Digitale Filter

Signale, Systeme und Sensoren: Vorlesung 17

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

Diskrete lineare Systeme

Diskrete lineare Systeme werden analog zu den kontinuierlichen linearen Systemen definiert: Wird auf den Eingang ein diskretes Sinussignal beliebiger Frequenz gegeben, so darf am Ausgang lediglich ein diskretes Sinussignal genau dieser Frequenz erscheinen, das mit einem komplexen Faktor multipliziert wird.

$$e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad \longrightarrow \quad C \cdot e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \text{ mit } C \in \mathbb{C}.$$

Genau wie im kontinuierlichen Fall berechnet sich auch hier das diskrete Spektrum (bei Wellenzahl k) des Ausgangssignals $Y[k]$ als Produkt des diskreten Frequenzgangs des Systems $H[k]$ mit dem diskreten Spektrum $X[k]$ des Eingangssignals:

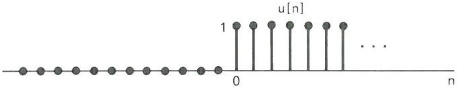
$$Y[k] = H[k] \cdot X[k].$$

Diskrete lineare Systeme lassen sich auf sehr einfache Weise als (oft nur wenige Zeilen langes) Programm realisieren.

Diskrete Testsignale

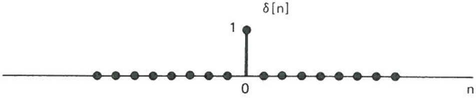
Diskreter Einheitssprung:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



Diskreter Einheitsimpuls:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

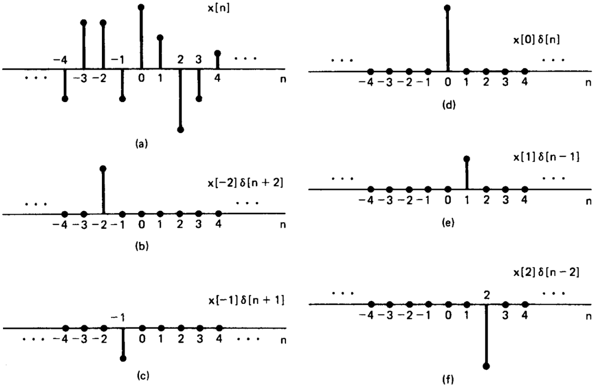


Quelle: Oppenheim & Willsky

Wichtige Eigenschaften: $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n] = x[0] \quad \text{(Ausblendeigenschaft)}$$

Darstellung von diskreten Signalen durch Impulse



[Quelle: Oppemheim & Willsky]

Jedes diskrete Signal lässt sich als gewichtete Summe von Einheitsimpulsen darstellen:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

Impulsantwort eines zeitdiskreten linearen Systems

Ist der Output $h_k[n]$ des linearen Systems für jeden um k verschobenen Einheitsimpuls bekannt, so kann die Systemantwort auf jedes beliebige Inputsignal ausgedrückt werden als

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad \longrightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n].$$

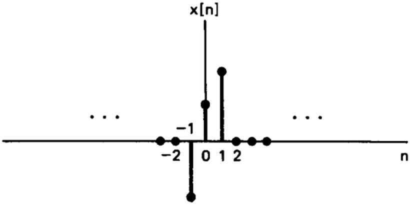
Bei einem zeitinvarianten System gilt

$$h_k[n] = h_0[n-k],$$

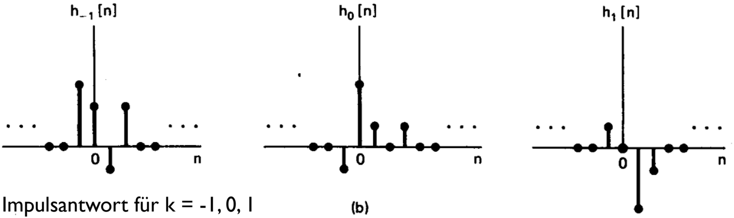
d.h. der Output $h_k[n]$ ist eine um k zeitverschobene Version von $h_0[n]$. Daher reicht auch im diskreten Fall die Angabe der Impulsantwort $h[n] = h_0[n]$, um die Systemantwort für jeden beliebigen Input zu charakterisieren.

Beispiel: Diskrete Systemantwort (1)

Inputsignal



(a)

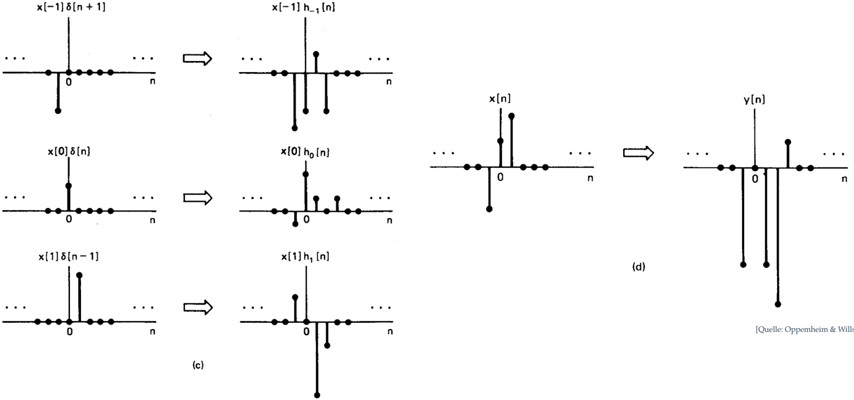


Impulsantwort für k = -1, 0, 1

(b)

[Quelle: Oppemheim & Willsky]

Beispiel: Diskrete Systemantwort (2)



[Quelle: Oppemheim & Willsky]

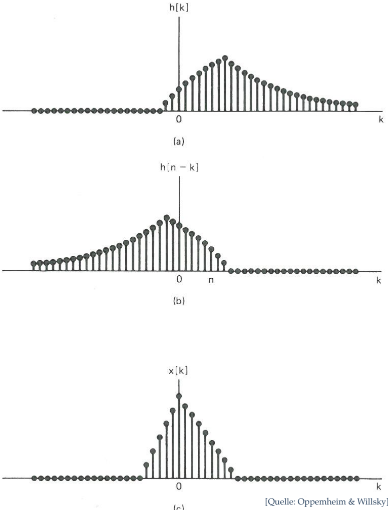
Faltungssumme

Bei zeitinvarianten Systemen vereinfacht sich die Systemantwort zu

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

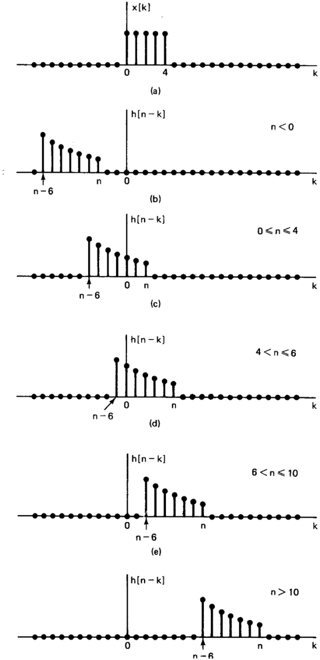
(**Faltungssumme**, diskrete Faltung):

1. Impulsantwort an den Zeitpunkt n verschieben.
2. An y-Achse spiegeln.
3. Punktweise Multiplikation mit dem Inputsignal.
4. Aufsummieren ergibt den momentanen Output des Systems.

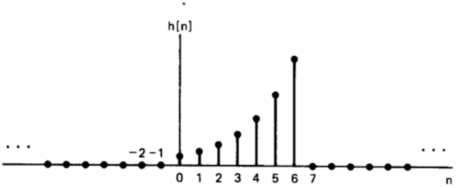


[Quelle: Oppenheim & Willsky]

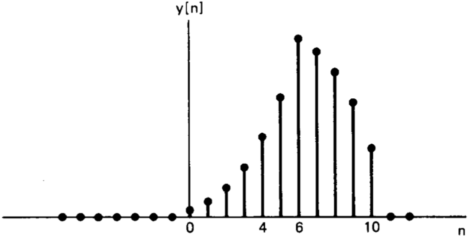
Beispiel: Faltungssumme



Impulsantwort:



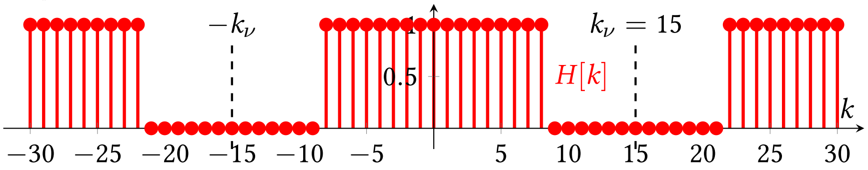
Systemantwort:



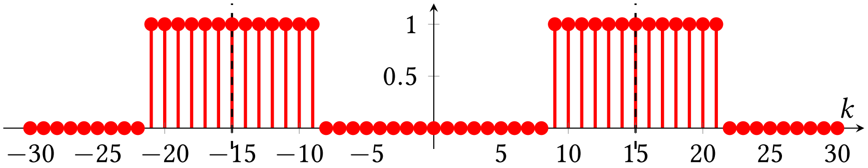
Übersicht

Diskrete ideale Filter im Frequenzbereich

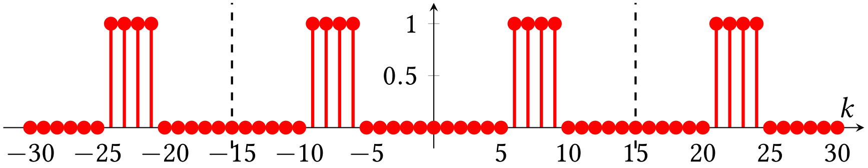
Tiefpass ($N = 30$):



Hochpass:



Bandpass:



FFT-Filter

- **Prinzip:** Signal über FFT in den Frequenzbereich transformieren, unerwünschte Frequenzbereiche auf Null setzen (Real-und Imaginärteil, dabei Symmetrien beachten!), über IFFT wieder in den Zeitbereich zurücktransformieren.
- Beinahe perfekte Filtereigenschaften: die Flankensteilheit liegt an der physikalisch durch die Unschärferelation bezeichneten Grenze (z.B. Sprung von 0 auf 1 innerhalb einer Bandbreite von 1 Hz bei einer Signallänge von 1 s). Die Flankensteilheit des Filters hängt also lediglich von der Zeitdauer des Signals bzw. Datenblocks ab!
- Absolute Phasenlinearität, d.h. die Form bzw. Symmetrie der Signale im Zeitbereich wird nicht verändert.
- Nachteile: hoher Rechenaufwand, lang andauernde Signale müssen in Blöcke zerlegt werden, Filter kann nicht in Echtzeit mitlaufen.

Digitale Implementierung von elementaren Systemen

- Proportionalsysteme können auf einfache Weise durch eine Multiplikation realisiert werden:

$$y(t) = K \cdot x(t) \quad \longrightarrow \quad y[n] = K \cdot x[n].$$

- Verzögerungsglieder über einen Ringpuffer der Länge N:

$$y(t) = x(t - T_t) \quad \longrightarrow \quad y[n] = x[n - N]$$

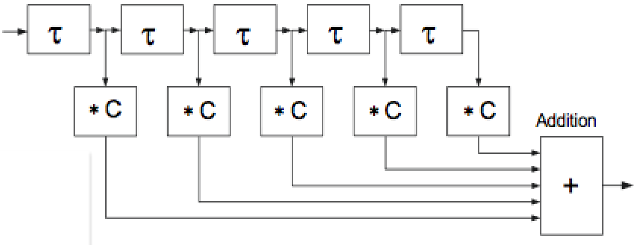
- Zusammen mit der Addition zweier Signale können daraus beliebige digitale lineare Systeme realisiert werden:

$$y[n] = c_0 \cdot x[n] + c_1 \cdot x[n-1] + c_2 \cdot x[n-2] + c_3 \cdot x[n-3] + \cdots$$

- Differenzierer und Integrierer können digital nicht exakt realisiert werden, sondern nur näherungsweise.

FIR-Filter

Prinzip: durch eine Serie von N Verzögerungsgliedern τ stehen die letzten N Eingangswerte zur Verfügung, die mit den **Filterkoeffizienten** c_k multipliziert und dann aufsummiert werden. Die Werte der Filterkoeffizienten sind die Impulsantwort, d.h. $c_k = h[k], \ k = 0, \ldots, N$.



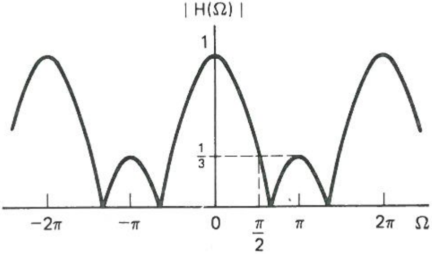
Finite Impulse Response: Der Ausgangswert berechnet sich aus nur endlich vielen Eingangswerten.

Beispiel: gleitender Mittelwert und Differenz

Gleitender Mittelwert:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

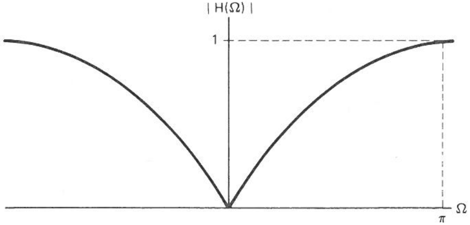
(einfacher Tiefpass)



Differenz:

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$$

(einfacher Hochpass)

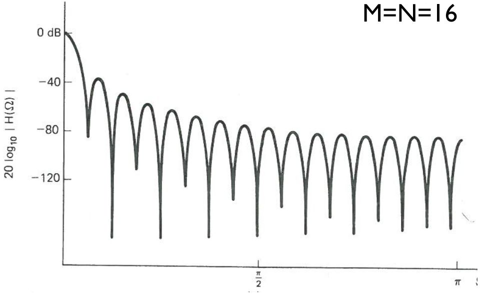


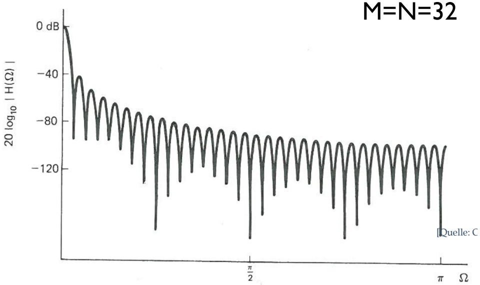
Quelle: Oppenheim & Willsky

Allgemeiner Mittelwertfilter

Allgemeiner Mittelwert:

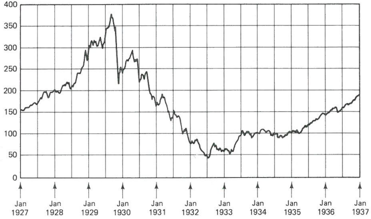
$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} x[n-k]$$



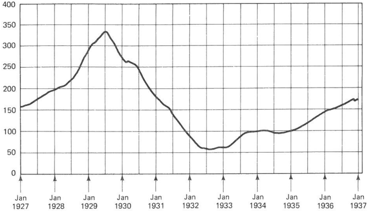


Quelle: Oppenheim & Willsky

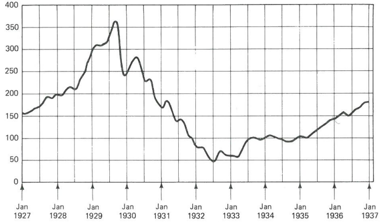
Anwendung: Filterung des Dow-Jones-Index zur Trendvorhersage



(a)



M=N=100



M=N=25

[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

Übersicht

1. Diskrete Faltung
2. Zeitdiskrete Filter
3. Filterdesign

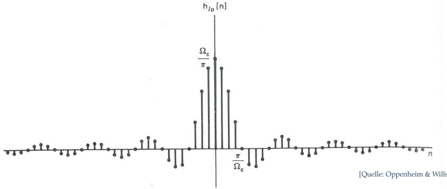
Diskrete ideale Filter im Zeitbereich

Gleiche Eigenschaften wie im kontinuierlichen Fall:

- Nichtkausal
- Unendlich große Impulsantwort (Sinc-Funktion)
- Überschwingen
- Oszillierendes Einschwingen.

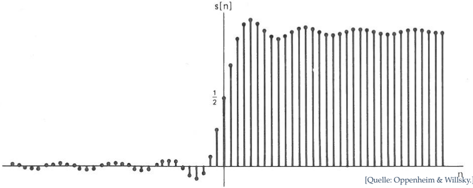
Auch bei digitalen Filtern müssen Kompromisse gemacht werden.

Impulsantwort:



[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

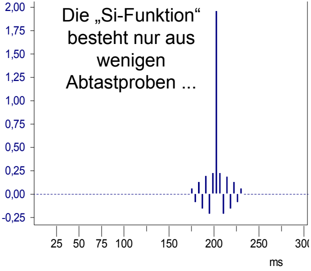
Sprungantwort:

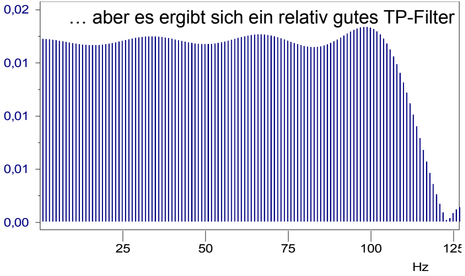


[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

Kompromiss: genäherte idealer Tiefpass

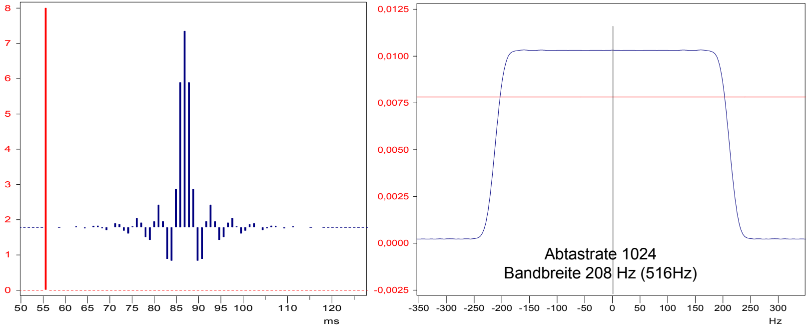
- Grenzfrequenz festlegen, daraus den Amplitudengang als diskrete, um die Frequenz 0 zentrierte Rechteckfunktion berechnen.
- Inverse FFT (Phasengang gleich 0 setzen) ergibt eine Sinc-Funktion im Zeitbereich als Impulsantwort.
- Sinc-Funktion so weit verschieben, dass die höchsten Peaks rechts des Nullpunktes liegen.
- Nichtkausale Koeffizienten und kleine Koeffizienten rechts abschneiden ergibt eine genäherte, zeitverschobene Sinc-Funktion.





Welligkeit im Durchlassbereich vermeiden

- Multiplikation der genäherten Impulsantwort mit einer geeigneten Fensterfunktion (z.B. Hammingfenster): damit beginnt und endet die Sinc-Funktion “sanft”.
- Dadurch wird der Verlauf im Durchlassbereich geradliniger, allerdings nimmt die Flankensteilheit etwas ab.



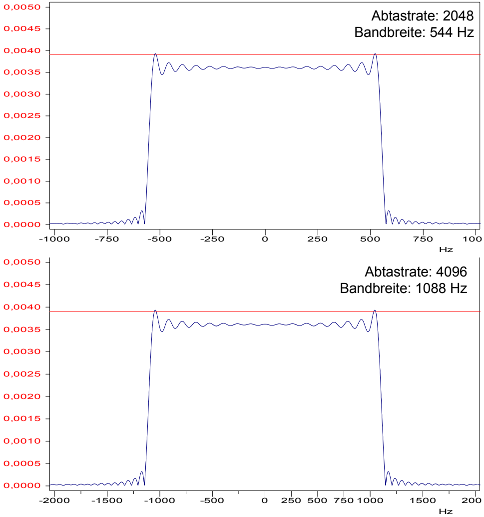
Merkmale des genäherten idealen Tiefpasses

- Im Gegensatz zum FFT-Filter streng kausal, genau wie ein analoger Filter.
- Der Filterprozess geschieht im Zeitbereich und ist vergleichsweise wenig rechenintensiv linear mit der Filtergröße.
- Es kann kontinuierlich - also nicht blockweise - gefiltert werden. Dadurch entfallen alle Probleme, die durch die überlappenden Fensterung (siehe Vorl. 8) von Signalabschnitten auftreten.
- Empfohlene Anzahl Filterkoeffizienten: ab $n = 24$ für Tiefpässe, ab $n = 256$ für Bandpässe. Je schmaler der Frequenzbereich des Filters und dessen Steilheit, desto länger muss nach der Unschärferelation die Impulsantwort dauern, desto mehr Koeffizienten werden benötigt.
- Mit dieser Designmethode lassen sich digitale Tiefpässe beliebiger Güte (durch entsprechend große Koeffizientenzahl und entsprechendem Rechenaufwand) entwickeln.

Einfluss der Abtastrate auf die Bandbreite

Verdoppelt sich die Abtastrate bei gleichbleibenden Filterkoeffizienten, verdoppelt sich auch die Bandbreite, da die Impulsantwort des Filters doppelt so schnell "abgespielt" wird (s. Unschärferelation).

Wichtig: Die Abtastrate muss mindestens doppelt so groß sein wie die höchste durchgelassene Frequenz des Filters (s. Abtasttheorem)!



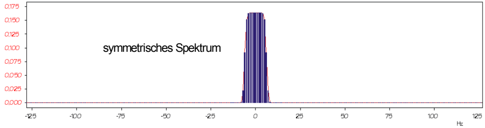
Vom Tiefpass zum Bandpass

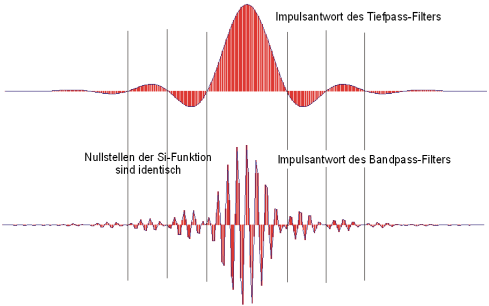
2. Verschiebungssatz:

$$f(t) \cdot e^{iat} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega - a)$$

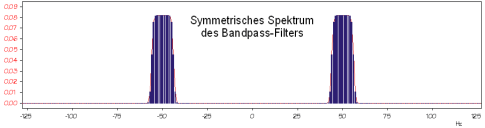
d.h. durch Multiplikation der Impulsantwort mit einem Sinus oder Cosinus der gewünschten Mittenfrequenz des Bandpasses erreicht man eine Verschiebung der Tiefpasscharakteristik an diese Frequenz.

Empfehlenswert ist eine Amplitude von 1 für den Sinus, damit der Bandpass das gefilterte Signal nicht verstärkt.





Zeitbereich: Die Bandpass-Impulsantwort entsteht durch ***Multiplikation*** der obigen Si-Funktion mit f = 50 Hz



Frequenzbereich: Das Bandpass-Filter entsteht durch ***Faltung*** des obigen Tiefpasses mit f = 50 Hz