Probeprüfung Mathe I WiSe 20/21

Datum	27.01.2021	Zeit, Dauer	15:45 - 17:15 Uhr, 90 min.
Dozentin/Aufsicht	Axthelm/NN	Ort	online
Aufsicht	Rechtschaffenheit	Gewissen	

Schreiben Sie gut leserlich und geben Sie stets alle Rechenschritte an.

Alle Ergebnisterme müssen so weit wie möglich **vereinfacht** werden. Sie müssen die Ergebnisse nicht in Dezimalzahlen ausdrücken. Es darf zum Beispiel $\sqrt{2}$ oder $\frac{e}{3}$ so als Ergebnis stehen bleiben.

Die gelösten Aufgaben bitte zusammenhängend und in der richtigen Reihenfolge sortiert abgeben. Geben Sie nur eine Lösung zu jeder Aufgabe ab. Jede weitere wird nicht bewertet. Bei **Varianten** handelt es sich um ein "entweder oder", d.h. Sie müssen sich für eine Variante entscheiden.

Dieses Deckblatt wird von mir beschrieben. RA

Name	Punkte (30 + 5 Boni)	Note
Karl Friedrich Gauß	15	4

Aufgabe	1	2	3	4	5	MC	$\sum$
Punkte	6	5	7	7	4	6	35

Aufgabe 1: (komplexe Zahlen, 6 Punkte)

Geben Sie die folgende komplexe Zahl in kartesischer Form an:

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\, i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\, i}$$

Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform an:

$$(1 - i)^{21}$$

Berechnen Sie alle 3-ten Wurzeln aus

$$-8\,.$$

Aufgabe 2: (Relation, 2+1+2 Punkte)

Es sei auf $\mathbb{N}$ die Relation

$$R := \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{Z} \;:\; a - b = 2\,z\}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass durch R eine Äquivalenzrelation definiert ist.

(b) Fertigen Sie in einem Achsenkreuz eine Skizze von R an. Beschriften Sie das Achsenkreuz entsprechend.

(c) Beschreiben Sie alle Äquivalenzklassen $[\cdot]_R$.

Aufgabe 3: (Skalarprodukt, Norm & orthogonale Projektion, 1+1+1+4 Punkte)

(a) Es sei $< \cdot, \cdot >$ das Standardskalarprodukt und es seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie

(i) den Paramter γ, so dass $a \perp_{<,>} c$ erfüllt ist.

(ii) die $\|\cdot\|_1$-Norm von b

(iii) den Winkel $\angle(a,b)$ bzgl. $< \cdot, \cdot >$.

(b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $X = (1,1,1)$ auf die Ebene

$$E \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 1\,.$$

Aufgabe 4: (Basis & Koordinatenvektor, 1+1.5+1.5+1+2 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Begründen Sie warum $\mathcal{B}$ keine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sein kann. (ohne Rechnung).

(b) Zeigen Sie, dass die Matrizen in $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind.

(c) Geben Sie die Menge

$$\mathrm{Span}\,(B_1, B_2, B_3)$$

an. Genauer: Welche Darstellung haben Matrizen, die durch $\mathcal{B}$ erzeugt werden können?
Tipp: Diesen Teil können Sie mit Teil (b) in einer Rechnung durchführen.

(d) Erweitern Sie $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(e) Berechnen Sie den Koordinatenvektor $A_{\tilde{\mathcal{B}}}$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (Abbildung & Eigenwerte, 4 Punkte)

Die Abbildung

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$$

beschreibt die Spiegelung an einer Ebene E. Geben Sie die Ebene in Koordinatendarstellung an.

Tipp: Geben Sie die Abbildung in Matrix-Vektor-Schreibweise $\mathcal{A}(x) = A\,x$ an. Berechnen Sie EVen zum EW 1. Es müssen zwei sein (v_1, v_2), d.h. es muss $\mathrm{Dim}\, U_{\lambda=1} = 2$ gelten. Berechnen Sie die Normale an E mittels $n = v_1 \times v_2$ und stellen damit die Ebene in Koordinatenform auf. Fertig :)