INSTITUT FÜR MESS- UND REGELUNGSTECHNIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
PROF. DR.-ING. C. STILLER

76128 KARLSRUHE, POSTFACH 6980
ENGLER-BUNTE-RING 21
TEL: (0721) 608 23 25
FAX: (0721) 66 18 74

Tabelle zur Fourier-Transformation

Definition: $$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\,\omega t} \cdot F(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

1 Operationen

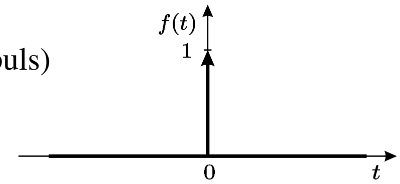
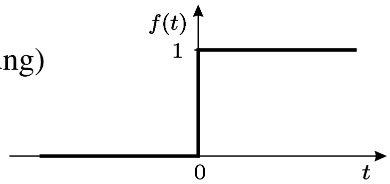
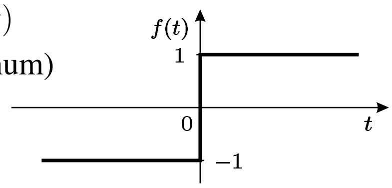
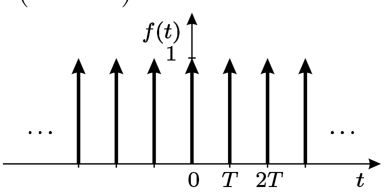
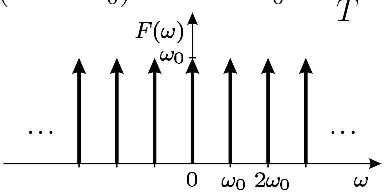
Nr.	Bezeichnung	$f(t)$	$F(\omega)$	
1	Symmetrie	$F(t)$	$2\pi \cdot f(-\omega)$	
2	Linearität	$a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t) \dots$	$a \cdot F_1(\omega) \pm b \cdot F_2(\omega) \dots$	
3	Differentiation der Originalfunktion	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{f}(t)$ $f^{(n)}(t)$	$\mathrm{j}\,\omega \cdot F(\omega)$ $(\mathrm{j}\,\omega)^n \cdot F(\omega)$	
4	Differentiation der Bildfunktion	$(-\mathrm{j}\,t)^n \cdot f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$	
5	Differentiation nach einem Parameter	$\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}$	$\frac{\partial F(\omega,a)}{\partial a}$	
6	Integration der Originalfunktion	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\,\omega} + F(0) \cdot \pi\delta(\omega)$	
7	Glätten der Originalfunktion	$\frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F(\omega) \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$	
8	Integration bzgl. eines Parameters	$\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)\,\mathrm{d}a$	$\int_{a_1}^{a_2} F(\omega,a)\,\mathrm{d}a$	
9	Ähnlichkeit	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$a \neq 0$, a reell
10	Zeitverschiebung	$f(t-a)$	$e^{-\mathrm{j}\,\omega a} \cdot F(\omega)$	a reell
11	Frequenzverschiebung	$e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} \cdot f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$	ω_0 reell

Nr.	Bezeichnung	$f(t)$	$F(\omega)$
12	Modulation	$f(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right]$
13		$f(t)\cdot\sin(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right]$
14	Abtastung der Originalfunktion	$f(t)\cdot T\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$T\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\cdot e^{-\mathrm{j}\omega nT}$ $=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega+\frac{2\pi n}{T})$ (periodisch mit $\frac{2\pi}{T}$)
15	Abtastung der Bildfunktion (Fourier-Reihe)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)$ $=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)\cdot e^{\mathrm{j}\,n\omega_0 t}$ (periodisch mit T)	$F(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$ $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ $\alpha_n=\frac{1}{T}F(n\omega_0)$: Fourier- Koeffizienten
16	Faltung, Multiplikation von Bildfunktionen†	$f_1(t)*f_2(t)$ $=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$
17	Korrelation†	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\cdot f_2(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F_1^*(\omega)\cdot F_2(\omega)$
18	Komplexe Faltung, Multiplikation von Originalfunktionen	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[F_1(\omega)*F_2(\omega)\right]$ $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\Omega)\cdot F_2(\omega-\Omega)\,\mathrm{d}\Omega$

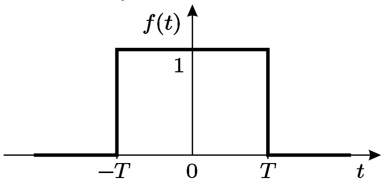
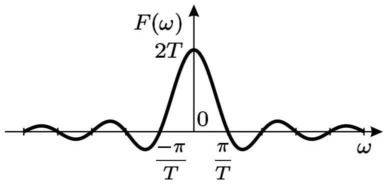
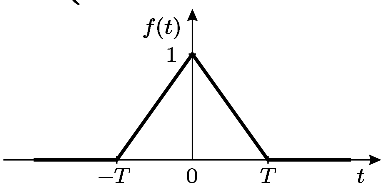
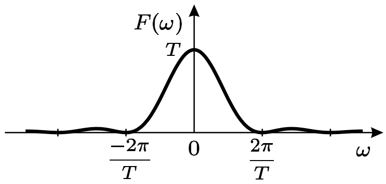
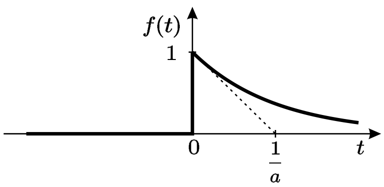
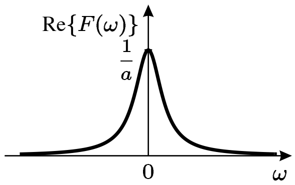
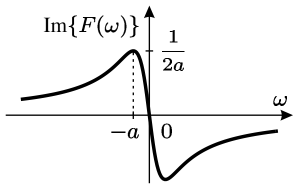
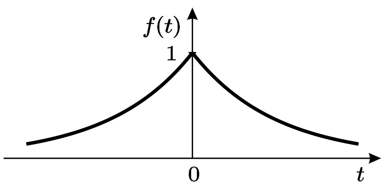
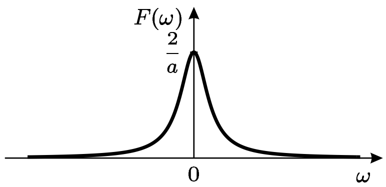
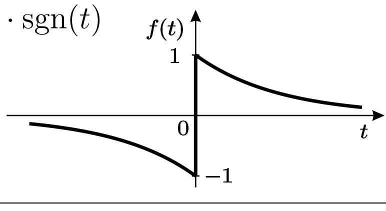
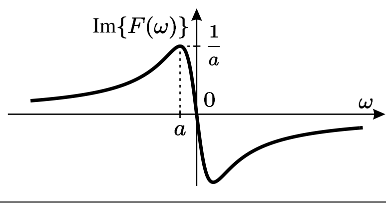
† Voraussetzung: $\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(t)|^2\ \mathrm{d}t<\infty$

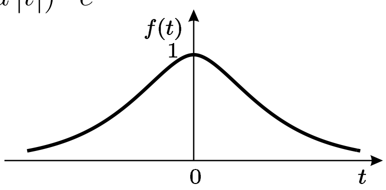
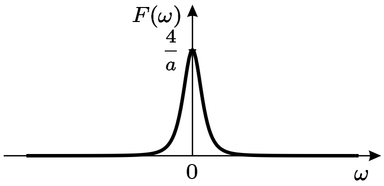
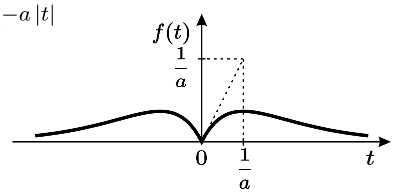
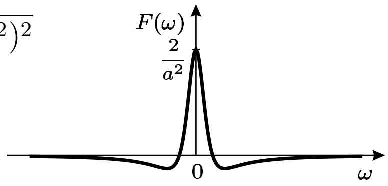
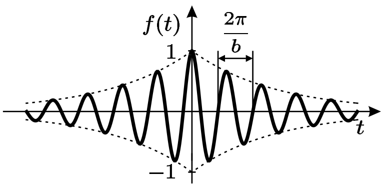
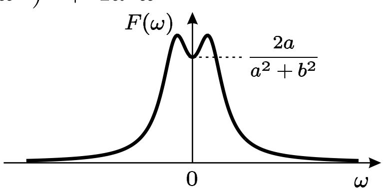
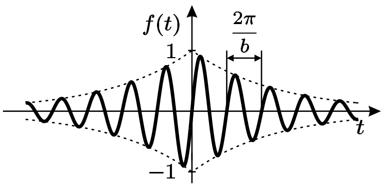
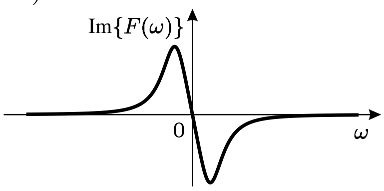
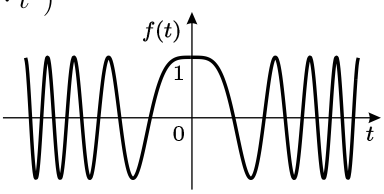
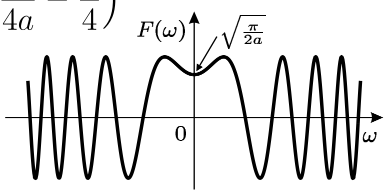
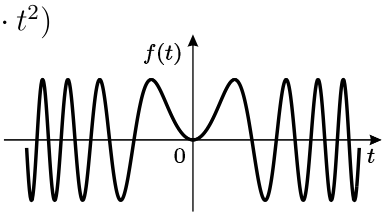
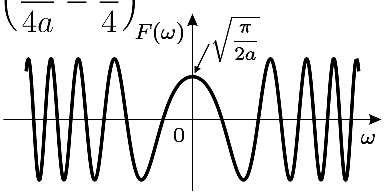
2 Korrespondenzen

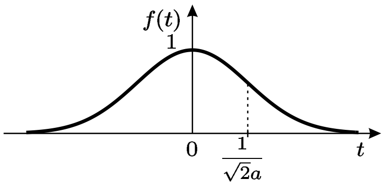
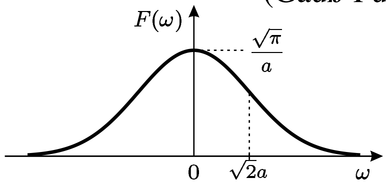
Die Größen a, b, ω_0 und T sind positive reelle Zahlen.

Nr.	$f(t)$	$F(\omega)$
19[‡]	$\delta(t)$ (Impuls) 	1
20	1 (Konstante)	$2\pi \cdot \delta(\omega)$ (Impuls)
21	$\sigma(t)$ (Sprung) 	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + \pi\delta(\omega)$
22	$\mathrm{sgn}(t)$ (Signum) 	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\,\omega}$
23	$e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
24	$\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\,\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
25	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
26[‡]	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 	$\omega_0 \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ $\quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ 
27	$e^{\mathrm{j}\,(\Omega_0 t + a \cdot \sin(\omega_0 t))}$ (Frequenzmodulation)	$2\pi \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(a) \cdot \delta(\omega - \Omega_0 - n\omega_0)$ J : Besselfunktion 1. Art, n. Ordnung, $\mathrm{J}_{-n} = (-1)^n \cdot \mathrm{J}_n$

‡ In den Diagrammen sind die *Gewichte* der Delta-Funktionen dargestellt.

Nr.	$f(t)$	$F(\omega)$
28	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lvert t\rvert < T \\ 0 & \text{für} \quad \lvert t\rvert > T \end{cases}$ 	$2T \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = 2T \cdot \mathrm{si}(\omega T)$ 
29	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{T} & \text{für} \quad \lvert t\rvert < T \\ 0 & \text{für} \quad \lvert t\rvert > T \end{cases}$ 	$\left(T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right)^2 = T^2 \cdot \mathrm{si}(\omega T/2)^2$ 
30	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$ 	$\frac{1}{a + \mathrm{j}\,\omega}$  
31	$e^{-a\lvert t\rvert}$ 	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 
32	$e^{-a\lvert t\rvert} \cdot \mathrm{sgn}(t)$ 	$\frac{-\mathrm{j} \cdot 2\omega}{a^2 + \omega^2}$ 
33	$\frac{1}{2a} \cdot e^{-a\lvert t\rvert} - \frac{1}{2b} \cdot e^{-b\lvert t\rvert}$	$\frac{b^2 - a^2}{(a^2 + \omega^2) \cdot (b^2 + \omega^2)}$ $\qquad a \neq b$

Nr.	$f(t)$	$F(\omega)$
34	$(1 + a\,\lvert t\rvert)\cdot e^{-a\,\lvert t\rvert}$ 	$\dfrac{4a^3}{(a^2+\omega^2)^2}$ 
35	$\lvert t\rvert \cdot e^{-a\,\lvert t\rvert}$ 	$2\cdot\dfrac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$ 
36	$e^{-a\,\lvert t\rvert}\cdot\cos(bt)$ 	$\dfrac{2a\cdot(a^2+b^2+\omega^2)}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$ 
37	$e^{-a\,\lvert t\rvert}\cdot\sin(bt)$ 	$\dfrac{-\mathrm{j}\cdot 4ab\omega}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$ 
38	$e^{(\mathrm{j}\,a\,t^2)}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot e^{-\mathrm{j}\cdot\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)}$
39	$\cos(a\cdot t^2)$ 	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 
40	$\sin(a\cdot t^2)$ 	$-\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot\sin\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 

Nr.	$f(t)$	$F(\omega)$
41	$e^{-a^2 t^2}$ (Gauß-Funktion) 	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ (Gauß-Funktion) 
42	$e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \delta(t-n)$ $\lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}$ (Poisson-Funktion)	$e^{\lambda \cdot (e^{-\mathrm{j}\,\omega} - 1)}$
43	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k} \cdot \delta(t-k)$ $n,\ k \in \mathbb{N}$ (Binomial-Funktion)	$(p + q \cdot e^{\mathrm{j}\,\omega})^n$ $\qquad p + q = 1$

3 Spezielle Eigenschaften

Nr.	Voraussetzung	Eigenschaft
44	$f(t)$ reell	$F(-\omega) = F^*(\omega)$ $\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{F(-\omega)\} = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} \;\wedge\; \mathrm{Im}\{F(-\omega)\} = -\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$
45	$f(t)$ gerade $f(-t) = f(t)$	$F(\omega)$ reell, gerade $F(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) \cdot \cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega$
46	$f(t)$ ungerade $f(-t) = -f(t)$	$F(\omega)$ imaginär, ungerade $F(\omega) = -2\mathrm{j} \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$ $f(t) = \frac{\mathrm{j}}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) \cdot \sin(\omega t)\,\mathrm{d}\omega$

Nr.	Bezeichnung	Eigenschaft
47	Parsevalsche Gleichung[§]	$\int_{-\infty}^\infty f_1(t) \cdot f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega$
48	Endliche Mittelungszeit	$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\omega) \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\,\mathrm{d}\omega$
49	Momente der Originalfunktion[§]	$m_n = \int_{-\infty}^\infty t^n \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{j}^{\,n} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\right\rvert_{\omega=0}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
50	Momente der Bildfunktion[§]	$M_n = \left.\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\rvert_{t=0} = \frac{\mathrm{j}^{\,n}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^\infty \omega^n \cdot F(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
51	Hilbert-Transformation[††]	$\mathrm{Re}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{Im}\{F(\Omega)\}}{\omega - \Omega}\,\mathrm{d}\Omega$ $\mathrm{Im}\{F(\omega)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{Re}\{F(\Omega)\}}{\omega - \Omega}\,\mathrm{d}\Omega$

[§] Voraussetzung: Die Integrale existieren.

[††] Voraussetzung: $f(t)$ kausal und quadratisch integrabel, d.h. $f(t < 0) = 0$ und $\int_0^\infty |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ existiert.

Zusammenhang mit der Laplace-Transformation

Falls $f(t)$ absolut integrabel ist, d.h. falls das Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existiert, gilt mit $F_\mathrm{L}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\cdot\sigma(t)\}$ für $p = \mathrm{j}\,\omega$:

Nr.	Voraussetzung	Eigenschaft
52	$f(t)$ kausal: $\quad f(t<0)=0$	$F(\omega) = F_\mathrm{L}(\mathrm{j}\,\omega)$
53	$f(t)$ gerade: $\quad f(-t)=f(t)$	$F(\omega) = F_\mathrm{L}(\mathrm{j}\,\omega) + F_\mathrm{L}(-\mathrm{j}\,\omega)$
54	$f(t)$ ungerade: $\quad f(-t)=-f(t)$	$F(\omega) = F_\mathrm{L}(\mathrm{j}\,\omega) - F_\mathrm{L}(-\mathrm{j}\,\omega)$

Zweidimensionale Fourier-Transformation

Definition:
$$F(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\,(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}\cdot f(t_1,t_2)\ \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$
$$f(t_1,t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\,(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}\cdot F(\omega_1,\omega_2)\ \mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2$$

Mit den Vektoren $\vec{\omega} = (\omega_1,\omega_2)^\mathrm{T}$, $\vec{t} = (t_1,t_2)^\mathrm{T}$, dem Skalarprodukt $\vec{\omega}^\mathrm{T}\cdot\vec{t}$ und mit den Abkürzungen $\iint .\ \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int .\ \mathrm{d}\vec{t}$, $\iint .\ \mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 = \int .\ \mathrm{d}\vec{\omega}$ wird daraus:

$$F(\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\,\vec{\omega}^\mathrm{T}\cdot\vec{t}}\cdot f\left(\vec{t}\right)\ \mathrm{d}\vec{t_1}$$
$$f\left(\vec{t}\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\,\vec{\omega}^\mathrm{T}\cdot\vec{t}}\cdot F(\vec{\omega})\ \mathrm{d}\vec{\omega}$$

Hiermit lassen sich die Beziehungen und Korrespondenzen der eindimensionalen Fourier-Transformation sinngemäß für die zweidimensionale Transformation verwenden.

Anmerkung

Wird anstelle der Kreisfrequenz ω die Frequenz f mit $\omega = 2\pi f$ verwendet, so erhält man eine symmetrische Definition der Fouriertransformation:
$$G(f) = \mathcal{F}_f\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\cdot g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$g(t) = \mathcal{F}_f^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\,2\pi f t}\cdot G(f)\,\mathrm{d}f$$

Es gilt folgender Zusammenhang:
$$F(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega/(2\pi)) = \mathcal{F}_f\{2\pi\cdot g(2\pi t)\}$$