
☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$$

☐ surjektiv
☐ injektiv
☐ bijektiv

$$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$$

☐ surjektiv
☐ injektiv
☐ bijektiv

(b) Welche der angegebenen Funktionen löst die Differentialgleichung

$$u' = \frac{u}{\cos^2 x}\,, \quad u(0) = \mathrm{e}\,?$$

☐ $\mathrm{e}^{1+\tan x}$ ☐ $\mathrm{e}^{\cos^2 x}$ ☐ $\mathrm{e}^{\tan x}$ ☐ $\mathrm{e}^{1+\sin^2 x}$

(c) Ableitung diskreter Funktionen:

(i) Berechnen Sie einen eindimensionalen Filter F_{xxx} für die dritte (gemittelte) Ableitung

$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial x\,\partial x}$$

als Operator für diskrete Funktionen. **Tipp:** Starten Sie bei der schon bekannten diskreten Ableitung zweiter Ordnung.

(ii) Gegeben ist die diskrete Funktion

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & 5 \\ -1 & -7 & 1 & -5 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den diskreten Laplace von u an der Stelle $(3, 2)$.