Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

1 Elementare Algebra

1.3 Aussagen & Beweismethoden
1.4 Vollständige Induktion

Mathe I

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Elementare Algebra

- Aussagen & Beweismethoden
- Vollständige Induktion

Definition

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Definition

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- A="Es regnet."

Definition

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- A="Es regnet."
- Heute ist es dunkler als kalt.

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- A="Es regnet."
- Heute ist es dunkler als kalt.
- Der Barbier, der allen den Bart rasiert, die sich nicht selbst rasieren, rasiert sich selbst.

Definition

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- A="Es regnet."
- Heute ist es dunkler als kalt.
- Der Barbier, der allen den Bart rasiert, die sich nicht selbst rasieren, rasiert sich selbst.
- Aussageform: A(n)="n $>$ 3" (n ist größer als drei)

Definition

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- A="Es regnet."
- Heute ist es dunkler als kalt.
- Der Barbier, der allen den Bart rasiert, die sich nicht selbst rasieren, rasiert sich selbst.
- Aussageform: A(n)="$n > 3$" (n ist größer als drei)
  A(n) ist wahr für n=4

"Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist."

Aussage

Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- A="Es regnet."
- Heute ist es dunkler als kalt.
- Der Barbier, der allen den Bart rasiert, die sich nicht selbst rasieren, rasiert sich selbst.
- Aussageform: A(n)="$n > 3$" (n ist größer als drei)
  A(n) ist wahr für n=4
  A(n) ist falsch für n=2

Definition

“Aussagen über die leere Menge sind immer wahr.”
und
“Aussagen über die leere Menge sind immer falsch.”

Verknüpfung von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise

Definition

“Aussagen über die leere Menge sind immer wahr.”
und
“Aussagen über die leere Menge sind immer falsch.”

Verknüpfung von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A

Definition

“Aussagen über die leere Menge sind immer wahr.”
und
“Aussagen über die leere Menge sind immer falsch.”

Verknüpfung von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A
Konjunktion:	$A \wedge B$	A und B

Definition

“Aussagen über die leere Menge sind immer wahr.”
und
“Aussagen über die leere Menge sind immer falsch.”

Verknüpfung von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A
Konjunktion:	$A \wedge B$	A und B
Alternative:	$A \vee B$	A oder B

Definition

“Aussagen über die leere Menge sind immer wahr.”
und
“Aussagen über die leere Menge sind immer falsch.”

Verknüpfung von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A
Konjunktion:	$A \wedge B$	A und B
Alternative:	$A \vee B$	A oder B
Implikation:	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B

Definition

“Aussagen über die leere Menge sind immer wahr.”
und
“Aussagen über die leere Menge sind immer falsch.”

Verknüpfung von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A
Konjunktion:	$A \wedge B$	A und B
Alternative:	$A \vee B$	A oder B
Implikation:	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz:	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W					
W	F					
F	F					
F	W					

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F				
W	F					
F	F					
F	W					

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F				
W	F	F				
F	F					
F	W					

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F				
W	F	F				
F	F	W				
F	W					

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F				
W	F	F				
F	F	W				
F	W	W				

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W			
W	F	F				
F	F	W				
F	W	W				

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W			
W	F	F	F			
F	F	W				
F	W	W				

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W			
W	F	F	F			
F	F	W	F			
F	W	W				

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W			
W	F	F	F			
F	F	W	F			
F	W	W	F			

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W		
W	F	F	F			
F	F	W	F			
F	W	W	F			

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W		
W	F	F	F	W		
F	F	W	F			
F	W	W	F			

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W		
W	F	F	F	W		
F	F	W	F	F		
F	W	W	F			

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W		
W	F	F	F	W		
F	F	W	F	F		
F	W	W	F	W		

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	
W	F	F	F	W		
F	F	W	F	F		
F	W	W	F	W		

HTWG

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	
W	F	F	F	W	F	
F	F	W	F	F		
F	W	W	F	W		

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	
W	F	F	F	W	F	
F	F	W	F	F	W	
F	W	W	F	W		

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	
W	F	F	F	W	F	
F	F	W	F	F	W	
F	W	W	F	W	W	

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	
F	F	W	F	F	W	
F	W	W	F	W	W	

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	
F	W	W	F	W	W	

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	F

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	F

Beispiele:

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$$ Ersetzen der Implikation

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	F

Beispiele:

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$$ Ersetzen der Implikation

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$ de Morgansche Regeln

Definition

(bocca della verita)

Wahrheitstafel/-tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	F

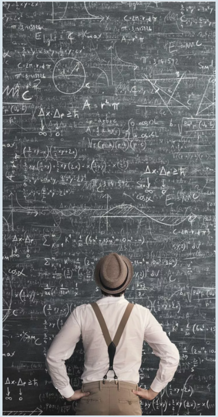
Beispiele:

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$$ Ersetzen der Implikation

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$ de Morgansche Regeln

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$ Verneinung der Implikation

Beweismethoden



Quelle: newsweek.com

- direkter Beweis
- indirekter Beweis
- Vollständige Induktion (beinhaltet direkte oder indirekte Beweismethoden)

Beispiel: direkter Beweis

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beispiel: direkter Beweis

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow n^2$ gerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ : \ n = 2\,k$

Beispiel: direkter Beweis

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; n = 2\,k$

Es gilt dann:

$$n^2 = (2\,k)^2 = 2^2\,k^2 = 2\,\underbrace{(2\,k^2)}_{=:m} = 2\,m$$

Beispiel: direkter Beweis

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade

$\Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}\ :\ n = 2\,k$

Es gilt dann:

$$n^2 = (2\,k)^2 = 2^2\,k^2 = 2\,\underbrace{(2\,k^2)}_{=:m} = 2\,m$$

Beweis von 2.: (direkter Beweis)

Beispiel: direkter Beweis

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; n = 2\,k$

Es gilt dann:

$$n^2 = (2\,k)^2 = 2^2\,k^2 = 2\,\underbrace{(2\,k^2)}_{=:m} = 2\,m$$

Beweis von 2.: (direkter Beweis)

Beh.: n ungerade $\Rightarrow$ n^2 ungerade

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; n = 2\,k$

Es gilt dann:

$$n^2 = (2\,k)^2 = 2^2\,k^2 = 2\,\underbrace{(2\,k^2)}_{=:m} = 2\,m$$

Beweis von 2.: (direkter Beweis)

Beh.: n ungerade $\Rightarrow$ n^2 ungerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; n = 2\,k + 1$

Beispiel: direkter Beweis

Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.
2. Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.

Beweis von 1.: (direkter Beweis)

Beh.: n gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ : \ n = 2\,k$

Es gilt dann:

$$n^2 = (2\,k)^2 = 2^2\,k^2 = 2\,\underbrace{(2\,k^2)}_{=:m} = 2\,m$$

Beweis von 2.: (direkter Beweis)

Beh.: n ungerade $\Rightarrow$ n^2 ungerade

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ : \ n = 2\,k + 1$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\,k+1)^2 = 2^2\,k^2 + 2^2\,k + 1 \\ &= 2\,\underbrace{(2\,k^2 + 2\,k)}_{=:m} + 1 = 2\,m + 1 \end{aligned}$$

Wir haben viel mehr bewiesen:

Memo:

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \\ n \text{ ungerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

Beispiel: direkter Beweis

Wir haben viel mehr bewiesen:

Memo:

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \\ n \text{ ungerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

Beispiel: direkter Beweis

Wir haben viel mehr bewiesen:

Memo:

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \\ n \text{ ungerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$n^2 \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ ungerade}$$

Beispiel: direkter Beweis

Wir haben viel mehr bewiesen:

Memo:

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} &\quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \\ n \text{ ungerade} &\quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$n^2 \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ ungerade}$$

genauso:

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ gerade}$$

Wir haben viel mehr bewiesen:

Memo:

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \\ n \text{ ungerade} \quad &\Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$n^2 \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ ungerade}$$

genauso:

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ gerade}$$

insgesamt:

$$n \text{ gerade} \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \text{ gerade}$$

Beispiel: indirekter Beweis

Satz "Die Wurzel aus zwei ist irrational"

Für p, q mit $q \neq 0$ gilt:

$$\left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \Rightarrow (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

Satz "Die Wurzel aus zwei ist irrational"

Für p, q mit $q \neq 0$ gilt:

$$\left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \Rightarrow (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

<u>Beweis:</u> (indirekt)

$$A := \left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right)$$
$$B := (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

Die Behauptung ist: $A \Rightarrow B$
Wir versuchen die Neagtion, also $\neg(A \Rightarrow B)$ zu beweisen und führen dies auf einen Widerspruch.

Beispiel: indirekter Beweis

Memo:

$$A = \left(\sqrt{2} = \frac{p}{q} \right) \qquad B = (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \wedge \neg B$$

Beispiel: indirekter Beweis

Memo:

$$A = \left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \qquad B = (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \wedge \neg B$$

$$\neg B \Leftrightarrow \neg\,(p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

Beispiel: indirekter Beweis

Memo:

$$A = \left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \qquad B = (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \wedge \neg B$$

$$\begin{aligned} \neg B &\Leftrightarrow \neg\,(p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \neg\,(p \notin \mathbb{Z}) \wedge \neg\,(q \notin \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Beispiel: indirekter Beweis

Memo:

$$A = \left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \qquad B = (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \wedge \neg B$$

$$\begin{aligned} \neg B &\Leftrightarrow \neg\,(p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \neg\,(p \notin \mathbb{Z}) \wedge \neg\,(q \notin \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Beispiel: indirekter Beweis

Wir gehen aus von

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \wedge \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

Beispiel: indirekter Beweis

Wir gehen aus von

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \wedge \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad\qquad \text{(gekürzt)}$$

$\square$

Beispiel: indirekter Beweis

Wir gehen aus von

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \wedge \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} = \frac{p}{q} && \text{(gekürzt)} \\ \Leftrightarrow \quad & 2 = \frac{p^2}{q^2} && \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel: indirekter Beweis

Wir gehen aus von

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \wedge \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\begin{aligned} && \sqrt{2} &= \frac{p}{q} && \text{(gekürzt)} \\ \Leftrightarrow && 2 &= \frac{p^2}{q^2} && \\ \Leftrightarrow && 2q^2 &= p^2 && p^2 \text{ also } p \text{ gerade} \end{aligned}$$

Also gibt es eine Zahl $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2\,r$

$\square$

Beispiel: indirekter Beweis

Wir gehen aus von

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \wedge \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{2} &= \frac{p}{q} & & \text{(gekürzt)} \\
&\Leftrightarrow & 2 &= \frac{p^2}{q^2} & & \\
&\Leftrightarrow & 2q^2 &= p^2 & & p^2 \text{ also } p \text{ gerade}
\end{aligned}$$

Also gibt es eine Zahl $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2\,r$

$$\Leftrightarrow \qquad 2q^2 = 4r^2$$

$\square$

Beispiel: indirekter Beweis

Wir gehen aus von

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \wedge \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{2} &= \frac{p}{q} & & \text{(gekürzt)} \\
&\Leftrightarrow & 2 &= \frac{p^2}{q^2} & & \\
&\Leftrightarrow & 2q^2 &= p^2 & & p^2 \text{ also } p \text{ gerade}
\end{aligned}$$

Also gibt es eine Zahl $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2\,r$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow & 2q^2 &= 4r^2 & & \\
&\Leftrightarrow & q^2 &= 2r^2 & & q \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

$\square$

Quelle: OK Go (click me)

Problemstellung:

Wir wollen beweisen, dass eine Aussage $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Das ist eine typische Situation, in der man elegant mit der Vollständigen Induktion beweisen kann.

Wir klären hier das Prinzip dieser Beweismethode und auch die Vorgehensweise.

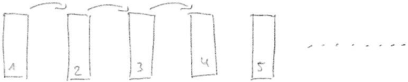
Quelle: OK Go (click me)

Problemstellung:

Wir wollen beweisen, dass eine Aussage $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Das ist eine typische Situation, in der man elegant mit der Vollständigen Induktion beweisen kann.

Wir klären hier das Prinzip dieser Beweismethode und auch die Vorgehensweise. Zum Mitdenken können Sie sich gerne Dominosteine vorstellen:



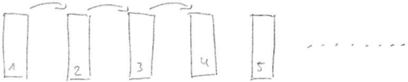
Quelle: OK Go (click me)

Problemstellung:

Wir wollen beweisen, dass eine Aussage $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Das ist eine typische Situation, in der man elegant mit der Vollständigen Induktion beweisen kann.

Wir klären hier das Prinzip dieser Beweismethode und auch die Vorgehensweise. Zum Mitdenken können Sie sich gerne Dominosteine vorstellen:



Wir betrachten beliebig viele, nummerierte Dominosteine $1, 2, 3, 4, 5, ..., k, ...$ und wollen beweisen, dass alle Steine fallen, wenn der erste umgeworfen wird.

$A(k)$ ist dann die Aussage "Der k-te Stein fällt."

Motivation

Memo:

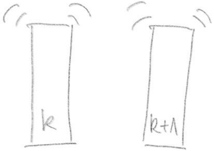
$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$

Quelle: OK Go

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



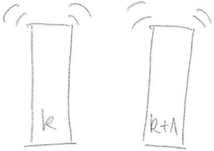
Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Motivation

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



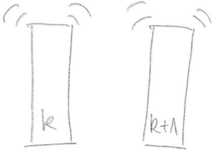
Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	
2	W	F	
3	F	W	
4	F	F	

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



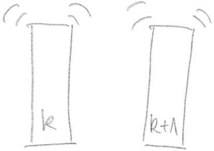
Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	
3	F	W	
4	F	F	

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



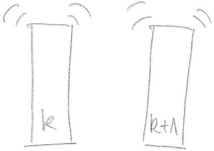
Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	F
3	F	W	
4	F	F	

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

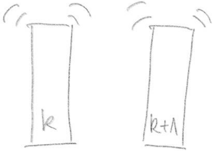
Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	F
3	F	W	W
4	F	F	

Motivation

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



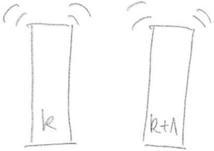
Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	F
3	F	W	W
4	F	F	W

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



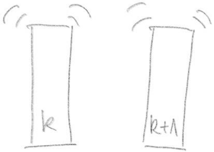
Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	F
3	F	W	W
4	F	F	W

Quelle: OK Go

Memo:

$$A(k) := \text{“Der } k\text{-te Stein fällt.”}$$



Fällt dann auch der $(k+1)$-te Stein?
D.h. gilt dann auch $A(k+1)$?

Induktionsanfang!

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	F
3	F	W	W
4	F	F	W

Vollständige Induktion

Es sei $n, n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage. Wenn gilt:

$$\begin{array}{rll} A(n_0) & \text{ist wahr und} & \text{(Induktionsanfang, IA)} \\ A(k) \Rightarrow A(k+1) & \text{ist wahr,} & \text{(Induktionsschritt, IS)} \end{array}$$

Dann gilt: $\forall n \geq n_0$ ist $A(n)$ eine wahre Aussage.

Vorgehensweise

Aussage:

Voraussetzungen

Behauptung: $A(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$

Beweis: (vollständige Induktion)

Induktionsanfang (IA):

Prüfe $A(n_0)$

Induktionsvoraussetzung (IV):

Gelte $A(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS):

Zeige: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

Beispiel: "durch 3 teilbar"

Behauptung

$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ n^3 - n$ ist durch 3 teilbar

Induktions–anfang

Induktions–voraussetzung

Induktions–schritt

Induktions–beweis

Beispiel: “durch 3 teilbar”

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; n^3 - n \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–anfang

$$A(1) \;:\; 1^3 - 1 = 0 \quad \text{ist durch 3 teilbar.} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

Induktions–schritt

Induktions–beweis

Beispiel: "durch 3 teilbar"

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; n^3 - n \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–anfang

$$A(1) \; : \; 1^3 - 1 = 0 \quad \text{ist durch 3 teilbar.} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

Es gelte $A(k)$ mit

$$A(k) \; : \; k^3 - k \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–schritt

Induktions–beweis

Beispiel: "durch 3 teilbar"

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; n^3 - n \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–anfang

$$A(1) \; : \; 1^3 - 1 = 0 \quad \text{ist durch 3 teilbar.} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

Es gelte $A(k)$ mit

$$A(k) \; : \; k^3 - k \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–schritt

$A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit

$$A(k+1) \; : \; (k+1)^3 - (k+1) \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–beweis

Beispiel: "durch 3 teilbar"

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; n^3 - n \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–anfang

$$A(1) \; : \; 1^3 - 1 = 0 \quad \text{ist durch 3 teilbar.} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

Es gelte $A(k)$ mit

$$A(k) \; : \; k^3 - k \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–schritt

$A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit

$$A(k+1) \; : \; (k+1)^3 - (k+1) \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–beweis

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3\,k^2 + 3\,k + 1 - k - 1$$

Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ n^3 - n \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–anfang

$$A(1) \ : \ 1^3 - 1 = 0 \quad \text{ist durch 3 teilbar.} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

Es gelte $A(k)$ mit

$$A(k) \ : \ k^3 - k \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–schritt

$A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit

$$A(k+1) \ : \ (k+1)^3 - (k+1) \quad \text{ist durch 3 teilbar}$$

Induktions–beweis

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3\,k^2 + 3\,k + 1 - k - 1 \\ &= \underbrace{(k^3 - k)}_{\text{dirch 3 teilb., (IV)}} + \underbrace{3\,(k^2 + k)}_{\text{durch 3 teilb.}} \qquad \square \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt; und das per Vollständiger Induktion (klar). Also:
Beweis durch Vollständige Induktion:

Beispiel: “vom kleinen Gauß”

Wir wollen zeigen, dass

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt; und das per Vollständiger Induktion (klar). Also:
Beweis durch Vollständige Induktion:

Behauptung $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt; und das per Vollständiger Induktion (klar). Also:
Beweis durch Vollständige Induktion:

Behauptung $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktions–anfang Die Aussage gilt für $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \qquad \checkmark$$

Beispiel: "vom kleinen Gauß"

Wir wollen zeigen, dass

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt; und das per Vollständiger Induktion (klar). Also:
Beweis durch Vollständige Induktion:

Behauptung $\forall\, n \in \mathbb{N}\;:$

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktions–anfang Die Aussage gilt für $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung Die Behauptung gelte für $n = k$:

$$A(k): \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Beispiel: “vom kleinen Gauß”

Memo:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Memo:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Beispiel: “vom kleinen Gauß”

Memo:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktions–beweis

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$$

Memo:

$$A(k): \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktions–beweis

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$$

Beispiel: “vom kleinen Gauß”

Memo:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktions–beweis

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \end{aligned}$$

Memo:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktions–beweis

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\end{aligned}$$

Beispiel: "vom kleinen Gauß"

Memo:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktions–beweis

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2))}{2} \qquad \square\end{aligned}$$

Summenzeichen

Für $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{für } m \leq n$$

Sprich: "Summe der a_k von k gleich m bis n". Ist $k > m$ so definieren wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{für } m > n\,.$$

Rechenregeln für das Summenzeichen

Sei stets $m \leq n$. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) \qquad \text{Summe/Differenz}$$

$$\sum_{k=m}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \text{Produkt mit Skalar}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} \qquad \text{Indexverschiebung}$$

Produktzeichen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n \qquad \text{für } m \leq n$$

Sprich: "Das Produkt über die a_k von k gleich m bis n". Auch hier erklären wir die Situation

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \qquad \text{für } m > n\,.$$

Rechenregeln für das Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \prod_{k=m}^{n} b_k$$	Produkt
$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k}$$	Quotient
$$\prod_{k=m}^{n} c\, a_k = c \prod_{k=m}^{n} a_k$$	Produkt mit Skalar
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$	Indexverschiebung

H