4

Logik

In diesem Kapitel befassen wir uns mit zwei klassischen Gebieten der Logik, und zwar der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik erster Stufe. Beide Gebiete gehören zur mathematischen Logik und gehen von zwei Wahrheitswerten, dem Wert „wahr“ und dem Wert „falsch“, aus. Andere Theorien, wie zum Beispiel die Fuzzy-Logik, mit der wir vages Wissen modellieren können, die unendlich viele Wahrheitswerte besitzt und die auch bei der Modellbildung in der Informatik eine Rolle spielt, würden für eine Einführung zu weit gehen.

Das Gebiet der Logik an sich ist nicht jung. Schon in der Antike, man denke zum Beispiel an Aristoteles, wurde unter anderem versucht, zu verstehen, was eigentlich eine logisch korrekte Schlussfolgerung ist. Aber erst mit der formalen Beschreibung und dem formalen Umgang wurden die Grundlagen für die mathematische Logik gelegt. Bedeutende Beiträge wurden unter anderem von Leibniz, Frege und Boole geleistet. Lange Zeit waren die Grundlagen der Mathematik das Hauptanwendungsgebiet der Logik. Durch die Informatik mit ihrem Bedarf an formalen Werkzeugen sind neue und interessante Fragen aufgeworfen worden. Neben der Modellbildung finden sich Anwendungen der Logik zum Beispiel in der Künstlichen Intelligenz, im Gebiet der Datenbanken oder bei der Verifikation von Softwaresystemen.

Wir haben uns hier auf die für Anfänger wichtigsten Grundlagen beschränkt. So fehlen Kalküle für das logische Schließen und Sätze über die Grenzen der Prädikatenlogik.

Im Einzelnen verfolgen wir mit diesem Kapitel die folgenden Ziele:

a) die Syntax und die Semantik sowohl der Aussagenlogik wie auch der Prädikatenlogik zu vermitteln;

b) die Grundlagen für den sicheren Umgang mit den logischen Operatoren, wie zum Beispiel der „und“- und „oder“-Verknüpfung, und den Quantoren $\exists$ und $\forall$ zu vermitteln;

c) Normalformen, wie zum Beispiel die konjunktive Normalform, und Transformationsverfahren von Formeln in die verschiedenen Normalformen vorzustellen;

d) ein Grundverständnis für die Modellierung mit Hilfe der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik erster Stufe zu vermitteln;

e) grundlegende Techniken zur Konstruktion von Beweisen zu vermitteln.

4.1 Aussagenlogik

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Grundlagen der Aussagenlogik vor, sodass für den Leser auch das formale Rüstzeug für die Modellierung mit der Aussagenlogik bereit steht. Wir werden zuerst die Syntax der Aussagenlogik behandeln, indem wir die zu verwendenden Zeichen und die Struktur von aussagenlogischen Formeln festlegen. Daran schließt sich die Semantik an. Hier wird definiert, wie wir mit Hilfe von Bewertungen aussagenlogischen Formeln Wahrheitswerte „wahr" oder „falsch" zuordnen können. Daraus ergeben sich dann Fragen der logischen Folgerung und der logischen Äquivalenz von Formeln. Weiterhin stellen wir einige Normalformen vor, die eine bestimmte regelmäßige Struktur von aussagenlogischen Formeln verlangen. Es handelt sich dabei um die Negationsnormalform, die konjunktive Normalform und die disjunktive Normalform. Abgeschlossen wird der Abschnitt mit einem Modellierungsbeispiel.

4.1.1 Syntax der Aussagenlogik

Aussagenlogische Formeln sind aus Elementaraussagen aufgebaut, die durch aussagenlogische Variable repräsentiert werden. Diese können durch logische Operationen (Junktoren), der Konjunktion ($\wedge$), der Disjunktion ($\vee$), der Negation ($\neg$), der Implikation ($\rightarrow$), der Äquivalenz ($\leftrightarrow$) und konstanter Operationen (true und false) zu komplexen Formeln verknüpft werden. Wir definieren zunächst die Struktur aussagenlogischer Formeln.

Definition 4.1: Aussagenlogische Formeln

*Die Struktur **aussagenlogischer Formeln** wird induktiv definiert:*

1. *true und false sind Formeln.*
2. *Variablen sind Formeln.*
3. *Ist α eine Formel, dann ist auch $\neg\,\alpha$ eine Formel.*
4. *Sind α und β Formeln, dann sind $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ und $\alpha \leftrightarrow \beta$ Formeln.*
5. *Formeln werden nur mit (1) bis (4) gebildet.* ■

Aussagenlogische Formeln könnten auch algebraisch als *korrekte Terme* zu einer Signatur definiert werden (siehe Definition 3.4); dies ist im Kontext der Logik jedoch wenig gebräuchlich. Als Notation für aussagenlogische Formeln ist den in Abschnitt 3.1.2 definierten die Infix-Form die gebräuchlichste. Dafür legen wir *Präzedenzregeln* fest, um die Bindung von Operanden an Operatorsymbole und die Notwendigkeit von Klammern zu regeln:

1. $\neg$ bindet stärker als $\wedge$.
2. $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
3. $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Außerdem vereinbaren wir, dass die zweistelligen Operationen als linksassoziativ angesehen werden. Mit diesen Regeln kann $((A \wedge B) \vee C)$ als $A \wedge B \vee C$ geschrieben werden, $(\neg A)$ als $\neg A$ und die Formel $((A \vee B) \rightarrow C))$ als $A \vee B \rightarrow C$.

Als Namen für Variablen (Elementaraussagen) werden Großbuchstaben mit oder ohne Indizes A, B, C, ..., A_1, A_2, A_3, ... verwendet. Bei der Modellbildung werden wir später auch „sprechende Namen" für Atome zulassen, sofern keine Missverständnisse zu erwarten sind. Um aussagenlogische Formeln zu benennen, werden griechische Buchstaben α, β, λ, π, ... verwendet.

Elementaraussagen bezeichnet man auch als Atome. Für eine Formel α bezeichnen wir mit *atoms* (α) die Menge der in α auftretenden Atome. Ein *Literal* ist ein Atom A oder ein negiertes Atom $\neg A$. Ein Atom A wird auch als positives Literal und $\neg A$ als negatives Literal bezeichnet.

4.1.2 Semantik der Aussagenlogik

Bisher haben wir nur die Struktur und die Notation aussagenlogischer Formeln festgelegt. Wir wollen nun die Möglichkeit eröffnen, den Formeln eine Bedeutung zuzuordnen. In der Aussagenlogik gehen wir von zwei *Wahrheitswerten* aus, und zwar vom Wert **w** für wahr und vom Wert **f** für falsch. In der Literatur finden wir manchmal auch andere Bezeichnungen für die Wahrheitswerte, z.B. **0** oder *false* für falsch und **1** oder *true* für wahr.

Betrachten wir einmal die Behauptung „Es regnet oder es schneit.". Sollte es regnen, so ist die Behauptung wahr. Falls es aber weder regnet noch schneit, so ist die Aussage falsch. Wir haben also den einzelnen Elementaraussagen „es regnet" und „es schneit" den Wahrheitswert **f** zugeordnet und dann mit der oder-Verknüpfung geschlossen, dass die Behauptung für die angenommenen Wahrheitswerte falsch ist. Diesen Weg beschreiten wir auch in der Aussagenlogik. Wir können den einzelnen Atomen Wahrheitswerte zuordnen und dann, wenn wir wissen, wie die Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation und Äquivalenz zu verrechnen sind, den Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel für diese feste Bewertung der Atome berechnen.

Definition 4.2: Bewertung

Sei V eine Menge von Atomen. Eine Funktion $\Im : V \rightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{w}\}$ ist eine ***Bewertung****. Eine Bewertung $\Im$ wird auch als* ***Interpretation*** *bezeichnet.* ■

Wir erweitern Bewertungen, die bisher nur den Atomen Wahrheitswerte zuordnen, zu Bewertungen von Formeln, um über den Wahrheitswert einer Formel für eine gegebene Bewertung der Atome sprechen zu können. Die Erweiterung basiert auf der induktiven Definition von Formeln.

Definition 4.3: Bewertung von Formeln

Sei V eine Menge von Atomen und $\Im_0$ eine Bewertung für V. Wir erweitern induktiv $\Im_0$ über den Aufbau von Formeln zu einer ***Bewertung $\Im$ von Formeln*** *mit Atomen in V durch die Regeln*

1. $\Im(\alpha)=\Im_0(\alpha)$, *falls α in V*
2. $\Im(\neg\alpha)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{f}$.
3. $\Im(\alpha \wedge \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ und $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
4. $\Im(\alpha \vee \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ oder $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
5. $\Im(\alpha \rightarrow \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{f}$ oder $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
6. $\Im(\alpha \leftrightarrow \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn*
   $\Im(\alpha)=\Im(\beta)=\mathbf{w}$ *oder* $\Im(\alpha)=\Im(\beta)=\mathbf{f}$
7. $\Im(\mathit{true})=\mathbf{w}$ und $\Im(\mathit{false})=\mathbf{f}$ ■

Die Berechnung des Wertes $\Im(\alpha)$ für eine Formel α und eine Bewertung $\Im$ orientiert sich an dem induktiven Aufbau von Formeln. Hierzu bieten sich zwei Wege an: Ausgehend von der Bewertung der Atome können wir schrittweise den Wert für jede Teilformel bestimmen, bis wir schließlich den Wahrheitswert der Formel erhalten. Diese Vorgehensweise zeigen wir im ersten Beispiel 4.1. Im zweiten Beispiel 4.1 zerlegen wir sukzessive die Formel in ihre Teilformeln, bis wir bei den Atomen angekommen sind. Aus den Bewertungen der Atome lässt sich dann der Wahrheitswert bestimmen.

Beispiel 4.1: Bewertung

1. Sei $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$
   $\Im(\mathrm{A})=\mathbf{f}$, $\Im(\mathrm{B})=\mathbf{w}$.
   Berechnung: Von den Atomen zur Formel.
   Es gilt:
   ($\Im(A)=\mathbf{w}$ oder $\Im(B)=\mathbf{w}$) und ($\Im(A)= \mathbf{f}$ oder $\Im(B)=\mathbf{w}$)
   ($\Im(A)=\mathbf{w}$ oder $\Im(B)=\mathbf{w}$) und ($\Im(\neg A)=\mathbf{w}$ oder $\Im(B)=\mathbf{w}$)
   $\Im(A \vee B)=\mathbf{w}$ und $\Im(\neg A \vee B)=\mathbf{w}$
   $\Im((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B))=\mathbf{w}$
   Also gilt $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$.
2. Sei $\beta = A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (\neg B \vee D)$
   $\Im(A)=\mathbf{w}$, $\Im(B)=\mathbf{w}$, $\Im(D)=\mathbf{w}$.
   Berechnung: Von der Formel zu den Atomen.
   Es gilt:
   $\Im(A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (\neg B \vee D))= \mathbf{w}$
   $\Im(A)=\mathbf{w}$ und $\Im(A \rightarrow B)=\mathbf{w}$ und $\Im(\neg B \vee D)=\mathbf{w}$
   $\Im(A)=\mathbf{w}$ und ($\Im(A)=\mathbf{f}$ oder $\Im(B)=\mathbf{w}$) und ($\Im(\neg B)=\mathbf{w}$ oder $\Im(D)=\mathbf{w}$)
   Also gilt $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
3. Sei $\psi = A \wedge \neg A$
   $\Im(A)=\mathbf{w}$.
   $\Im(A \wedge \neg A) = \mathbf{w} \quad \Leftrightarrow$
   $\Im(A)= \mathbf{w}$ und $\Im(\neg A)=\mathbf{w}$.
   Also gilt $\Im(\psi)=\mathbf{f}$.

Ob eine Formel für eine Bewertung wahr oder falsch ist, hängt nur von den Werten der Bewertung für die Atome der Formel ab. Atome, die nicht vorkommen, können beliebige Wahrheitswerte annehmen. Da eine Bewertung für jedes Atom den Wahrheitswert wahr oder falsch annehmen kann, besitzt eine Formel über n Atomen 2^n verschiedene Bewertungen über diesen Atomen. Für die Formel $(M \vee P) \wedge (V \rightarrow A)$ gibt es also $2^4 = 16$ verschiedene Bewertungen.

Wenn wir alle möglichen Bewertungen einer Formel in einer Tabelle zusammen mit dem entsprechenden Wahrheitswert der Formel in einer Tabelle darstellen, sprechen wir von einer *Wahrheitstafel* für die Formel.

Gegeben sei die Formel $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$ mit den Atomen $A, B, C.$ Als zusätzliche Information haben wir in der Wahrheitstafel die Werte für zwei Teilformeln aufgenommen.

A	B	C	$(A \vee \neg B)$	$(A \vee B \rightarrow C)$	α
f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f
f	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Die vierte Zeile in der Wahrheitstafel ist dann die Bewertung $\Im(A) = \mathbf{f}$, $\Im(B) = \mathbf{w}$ und $\Im(C) = \mathbf{w}$ für die Atome und $\Im(\alpha) = \mathbf{f}$ für die Formel. Wie wir der Wahrheitstafel entnehmen können, besitzt die Formel eine Bewertung, für die die Formel wahr wird. In diesem Fall sprechen wir von einer erfüllbaren Formel. In der nachfolgenden Definition legen wir weitere Begriffe fest, die bei Aussagen über die Existenz von Bewertungen, die eine Formel wahr oder falsch machen, gebräuchlich sind.

Definition 4.4: Erfüllbar, tautologisch, widerspruchsvoll, falsifizierbar

a) *Eine Formel α ist* ***erfüllbar*** *genau dann, wenn es eine Bewertung $\Im$ mit $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ gibt.*

b) *Eine Formel* α *ist* ***tautologisch*** *(eine* ***Tautologie, allgemeingültig)*** *genau dann, wenn die Formel für jede Bewertung* $\Im$ *den Wert* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ *besitzt, also wahr ist.*
c) *Eine Formel* α *ist* ***widerspruchsvoll (unerfüllbar)*** *genau dann, wenn die Formel für jede Bewertung* $\Im$ *den Wert* $\Im(\alpha)=\mathbf{f}$ *besitzt, also falsch ist.*
d) *Eine Formel* α *ist* ***falsifizierbar*** *genau dann, wenn es für die Formel eine Bewertung* $\Im$ *gibt, für die* $\Im(\alpha)=\mathbf{f}$ *gilt, also die Formel falsch wird.* ■

Für jeden der Begriffe geben wir ein kleines Beispiel an:

a) Die Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$ ist erfüllbar, da z.B. für die Bewertung $\Im(A) = \mathbf{f}$ und $\Im(B) = \mathbf{w}$ die Formel wahr ist.

b) Die Formel $\alpha = (A \wedge \neg A)$ ist widerspruchsvoll, da sie sowohl für $\Im(A) = \mathbf{w}$ und auch für die Bewertung $\Im(A) = \mathbf{f}$ falsch ist.

c) Die Formel $\alpha = (A \vee \neg A)$ ist eine Tautologie und deshalb nicht falsifizierbar, da sie sowohl für $\Im(A) = \mathbf{w}$ und $\Im(A) = \mathbf{f}$ wahr ist.

d) Die Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$ ist falsifizierbar, da sie für $\Im(A) = \mathbf{w}$ und $\Im(B) = \mathbf{f}$ falsch ist.

Die eingeführten Begriffe *erfüllbar*, *widerspruchsvoll* und *tautologisch* stehen in einem engen Zusammenhang, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.1:

Sei α *eine aussagenlogische Formel, dann gilt:* α *ist widerspruchsvoll genau dann, wenn* α *nicht erfüllbar ist, genau dann, wenn* $(\neg\alpha)$ *tautologisch ist.* ■

Wir können das Lemma einfach beweisen:

Sei α widerspruchsvoll, dann ist α für jede Bewertung falsch, d.h. $\Im(\alpha) = \mathbf{f}$. Es gibt also keine Bewertung, für die die Formel wahr ist. Deshalb ist die Formel α nicht erfüllbar. Sei nun die Formel α nicht erfüllbar. Für alle Bewertungen gilt dann $\Im(\alpha) = \mathbf{f}$. Also erhalten wir $\Im(\neg\,\alpha) = \mathbf{w}$. Da $\neg\alpha$ für alle Bewertungen wahr ist , ist $\neg\alpha$ eine Tautologie. Sei nun $\neg\alpha$ eine Tautologie. Dann gilt für jede Bewertung $\Im(\neg\alpha) = \mathbf{w}$ und damit $\Im(\alpha) = \mathbf{f}$. Also ist die Formel α widerspruchsvoll.

Zu entscheiden, ob eine Formel erfüllbar (widerspruchsvoll, falsifizierbar, tautologisch) ist, ist im Allgemeinen eine schwierige Aufgabe. Eine Formel über n Atomen hat insgesamt 2^n verschiedene Bewertungen. Wir könnten beispielsweise mit Hilfe der Wahrheitstafel systematisch alle 2^n Bewertungen überprüfen. Aber selbst mit dem schnellsten Computer ist dies für große n ein hoffnungsloses Unterfangen. Es sind keine schnellen Verfahren bekannt, und man vermutet, dass es auch keine effizienten Algorithmen für das so genannte Erfüllbarkeitsproblem gibt. Das Erfüllbarkeitsproblem ist die Aufgabe, für beliebige Eingabeformeln zu entscheiden, ob es eine erfüllende Bewertung gibt.

Wir müssen noch festlegen, was wir unter einer semantischen Folgerung verstehen wollen, wann also eine Formel aus einer anderen Formel folgt.

Definition 4.5: Semantische Folgerung

Sei M eine Menge aussagenlogischer Formeln und β *eine aussagenlogische Formel.* β ***folgt semantisch aus*** *M, in Zeichen* $M \models \beta$ *gilt genau dann, wenn für jede Bewertung* $\Im$*, für die alle Formeln in M erfüllt sind, auch* β *wahr ist. D.h. falls* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ *für alle* $\alpha \in M$ *gilt, dann muss auch* $\Im(\beta)=\mathbf{w}$ *gelten. Enthält M nur eine Formel* α*, schreibt man auch kurz* $\alpha \models \beta$*.* ■

Ein einfaches Verfahren, das entscheidet, ob eine Formel aus einer Menge von Formeln folgt, besteht darin, für alle Bewertungen über den Atomen der Formeln den gewünschten Zusammenhang zu überprüfen. Auch hier besteht wieder das Problem der 2^n verschiedenen Bewertungen für Formeln mit n Atomen. Ebenso wie für den Prüfung der Erfüllbarkeit ist auch für die semantische Folgerung kein schnelles Verfahren bekannt und existiert wahrscheinlich auch nicht.

Beispiel 4.2: Semantische Folgerung

Sei M = $\{(A \vee B), (\neg A \vee B)\}$ und $\beta = B$, dann gilt $M \models \beta$

$\Im(A)=\mathbf{w}$, $\Im(B)=\mathbf{w}$	dann gilt	$\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ und $\Im(\beta)=\mathbf{w}$
$\Im(A)=\mathbf{w}$, $\Im(B)=\mathbf{f}$	dann gilt	$\Im(\alpha)=\mathbf{f}$
$\Im(A)=\mathbf{f}$, $\Im(B)=\mathbf{w}$	dann gilt	$\Im(\alpha)=\mathbf{f}$
$\Im(A)=\mathbf{f}$, $\Im(B)=\mathbf{f}$	dann gilt	$\Im(\alpha)=\mathbf{f}$

Wir fassen nun einige bekannte Zusammenhänge zwischen der semantischen Folgerung und tautologischen bzw. widerspruchsvollen Formeln zusammen. Die einfachen Beweise überlassen wir dem Leser.

Lemma 4.2:

Sei α *eine aussagenlogische Formel, dann gilt:*

1. $\{\,\} \models \alpha$ *genau dann, wenn* α *tautologisch ist*
2. $\alpha \models \beta$ *genau dann, wenn* $\alpha \to \beta$ *tautologisch ist*
3. $\alpha \models \beta$ *genau dann, wenn* $\alpha \wedge \neg\beta$ *widerspruchsvoll ist*
4. α *ist widerspruchsvoll genau dann, wenn für alle* β *gilt* $\alpha \models \beta$*.*
5. α *ist widerspruchsvoll genau dann, wenn es* π *mit* $\alpha \models (\pi \wedge \neg\pi)$ *gibt.* ■

Die dritte Aussage entspricht einem indirekten Beweis. Um zu beweisen, dass β aus α folgt, genügt es, das Komplement von β , also $\neg\beta$, zur Formel hinzuzufügen und dann die Formel $\alpha \wedge \neg\beta$ auf Widerspruch zu prüfen. Die vierte Aussage besagt, dass wir aus widerspruchsvollen Formeln alle erfüllbaren und auch alle widerspruchsvollen Formeln schließen können.

In der folgenden Definition legen wir fest, was wir unter Äquivalenz, genauer gesagt unter der logischen Äquivalenz, verstehen wollen. Es geht dabei nicht um die strukturelle Gleichheit von Formeln, sondern darum, dass zwei Formeln bezüglich ihrer logischen Folgerungen gleich sind.

Definition 4.6: Logische Äquivalenz

Die Formeln α und β heißen ***logisch äquivalent****, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$ für alle Bewertungen $\Im$ gilt.* ■

Die logische Äquivalenz hätten wir auch mit Hilfe der semantischen Folgerung definieren können. Denn es gilt: $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$ genau dann, wenn $\alpha \approx \beta$.

Aus der Definition 4.5 der semantischen Folgerung können wir weiterhin die folgenden Zusammenhänge ableiten:

1. $\alpha \approx \beta$ genau dann, wenn $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautologisch ist.
2. Sind α und β widerspruchsvoll, dann gilt $\alpha \approx \beta$.
3. Sind α und β tautologisch, dann gilt $\alpha \approx \beta$.

Des Weiteren gelten die folgenden Aussagen, die auch als *Vererbungsregeln* bezeichnet werden:

4. Sei $\alpha \approx \beta$, dann gilt $\neg\alpha \approx \neg\beta$.
5. Sei $\alpha \approx \beta$, dann gilt für alle γ: $\gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$ und $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$.

Wir hätten bei der induktiven Definition von aussagenlogischen Formeln (Definition 4.1) auf die Implikation und die Äquivalenz verzichten können, indem wir diese Junktoren als Abkürzungen eingeführt hätten. Wie sich leicht nachprüfen lässt, gelten die logischen Äquivalenzen

$$(\alpha \to \beta) \approx (\neg\alpha \vee \beta) \text{ und } (\alpha \leftrightarrow \beta) \approx (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha).$$

Die logische Äquivalenz können wir zum Beispiel benutzen, um die Äquivalenz von Formalisierungen eines oder mehrerer Sachverhalte zu überprüfen. Sei beispielsweise gegeben:

Beschreibung 1: Es regnet nicht. Es regnet oder die Straße ist nass.

Beschreibung 2: Es regnet nicht und die Straße ist nass.

Wir wählen das Atom R für „es regnet" und das Atom S für „die Straße ist nass". Im ersten Fall erhalten wir die Formel $\alpha = \neg R \wedge (R \vee S)$ und im zweiten Fall die Formel $\beta = \neg R \wedge S$. Wie sich leicht nachprüfen lässt, sind die Formeln logisch äquivalent. Die Repräsentation der beiden Beschreibungen als aussagenlogische Formeln sind also logisch äquivalent.

Neben der Überprüfung, ob Sachverhalte, die wir modellieren, logisch äquivalent sind, wird die logische Äquivalenz benutzt, um Formeln zu vereinfachen oder um sie in eine leicht lesbare oder besser verarbeitbare Form zu bringen. Die nachfolgende Sammlung von sogenannten Umformungsgesetzen gibt eine Übersicht über die gebräuchlichsten logischen Äquivalenzen. Die Beweise lassen sich einfach mit der Definition der logischen Äquivalenz führen, indem wir zeigen, dass sich für alle Bewertungen die gleichen Wahrheitswerte ergeben.

Umformungsregeln

Negation	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$ $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \sigma \approx \alpha \vee (\beta \vee \sigma)$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \sigma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \sigma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \approx (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$ $(\alpha \vee \beta) \wedge \sigma \approx (\alpha \wedge \sigma) \vee (\beta \wedge \sigma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
Komplement	$\alpha \vee \neg\alpha \approx$ true $\alpha \wedge \neg\alpha \approx$ false
Neutrale Elemente	$\alpha \wedge$ true $\approx \alpha$ $\quad \alpha \wedge$ false $\approx$ false $\alpha \vee$ true $\approx$ true $\quad \alpha \vee$ false $\approx \alpha$

4.1.3 Normalformen

In diesem Abschnitt stellen wir Normalformen vor. Formeln in den jeweiligen Normalformen besitzen eine gewisse Struktur, die aus verschiedenen Gründen, wie z.B. gute Übersichtlichkeit oder kompakte Darstellung, verlangt werden. Um viele Fallunterscheidungen zu ersparen, gehen wir davon aus, dass keine Implikationszeichen oder Äquivalenzzeichen in den Formeln vorkommen. Sie können, wie wir weiter oben gesehen haben, leicht durch Formeln mit den verbleibenden Junktoren ersetzt werden.

Wir beginnen mit der Negationsnormalform. Hier verlangen wir, dass die Negationszeichen direkt vor den Atomen stehen. Nehmen wir zum Beispiel die Formel $\neg(A \vee B \vee C)$. Da das Negationszeichen nicht direkt vor einem Atom steht, ist die Formel nicht in der gewünschten Form. Auch mehrfache Negationen $\neg\neg\neg\neg A$ sollen nicht mehr erlaubt sein.

Definition 4.7: Negationsnormalform NNF

Eine Formel α ohne Implikationszeichen $\rightarrow$ und Äquivalenzzeichen $\leftrightarrow$ ist in ***Negationsnormalform (NNF)*** *genau dann, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.* ■

Die in der Definition 4.7 getroffene Festlegung hätten wir auch anders formulieren können, und zwar induktiv:

1. Jedes Atom A ist in NNF.
2. Jedes negierte Atom $\neg A$ ist in NNF.
3. Sind die Formeln α und β in NNF, dann sind auch $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \wedge \beta)$ in NNF.

Ein einfaches Verfahren zur Transformation einer Formel in eine logisch äquivalente Formel in NNF, beruht auf der Anwendung der *De Morganschen Regeln* und der Regel *Negation*. Denn mit De Morgan $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ und $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$ ziehen wir das Negationszeichen nach innen. Mit der Negationsregel $\neg\neg\alpha \approx \alpha$ können wir Schritt für Schritt mehrfach vorkommende Negationszeichen eliminieren.

Beispiel 4.3: Negationsnormalform

Gegeben sei die Formel $\neg(\neg A \wedge \neg(A \vee \neg(B \vee A)))$

$\Rightarrow$	$\approx \neg\neg A \vee \neg\neg(A \vee \neg(B \vee \mathrm{A}))$	De Morgan
$\Rightarrow$	$\approx A \vee \neg\neg(A \vee \neg(B \vee \mathrm{A}))$	Negation
$\Rightarrow$	$\approx A \vee (A \vee \neg(B \vee \mathrm{A}))$	Negation
$\Rightarrow$	$\approx A \vee (A \vee (\neg B \vee \neg \mathrm{A}))$	De Morgan

Allgemein lässt sich die folgende Aussage beweisen:

Zu jeder aussagenlogischen Formel α gibt es eine äquivalente Formel in Negationsnormalform.

Für die nächste Normalform, die konjunktive Normalform, benötigen wir den Begriff der Klausel, die nichts anderes ist als eine Disjunktion von Literalen. Eine Formel ist in konjunktiver Normalform, falls sie aus einer Konjunktion von Klauseln besteht. Eine solche Formel besteht also aus einer Aneinanderreihung relativ einfach strukturierter Teilformeln. Gerade für Aufzählungen von Eigenschaften und Abhängigkeit wird sie häufig verwendet. Neben der guten Übersichtlichkeit eignet sich diese Normalform auch für die maschinelle Verarbeitung. So verlangen viele Algorithmen, die die Erfüllbarkeit entscheiden, diese Formelstruktur.

Definition 4.8: Klausel

*Eine Formel der Form $\alpha = (L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ mit Literalen L_i $(1 \le i \le n)$ bezeichnen wir als **Klausel**. Sind alle Literale einer Klausel negativ, dann ist es eine negative Klausel; sind alle Literale positiv, dann handelt es sich um eine positive Klausel. Eine Klausel, die maximal k Literale enthält, bezeichnen wir als **k-Klausel**.* ■

Beispiele von Klauseln sind $(A \vee \neg B \vee D)$, $(\neg B \vee \neg D)$ und $\neg A$. Eine mehrstellige Implikation $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots . \wedge A_n \rightarrow B)$, wie sie häufig vorkommt, da sie für die Aussage *wenn A_1 und A_2 und .... und A_n dann B* steht, entspricht nach dem Ersetzen des Implikationszeichens der Klausel $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B)$. Denn es gilt

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots . \wedge A_n \rightarrow B) \approx (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee B) \approx$$
$$(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B)$$

Definition 4.9: Konjunktive Normalform KNF

*Für Klauseln $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ist die Formel $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$ in **konjunktiver Normalform.** Wir legen fest **KNF** = $\{\alpha \mid \alpha$ ist in konjunktiver Normalform$\}$.* ■

Beispiele für Formeln in KNF sind $(\neg A \vee B \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (E \vee \neg D) \wedge \neg D$, die Formel $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ und die Formel, die nur aus einem Literal besteht, $\neg A$.

Allgemein lässt sich die folgende Aussage beweisen:

Zu jeder aussagenlogischen Formel α gibt es eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform.

Ein einfaches Verfahren beruht auf der Anwendung von Umformungsgesetzen:
Wir erzeugen zuerst eine äquivalente Formel in NNF. Anschließend wenden wir die Distributivgesetze $(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \approx (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$ oder $\sigma \vee (\alpha \wedge \beta) \approx (\sigma \vee \alpha) \wedge (\sigma \vee \beta)$ so lange an, bis wir die gewünschte Form erhalten haben.

Beispiel 4.4: Konjunktive Normalform

Gegeben sei die Formel $\alpha = \neg(A \wedge (\neg B \vee \neg(\neg C \wedge E) \vee \neg A))$

$\Rightarrow \approx \neg A \vee (B \wedge (\neg C \vee E) \wedge A)$	Negationsnormalform
$\Rightarrow \approx (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee ((\neg C \vee E) \wedge A)$	Distributivgesetz
$\Rightarrow \approx (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee E)) \wedge (\neg A \vee A)$	Distributivgesetz
$\Rightarrow \approx (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee E) \wedge (\neg A \vee A)$	Klammern

Ein Problem, das bei der Transformation in eine logisch äquivalente Formel in KNF auftreten kann, ist die Länge der erzeugten Formel. Die Anzahl der in einer Formel α vorkommenden Atome sei die Länge der Formel, die wir mit $|\alpha|$ bezeichnen. Für die Formel α aus Beispiel 4.4 gilt dann $|\alpha| = 5$.

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass durch Umformen in die KNF die Länge einer Formel exponentiell wachsen kann:

Beispiel 4.5: Länge der KNF

Gegeben sei die Formel $\alpha = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_3 \wedge A_4) \vee (A_5 \wedge A_6)$.
Eine logisch äquivalente Formel in konjunktiver Normalform ist

$$\beta = (A_1 \vee A_3 \vee A_5) \wedge (A_1 \vee A_3 \vee A_6) \wedge (A_1 \vee A_4 \vee A_5) \wedge (A_1 \vee A_4 \vee A_6) \wedge$$
$$(A_2 \vee A_3 \vee A_5) \wedge (A_2 \vee A_3 \vee A_6) \wedge (A_2 \vee A_4 \vee A_5) \wedge (A_2 \vee A_4 \vee A_6)$$

Die Länge einer Formel α sei die Anzahl der in α vorkommenden Literale. In unserem Beispiel hat α die Länge 6. Die äquivalente Formel β hat die Länge 24. Wenn wir die Anzahl der 2-Klauseln vergrößern, dann wächst die Ergebnisformel exponentiell in der Länge der Anfangsformel. Fügen wir beispielsweise zur obigen Formel noch die Klausel $(A_7 \vee A_8)$ hinzu, so hat die Ergebnisformel die Länge $2^4 \cdot 3 = 48$. Allgemein lässt sich die folgende Aussage beweisen:

Es gibt aussagenlogische Formeln α_n der Länge 2n, zu der jede logisch äquivalente Formel in KNF mindestens die Länge 2^n besitzt.

Definition 4.10: Disjunktive Normalform DNF

Eine Formel der Form $\alpha = (L_1 \wedge \ldots \wedge L_n)$ *mit Literalen* L_i $(1 \leq i \leq n)$ *bezeichnen wir als* ***Monom****. Ein Monom, das maximal k Literale enthält, bezeichnen wir als* ***k-Monom****.*
Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *Monome, dann ist die Formel* $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$ *in* ***disjunktiver Normalform.*** *Wir legen fest*
DNF $= \{\alpha \mid \alpha$ *ist in disjunktiver Normalform*$\}$. ■

Beispiele für Formeln in DNF sind $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge D \wedge B) \vee \neg B$ und die Formel $(\neg D \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)$. Eine Besonderheit sind die Formeln $(A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D)$ und $(\neg A \vee B \vee \neg C \vee D)$, die beide in konjunktiver und auch in disjunktiver Normalform sind.

Wenn wir in der konjunktiven Normalform alle Vorkommen von Konjunktionszeichen „$\wedge$“ durch Disjunktionszeichen „$\vee$“ und die Disjunktionszeichen durch Konjunktionszeichen ersetzen, erhalten wir eine Formel in disjunktiver Normalform.

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es wieder eine logisch äquivalente Formel in DNF. Bei der Transformation können wir, genau wie im Fall der konjunktiven Normalform, zuerst die Negationsnormalform generieren und dann mit dem Distributivgesetz fortfahren. Wir wenden hier die zweite Variante des Distributivgesetzes

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \sigma \approx (\alpha \wedge \sigma) \vee (\beta \wedge \sigma) \text{ oder } \sigma \wedge (\alpha \vee \beta) \approx (\sigma \wedge \alpha) \vee (\sigma \wedge \beta)$$

an, die sich nur durch die Vertauschung der Konjunktionszeichen durch das Disjunktionszeichen und umgekehrt unterscheidet.

Zum Abschluss gehen wir noch kurz auf eine einfache Beobachtung ein. Sei die Formel $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ in konjunktiver Normalform. Negieren wir die Formel, so erhalten wir $\neg\alpha = \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$. Wenden wir nun die De Morganschen Regeln an, dann ergibt sich die logisch äquivalente Formel $\neg\alpha = (\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_n)$. Schließlich wenden wir die De Morganschen Regeln auf die negierten Klauseln $\neg\alpha_i = \neg(L_{i,1} \vee \ldots \vee L_{i,n})$ an und erhalten das Monom $(\neg L_{i,1} \wedge \ldots \wedge \neg L_{i,n})$. Nach dem Entfernen mehrfacher Negationen erhalten wir eine Formel in DNF. Diese allgemeine Beobachtung verdeutlichen wir an dem nachfolgenden Beispiel.

Beispiel 4.6: Disjunktive Normalform

Gegeben sei die Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg C \vee A) \wedge (A \vee B \vee C)$ in KNF

$$\begin{aligned} \neg\alpha &= \neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee A) \wedge (A \vee B \vee C)) \\ &\approx \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg C \vee A) \vee \neg(A \vee B \vee C) && \text{De Morgan} \\ &\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg C \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) && \text{De Morgan} \\ &\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) && \text{Negation} \end{aligned}$$

Normalformen spielen eine wichtige Rolle in vielen Anwendungsgebieten. So verlangen fast alle Verfahren, die eine Formel auf Erfüllbarkeit überprüfen, Eingabeformeln in konjunktiver Normalform. In der Schaltungstechnik geht man dagegen sehr häufig von der disjunktiven Normalform aus. Neben den mehr algorithmisch orientierten Anwendungen wird die konjunktive Normalform oftmals bei der Modellbildung eingesetzt, da sich eine

Sammlung von einfach strukturierten Aussagen sehr gut durch eine Konjunktion von Klauseln ausdrücken lässt.

4.1.4 Aussagenlogische Modellbildung

Die Aussagenlogik ist geeignet zur Repräsentation von statischem Wissen, welches in Elementaraussagen zerlegt und mit Hilfe der logischen Operatoren aufgebaut werden kann. Die Elementaraussagen dürfen dabei nur falsch oder wahr sein. Dynamische Systeme werden normalerweise nicht mit der Aussagenlogik formalisiert. Dies trifft auch auf Wissen zu, das mehr als zwei Wahrheitswerte annehmen kann oder mit Unsicherheit oder Vagheit behaftet ist.

Bei der Modellierung sollten wir den einzelnen Elementaraussagen Atome zuordnen, die von der Bezeichnung auf die Elementaraussagen schließen lassen. Für die Übersetzung in eine entsprechende Formel müssen wir dann die passenden Verknüpfungen aussuchen. Wie einzelne Sätze der deutschen Sprache in Formeln übersetzt werden können, zeigt die folgende Zusammenstellung:

Der Aussage „*Es regnet.*“ wird das Atom R zugeordnet und für „*Die Straße ist nass.*“ wählen wir das Atom S.

Es regnet nicht.	$\neg R$
Es regnet oder die Straße ist nass.	$R \vee S$
Es regnet und die Straße ist nass.	$R \wedge S$
Wenn es regnet, ist die Straße nass.	$R \rightarrow S$
Genau dann, wenn es regnet, ist die Straße nass.	$R \leftrightarrow S$
Die Straße ist nass genau dann, wenn es regnet.	$R \leftrightarrow S$
Die Straße ist nass dann und nur dann, wenn es regnet	$R \leftrightarrow S$
Entweder die Straße ist nass oder es regnet.	$(R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$

Die letzte Formel $(R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$ kann nur wahr werden, wenn R wahr und S falsch ist oder wenn R falsch und S wahr ist. Es wird also die exklusive Oder-Operation dargestellt.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel, in dem eine sogenannte Logelei gelöst werden soll. Es handelt sich dabei um einen Text in deutscher Sprache, der mit einer Frage abschließt. Wir formalisieren den Text und auch die Frage mit Hilfe aussagenlogischer Formeln. Die Beantwortung der Frage, das heißt, die Lösung der Logelei, ist dann die Aufgabe zu entscheiden, ob eine Formel widerspruchsvoll ist.

Beispiel 4.7: Logelei

Ingo trifft Maria oder Petra. Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke. Sollte er Vera treffen, so auch Maria. Aber trifft er Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke. Trifft Ingo Maria?

Wir ordnen wie folgt die Atome zu:
M für „Ingo trifft Maria“, P für „Ingo trifft Petra“, A für „Ingo trifft Anke“, und V für „Ingo trifft Vera“.

Den einzelnen Sätzen ordnen wir die folgenden Formeln zu:

Ingo trifft Maria oder Petra.	$(M \vee P)$
Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke.	$P \rightarrow (V \vee A))$
Sollte er Vera treffen, so auch Maria.	$(V \rightarrow M)$
Trifft er aber Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke.	$(\neg V \rightarrow \neg A)$

Gesamtformel:

$$\alpha = (M \vee P) \wedge (P \rightarrow (V \vee A)) \wedge (V \rightarrow M) \wedge (\neg V \rightarrow \neg A)$$

äquivalente KNF Formel:

$$\beta = (M \vee P) \wedge (\neg P \vee V \vee A)) \wedge (\neg V \vee M) \wedge (V \vee \neg A)$$

Frage: Trifft Ingo Maria? D.h. folgt M aus α?

Wir transformieren die Formel α in eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und erhalten dann die Formel $\beta = (M \vee P) \wedge (\neg P \vee V \vee A)) \wedge (\neg V \vee M) \wedge (V \vee \neg A)$, indem wir die Implikationen ersetzen und doppelte Negationen entfernen. Da aus einer Formel α eine Formel σ genau dann folgt, wenn $\alpha \wedge \neg\sigma$ widerspruchsvoll ist (indirekter Beweis), können wir überprüfen, ob $\beta \wedge \neg M$ widerspruchsvoll ist. Die Prüfung, ob die Formel nicht erfüllbar ist und damit Ingo Maria trifft, überlassen wir dem Leser.

Die Formalisierung einer solchen Logelei ist nicht immer so einfach wie im Beispiel, da natürlichsprachliche Texte oftmals vage Formulierungen enthalten. Neben dem Problem, zu entscheiden, ob eine Folgerungsbeziehung besteht, kommen wir natürlich schnell an die Grenzen der Aussagenlogik, wenn es sich um Sachverhalte handelt, die Relationen, Funktionen und Existenzaussagen beinhalten. Einer von ihrer Ausdruckskraft her mächtigeren Logik wenden wir uns nun im zweiten Abschnitt über die Prädikatenlogik erster Stufe zu.

4.2 Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Grundlagen der Prädikatenlogik der ersten Stufe, wie wir sie für die Modellierung benötigen, vorgestellt. Zuerst gehen wir auf die Syntax ein. Anschließend behandeln wir die Semantik und diskutieren eine Reihe von Normalformen. Abgeschlossen wird der Abschnitt durch einige Beispiele der Modellbildung.

4.2.1 Syntax der Prädikatenlogik

Prädikatenlogische Formeln sind im Gegensatz zu aussagenlogischen Formeln aus gewissen parametrisierten Elementaraussagen aufgebaut. Sie können durch logische Operationen, die Junktoren, verknüpft werden. Zusätzlich können wir über Quantifizierungen Einschränkungen vornehmen. Bevor wir die Struktur prädikatenlogischer Formeln näher präzisieren, wollen wir einige Beispiele betrachten. Das erste Beispiel beschreibt die Geschwisterbeziehung. x und y sind Geschwister, falls es gemeinsame Eltern u und v gibt.

$\forall x \forall y\ (\exists u \exists v\ (Eltern(u, v, x) \wedge Eltern(u, v, y) \rightarrow Geschwister(x, y)))$

Die zweite Formel beschreibt die Eigenschaft, dass eine Relation symmetrisch ist:

$\forall x \forall y\ (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$

Das Zeichen $\exists$ bezeichnen wir als *Existenzquantor* und das Zeichen $\forall$ als *Allquantor*. Die Zeichen sind die jeweils gespiegelten Großbuchstaben E(xistiert) und A(lle).

Das letzte Beispiel ist eine Formel, die die Terme $f(z)$ und a enthält, wobei P ein Symbol für Relationen, f ein Funktionssymbol, a ein Symbol für eine Konstante und x, y und z Variable sind.

$\forall x \exists y\ P(x, y) \wedge \forall z\ (P(z, z) \vee P(z, f(z))) \wedge \neg P(a, a)$

Wir führen nun den Begriff der *prädikatenlogischen Formel* ein. Zur Definition der Terme, die in prädikatenlogischen Formeln enthalten sind, verwenden wir den Begriff der *korrekten Terme* aus Definition 3.4 in Kapitel 3. Da wir nur an der Stelligkeit der Funktionssymbole in den Termen interessiert sind, hat die definierende Signatur nur eine einzige Sorte T. (Häufig wird auch darauf verzichtet, zu fordern, dass Funktionssymbole hinsichtlich ihrer Stelligkeit konsistent verwendet werden. Dann entfällt die Beschränkung auf korrekte Terme zu einer Signatur.) Ebenso wie in den Definitionen in Kapitel 3 sind hier die Funktionssymbole, die in Kapitel 3 Operatorsymbole heißen, völlig abstrakt und noch nicht mit Bedeutungen belegt. Bei der Benennung von Funktionen werden wir die 0-stelligen durch spezielle Namen als Konstante hervorheben.

Definition 4.11: Prädikatenlogische Formeln

Sei $(\{T\}, F)$ eine Signatur, die für jedes $f \in F$ dessen Stelligkeit zu $n >= 0$ festlegt: $f: s_1 \times s_2 \times ... \times s_n \rightarrow s_0$. Sei τ die Menge der korrekten Terme mit Variablen zu dieser Signatur. Damit wird die Struktur ***prädikatenlogischer Formeln*** *induktiv definiert:*

1. *Sind $t_1, ..., t_n$ Terme aus τ und ist P ein Prädikatssymbol, dann ist $P(t_1, ..., t_n)$ eine Formel. Wir bezeichnen $P(t_1, ..., t_n)$ auch als* ***Primformel****.*
2. *Sind t_1 und t_2 Terme aus τ, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel. Die Formel $t_1 = t_2$ ist auch eine Primformel.*
3. *Ist α eine Formel, dann ist auch $\neg\, \alpha$ eine Formel.*
4. *Sind α und β Formeln, dann sind $\alpha \vee \beta$ und $\alpha \wedge \beta$ Formeln.*
5. *Sei x ein Variablensymbol und α eine Formel, dann sind $\exists x\, \alpha$ und $\forall x\, \alpha$ Formeln.*
6. *Formeln werden nur mit (1) bis (5) gebildet.* ■

In dieser Definition wird auf die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ verzichtet, um hier und auch später nicht zu viele Fallunterscheidungen durchführen zu müssen. Wir erlauben trotzdem, sie zu verwenden, indem wir die Implikation $(\alpha \rightarrow \beta)$ als Abkürzung für $(\neg\alpha \vee \beta)$ und die Äquivalenz $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ als Abkürzung für $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ festlegen.

Die Junktoren in prädikatenlogischen Formeln werden meist in Infix-Form notiert. Deshalb erlauben wir, jede Formel zu klammern, übernehmen die Präzedenzregeln der Aussagenlogik und ergänzen sie um die Regel

$\exists$ und $\forall$ binden stärker als alle aussagenlogischen Junktoren.

Auch wenn man auf manche Klammerung wegen der Präzedenzregeln verzichten kann, so ist dies nicht immer zu empfehlen: Die Formel $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$ kann schnell zu Missverständnissen führen, wohingegen in der Formel $(\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$ unmittelbar klar wird, dass der Quantor sich nicht auf die Teilformel $Q(x)$ bezieht.

Vorerst vereinbaren wir, dass wir nur die folgenden Prädikatssymbole $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots.$ benutzen. Später werden wir dann wieder „sprechende Namen“ zulassen. Entsprechendes gilt für die Variablen, die wir zunächst nur $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$ nennen und für Funktionen, die wir zunächst nur $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots.$ nennen. 0-stellige Funktionen wollen wir als Konstante hervorheben und zunächst nur $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$ nennen. Für Formeln verwenden wir im Weiteren die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \sigma, \ldots.$

Wir geben nun einige Beispiele von Formeln an.

Beispiel 4.8: Prädikatenlogische Formeln

Beispiele von Formeln sind:

1. $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists y\, (S(y) \wedge \forall z\, R(x, z))$
2. $\forall x\ (P(x) \vee \exists x\, Q(x))$ mit den Primformeln $P(x)$ und $Q(x)$.
3. $\forall x\ P(f(x, y, a), z) \wedge \exists y\, S(h(f(y)))$ mit Termen $f(y)$, $h(f(y))$ und $f(x, y, a)$.
4. $\forall x \exists y \forall z\ (R(x, z, y) \wedge R(x, f(f(z)), x))$
5. $\forall x\, (x = f(x) \vee \neg P(x, x))$ mit den Termen x und $f(x)$

Die *Quantoren* beziehen sich nur auf die Variablen. Wir sprechen deshalb von der *Prädikatenlogik erster Stufe*. In der Prädikatenlogik zweiter Stufe, die wir hier nicht behandeln werden, sind auch Funktions- und Prädikatsvariablen erlaubt. Da wir hier nur die erste Stufe betrachten und deshalb keine Missverständnisse auftreten können, sprechen wir im Weiteren nur noch von der Prädikatenlogik.

Betrachten wir die Formel $(\forall x\ Q(x, y)) \wedge \exists z\, P(z)$, so sehen wir, dass es keinen Quantor mit einer Variablen y gibt. Die Variablen x und z sind dagegen jeweils durch einen Quantor gebunden.

In der Formel $(\forall x\ (Q(x) \wedge \exists x\, P(x))$ kommt der Name x in verschiedenen Rollen vor. In der Teilformel $\exists x\, P(x)$ ist das Vorkommen von x in $P(x)$ durch den vor $P(x)$ stehenden Quantor gebunden. Deshalb bezieht sich der Name x in $P(x)$ auf eine andere Variable als die des führenden Allquantors. Der Allquantor mit der Variable x hat keine direkten Auswirkungen auf die letzte Teilformel $\exists x\, P(x)$. Zur Präzisierung dieser Beobachtungen führen wir den Begriff des Wirkungsbereiches eines Quantors ein.

In der Formel $\exists x\, \alpha$ oder $\forall x\, \alpha$ *bindet der Quantor alle Vorkommen der Variable mit Namen x* in der Formel α, außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor innerhalb von α gebunden sind. x ist die Variable des Quantors, und der *Wirkungsbereich des Quantors* ist die Formel α.

Ein Vorkommen einer Variable x heißt *frei*, wenn es nicht im Wirkungsbereich eines Quantors für x liegt. Wir sagen auch, dass die Variable *x frei vorkommt*. Ein Vorkommen einer Variable x heißt *gebunden*, wenn es im Wirkungsbereich eines Quantors für x liegt. Man beachte, dass in einer Formel verschiedene Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommen können, die alle den Namen x haben. Ein Beispiel ist die Formel $(\forall x\ P(x)) \vee Q(x)$. Da der Wirkungsbereich des Allquantors nur die Formel $P(x)$ ist, liegt das letzte Vorkommen von x nicht im Wirkungsbereich eines Quantors.

Beispiel 4.9: Wirkungsbereich, freie, gebundene Variable

Gegeben: $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists y\ (S(y) \wedge \forall z\ R(x, z))$

Der Wirkungsbereich des ersten Allquantors ist $(P(x) \wedge Q(x))$, der des Existenzquantors ist $(S(y) \wedge \forall z\ R(x, z))$ und der des letzten Allquantors ist $R(x, z)$. Bis auf das letzte Vorkommen von x sind alle Vorkommen von Variablen gebunden.

Gegeben: $\forall x\ (P(x) \wedge \exists x\ Q(x))$.

Der Wirkungsbereich des Allquantors ist $(P(x) \wedge \exists x\ Q(x))$ und der des Existenzquantors ist $Q(x)$. Das Vorkommen von x in $P(x)$ ist durch den Allquantor gebunden. Dagegen ist das Vorkommen von x in $Q(x)$ nicht durch diesen Quantor, sondern durch den Existenzquantor gebunden.

Enthält eine Formel keine freien Variablen, so bezeichnen wir diese Formel als eine *geschlossene Formel*. Ein Beispiel für eine geschlossene Formel ist die Formel

$$\forall y\ (P(y) \wedge \forall x\ (Q(x) \wedge \exists z\ S((z))),$$

aber auch die Formel $P(a)$, die keine Variable enthält.

Für spätere Anwendungen, wie z.B. die Transformation einer Formel in eine der Normalformen, müssen Variable so umbenannt werden, dass das Ergebnis der Umbenennung eine logisch äquivalente Formel ist. Wir führen deshalb die konsistente Umbenennung wie folgt ein: Wir sagen, eine Formel ist *konsistent umbenannt*, falls

1. es nicht zugleich eine freie Variable und eine gebundene Variable mit Namen x gibt;
2. die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Variablennamen besitzen.

Wir geben nun ein einfaches *Verfahren für die konsistente Umbenennung* von Formeln an:

a) Solange ein Variablenname x sowohl frei als auch gebunden vorkommt,wähle einen neuen Variablennamen z und ersetze alle freien Vorkommen von x durch z.

b) Solange es zwei Quantoren mit einer Variable gleichen Namens gibt, wähle einen der Quantoren und einen neuen Variablennamen z. Ersetze im Wirkungsbereich des

Quantors alle Vorkommen von x durch z, außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor in diesem Wirkungsbereich gebunden sind.

Beispiel 4.10: Umbenennung

Gegeben sei: $R(x) \wedge \forall x\ (P(x)\ \wedge\ \forall x\ (Q(x)\ \wedge \exists x\ S(x)))$

x kommt frei in $R(x)$ und gebunden in der zweiten Teilformel vor, wähle den neuen Namen z und ersetze gemäß (a):

$$R(z) \wedge \forall x\ (P(x)\ \wedge\ \forall x\ (Q(x)\ \wedge \exists x\ S(x)))$$

Der erste und der zweite Allquantor binden x; wähle den ersten Allquantor; wähle y als neuen Namen; da alle Vorkommen von x in $\forall x\ (Q(x) \wedge \exists x\ S(x)))$ im Wirkungsbereich des führenden Allquantors liegen, wird nur das Vorkommen von x in $P(x)$ ersetzt. Ergebnis mit (b):

$$R(z) \wedge \forall y\ (P(y)\ \wedge\ \forall x\ (Q(x)\ \wedge \exists x\ S(x)))$$

Der zweite und der dritte Quantor binden x; wähle den neuen Namen y_1 und ersetze x in $Q(x)$. Ergebnis mit (b):

$$R(z) \wedge \forall y\ (P(y)\ \wedge\ \forall y_1\ (Q(y_1)\ \wedge \exists x\ S(x)))$$

4.2.2 Semantik der Prädikatenlogik

Bisher haben wir nur die syntaktische Struktur von Formeln festgelegt und nicht über die Bedeutung der Formeln gesprochen. In der Prädikatenlogik wird die Semantik über Interpretationen festgelegt, die den einzelnen Symbolen eine Bedeutung in Form von konkreten Objekten zuordnen. Sei beispielsweise die Formel $\forall x\ P(x, a, f(x))$ gegeben. Zuerst müssen wir sagen, welchen Grundbereich wir betrachten. Dann können wir dem Prädikatssymbol P eine konkrete Relation P_1 und dem Funktionssymbol f eine konkrete Funktion f_1 und dem Konstantensymbol a eine Konstante a_1 aus diesem Grundbereich zuordnen. Wir könnten z. B. den Grundbereich der natürlichen Zahlen wählen und vereinbaren: $f_1(n)$ ist die Nachfolgerfunktion $n+1$, a_1 sei 1 und die Relation P_1 bestehe aus allen Tupeln (x, y, z) mit $x+y = z$. Mit dieser Interpretation ist die Formel wahr, denn für alle natürlichen Zahlen n gilt $n+1 = f_1(n)$.

Die Semantik des Gleichheitsprädikats $t_1 = t_2$ wird so festgelegt, dass für jede Interpretation $\Im$ gelten soll: $\Im(t_1 = t_2)$ ist wahr genau dann, wenn die Interpretation für beide Terme die gleichen Ergebnisse liefert, d.h. wenn $\Im(t_1) = \Im(t_2)$ gilt.

Die Mengen der Konstantensymbole, der Funktionssymbole und der Prädikatssymbole einer Formel, denen wir durch eine Interpretation eine Bedeutung zuordnen, können wir können wir zu einem Tripel zusammenfassen: $\sum = (K, F, R)$ mit K, die Menge der Konstantensymbole, F die Menge der Funktionssymbole und R die Prädikatssymbole. In der Logik wird das Tripel $\sum$ ebenfalls als *Signatur* bezeichnet.

Die durch eine Formel α *induzierte Signatur* $\sum(\alpha)$ besteht aus der Menge der in der Formel α vorkommenden Konstantensymbole, der Menge der vorkommenden Funktionssymbole und der Menge der auftretenden Prädikatssymbole. Wir gliedern die Definition der Interpretation prädikatenlogischer Formeln in zwei Teile. Im ersten Teil wird festgelegt, dass alle Symbole der Signatur an konkrete Werte gebunden werden.

Definition 4.12: Interpretation

Eine zu einer Signatur Σ syntaktisch passende Interpretation besteht aus

1. *einer beliebigen, aber nicht leeren Menge U, dem Grundbereich;*
2. *einer Abbildung, die den verschiedenen Symbolen aus Σ konkrete Objekte über dem Grundbereich U wie folgt zuordnet:*
   a) *jeder Variablen x einen Wert $x_U \in U$*
   b) *jedem Konstantensymbol a aus Σ eine Konstante $a_I \in U$*
   c) *jedem n-stelligen Funktionssymbol f aus Σ eine Funktion f_I**:** $U^n \rightarrow U$*
   d) *jedem n-stelligen Prädikatssymbol P aus Σ eine Relation $P_I \subseteq U^n$.* ■

Bevor wir die Interpretation auf Formeln erweitern, führen wir eine modifizierte Interpretation ein. Sei $\Im$ eine gegebene Interpretation über dem Grundbereich U und ein Wert $x_U \in U$. Dann bezeichnet eine Interpretation $\Im[x/x_U]$, die mit $\Im$ völlig übereinstimmt bis auf die Bindung eines Wertes an die Variable x, die unter $\Im$ den Wert $\Im(x)$, unter $\Im[x/x_U]$ jedoch den Wert x_U erhält. Es wird also x der Wert x_U zugeordnet. Die restlichen Zuweisungen bleiben bestehen.

Der Wahrheitswert wahr wird wieder durch das Zeichen **w** und der Wahrheitswert falsch durch das Zeichen **f** repräsentiert.

Definition 4.13: Interpretation (Fortsetzung)

Wir erweitern die Interpretation auf prädikatenlogische Formeln, deren Variable konsistent umbenannt sind: Für jeden Term $f(t_1, ..., t_n)$ legen wir fest $\Im(f(t_1, ..., t_n)) = \Im(f)(\Im(t_1), ..., \Im(t_n))$.

Für Formeln gilt

1. $\Im(P(t_1, ..., t_n)) = \Im(P)(\Im(t_1), ..., \Im(t_n))$;
2. $\Im(t_1 = t_2) = \mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(t_1) = \Im(t_2)$;
3. $\Im(\neg\alpha) = \mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha) = \mathbf{f}$;
4. $\Im(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha) = \mathbf{w}$ *und* $\Im(\beta) = \mathbf{w}$;
5. $\Im(\alpha \vee \beta) = \mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha) = \mathbf{w}$ *oder* $\Im(\beta) = \mathbf{w}$;
6. $\Im(\exists x\, \alpha) = \mathbf{w}$ *genau dann, wenn es ein* $x_U \in U$ *gibt mit* $\Im[x/x_U](\alpha) = \mathbf{w}$;
7. $\Im(\forall x\, \alpha) = \mathbf{w}$ *genau dann, wenn für jedes* $x_U \in U$ *gilt* $\Im[x/x_U](\alpha) = \mathbf{w}$. ■

Sei M eine Menge von Formeln, $\Sigma(M)$ die durch die Formelmenge induzierte Signatur und $\Im$ eine Interpretation. Wir bezeichnen dann $\Im$ als eine zur Formelmenge M syntaktisch passende Interpretation.

Beispiel 4.11: Interpretation

$\alpha = \forall x \exists y\, P(x, y) \wedge \forall x \forall y\, (x{=}y \rightarrow P(x, f(y))) \wedge \neg P(a, a)$

Eine zu α syntaktisch passende Interpretation $\Im$ ist dann

U = {3, 4} der Grundbereich

$\Im(a) = a_1 = 3$

$\Im(f){=}f_1$ mit $f_1(3){=}4$ und $f_1(4){=}3$

$\Im(P) = P_1$, der Relation $P_1{=}$ {(3, 4), (4, 3)}

Wir wenden diese Interpretation schrittweise an, um den Wahrheitswert der Formel aus Beispiel 4.11 zu berechnen. Dazu bestimmen wir für jede der durch die Konjunktionszeichen abgegrenzten Teilformeln den Wahrheitswert. Ist jede der Teilformeln für die Interpretation wahr, dann ist die ganze Formel für diese Interpretation wahr.

Bei der Berechnung des Wahrheitswertes können wir mit der Formel beginnen und gemäß der induktiven Definition von Interpretationen schrittweise bis zu den Eigenschaften der Relationen und Funktionen gelangen. Diese Vorgehensweise demonstrieren wir an der ersten Teilformel.

$\Im(\forall x \exists \mathrm{y}\, P((x, y)) = \mathbf{w}$.

Für alle $\mathrm{x_U} \in$ {3, 4} gilt: $\Im_{[x/\mathrm{x}U]}(\exists y\, P(x, y)) = \mathbf{w}$.

Für alle $\mathrm{x_U} \in$ {3, 4} gibt es ein $\mathrm{y_U} \in$ {3, 4} mit $\Im_{[\mathrm{x/xU}][\mathrm{y/yU}]}(P(x, y)) = \mathbf{w}$.

Für alle $\mathrm{x_U} \in$ {3, 4} gibt es ein $\mathrm{y_U} \in$ {3, 4} mit $(\mathrm{x}_U, \mathrm{y_U}) \in P_1$.

Weiterhin gilt für die zweite Teilformel, wobei wir hier umgekehrt vorgehen:

Für alle $\mathrm{x_U}, \mathrm{y_U} \in$ {3, 4} gilt mit $\mathrm{x_U} = \mathrm{y_U}$ auch $(\mathrm{x_U}, \boldsymbol{f}(\mathrm{y_U})) \in P_1$.

Für alle $\mathrm{x_U}, \mathrm{y_U} \in$ {3, 4} gilt $\Im_{[x/\mathrm{xU}][y/\mathrm{yU}]}(\, x = y \rightarrow P(x, f(y))\,) = \mathbf{w}$.

$\Im(\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow P(x, f(y)))) = \mathbf{w}$.

Da auch noch $(3, 3) \notin P_1$ gilt, sind alle drei Teilformeln für die Interpretation wahr. Insgesamt erfüllt die Interpretation $\Im$ also die prädikatenlogische Formel α.

Ein weiteres Beispiel sei die Formel $\alpha = \forall x\, P(x, f(x)) \wedge \forall z\, Q(g(a, z))$ mit

- P ist ein zweistelliges und Q ein einstelliges Prädikatensymbol.
- f ist ein einstelliges und g ein zweistelliges Funktionssymbol.
- a ist ein Konstantensymbol.

Eine zu α syntaktisch passende Interpretation $\Im$ ist: Grundbereich U = {0, 1, 2, ...} = $\mathbb{N}$

$\Im(a) = a_2$ mit $a_2 = 2$

$\Im(f) = f_2$ mit der Nachfolgerfunktion $f_2(\mathrm{n}) = \mathrm{n} + 1$

$\Im(g) = g_2$ mit der Additionsfunktion $g_2(\mathrm{n}, \mathrm{m}) = \mathrm{n}{+}\mathrm{m}$

$\Im(P) = P_2$ mit $P_2 = \{(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \mid \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathrm{U}$ und $\mathrm{m} < \mathrm{n}\}$, der Kleiner-Relation

$\Im(Q) = Q_2$ mit $Q_2 = \{\mathrm{n} \in \mathrm{U} \mid \mathrm{n}$ ist Primzahl$\}$

Für die Interpretation ist die Formel falsch, denn es gilt $\Im(\forall z\, Q(g(a, z))) = \mathbf{f}$, da $g_2(2, 4)=6$ und 6 keine Primzahl ist.

Die in der Aussagenlogik eingeführten Begriffe erfüllbar, widerspruchsvoll und tautologisch sind auch in der Prädikatenlogik gebräuchlich. Wir können die Definition 4.4 übernehmen. Eine Formel ist also *erfüllbar*, falls es eine Interpretation gibt, die für die Formel den Wert wahr liefert. Sie ist *widerspruchsvoll* (bzw. *tautologisch*), falls sie für jede Bewertung falsch (bzw. wahr) wird. Eine Interpretation $\Im$ mit $\Im(\alpha) = \mathbf{w}$, also eine Interpretation, die die Formel α erfüllt, wird manchmal auch als Modell der Formel bezeichnet.

Um zu beweisen, dass eine Formel erfüllbar ist, genügt es, eine erfüllende Interpretation zu konstruieren. Im Allgemeinen gibt es aber zu einer Formel unendlich viele verschiedene syntaktisch passende Interpretationen, die wir natürlich nicht alle überprüfen können. Sollte die Formel widerspruchsvoll sein, so wüssten wir nicht, wann wir mit dem Prüfen aufhören können. Die Frage, ob es nicht doch einen Algorithmus gibt, der die Erfüllbarkeit entscheidet, hat dazu geführt, dass man die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik bewiesen hat. Ohne näher darauf einzugehen, halten wir fest, dass es keinen Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem gibt.

Es gibt zwar keinen Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem, es lässt sich aber die Menge aller zu betrachtenden Interpretationen relativ stark einschränken.

Satz 4.1: Löwenheim/Skolem

Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe besitzt eine erfüllende Interpretation mit einem abzählbaren Grundbereich. ■

Wir brauchen also *nur* Interpretationen mit einem endlichen oder einem abzählbaren – zu $\mathbb{N}$ isomorphen – Grundbereich zu betrachten.

Definition 4.14: Semantische Folgerung

Sei M eine Menge prädikatenlogischer Formeln und β *eine prädikatenlogische Formel.* β ***folgt semantisch aus M****, in Zeichen* $M \models \beta$ *gilt genau dann, wenn für jede Interpretation* $\Im$*, für die alle Formeln in M erfüllt sind, auch* β *wahr ist. D.h. wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ *für alle* $\alpha \in M$ *gilt, dann muss auch* $\Im(\beta)=\mathbf{w}$ *gelten. Enthält M nur eine Formel* α*, schreibt man auch kurz* $\alpha \models \beta$. ■

Wenn wir in Lemma 4.1 und in Abschnitt 4.1 über die Aussagenlogik aussagenlogische Formeln durch prädikatenlogische Formeln ersetzen, gelten die Sätze auch für die Prädikatenlogik. Die zentralen Zusammenhänge sind:

α ist widerspruchsvoll genau dann, wenn α nicht erfüllbar ist genau dann, wenn $(\neg\alpha)$ tautologisch ist.

$\alpha \models \beta$ genau dann, wenn $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll ist.

Die logische Äquivalenz zwischen prädikatenlogischen Formeln ist wie im aussagenlogischen Fall definiert. Anstelle der Bewertungen der Atome verwenden wir hier die Interpretationen.

Definition 4.15: Logische Äquivalenz

*Die Formeln α und β heißen **logisch äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$ für alle Interpretationen $\Im$ gilt.* ■

Auch für prädikatenlogische Formeln α und β gilt, wie in der Aussagenlogik:

$\alpha \approx \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$.

Neben den Umformungsgesetzen, die wir schon für die Aussagenlogik kennengelernt haben und die weiterhin gelten, gibt es nun weitere Gesetze, die sich auf die Quantoren beziehen. Außerdem liefert das Verfahren der konsistenten Umbenennung aus Abschnitt 4.2.1 eine logisch äquivalente Formel. Die Beweise für die einzelnen Gesetze sind einfach und werden mit der Definition der logischen Äquivalenz geführt.

Umformungsregeln (Fortsetzung):

Quantorwechsel	$\neg(\exists x\,\alpha) \approx \forall x\,(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x\,\alpha) \approx \exists x\,(\neg\alpha)$
Quantortausch	$\exists x \exists y\,\alpha \approx \exists y \exists x\,\alpha$ und $\forall x \forall y\,\alpha \approx \forall y \forall x\,\alpha$
Quantoren-zusammenfassung	$\exists x\,\alpha \vee \exists x\,\beta \approx \exists x\,(\alpha \vee \beta)$ und $\forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta \approx \forall x\,(\alpha \wedge \beta)$
Quantor-elimination	Sei x keine freie Variable in α, dann gilt: $\exists x\,\alpha \approx \alpha$ und $\forall x\,\alpha \approx \alpha$
Quantifizierung	Sei x keine freie Variable in β, dann gilt: $\exists x\,\alpha \wedge \beta \approx \exists x\,(\alpha \wedge \beta)$ $\exists x\,\alpha \vee \beta \approx \exists x\,(\alpha \vee \beta)$ $\forall x\,\alpha \wedge \beta \approx \forall x\,(\alpha \wedge \beta)$ $\forall x\,\alpha \vee \beta \approx \forall x\,(\alpha \vee \beta)$

Die folgenden Beispiele sollen die logisch äquivalenten Umformungen verdeutlichen.

Beispiel 4.12: Umformungsregeln

Quantorenwechsel:

$\neg\exists y \forall x\; P(x, y) \;\approx\; \forall y \neg\forall x\, P(x, y) \;\approx\; \forall y \exists x\, \neg P(x, y)$

Quantorenzusammenfassung:

$\forall x \exists y\, P(x, y) \;\wedge\; \forall x\, R(x) \;\approx\; \forall x\, (\exists y\, P(x, y) \wedge R(x))$

Quantorenelimination:

x ist keine freie Variable in $\forall y\, P(y) \;\wedge \exists x\, R(x)$

$\exists x\ (\forall y\ P(y)\ \wedge \exists x\ R(x)) \approx \forall y\ P(y)\ \wedge \exists x\ R(x)$

Quantifizierung:

x ist keine freie Variable in $\exists y\ S(y)$.

$\exists x\ P(x) \wedge \exists y\ S(y) \approx \exists x\ (P(x) \wedge \exists y\ S(y))$

Konsistente Umbenennung:

$\exists x\ (P(x) \wedge \exists x\ S(x)) \approx \exists y\ (P(y) \wedge \exists x\ S(x))$

Neben der logischen Äquivalenz benötigen wir für die Behandlung von Normalformen prädikatenlogischer Formeln die so genannte Erfüllbarkeitsäquivalenz. Sie besagt, dass zwei Formeln erfüllbarkeitsäquivalent sind, wenn sie beide erfüllbar oder beide widerspruchsvoll sind. Im Unterschied zur logischen Äquivalenz können erfüllbarkeitsäquivalente Formeln für eine Interpretation durchaus verschiedene Wahrheitswerte annehmen.

Definition 4.16: Erfüllbarkeitsäquivalenz

*Zwei Formeln α und β sind **erfüllbarkeitsäquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx_{sat} \beta$, falls gilt: α ist erfüllbar genau dann, wenn β erfüllbar ist.* ■

Für Anwendungen, bei denen man zum Beispiel nur wissen will, ob ein Sachverhalt widerspruchsvoll oder tautologisch ist, genügt es vollkommen, eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel zu konstruieren.

4.2.3 Normalformen

Im Weiteren behandeln wir nur geschlossene Formeln, d.h. Formeln ohne freie Variablen. Wir stellen zuerst die Negationsnormalform, dann die pränexe Normalform und schließlich die Skolem-Normalform vor.

Die Negationsnormalform für aussagenlogische Formeln verlangt, dass Negationszeichen direkt vor den Atomen stehen. In der Prädikatenlogik stehen die Primformeln $P(t_1, ..., t_n)$ für aussagenlogische Atome. So verlangen wir hier, dass die Negationszeichen unmittelbar vor den Primformeln stehen müssen.

Definition 4.17: Negationsnormalform

*Eine Formel α ist in **Negationsnormalform (NNF)** genau dann, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einer Primformel steht.* ■

Wir erweitern das Verfahren zur Erzeugung einer Negationsnormalform prädikatenlogischer Formeln gegenüber der aussagenlogischen Transformation um Regeln, die Negationszeichen über die Quantoren ziehen. Die entsprechende Regel finden wir in der Liste der prädikatenlogischen Umformungsgesetze. Es handelt sich dabei um den Quantorenwechsel $\neg(\exists x\ \alpha) \approx \forall x\ \neg\alpha$ und $\neg(\forall x\ \alpha) \approx \exists x\ \neg\alpha$, der ebenso wie die De Morganschen Regeln die Negationszeichen nach innen zieht.

Ein Verfahren zur Erzeugung einer logisch äquivalenten Negationsnormalform beruht auf der De Morganschen Regel, der Elimination doppelter Negationszeichen und dem Quantorenwechsel. Wir führen die folgenden Schritte aus, solange sie anwendbar sind.

1. Ersetze $\neg(\alpha \wedge \beta)$ durch $\neg\alpha \vee \neg\beta$
2. Ersetze $\neg(\alpha \vee \beta)$ durch $\neg\alpha \wedge \neg\beta$
3. Ersetze $\neg\neg\alpha$ durch α
4. Ersetze $\neg(\exists x\ \alpha)$ durch $\forall x\ \neg\alpha$
5. Ersetze $\neg(\forall x\ \alpha)$ durch $\exists x\ \neg\alpha$

Mit Hilfe dieses Verfahrens lässt sich die folgende allgemeine Aussage beweisen.

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine logisch äquivalente Formel in Negationsnormalform.

Bevor wir auf die nächste Normalform eingehen, geben wir ein Beispiel, das die Transformation in eine NNF demonstriert.

Beispiel 4.13: Negationsnormalform

	$\neg(\forall x\ (P(x) \vee \exists y\ S(x,y)) \wedge \neg\exists z\ S(z,z))$	
$\approx$	$\neg\forall x\ (P(x) \vee \exists y\ S(x,y)) \vee \neg\neg\exists z\ S(z,z)$	De Morgan
$\approx$	$\neg\forall x\ (P(x) \vee \exists y\ S(x,y)) \vee \exists z\ S(z,z)$	Negation
$\approx$	$\exists x\ \neg(P(x) \vee \exists y\ S(x,y)) \vee \exists z\ S(z,z)$	Quantorwechsel
$\approx$	$\exists x\ (\neg P(x) \wedge \neg\exists y\ S(x,y)) \vee \exists z\ S(z,z)$	DeMorgan
$\approx$	$\exists x\ (\neg P(x) \wedge \forall y\ \neg S(x,y)) \vee \exists z\ S(z,z)$	Quantorwechsel

Bisher können die Quantoren noch verstreut in einer Formel, wie z. B. $\exists x\ P(x) \vee \forall y\ P(y)$, vorkommen, was bei vielen Formeln die Lesbarkeit und die Übersichtlichkeit erschwert. Wenn dagegen alle Quantoren am Anfang der Formel stehen und dann eine quantorenfreie Formel folgt, so sprechen wir von einer *pränexen Normalform*. Enthält eine Formel β keine Quantoren und sind Q_i Quantoren, dann hat die Formel $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \beta$ die gewünschte Form. Beispielsweise ist die Formel $\exists x \forall y\ (P(x) \vee P(y))$ in pränexer Normalform.

Definition 4.18: Pränexe Normalform, PNF

*Eine Formel α ist in **pränexer Normalform**, falls sie die Form $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \beta$ hat, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ für $1 \leq i \leq n$ und β quantorenfrei ist. β wird als Kern der Formel bezeichnet.* ■

Die Quantorenfolge vor dem quantorenfreien Kern β wird als *Präfix* der Formel bezeichnet.

Wir legen jetzt ein Transformationsverfahren zur Erzeugung einer logisch äquivalenten pränexen Normalform fest:

Die Eingabe ist Formel in NNF. Sollte die Formel nicht in Negationsnormalform vorliegen, so transformieren wir zuerst die Formel in eine logisch äquivalente Formel in NNF.

1. Führe eine konsistente Umbenennung durch, sodass verschiedene Quantoren sich auf verschiedene Variablen beziehen und keine Variable sowohl gebunden als auch frei vorkommt.
2. Wende folgende Ersetzungsregeln so lange wie möglich an:
   – Ersetze $(\forall x\alpha) \wedge \beta$ durch $\forall x(\alpha \wedge \beta)$
   – Ersetze $(\exists x\alpha) \wedge \beta$ durch $\exists x(\alpha \wedge \beta)$
   – Ersetze $(\forall x\alpha) \vee \beta$ durch $\forall x(\alpha \vee \beta)$
   – Ersetze $(\exists x\alpha) \vee \beta$ durch $\exists x(\alpha \vee \beta)$

An einem Beispiel demonstrieren wir das Verfahren. Im ersten Schritt wird umbenannt. Dann wird der Existenzquantor $\exists y$ über den ganz rechts stehenden Teilausdruck gezogen und schließlich im dritten Schritt über die restlichen Prädikate.

Beispiel 4.14: Pränexe Normalform

$$\begin{aligned}
& \forall x \neg P(x) \wedge \forall x\,(P(x) \vee R(x)) \wedge \forall x\,(Q(x) \wedge \exists y\, R(y)) \\
\approx\ & \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2(P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge \forall x_3(Q(x_3) \wedge \exists y\, R(y)) \\
\approx\ & \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2(P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge \forall x_3 \exists y(Q(x_3) \wedge R(y)) \\
\approx\ & \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y\, (\neg P(x_1) \wedge (P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge Q(x_3) \wedge R(y))
\end{aligned}$$

Allgemein lässt sich zeigen, dass das Verfahren eine logisch äquivalente Formel in PNF erzeugt:

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine logisch äquivalente Formel in pränexer Normalform.

An die Struktur des quantorenfreien Kerns einer Formel in PNF haben wir bisher keine Anforderungen gestellt. Wir könnten beispielsweise verlangen, dass der Kern in *konjunktiver Normalform* vorliegen muss. Für quantorenfreie Formeln ist die konjunktive Normalform wie in der Aussagenlogik definiert. Primformeln spielen dabei die Rolle aussagenlogischer Atome. Ein Literal ist dann eine Primformel oder eine negierte Primformel. Eine Klausel ist wieder eine Disjunktion von Literalen, und eine Konjunktion von Klauseln ist eine konjunktive Normalform. Die Menge der Formeln in konjunktiver Normalform wird wieder mit KNF bezeichnet.

Das Verfahren, welches eine aussagenlogische Formel in eine logisch äquivalente Formel in KNF transformiert, kann dann direkt auf quantorenfreie Formeln angewendet werden.

Das Ziel der nächsten Normalform, der *Skolem-Normalform (SKNF),* ist die Elimination aller Existenzquantoren, sodass wir schließlich eine Formel in pränexer Normalform erhalten, die nur führende Allquantoren besitzt, aber keine Existenzquantoren mehr enthält. Es gelingt nicht immer, eine logisch äquivalente Formel in SKNF zu konstruieren, aber zumindest eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel. Für viele Anwendungen ist dies aber völlig ausreichend.

Definition 4.19: Skolem-Normalform, SKNF

Eine Formel α ist in ***Skolem-Normalform****, falls sie die Form* $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \beta$ *hat, wobei β quantorenfrei ist. Der Präfix von α enthält also keine Existenzquantoren.* ■

Die Formel $\forall x \exists y\, P(x, y)$ ist offensichtlich erfüllbar, zum Beispiel mit dem Grundbereich der natürlichen Zahlen und der Relation „x beliebig und y gerade". Es genügt, für die Erfüllbarkeit zu jedem x ein y zu finden, für die die Relation zutrifft. Damit haben wir einen funktionalen Zusammenhang, nämlich abhängig von x einen Wert für y zu bestimmen. Wenn wir für ein neues Funktionssymbol f die Formel $\forall x\, P(x, f(x))$ bilden, indem wir den Existenzquantor entfernen und das Vorkommen von y durch $f(x)$ ersetzen, dann ist die veränderte Formel ebenso erfüllbar. Die resultierende Formel enthält nun nur noch einen Allquantor.

Steht der Existenzquantor, wie bei der Formel $\exists x \forall y\, P(x, y)$, am Anfang der Formel, so ist die Formel erfüllbar, falls es einen Wert für x gibt, für den die Formel wahr wird. Der Wert hängt dabei nicht von anderen Variablen ab. Hier genügt es, die führende Existenzvariable überall durch ein neues Konstantensymbol a zu ersetzen und den Existenzquantor zu streichen. Das Ergebnis ist dann die Formel $\forall y\, P(a, y)$.

Die beschriebene Ersetzung der Existenzquantoren liefert im Allgemeinen nur eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel, aber nicht eine logisch äquivalente Formel.

Verfahren zur Erzeugung einer Skolem-Normalform

1. Erstelle eine pränexe Normalform der Formel.
2. Die existenzquantifizierten Variablen werden eliminiert durch:
   – Variable y von führenden Existenzquantoren werden durch neue Konstantensymbole a_y ersetzt: $[y/a_y]$
   – Jede existenzquantifizierte Variable y im Bindungsbereich der allquantifizierten Variablen $x_1, \ldots, x_n$ wird durch einen Term $f_y(x_1, \ldots, x_n)$ ersetzt mit einem neuen Funktionssymbol f_y: $[y/f_y(x_1, \ldots, x_n)]$

Für verschiedene Variablen y sind auch die a_y bzw. f_y verschieden. Die Existenzquantoren werden eliminiert. Die Ergebnisformel ist erfüllbar genau dann, wenn die Ausgangsformel erfüllbar ist.

Allgemein lässt sich zeigen, dass das Verfahren immer zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Formel in SKNF führt:

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform (SKNF).

Nach Durchführung des Verfahrens besitzt die Formel nur noch Allquantoren oder, falls die Anfangsformel nur Existenzquantoren enthielt, keine Quantoren mehr. Im letzteren Fall, da wir von geschlossenen Formeln ausgegangen sind, treten in der Ergebnisformel keine Variablen mehr auf. So wird aus der Formel $\exists x \exists y\, P(x, y)$ die Formel $P(a, b)$ für Konstantensymbole a und b.

Beispiel 4.15: Skolemisierung

Sei $\alpha = \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y \ (\neg P(x_1) \wedge (P(x_2) \vee S(\mathrm{g}(\mathrm{y},\ x_1, x_2)) \wedge Q(x_3) \wedge R(y))$

Ersetze x_1 durch ein neues Konstantensymbol *a*,
streiche den Existenzquantor $\exists x_1$:
$\alpha \approx_{\mathrm{sat}} \forall x_2 \forall x_3 \exists y \ (\neg P(a) \ \wedge (P(x_2) \vee S(\mathrm{g}(\mathrm{y}, a, x_2))) \wedge Q(x_3) \wedge R(y))$.

Ersetze *y* durch ein neues Funktionssymbol *f* mit *f*(*x2, x3*),
streiche den Existenzquantor $\exists y$:

$\alpha \approx_{\mathrm{sat}} \forall x_2 \forall x_3 \ (\neg P(a) \wedge (P(x_2) \vee S(\mathrm{g}(f(x_2, x_3), a, x_2))) \wedge Q(x_3) \wedge R(f(x_2, x_3)))$

Einige resolutionsbasierte Theorem-Beweiser, das sind Algorithmen, die versuchen, zu beweisen, dass eine Formel widerspruchsvoll ist, verlangen als Eingabe Formeln in Skolem-Normalform. Wollen wir beweisen, dass $\alpha \models \beta$ gilt, so genügt es zu zeigen: $\alpha \wedge \neg\beta$ ist widerspruchsvoll. Wir transformieren nun die Formel $\alpha \wedge \neg\beta$ in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel γ in Skolem-Normalform und wenden den Theorem-Beweiser auf die Formel γ an. Wegen der Erfüllbarkeitsäquivalenz wissen wir, dass γ widerspruchsvoll ist genau dann, wenn die Formel $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll ist. Sollte also γ widerspruchsvoll sein, so gilt die Beziehung $\alpha \models \beta$.

4.2.4 Modellbildung mit der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt werden wir einige Modellierungsbeispiele vorstellen. Zuerst zeigen wir, wie mit Hilfe des Gleichheitsprädikats „=“ Anzahleigenschaften modelliert werden können. Das zweite Beispiel befasst sich dann mit Eigenschaften von Relationen. Im dritten Beispiel demonstrieren wir, wie durch Festlegung des Grundbereichs und durch eine feste Wahl von Funktionen Eigenschaften über diesem Grundbereich beschrieben werden können. Abgeschlossen wird der Abschnitt durch eine Modellierung von Geschwisterbeziehungen.

Mit Hilfe der Gleichheit lässt sich ziemlich einfach beschreiben, dass eine Formel nur über Grundbereichen mit mindestens, genau oder maximal *n* Elementen erfüllt werden kann. Möchten wir z.B. ausdrücken, dass der Grundbereich mindestens drei Elemente besitzen muss, dann nehmen wir die Formel

$$\beta_3 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ (\neg\, x_1{=}x_2 \ \wedge \neg\, x_1{=}x_3 \wedge \neg\, x_2{=}x_3\ ).$$

Wie sehr leicht nachzuprüfen ist, kann β_3 nur wahr werden über einem Grundbereich mit mindestens drei Elementen.

Soll der Grundbereich mindestens *n* Elemente enthalten, so wählen wir die Formel

$$\beta_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \ (\neg\, x_1{=}x_2 \wedge \ldots \wedge \neg\, x_1{=}x_n \wedge \neg\, x_2{=}x_3 \ \wedge \ldots\ldots \wedge \neg\, x_{n-1}{=}x_n)$$

und fügen sie unserer Ursprungsformel hinzu. Besteht die Forderung nach maximal *n* Elementen, dann wählen wir die Formel

$$\gamma_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \ \forall y \ \ (y{=}x_1 \vee \ldots. \vee y{=}x_n)$$

Fassen wir beide Formeln zusammen, so erhalten wir die Forderung nach genau n Elementen, d.h. für $\beta_n \wedge \gamma_n$ besitzt jede erfüllende Interpretation einen Grundbereich mit genau n Elementen.

Das nächste Beispiel zeigt, wie wir verschiedene Eigenschaften von Relationen, wie die Reflexivität, die Irreflexibilität, die Symmetrie und Ordnungsaspekte mit Hilfe prädikatenlogischer Formeln beschreiben können.

Beispiel 4.16: Eigenschaften von Relationen

$\alpha_1 = \forall x\, R(x, x)$	reflexiv
$\alpha_2 = \forall x\, \neg R(x, x)$	irreflexiv
$\alpha_3 = \forall x \forall y\, (R(x, y) \to R(y, x))$	symmetrisch
$\alpha_4 = \forall x \forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$	transitiv
$\alpha_5 = \forall x \forall y\, (R(x, y) \wedge R(y, x) \to x{=}y)$	antisymmetrisch
$\alpha_6 = \forall x \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	total

Die Formel $\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4$ beschreibt dann eine Äquivalenzrelation. Ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation ist die Gleichheit „=“. Das heißt, für jede Interpretation mit $\Im(\alpha_1)=\mathbf{w}$ und $\Im(R)=R_1$ ist die zweistellige Relation R_1 eine Äquivalenzrelation.

Die Kleiner-Relation „<“ für natürliche Zahlen ist ein Beispiel für eine Relation mit dem Grundbereich $\mathbb{N}$, die $\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$ erfüllt. Da sie irreflexiv und transitiv ist, ist sie gemäß Definition 2.12 eine strenge Halbordnung.

Die Kleiner-gleich-Relation über $\mathbb{N}$ erfüllt außer $\alpha_1 \wedge \alpha_4$ auch $\alpha_5 \wedge \alpha_6$. Denn für Zahlen n und m gilt $n \leq m$ oder $m \leq n$ und aus $n \leq m$ oder $m \leq n$ folgt $n=m$. Sie ist damit eine totale Ordnung.

Im nächsten Beispiel 4.17 wollen wir einige Eigenschaften über den natürlichen Zahlen beschreiben. Neben dem oben eingeführten Gleichheitsprädikat wollen wir die übliche Addition für die natürlichen Zahlen verwenden. Dazu legen wir fest, dass $x + y$ als die Addition über den natürlichen Zahlen interpretiert werden muss.

Beispiel 4.17: Zahleneigenschaften

$$\alpha = \forall x \forall y\ (Kl(x, y) \leftrightarrow \exists z\, (x+z = y \wedge \neg\, z = 0))$$

$$\beta = \forall x \forall y\, (m(x, 0) = 0 \wedge m(x, y+1) = m(x, y)+x)$$

$$\sigma = \forall x\, (Prim(x) \leftrightarrow (Kl(1, x) \wedge \neg \exists y \exists z\, (m(y, z) = \mathrm{x} \wedge \neg y = x \wedge \neg\, z = \mathrm{x}))$$

Gehen wir nun davon aus, dass $\mathbb{N}$ der Grundbereich der Interpretationen, 0 und 1 die Zahlen sind und „+“ als die übliche Addition interpretiert wird.

Die erste Formel α beschreibt gerade die Kleiner-Relation für natürliche Zahlen. Denn $Kl(x, y)$ gilt genau dann, wenn eine natürliche Zahl größer 0 zu x addiert die Zahl y ergibt. Die zweite Formel enthält als einzigen frei interpretierbaren Teil das zweistellige Funktionssymbol m. Die Formel β ist eine rekursive Beschreibung der Multiplikation. Denn $m(x, 0) = 0$ beschreibt gerade den Rekursionsanfang, dass eine Zahl x mit 0 multipliziert wieder 0 ergibt. $m(x, y+1) = m(x, y)+x$ ist der Rekursionsschritt, der besagt, dass ein x mit y+1 multipliziert gerade x mit y multipliziert plus x ist. Über dem Grundbereich $\mathbb{N}$ und „+“ als Addition ist für jede erfüllende Interpretattion *m* gerade die Multiplikation.

Wie man sofort sieht, modelliert die Formel $\alpha \wedge \beta \wedge \sigma$ die Primzahleigenschaft. Denn mit *Kl* als Kleiner-Relation und *m* als Multiplikation ist σ mit dem einstelligen Prädikat *Prim* nichts anderes als eine Definition von Primzahlen.

Im letzten Beispiel 4.18 wollen wir Verwandtschaftsbeziehungen zwischen Personen modellieren. Unter den vielen Verwandtschaftverhältnissen betrachten wir nur einen kleinen Auschnitt, und den auch nicht vollständig. Als Ausgangsbasis ist ein kurzer Text gegeben, der einige Informationen über Mütter und Väter enthält. Stillschweigend, und das kann durchaus kritisch sein, gehen wir davon aus, dass jedem klar ist, was Eltern und was Geschwister sind.

Beispiel 4.18: Verwandtschaft

Gegeben sei der folgende Text:

Eva ist die Mutter von Paul und Maria.
Egon ist der Vater von Vera. Hans ist der Vater von Maria und Paul.
x und y sind die Eltern von z, falls x der Vater von z und y die Mutter von z ist.
Es handelt sich um Geschwister, falls beide dieselben Eltern haben.

Formalisierung:
Für die Repräsentation der Mutter- bzw. Vaterbeziehung wählen wir das zweistellige Prädikat *Mutter* bzw. *Vater.* Für jede Person wählen wir ein Konstanten(symbol): eva für Eva, paul für Paul, hans für Hans, egon für Egon und vera für Vera.

1. Fakten:
   (a) Mutterbeziehung:
   $Mutter(eva, paul) \wedge Mutter(eva, maria)$
   (b) Vaterbeziehungen:
   $Vater(hans, paul) \wedge Vater(hans, maria) \wedge Vater(egon, vera)$
2. Axiomatisierung (d. h. Modellbildung) der Eltern:
   $\forall x \forall y \forall z\ ((Vater(x, z) \vee Mutter(y, z)) \rightarrow Eltern(x, y, z))$
3. Axiomatisierung (d. h. Modellbildung) der Geschwister:
   $\forall x \forall y (\exists u \exists v (Eltern(u, v, x) \wedge Eltern(u, v, y)) \rightarrow Geschwister(x, y))$
4. α sei die Konjunktion der Teilformeln.

Die Formel, die die Geschwisterbeziehung beschreibt, hätten wir auch wie folgt formulieren können:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v\ (Eltern(u, v, x) \wedge Eltern(u, v, y) \rightarrow Geschwister(x, y))$$

Denn es gilt:

$$\forall x \forall y\ (\exists u \exists v\ (Eltern(u, v, x) \wedge Eltern(u, v, y)) \rightarrow Geschwister(x, y))$$

$$\approx \quad \forall x \forall y\, (\neg \exists u \exists v\, (\mathit{Eltern}(u, v, x) \wedge \mathit{Eltern}(u, v, y)) \vee \mathit{Geschwister}(x, y))$$

$$\approx \quad \forall x \forall y\, (\forall u \forall v\, \neg(\mathit{Eltern}(u, v, x) \wedge \mathit{Eltern}(u, v, y)) \vee \mathit{Geschwister}(x, y))$$

$$\approx \quad \forall x \forall y \forall u \forall v\, (\neg(\mathit{Eltern}(u, v, x) \wedge \mathit{Eltern}(u, v, y)) \vee \mathit{Geschwister}(x, y))$$

$$\approx \quad \forall x \forall y \forall u \forall v\, (\mathit{Eltern}(u, v, x) \wedge \mathit{Eltern}(u, v, y) \rightarrow \mathit{Geschwister}(x, y))$$

Ohne Verwendung der prädikatenlogischen Formel schließen wir aus dem Text, dass Eva und Paul Geschwister sind, denn beide haben dieselben Eltern. Ob z.B. Vera und Paul Geschwister sind, wissen wir nicht, da keine Informationen über die Mutter von Vera vorliegen.

Wir untersuchen nun, was aus der Formel α folgt:

1. Aus der Formel α folgt *Geschwister* (*paul*, *maria*). Denn sei $\Im$ eine Interpretation, für die α wahr ist, dann ist für $\Im$ auch
(*Mutter* (*eva, paul*), *Mutter* (*eva, maria*), *Vater* (*hans, paul*) und *Vater* (*hans, maria*)) wahr. Deshalb gilt auch
$\Im(\mathit{Eltern}\ (\mathit{hans}, \mathit{eva}, \mathit{paul})) = \Im(\mathit{Eltern}\ (\mathit{hans}, \mathit{eva}, \mathit{maria})) = \mathbf{w}$.
Mit der vierten Teilformel gilt $\Im(\mathit{Geschwister}\ (\mathit{paul}, \mathit{maria})) = \mathbf{w}$.
2. $\neg$*Geschwister* (*paul*, *vera*) folgt nicht aus der Formel α. Sei $\Im$ eine Interpretation, die über einem (beliebig gewählten) Grundbereich *Mutter*, *Vater*, *Geschwister* und *Eltern* die Relationen zuordnen, die für alle Tupel zutreffen. Offensichtlich erfüllt die Interpretation die Formel, aber nicht die Formel $\neg$*Geschwister* (*paul*, *vera*). Da die Interpretation auch für die Formel $\exists x \exists y\, \neg \mathit{Geschwister}\,(x, y)$ den Wert falsch liefert, ist auch diese Formel keine Folgerung.

Auch wenn wir eine vollständige Liste aller Mutter- und Vaterbeziehungen vorliegen hätten, könnten wir nicht aus der obigen Formel folgern, dass für irgendwelche Personen keine Geschwisterbeziehung vorliegt. Da sich aber alle Geschwisterbeziehungen aus der Formel folgern ließen, könnten wir guten Gewissens annehmen, dass „alles, was nicht folgt, auch nicht gilt". Diese Annahme wird auch als Closed World Assumption bezeichnet. Sie ist aber im Allgemeinen unzulässig. Für die Modellbildung von Anwendungen in der Informatik ist sie aber durchaus gebräuchlich. Eine Reihe von Systemen der Künstlichen Intelligenz aber auch von relationalen Datenbanken benutzen dieses Konzept.

4.3 Elementare Beweistechniken

Durch formale Kalküle, wie sie z.B. in diesem Buch eingeführt werden, sind wir in der Lage, Eigenschaften von Modellen und Systemen zu beweisen. Dies betrifft nicht nur die theoretische Informatik, sondern auch die anwendungsorientierten Gebiete der Informatik. Beispielsweise sind Hard- und Softwaresysteme zu verifizieren und die Sicherheit von Programmen zu gewährleisten. Auf der Grundlage der in den vorherigen Abschnitten eingeführten Aussagenlogik und Prädikatenlogik werden wir einige grundlegende Techniken und Beweisstrukturen vorstellen. Der sichere Umgang mit diesem Handwerkszeug gehört neben dem Verständnis des Gebietes, in dem man etwas beweisen will, zu den notwendigen Kompetenzen für die Entwicklung und die Präsentation von Beweisen. An weiterer Literatur empfehlen wir das Buch *Velleman 2006* [41].

4.3.1 Formaler Rahmen und Grundlagen

In diesem Abschnitt werden wir einen formalen Rahmen für Sätze und deren Beweise vorstellen und neben einigen wichtigen Grundlagen die Methode des indirekten Beweises erklären. Aussagen, die wir beweisen wollen, bringen wir erst einmal in eine Form, aus der klar ersichtlich ist, welche Voraussetzungen gegeben sind und was eigentlich bewiesen werden soll. Nehmen wir dazu den Satz des Pythagoras: Für jedes rechtwinkelige Dreieck ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten. Der Satz besteht aus einer Voraussetzung, der Prämisse, und einer Behauptung, der Konklusion.

Beispiel 4.19: Satzform

Satz: (Pythagoras)

Voraussetzung: Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck, die Länge der Hypothenuse sei c und die Längen der anderen Seiten seien a und b.

Behauptung: Dann gilt $c^2 = a^2 + b^2$.

Nach der Formulierung des Satzes muss deutlich zu erkennen sein, wo der Beweis anfängt. Dies geschieht durch das Wort *Beweis.* Da Beweise im Allgemeinen nicht nur für den Verfasser selber geschrieben werden, sondern von anderen gelesen und nachvollzogen werden sollen, ist es außer bei trivialen Beweisen sinnvoll, die Idee, die Struktur und die Methode des Beweises kurz, aber verständlich anzugeben.

Je nach Vorlieben werden verschiedene Kennzeichnungen für das Beweisende verwendet, beispielsweise eine Box oder die Abkürzung **q.e.d.**, die für *quod erat demonstrandum* steht. Ein Satz und der Beweis haben also den folgenden Rahmen:

Beispiel 4.20: Satz-Beweisform

Satz: Name des Satzes

Voraussetzung: P.

Behauptung: Q.

Beweis: kurzer Hinweis auf die Idee, Methode, Struktur des Beweises

Beweistext.

q.e.d.

Eine wichtige Beweismethode ist der *indirekte Beweis*. Er beruht auf dem schon in Abschnitt 4.1 über die Aussagenlogik bekannten Zusammenhang: Aus P folgt Q genau dann, wenn $P \wedge \neg Q$ widerspruchsvoll ist. D.h. ein Satz der Form *Voraussetzung P und Behauptung Q* gilt genau dann, wenn P zusammen mit dem Gegenteil von Q, also $\neg Q$, widerspruchsvoll ist. Fehlt die Prämisse P, dann gilt Q genau dann, wenn $\neg Q$ widerspruchsvoll ist.

Beispiel 4.21: Schema für indirekten Beweis

Satz: Name

Voraussetzung: P.

Behauptung: Q.

Beweis: (indirekter Beweis, durch Widerspruch)

Nimm das Gegenteil an von Q, also $\neg Q$;

führe $\neg Q$ zu einem Widerspruch;

hierbei darf die Voraussetzung P verwendet werden.

q.e.d.

Die Anwendung des indirekten Beweises wollen wir jetzt an einem Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 4.22: Primzahlen

Satz: Unendlich viele Primzahlen.

Voraussetzung:

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: (durch Widerspruch)

Wir nehmen das Gegenteil an: Es gibt nur endlich viele Primzahlen, sagen wir $p_1, \ldots, p_n$.
Sei $m = p_1 * p_2 * \ldots * p_n + 1$. m ist nicht durch p_1 teilbar, denn m dividiert durch p_1 ergibt $p_2 * \ldots * p_n$ mit Rest 1. Aus demselben Grund ist m auch nicht durch $p_2, p_3 \ldots$ oder p_n teilbar.

Wir verwenden nun die Tatsache, dass eine Zahl, die größer als 1 ist, entweder eine Primzahl ist, oder als ein Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann. m ist größer als 1. Deshalb fahren wir mit einer **Fallunterscheidung** fort:

Fall 1: *m ist eine Primzahl.* Da m größer als jede der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ ist, haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass nur $p_1, \ldots, p_n$ Primzahlen sind.

Fall 2: *m ist ein Produkt von Primzahlen.* Sei q eine dieser Primzahlen, die m teilt. Da $p_1, \ldots, p_n$ nicht Teiler von m sind, muss q verschieden von $p_1, \ldots, p_n$ sein. Das ist ein Widerspruch zur obigen Annahme. Damit haben wir die Annahme, also das Gegenteil der Behauptung des Satzes, zum Widerspruch geführt. Also gilt die Behauptung.

q.e.d.

In dem Beweis des Satzes haben wir außer der Beweismethode des indirekten Beweises noch eine weitere Methode benutzt, und zwar die Fallunterscheidung: m ist entweder eine

Primzahl oder m ist ein Produkt von Primzahlen. Bei der Fallunterscheidung ist es hilfreich, die einzelnen Fälle deutlich zu kennzeichnen. Später werden wir noch einmal sowohl auf den indirekten Beweis wie auch auf die Fallunterscheidung eingehen.

Wir haben in dem obigen Beispiel einen Beweis vorgestellt, ohne zu sagen, was eigentlich ein Beweis ist. Um diese Frage beantworten zu können, müssten wir tief in die Grundlagen und in die Logik einsteigen. Da wir in diesem Abschnitt aber nur das Handwerkszeug für das Erstellen von Beweisen ansprechen wollen, werden wir uns auf wenige Aspekte beschränken. Die Mathematik als die formale Wissenschaft an sich beruht auf Axiomen, die als wahr angenommen werden, und auf logischen Schlussregeln, mit denen aus den Axiomen Schritt für Schritt weitere Aussagen abgeleitet werden.

Definitionen sind nur Abkürzungen für komplexe Konstrukte, um einfacher und eleganter über Aussagen sprechen und Beweise kompakter führen zu können. So ist beispielsweise der Begriff der Halbordnung für Relationen definiert. Immer wenn wir ausdrücken wollen, dass eine Relation diese Eigenschaft hat, benutzen wir den Begriff der Halbordnung, um die Eigenschaft nicht in den definierten Einzelheiten angeben zu müssen.

Wie schon gesagt, sind logische Schlussregeln dazu da, um aus einer Menge von Aussagen eine neue Aussage abzuleiten. Schlussregeln sind in diesem Sinne lokale Operationen zur Erzeugung neuer logisch korrekter Aussagen. Ohne dies explizit zu erwähnen, haben wir in dem Beweis über Primzahlen verschiedene Schlussregeln benutzt, die wir schon aus den Abschnitten 4.1 und 4.2 kennen. So können wir aus der Implikation *Ist m keine Primzahl, dann ist m das Produkt von Primzahlen* und der Annahme *m ist keine Primzahl* schließen, dass *m das Produkt von Primzahlen* ist. Dieser Schluss wird *Modus Ponens* genannt. Er besitzt als Prämisse Aussagen der Form P und $(P \to R)$ und liefert dann die Schlussfolgerung R.

In einem Beweis können wir alle schon früher bewiesenen Sätze und auch die bekannten Definitionen als Voraussetzung benutzen, ohne diese explizit in die Voraussetzung des Satzes aufzunehmen. So haben wir in dem obigen Beispiel von Primzahlen gesprochen, ohne ihre Definition noch einmal anzugeben. Weiterhin haben wir den Satz verwendet, dass sich jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als Produkt von Primzahlen darstellen lässt. Nicht immer gehört ein solcher Satz zum Allgemeinwissen. Um die Korrektheit eines Beweises überprüfen zu können, muss dann angegeben werden, wo der Beweis eines solchen Satzes zu finden ist. Üblicherweise wird dann das entsprechende Buch oder die entsprechende Literaturstelle zitiert.

Nehmen wir einmal an, dass wir eine Aussage über eine symmetrische Relation R beweisen wollen und schon wissen, dass $x\,R\,y$ gilt. Dann folgt daraus, dass auch $y\,R\,x$ gilt. In einem Beweis würde man dann schreiben: Es gilt $x\,R\,y$. Gemäß der Definition 2.10 von symmetrischen Relationen gilt dann auch $y\,R\,x$.

4.3.2 Elementare Beweisstrukturen

Die Grobstruktur eines Beweises lässt sich oftmals schon aus der Struktur der zu beweisenden Aussage ableiten, wobei wir davon ausgehen, dass die Aussage als Satz oder innerhalb eines Satzes bewiesen werden soll. Aussagen sind häufig zusammengesetzt aus einzelnen Bestandteilen, die durch logische Junktoren und Quantoren verknüpft sind. Wir werden zuerst abhängig von den auftretenden Junktoren und anschließend abhängig von den führenden Quantoren verschiedene Beweisschemata vorstellen.

1. Form Konjunktion ($P \wedge R$)

Ein Satz $P \wedge R$ gilt, falls sowohl P als auch R gelten. Somit müssen in einem Beweis beide Teilaussagen gezeigt werden. Das Beweisschema sieht dann wie folgt aus:

Beispiel 4.23: Konjunktion

Satz:

Behauptung: ($P \wedge R$)

Beweis:

Teil 1: Zeige P.

Teil 2: Zeige R.

q.e.d.

2. Form Disjunktion ($P \vee R$)

Eine Aussage ($P \vee R$) gilt, falls mindestens eine der Aussagen P und R gilt. Für einen Beweis bedeutet dies, dass wir eine Fallunterscheidung vornehmen können. Wir unterscheiden die Fälle *P gilt* und *P gilt nicht*. Im ersten Fall, dass P gilt, haben wir nichts zu zeigen. Also bleibt nur der Fall, dass P nicht gilt. Dann müssen wir R zeigen und können dabei verwenden, dass P nicht gilt:

Beispiel 4.24: Disjunktion

Satz:

Behauptung: ($P \vee R$)

Beweis:

Fall 1: *P gilt*: fertig.

Fall 2: *P gilt nicht*. Nimm $\neg P$ an. Zeige, dass R gilt.

q.e.d.

3. Form Implikation ($P \rightarrow R$)

Eine Implikation ($P \rightarrow R$) ist äquivalent zu ($\neg P \vee R$), siehe Abschnitt 4.1, und kann somit mit dem obigen Schema für die Disjunktion bewiesen werden. Im Beweisschema wird also P angenommen und damit R gezeigt.

Implikationen treten häufig innerhalb eines Beweises auf und können mit dem *Kettenschluss* zu neuen Implikationen führen. Sei beispielsweise $(P \to R)$ und $(R \to S)$ gegeben, dann folgt daraus die Implikation $(P \to S)$. Der Kettenschluss verknüpft also zwei Implikationen, wobei die Konklusion einer der gegebenen Implikationen die Prämisse der anderen ist.

Bevor wir nun ein Beweisschema angeben, wollen wir als Vorbereitung die einzelnen Schritte diskutieren. Als Voraussetzung sei gegeben P**,** $(P \to T)$, $(T \to S)$, und wir wollen R beweisen. Wir können mit dem Kettenschluss von $(P \to T)$ und $(T \to S)$ auf $(P \to S)$ schließen und dann mit der Voraussetzung P die Ausssage S folgern. Es fehlt nun noch die Verbindung zu R. Diese könnte hergestellt werden, indem wir die Implikation $(S \to R)$ beweisen und dann mit S auf R schließen.

Beispiel 4.25: Ketten

Satz:

Voraussetzung: P, $(P \to T)$, $(T \to S)$.

Behauptung: R.

Beweis:

Schließe aus der Voraussetzung $(P \to T)$ und $(T \to S)$ auf $(P \to S)$.

Schließe aus der Voraussetzung P und aus $(P \to S)$ auf S.

Beweise als Zwischenschritt die Implikation $(S \to R)$.

Schließe mit Hilfe von S und $(S \to R)$ auf R.

q.e.d.

4. Form Komplexe Implikation $(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$

Die zu beweisende Aussage besteht nicht immer aus nur einer einfachen Konjunktion. Sie kann durchaus eine komplexere Struktur aufweisen. Ein Beispiel ist der Satz: *Sei $x \in [3, 5]$ oder $x \in [7, 9]$ oder $x \in [22, 34]$, dann gilt $f(x) = g(x)$.* Der Satz hat im Kern die Form $(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$. Hier ist $n=3$, $P_1 = (x \in [3, 5])$, $P_2 = (x \in [7, 9])$, $P_3 = (x \in [22, 34])$ und Q ist $f(x) = g(x)$.

Die oben beschriebene Beweisstruktur für die Implikation kann auch hier angewendet werden. Denn eine Aussage $(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$ ist logisch äquivalent zu $(P_1 \to Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \to Q)$. Wir können den Beweis so konstruieren, dass wir die einzelnen Implikationen zeigen. Wir führen also eine Fallunterscheidung durch, wobei jedem der P_i ein Fall zugeordnet wird. In dem Beweis kennzeichnen wir zur besseren Lesbarkeit die einzelnen Fälle. Diese Überlegung ergibt dann das folgende Beweisschema:

Beispiel 4.26: Komplexe Implikation

Satz:

Behauptung: $(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$

Beweis: (durch Fallunterscheidung)

Fall 1: Zeige $(P_1 \rightarrow Q)$.

...

Fall n: Zeige $(P_n \rightarrow Q)$.

q.e.d.

Wir werden später im Zusammenhang mit Quantoren noch näher auf die Beweismethode der Fallunterscheidung eingehen.

5. Form Komplexe Strukturen

Die Behauptung eines Satzes kann recht komplexe Kombinationen von Konjunktionen, Disjunktionen, Negationen, aber auch von Quantoren enthalten. Um einen Beweis zu finden und nachvollziehbar aufzuschreiben, wird oftmals die Behauptung umgeformt und in eine übersichtlichere Struktur gebracht. Diese Umformungen beruhen im Allgemeinen auf der Anwendung von Umformungsregeln oder Umformungsgesetzen, die aus Abschnitt 4.1 bekannt sind. Wir wollen an dieser Stelle nicht zu tief auf die verschiedenen Varianten eingehen, sondern nur an einem Beispiel die Vorgehensweise demonstrieren.

Sei die Aussage $\neg(P \vee R)$ als Satz oder innerhalb eines Beweises zu beweisen. Es soll also gezeigt werden, dass nicht gilt *P oder R*. Die Aussage $\neg(P \vee R)$ ist logisch äquivalent zu $\neg P \wedge \neg R$. Für den Beweis von $\neg(P \vee R)$ könnte somit das obige Beweisschema für die Konjunktion benutzt werden. Dann ist im ersten Fall $\neg P$ und im zweiten Fall $\neg R$ zu zeigen.

An einem weiteren Beispiel wollen wir das Prinzip noch einmal erklären.

Beispiel 4.27: Ordnungen

Satz:

Voraussetzung: Sei R eine zweistellige Relation über der Menge M und sei $a,b \in M$ mit a ungleich b.

Behauptung: R ist weder eine Halbordnung, noch eine strenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung.

Beweis: Die Struktur des Satzes hat die Form $Z \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$, wobei Z für die Voraussetzung steht, HO und sHO für Halbordnung und strenge Halbordnung und tO für totale Ordnung. Der Beweis könnte dann wie folgt gegliedert werden:

Nimm Z an {siehe Schema für die Implikation} und zeige die Konklusion $(\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$.

Beweis von $(\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg TO)$

Teil 1: Zeige $\neg HO$

Teil 2: Zeige $\neg sHO$

Teil 3: Zeige $\neg TO$

q.e.d.

4.3.3 Quantoren

Bisher haben wir noch keine quantifizierten Aussagen betrachtet. Viele Aussagen in der Informatik und der Mathematik beinhalten aber Variable, die wiederum aus verschiedenen Wertebereichen stammen können. Sei der Grundbereich D, eine nicht-leere Menge von Elementen, und E eine Eigenschaft für Elemente aus D. Im wesentlichen werden wir in diesem Abschnitt Beweisschemata für Aussagen der Form $\exists x \in D{:}\ E(x)$ und $\forall x \in D{:}\ E(x)$ vorstellen. Nicht immer werden Aussagen, die eigentlich quantifizierte Ausdrücke enthalten, mit *für alle* ($\forall x$) oder *es gibt* ($\exists x$) formuliert. So ist beispielsweise die Aussage *Seien n und m natürliche Zahlen, dann gilt* $(n+m)^2 = n^2 + 2mn + m^2$ eine quantifizierte Aussage über natürliche Zahlen n und m. Wir könnten sie auch schreiben als $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} : (n+m)^2 = n^2 + 2mn + m^2$.

1. Form $\exists x \in D{:}\ E(x)$

Der Beweis einer Behauptung der Form $\exists x \in D{:}\ E(x)$ kann auf verschiedene Art und Weise geführt werden. Eine Möglichkeit ist es, ein x_1 aus der Menge D zu bestimmen und dann $E(x_1)$ zu zeigen. So ist z. B. die Behauptung *Es gibt eine Primzahl p mit* $10 \leq p \leq 15$ einfach zu zeigen, indem wir $p=11$ setzen und nachweisen, dass 11 eine Primzahl ist. Ein solches Element zu finden, kann schwierig oder auch praktisch unmöglich sein. In einem solchen Fall bietet sich der indirekte Beweis an. Die Negation von $\exists x \in D{:}\ E(x)$ ist äquivalent zu $\forall x \in D{:}\ \neg E(x)$; siehe dazu die Umformungsregeln aus Abschnitt 4.2. Diese Aussage müsste dann zu einem Widerspruch geführt werden.

2. Form $\forall x \in D{:}\ E(x)$

Für diese Form der Behauptung wollen wir drei Vorgehensweisen vorstellen, und zwar den indirekten Beweis, den Beweis durch Fallunterscheidung und schließlich den Beweis durch Induktion.

Indirekter Beweis

In einem indirekten Beweis nehmen wir das Gegenteil der Behauptung an und zeigen dann einen Widerspruch. Das Gegenteil der Aussage $\forall x \in D{:}\ E(x)$ ist $\neg(\forall x \in D{:}\ E(x))$, was wiederum äquivalent ist zu $\exists x \in D{:}\ \neg E(x)$. An dem Beweis des nächsten Satzes wollen wir die Vorgehensweise verdeutlichen.

Beispiel 4.28: Indirekter Beweis für Allaussagen

Satz:

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt $n^3 > n^2$.

Beweis: (Indirekter Beweis)

Wir nehmen an, es gelte das Gegenteil der Behauptung, also
$\neg(\forall n \in \mathbb{N}{:}\ (n>1 \rightarrow n^3 > n^2))$.

Mit der Umformung erhalten wir dann $\exists n \in \mathbb{N}{:}\ (n>1 \wedge n^3 \leq n^2)$.
Sei n_0 eine solche Zahl mit $n_0{}^3 \leq n_0{}^2$. Wir teilen nun beide Seiten der Unglei-

chung durch n_0^2 und erhalten die Ungleichung $n_0 \leq 1$. Das widerspricht der Voraussetzung $n_0 > 1$.

q.e.d.

Beweis durch Fallunterscheidung

Ein weiteres Beispiel führt uns zu Beweisen mit Fallunterscheidungen. Nehmen wir an, wir wollen zeigen, dass für alle ganzen Zahlen ungleich 0 die Aussage $n^2 > n$ gilt. Die Menge der ganzen Zahlen ungleich 0 lässt sich aufteilen in die Zahlen, die größer als 0 sind, und die Zahlen, die kleiner als 0 sind. Wir können den Beweis in diese beiden Fälle aufteilen:

Beispiel 4.29: Fallunterscheidung der Menge

Satz:

Behauptung: Für alle ganzen Zahlen ungleich 0 gilt $n^2 > n$.

Beweis: (Beweis durch Fallunterscheidung)

Wir zerlegen die Menge der ganzen Zahlen in $M_< = \{n | n < 0\}$ und $M_> = \{n | n > 0\}$.

Fall 1: *Es gelte* $n \in M_<$. Dann zeigen wir $n^2 > n$.

Fall 2: *Es gelte* $n \in M_>$. Dann zeigen wir $n^2 > n$.

Die Idee des Beweises durch Fallunterscheidung ist es, die Grundmenge D in endlich viele Mengen $D_1 \cup ... \cup D_r = D$ aufzuteilen und dann für jede der einzelnen Mengen D_i die Aussage $\forall x \in D_i: E(x)$ zu zeigen. Das Schema sieht dann wie folgt aus:

Beispiel 4.30: Fallunterscheidung

Satz:

Behauptung: $\forall x \in D : E(x)$

Beweis: (Beweis durch Fallunterscheidung)

Wir zerlegen die Menge D in endlich viele Mengen $D_1 \cup ... \cup D_r = D$.

Fall 1: *Menge* D_1. Zeige $\forall x \in D_1: E(x)$.

...

Fall r: *Menge* D_r. Zeige $\forall x \in D_r: E(x)$.

q.e.d.

Im Fall einer endlichen Menge $D = \{a_1, .., a_m\}$ können wir soweit gehen, dass wir jedem Element a_i einen Fall i zuordnen. Eine solche Zuordnung ist natürlich nur bei kleinen Mengen sinnvoll, da sonst zu viele Fälle in dem Beweis auftreten würden. Weitere Gründe für eine Fallunterscheidung können sein: das Abspalten von Sonderfällen, z. B. bei Zahlen $x = 0$ und $x > 0$ oder z. B. bei Mengen $m = \emptyset$ und $m \neq \emptyset$ oder Teilmengen von m, wenn m schon als Vereinigung von Mengen gegeben ist. Die Fallunterscheidung kann auch als Zwischenschritt und auch geschachtelt in einem Beweis auftreten. Dazu geben wir nun ein Beispiel an.

Wir wollen die folgende Aussage beweisen: *Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist* $C = A \cup B$ *auch eine symmetrische Relation.* Der Satz ist eigentlich eine quantifizierte Aussage, denn er besagt, dass für alle zweistelligen, symmetrischen Relationen A und B die Vereinigung $C = A \cup B$ symmetrisch ist. Wir können hier z. B. unterteilen in den Fall, dass A und B leer sind, und den Fall, dass mindestens eine Relation nicht leer ist. Da C die Vereinigung von A und B ist, können wir wiederum unterteilen in den Fall, dass für $x\ C\ y$ gilt $x\ A\ y$ oder $x\ B\ y$, und dann die einzelnen Teilziele beweisen. Damit ergibt sich der folgende Beweis:

Beispiel 4.31: Fallunterscheidung symmetrische Relation

Satz:

Behauptung: Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M**.** Dann ist $C = A \cup B$ auch eine symmetrische Relation.

Beweis: (geschachtelte Fallunterscheidung)

Fall 1: A und B seien leer. Dann ist auch C leer und gemäß der Definition der Symmetrie auch symmetrisch.

Fall 2: A oder B seien nicht leer. Dann ist auch C nicht leer. Es sei $x\ C\ y$ für bestimmte Elemente x und y.

Fallunterscheidung über $x\ A\ y$:

> **Fall 2.1:** Gelte $x\ A\ y$. Dann gilt auch $y\ A\ x$, da A symmetrisch ist, und damit gilt $y\ C\ x$.
>
> **Fall 2.2:** Gelte nicht $x\ A\ y$. Wegen $x\ C\ y$ muss dann $x\ B\ y$ gelten. Da B symmetrisch ist, erhalten wir $y\ B\ x$ und damit $y\ C\ x$.

Ende der inneren Fallunterscheidung.

Es folgt also, dass für $x\ C\ y$ auch $y\ C\ x$ gilt. Deshalb ist C eine symmetrische Relation.

q.e.d.

Beweis durch Induktion

Eine wichtige Beweismethode ist die Induktion über den natürlichen Zahlen und insbesondere in der Informatik über induktiv aufgebaute Mengen. Bevor wir auf diese Beweismethode näher eingehen, wollen wir zuerst die induktive Definition von Mengen ansprechen.

Die natürlichen Zahlen lassen sich recht kanonisch wie folgt einführen: Wir beginnen mit dem Anfangselement 0 und legen fest, 0 ist in der Menge M. Dann geben wir eine Regel an, mit der man aus schon erzeugten Elementen ein neues Element generiert. Dies sei etwa die Regel: Ist n in der Menge M, dann ist auch $n+1$ in der Menge M. Diese Regel angewendet auf 0, ergibt dann die Zahl 1. Wiederum angewendet erhalten wir die Zahl 2, usw. Schließlich legen wir noch fest, dass ein Element nur zu M gehört, wenn es mit Hilfe des Anfangselementes 0 und der Regel erzeugt werden kann. Diese Struktur einer Definition wird als induktive Definition bezeichnet. Die allgemeine Struktur auf endlich viele Anfangselemente und endlich viele Regeln erweitert sieht dann wie folgt aus, wobei die $f_i\,(x_1,\ldots, x_m)$ die Vorschriften zur Bildung neuer Elemente sind:

Definition 4.20: Induktive Definition einer Menge M

1. *Lege die Anfangselemente fest; z. B. $a_1,\ldots, a_n$ ist in M.*
2. *Regel 1: Seien $x_1,\ldots, x_m$ in M, dann ist auch $f_1(x_1,\ldots, x_m)$ in M.*

   ...

   Regel r: Seien $x_1, .., x_m$ in M, dann ist auch $f_r(x_1, .., x_m)$ in M.
3. *Nur die mit (1) und den Regeln 1 bis r erzeugten Elemente sind in M.* ■

Wenn man nun eine Eigenschaft *E* für eine solche induktiv definierte Menge *M* beweisen will, so kann man dies vornehmen, indem man zuerst überprüft, ob die Eigenschaft für die Anfangselemente gilt. Anschließend betrachtet man die Elemente, die mit Hilfe der Regeln gebildet worden sind. Gegeben sei beispielsweise die Regel: Sind $x_1,\ldots, x_m$ in *M*, dann ist auch $f(x_1,\ldots, x_m)$ in *M*. Dann zeigt man, dass $f(x_1,\ldots, x_m)$ die Eigenschaft besitzt, unter der Voraussetzung, dass schon x_1 bis x_m die Eigenschaft besitzen; wir nennen dies die *Induktionsvoraussetzung.*

Hierzu ist es nicht nötig, konkrete Elemente zu betrachten, sondern dies im Sinne von Variablen als beliebige, aber feste x_i zu behandeln. Die gerade beschriebene Vorgehensweise wird als *induktiver Beweis* bezeichnet. In der allgemeinen Form besitzt ein induktiver Beweis für eine induktiv definierte Menge *M* die folgende Struktur:

Beispiel 4.32: Schema für induktive Beweise

Satz:

Behauptung: $\forall x \in M : E(x)$

Beweis: Induktion über den Aufbau von *M*.

Induktionsanfang: Zeige die Behauptung für die Anfangselemente, also beweise $E(a_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Induktionsschritt:

Regel 1: Zeige für beliebige, aber feste $x_1,\ldots, x_m$ aus *M* unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzungen $E(x_1), .., E(x_m)$, dass $E(f_1(x_1, .., x_m))$ gilt.

...

Regel r: Zeige für beliebige, aber feste $x_1,\ldots, x_m$ aus *M* unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzungen $E(x_1),\ldots, E(x_m)$, dass $E(f_r(x_1,\ldots, x_m))$ gilt.

q.e.d.

Wir wollen dieses Schema auf eine kleine Aussage über natürliche Zahlen anwenden.

Beispiel 4.33: Induktion über natürliche Zahlen

Satz:

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt $n \leq 2^n$.

Beweis: Induktion über natürlichen Zahlen n.

Induktionsanfang: Wir zeigen die Behauptung für $n = 1$. Offensichtlich gilt $1 \leq 2 = 2^1$.

Induktionsschritt: (von n auf $n+1$) Sei n eine natürliche Zahl größer 0. Wir zeigen nun $n+1 \leq 2^{n+1}$. Es gilt $2^{n+1} = 2^n 2$. Wir nutzen nun die Induktionsvoraussetzung $n \leq 2^n$ aus und erhalten damit $2n \leq 2^{n+1}$. Da weiterhin $n+1 \leq 2n$ für $n > 0$ gilt, haben wir die Behauptung bewiesen.

q.e.d.

In dem obigen Beweis haben wir vermerkt, um welche Art des Beweises es sich handelt, wo der Induktionsanfang und der Induktionsschritt beginnen und an welcher Stelle die Induktionsvoraussetzung ausgenutzt wird.

Wie schon erwähnt, lässt sich diese Beweismethode auf beliebige induktiv definierte Mengen anwenden. Dazu stellen wir jetzt ein Beispiel über Mengen von Worten vor.

Sei die Menge *ab-Worte* wie folgt induktiv definiert: *a* und *b* sind zwei Buchstaben.

1. Anfangselemente sind die Worte *aa* und *aba*, also die Zeichenfolgen *aa* und *aba*.
2. 1: Ist *w* ein Wort aus *ab-Worte*, dann ist auch *awb* ein Wort der Menge.
   2: Ist *w* ein Wort aus *ab-Worte*, dann ist auch *aawab* ein Wort der Menge.
3. Nur so gebildete Worte gehören zu *ab-Worte*.

Beispiel 4.34: Induktion über Wortmengen

Satz:

Behauptung: In jedem Wort aus *ab-Worte* kommen mehr Buchstaben *a* als Buchstaben *b* vor.

Beweis: Induktion über den Aufbau der Menge *ab-Worte*.

Induktionsanfang: Es gibt zwei Anfangselemente. Wir betrachten zuerst das Anfangselement *aa*. Da kein *b* vorkommt, gilt offensichtlich die Behauptung. Das zweite Anfangselement *aba* enthält zwei Buchstaben *a*, aber nur ein *b*. Also gilt auch hier die Behauptung.

Induktionsschritt Regel 1: Sei *w* ein Wort in *ab-Worte* und *awb* ein Wort, welches gemäß der ersten Regel gebildet worden ist. Nach der Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass in *w* der Buchstabe *a* häufiger vorkommt. Da in *awb* genau ein *a* und genau ein *b* zu *w* hinzugefügt worden sind, bleibt das Verhältnis der Vorkommen erhalten, und somit gilt die Behauptung.

Induktionschritt Regel 2: Sei w ein Wort in *ab-Worte* und *aawab* ein Wort welches gemäß der zweiten Regel gebildet worden ist. Die Induktionsvoraussetzung ist wieder, dass die Behauptung schon für *w* gilt. Wie man sieht, werden mit der zweiten Regel mehr Buchstaben *a* als Buchstaben *b* zum Wort *w* hinzugefügt. Damit gilt dann auch für *aawab* die Behauptung.

Ende der Induktionsschritte.

Da wir nun für die Anfangselemente und für die Bildungsregeln unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung die Behauptung bewiesen haben, gilt die Aussage für alle Elemente aus *ab-Worte.*

q.e.d.

An dem Beispiel der Fibonacci-Funktion wollen wir nun zeigen, dass in einem induktiven Beweis noch mehr ausgenutzt werden kann. Die Fibonacci-Funktion $F(n)$ ist wie folgt für natürliche Zahlen definiert:

1. Es gilt $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$, dies sind die Anfangselemente.
2. Sei n eine natürliche Zahl größer gleich 2, dann soll gelten $F(n) = F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2)$.

Beispiel 4.35: Fibonacci

Satz:

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $F(n) \le 2^n$.

Beweis: Induktion über n.

Induktionsanfang: Sei $n = 0$, dann gilt $F(0) = 0 \le 2^0 = 1$.

Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl. Wir zeigen nun die Behauptung für $n + 1$. Es gilt nach Definition $F(n+1) = F(n) + F(n\text{-}1)$. Wir nutzen nun die Induktionsvoraussetzung nicht nur für n sondern auch für n-1 aus, also für die schon früher in der Definition erzeugten Zahlen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $F(n) \le 2^n$ und $F(n\text{-}1) \le 2^{n\text{-}1}$. Wir erhalten dann
$F(n+1) \le 2^n + 2^{n\text{-}1} \le 2^2 2^{n\text{-}1} \le 2^{n+1}$.
Damit haben wir den Induktionsbeweis abgeschlossen.

q.e.d.

3. Form $\exists!\, x \in D$: $E(x)$

Der Quantor $\exists$ verbunden mit dem Ausrufezeichen ! ist nicht ganz so gebräuchlich. Wir wollen ihn aber der Vollständigkeit halber hier vorstellen. Der Quantor $\exists!\, x \in D$ soll ausdrücken *Es gibt* ***genau ein*** *x aus D mit der Eigenschaft E(x)*. Es ist also die Existenz mindestens eines Elementes x mit $E(x)$ zu zeigen, aber auch, dass dies das einzige Element ist. Hat man explizit ein solches Element gefunden, sagen wir x_0 , dann kann man anschließend daran gehen, zu zeigen, dass $\forall x \in D - \{x_0\}$: $\neg E(x)$ gilt. Ist das Element x_0 nicht explizit bekannt, dann bleibt zu zeigen, dass es keine zwei verschiedenen Elemente in D mit der Eigenschaft E gibt.

Beispiel 4.36: Ein Element

Satz:

Behauptung: $\exists!\, x \in D$: $E(x)$

Beweis:

Schritt 1 (mindestens ein Element): Zeige $\exists x_0 \in D: E(x_0)$.

Schritt 2 (x_0 explizit bekannt): Zeige $\forall x \in D - \{x_0\}: \neg E(x)$.

(Alternative für Schritt 2: Zeige $\forall x \in D\ \forall y \in D: ((E(x) \wedge E(y)) \rightarrow x=y)$.)

q.e.d.

4. Form $\forall x \in A\ \exists y \in B: E(x,y)$

Aussagen der Form $\forall x \in A\ \exists y \in B: E(x,y)$ können bewiesen werden, indem man den Ausdruck $\exists y \in B: E(x, y)$ als $E'(x)$ auffasst und dann zuerst das Beweisschema für $\forall x \in A: E'(x)$ anwendet. Innerhalb des Beweises muss $E'(x)$ bewiesen werden, was dann mit dem Beweisschema für den Existenzquantor durchgeführt werden kann.

Wir können die Quantorenfolge $\forall x \in A\ \exists y \in B$ aber auch aus eher funktionaler Sicht behandeln. Denn zu jedem $x \in A$ muss es mindestens ein $y \in B$ mit der Eigenschaft $E(x, y)$ geben. Die Zuordnung eines y abhängig von x kann man daher als eine Funktion betrachten.

Sei beispielsweise $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}: (n > 2 \rightarrow (n^2 < m < n^3))$.

Wir wählen jetzt zu jedem $n > 2$ ein m; sei $m = n^2+1$. Jetzt müssen wir noch überprüfen, ob für diese Wahl von m die Eigenschaft $n^2 < m < n^3$ gilt. Es bleibt also zu beweisen, dass $n^2 < n^2 + 1 < n^3$ gilt.

Ein Beweisschema enthält als ersten Schritt die Aufgabe, jedem x ein y zuzuordnen. Für den Beweis reicht die Angabe eines y aus, obwohl es mehrere y mit den gewünschten Eigenschaften geben kann. Die Zuordnung kann als Funktion $f: A \rightarrow B$ aufgefasst werden. Die Funktion ist erst einmal eine Vermutung und muss noch verifiziert werden. Es muss also für alle x die Eigenschaft $E(x, f(x))$ bewiesen werden. Das Beweisschema sieht dann wie folgt aus.

Beispiel 4.37: Funktionale Abhängigkeit

Satz:

Behauptung: $\forall x \in A\ \exists y \in B: E(x, y)$

Beweis: Konstruiere zu jedem $x \in A$ ein $y \in B$. Dies kann durch die Angabe einer Funktion $f: A \rightarrow B$ geschehen, also $y = f(x)$.

Beweise für das gewählte f die Eigenschaft $\forall x \in A\ E(x, f(x))$.

q.e.d.

Die obige Vorgehensweise ist für konstruktive Beweise gedacht, in denen eine solche Funktion explizit angeben werden kann. Techniken für nicht-konstruktive Beweise sind im Allgemeinen wesentlich komplizierter und werden deshalb hier nicht weiter erörtert.

Übungen

4.1 Wahrheitstafel

Gegeben seien die aussagenlogischen Formeln α und β. Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob $\alpha \approx \beta$ gilt. Führen Sie jeweils mindestens 2 Teilformeln in den Wahrheitstafeln auf.

$\alpha = (A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$ $\beta = (C \wedge A) \vee \neg B \wedge (C \vee \neg A)$

4.2 Bewertungen

Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln erfüllbar, widerspruchsvoll, falsifizierbar oder tautologisch sind.

a) $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$

b) $(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \vee ((C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)))$

c) $\neg(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$

4.3 Logische Äquivalenz

α und β seien aussagenlogische Formeln. Beweisen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

a) $\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll

b) $\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \approx \alpha \wedge \beta$

4.4 Märchen

Nachdem Hänsel und Gretel die Hexe in den Ofen gestoßen haben, wollen sie sich über das Knusperhäuschen hermachen. Doch wie allgemein bekannt ist, muss man beim Verspeisen eines solchen Hauses sehr vorsichtig sein, da diese Häuser zur Instabilität neigen. Die beiden Kinder wenden sich zunächst einer Wand zu, die aus drei Lebkuchen besteht. Da Hänsel erfolgreich Knusperhäuschenarchitektur studiert hat, erkennt er, dass folgende Regeln aus Sicherheitsgründen unbedingt einzuhalten sind:

1. Man darf höchstens einen der drei Lebkuchen entfernen.
2. Wenn man den dritten entfernt, muss man auch den zweiten entfernen.
3. Wenn man den zweiten entfernt und den ersten nicht, dann darf man den dritten nicht entfernen.

Da Gretel in Logik aufgepasst hat, weiß sie, dass man vom dritten Lebkuchen besser die Finger lässt.

a) Formalisieren Sie die drei Regeln als aussagenlogische Formeln α, β und γ. Verwenden Sie hierzu folgende Abkürzungen für die Teilaussagen:
   A = „ersten Lebkuchen entfernen“
   B = „zweiten Lebkuchen entfernen“
   C = „dritten Lebkuchen entfernen“

b) Zeigen Sie, dass Gretels Wissen eine semantische Folgerung aus den drei Regeln ist.

4.5 Semantische Folgerung

Tragen Sie in die Felder der nachfolgenden Tabelle ein, ob aus der Formel in der aktuellen Zeile die Formel in der aktuellen Spalte semantisch folgt. Verwenden Sie die Einträge |= für semantische Folgerung (Zeilenformel |= Spaltenformel) und X für keine Folgerung (Spaltenformel folgt nicht aus der Zeilenformel).

	$Q \to \neg P$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(Q \wedge \neg Q)$
P				
$P \to \neg Q$				
$P \wedge \neg P$				
$P \wedge Q$				
$\neg(P \vee Q)$				

4.6 Normalformen

Bringen Sie folgende aussagenlogische Formeln zuerst in Negationsnormalform, dann in konjunktive Normalform. Geben Sie Zwischenschritte bei der Umformung an und benennen Sie die angewandten Umformungsgesetze. Kennzeichnen Sie die NNF und KNF.

a) $\alpha = \neg((A \to (B \wedge \neg C)) \to \neg(\neg A \vee (B \wedge C)))$

b) $\beta = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

c) $\gamma = (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

4.7 Modellierung Aussagenlogik versus Prädikatenlogik

Jeder weiß: Nur alte Narren und Kinder sagen die Wahrheit.

Anna sagt: „Mark lügt."

Mark sagt: „Lisa lügt."

Lisa sagt: „Anna und Mark lügen."

Was lässt sich über das Alter der drei Personen sagen?

a) Formalisieren Sie diese drei Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik.
b) Stellen Sie eine Wahrheitstafel auf, anhand der Sie überprüfen, ob es jemanden gibt, der lügt.
c) Formalisieren Sie die drei Aussagen mit Hilfe der Prädikatenlogik.
d) Wie würden Sie anhand der prädikatenlogischen Formalisierung überprüfen, ob eine der drei Personen lügt?

4.8 Syntax der Prädikatenlogik

Betrachten Sie die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

a) $\forall x \exists y\, P(y,x,z)$

b) $\exists y\, (P(y) \wedge \exists y\, (R(y,z)) \wedge Q(y))$

c) $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x,y)$

d) $\exists x\, (\exists y\, (\exists z\, (P(x,y) \wedge Q(x,y))))$

Lösen Sie damit folgende Aufgaben:

- Kennzeichnen Sie alle freien Vorkommen von Variablen.
- Kennzeichnen Sie alle gebundenen Vorkommen von Variablen.
- Zeichnen Sie eine Linienverbindung ausgehend von jeder gebundenen Variable bis zur Variable des bindenden Quantors.

4.9 Pränexe Normalform

Bilden Sie zu den folgenden prädikatenlogischen Formeln eine zugehörige pränexe Normalform.

a) $\alpha = \exists x\, (P(x) \vee \forall y\, Z(y, x)) \wedge \exists x\, (H(x) \vee \neg \exists z\, F(z, y, x))$

b) $\beta = \exists x\, (A(x) \wedge (\forall x\, B(x) \vee \forall y\, C(x))) \rightarrow (\exists y\, D(y) \wedge \neg \forall y\, E(y))$

c) $\gamma = \exists w (\exists y\, (P(x) \rightarrow \forall v\, (\neg \exists x\, (H(x,y) \vee \exists z\, (F(z, y, x))))) \rightarrow D(v))$

d) $\delta = \exists x\, (\neg A(x) \rightarrow (\forall x\, B(x) \wedge \forall x\, C(x))) \wedge \neg(\forall y\, \neg D(x) \vee \neg E(y))$

4.10 Logische Äquivalenz der Prädikatenlogik

Zeigen Sie, dass folgende Formelpaare jeweils nicht logisch äquivalent sind. Wählen Sie für P und Q möglichst einfache Interpretationen und möglichst einfache Grundbereiche.

a) $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ und $\exists y\, \forall x\, (P(x, y))$

b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg Q(x))$ und $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, \neg Q(x))$

c) $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ und $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

4.11 Umformungsregeln Prädikatenlogik

Überprüfen Sie die Korrektheit der folgenden logischen Äquivalenzen mit Hilfe der Quantorenregeln. Benennen Sie jeweils alle nötigen Regeln.

a) $\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \approx \forall x\, \exists x_1\, (P(x) \wedge Q(x_1))$

b) $\exists x\, Q(x) \wedge \forall y\, P(z) \wedge \forall y\, P(y) \approx \exists x\, \forall y\, (Q(x) \wedge P(z) \wedge P(y))$

c) $\exists x\, \forall z\, (\neg P(x) \vee \exists y\, Q(y)) \approx \exists x\, \neg \forall y\, (P(x) \wedge \neg Q(y))$

d) $\forall x\, (P(x) \wedge \neg(\exists y\, Q(y) \wedge P(y))) \approx \forall x\, \forall z\, (P(x) \wedge \neg(Q(z) \wedge P(y)))$

4.12 Erfüllbarkeit Prädikatenlogik

Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit der angegebenen prädikatenlogischen Formeln anhand der gegebenen Interpretationen mit der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Grundbereich.

a) Es sei $\Im(P)$ leer und $\Im(f) = id_{\mathbb{N}}$ (Identitätsfunktion) über $\mathbb{N}$.
$\alpha = \forall x\, \forall y\, (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$

b) Es sei $\Im(P) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | \; x<y\}$. $\beta = \forall x\, \neg P(x, x) \wedge \exists x\, \forall y\, P(x, y)$

c) Es sei $\Im(P) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | \; x \leq y\}$.
$\gamma = \forall x\, P(x, x) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$

Ändern sich die Ergebnisse, wenn der Grundbereich auf die Menge $\{1, 2, ..., 10\}$ beschränkt wird, wobei die Interpretation der Prädikate und Funktionen entsprechend angepasst ist?

4.13 Interpretation

Ergänzen Sie für die Formel $\alpha = \exists x \forall y\, (P(x, f(y)) \wedge \neg P(f(x), y))$

die folgende nur teilweise gegebene Interpretation zu einer erfüllenden Interpretation für α.

Teilbewertung: Grundbereich $U=\{1,2\}$, f_1: $U^2 \rightarrow U$ mit $f_1(1)=2$, $f_1(2)=1$

4.14 Skolem-Normalform

Die folgende prädikatenlogische Formel sei gegeben:

$\neg\forall x \exists y\, \forall z (P(x, a) \rightarrow Q(y, f(x, z)))$

- Bestimmen Sie eine erfüllende Bewertung für diese Formel.
- Bestimmen Sie eine Skolem-Normalform für diese Formel.

4.15 Modellierung Prädikatenlogik

Es seien folgende Prädikate gegeben:

- Person(x) bedeutet, dass x eine Person ist.
- Bar(x) bedeutet, dass x sich in der Bar befindet.
- bestellt(x, y) bedeutet, dass x y bestellt.
- Karte(x) bedeutet, dass x auf der Getränkekarte steht.

Formalisieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe prädikatenlogischer Formeln:

a) Nicht alle Personen befinden sich in der Bar.

b) Jeder Gast bestellt ein Mineralwasser.

c) Manche Besucher bestellen alles, was in der Bar angeboten wird.

d) Wenn in der Bar ein Mineralwasser und ein Bier angeboten werden, bestellt Stefan beide Getränke.

Bestimmen Sie zwei Formeln, die semantische Folgerungen Ihrer Formalisierung sind.

4.16 Modellierung Prädikatenlogik

Benutzen Sie folgende Prädikate, um die Behauptungen der nachstehenden Sätze prädikatenlogisch auszudrücken.

- friday_13(x) bedeutet, dass das mit x bezeichnete Objekt ein Freitag der 13. ist.
- accident(y) bedeutet, dass das mit y bezeichnete Objekt ein Unglück ist.
- person(z) bedeutet, dass am Tag x der Person z das Unglück y zustößt.
- happens(x, y, z) bedeutet, dass am Tag x der Person z das Unglück y zustößt.

a) An irgendeinem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das jemandem zustößt.

b) An jedem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das niemandem zustößt.

c) An keinem Freitag den 13. stoßen jemandem alle Unglücke zu.