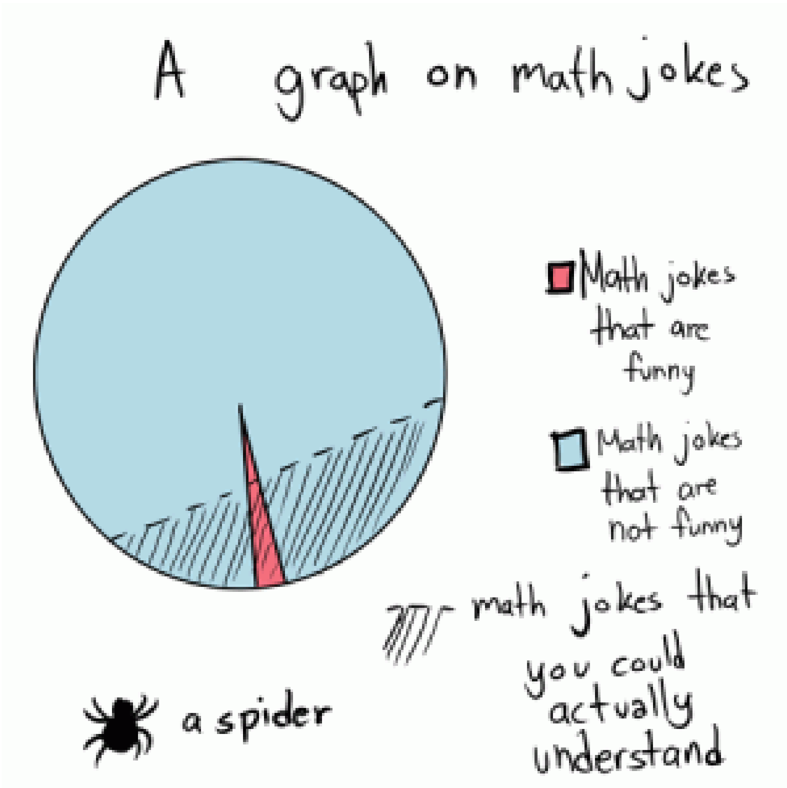
Mathematik

Teil II, Analysis

Skript

(R. Axthelm)



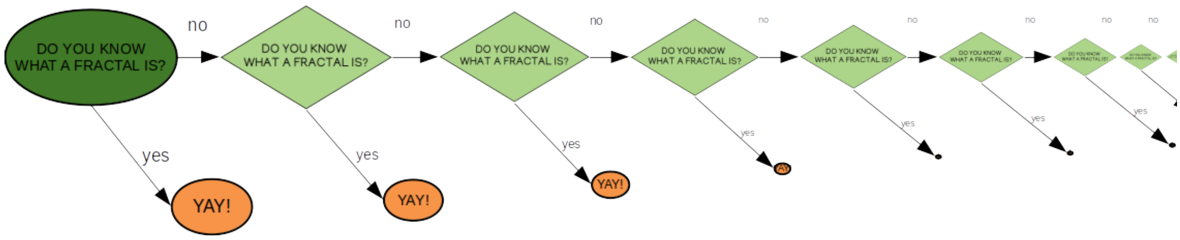
rebekka.axthelm@htwg-konstanz.de

Inhaltsverzeichnis

Folgen und Reihen 1

Wir behandeln:

- Folgen, Grenzwerte und Häufungspunkte
- Konvergenz und Divergenz von Folgen und Reihen
- Konvergenzkriterien für Reihen



1.1 Folgen

Folgen sind der Grundbaustein der Analysis. Wie das? Prozesse jedweder Art zeichnen sich durch Zustandsveränderung aus, die wir durch sogenannte Ableitungen beschreiben können. Dabei ist "keine Änderung" als Änderung mit dem Wert Null inbegriffen. Der Ableitungsbegriff wiederum beinhaltet einen Grenzwertbegriff und dieser wird über Folgen eingeführt. Etwas genauer stellen Folgen eine geordnete Menge, das heißt eine Menge mit fester Reihenfolge der Mengenelemente, von unendlich vielen Elementen dar. Von einer reinen Menge kann man schon deshlab nicht sprechen, da ein und das Element mehrfach vorkommen kann. Diese geordnete Menge kann alles Mögliche sein, Zahlen (reell, komplex, ...), Wörter, Funktionen, etc. Wir beschränken uns auf reelle Zahlen.

Beispiel 1 Alkoholabbau Nach zwei Cervezas zu je einem halben Liter haben Sie (weiblich, 60 kg) ungefähr 1.12 ‰ Blutalkohol[1]. Nach ungefähr 4.07 Stunden ist der Promillewert unter 0.5 ‰ gesunken.

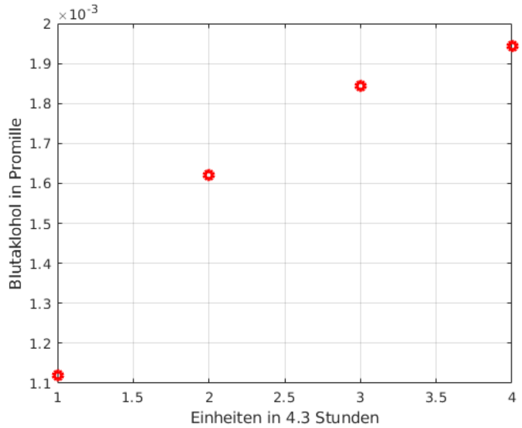
[1] Quelle: https://www.beratung.help/a/promillerechner

Das heißt Sie haben ca. 44.64 % Alkohol im Blut abgebaut. Wenn Sie sich dann zwei weitere Cervezas genehmigen - man gönnt sich ja sonst nicht viel - stellt sich dann direkt ein Wert von

$$1.62 ‰$$

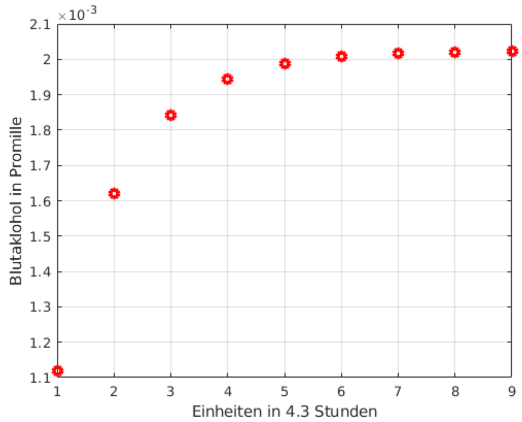
ein. Sie warten weitere 4.07 Stunden, trinken zwei Cervezas und so weiter. Wie wird sich die Orgie entwickeln?

Stunden (4.07 h)	nach Abbau (‰)	nach Konsum (‰)
1		$a_1 = 1.12$
2	0.50	$a_2 = 1.62$
3	0.72	$a_3 = 1.84$
4	0.82	$a_4 = 1.94$



Sie nehmen auf den ersten Blick mehr zu sich als abgebaut werden kann. Stimmt das? Würde auf diese Weise der Alkoholgehalt unendlich (theoretisch natürlich nur) groß werden? Die Graphik oben deutet so etwas an. Oder wird sich ein Wert einstellen, der nie überschritten wird? Die nachfolgende Graphik, die weitere Zeiteinheiten enthält unterstützt die zweite Theorie.

Stunden (4.07 h)	nach Abbau (‰)	nach Konsum (‰)
1	0.50	1.62
2	0.72	1.84
3	0.82	1.94
4	0.87	1.99
5	0.89	2.01
6	0.90	2.02
7	0.90	2.02
8	0.90	2.02



Um diese Frage sicher beantworten zu können benötigen wir eine genaue Abbildungsvorschrift, eine Funktion $a_n = f(n)$ mit der Anzahl Stundeneinheiten $n \in \mathbb{N}$ als Argument und dem entsprechenden Blutalkoholwert als Wert $a_n \in \mathbb{R}$. Kennen wir die genaue Definition so einer Funktion so können wir den Ausdruck für sehr große n untersuchen. Auf Aufgabenblatt "1 Folgen" dürfen Sie dieses Beispiel fertigrechnen.

(Die Überlegungen in diesem Beispiel funktionieren im Übrigen auch für Medikamentwirkstoffe und Nikotin ...)

Definition 1.1 (Folge) *Es sei M eine Menge. Eine Folge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M:*

$$a_n \ : \ \mathbb{N} \to M$$

Die geordnete Menge aller Werte der Folge bezeichnen wir mit

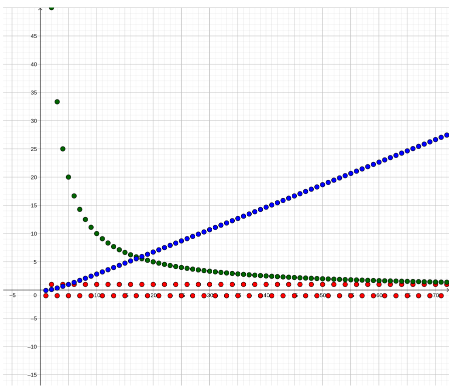
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \overbrace{(a_1, \underbrace{a_2}_{\text{Folgenglied}}, a_3, \ldots, a_{\underbrace{k}_{\text{Index}}}, \ldots)}^{\text{Folge}}.$$

Notation: Wir schreiben auch kurz

$$(a_n)_n := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Es bezeichnet also a_n ein einzelnes Folgenglied, nämlich der n-te Wert der Folge und $(a_n)_n$, bzw $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgenwerte.

Geogebra 2 Arten von Folgen



Untersuchen Sie die Folgenbeispiele in https://www.geogebra.org/m/k2gxfme7 auf ihr typisches Verhalten.

(a) Wie lauten die Abbildungsvorschriften der dargestellten Folgen?

(b) Worin unterscheiden sich die drei Folgen außer in der Farbe?

(c) Was sind wesentliche Merkmale bezüglich "Verhalten im Unendlichen" und "Beschränktheit"?

(d) Geben Sie jeweils die ersten vier Folgenglieder in aufzählender Schreibweise

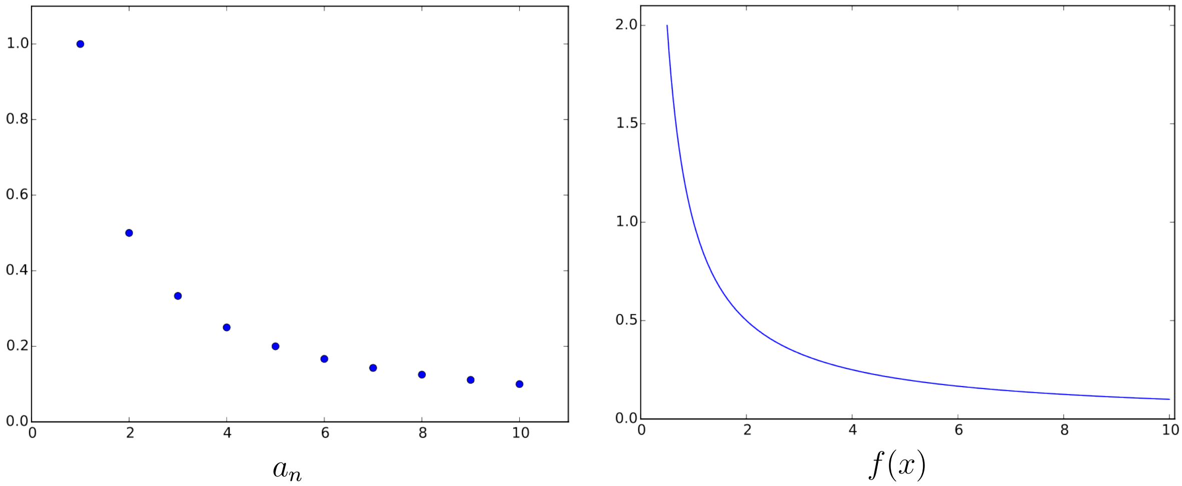
$$a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$$

an.

Wir interessieren uns dafür wie Folgen sich im Unendlichen verhalten. Nähern sie sich immer "besser" einem bestimmten Wert an? Oder nicht? Oder pendeln sie zwischen zwei oder mehreren Werten hin- und her?

Einige Studenten stellen sich unter einer reellen Folge eine kontinuierliche Funktion vor (insbesondere, wenn sie diese zeichnen wollen). Dies ist jedoch falsch, da eine reelle Folge nur aus einer Abfolge einzelner reeller Zahlen besteht. Dies demonstriert die folgende Gegenüberstellung der harmonischen Folge $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$



Quelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Folge

Uns interessieren die Folgenglieder für sehr große n, genauer für "unendlich großes" n. Was darunter zu verstehen ist klärt die folgende

Definition 1.2 (Konvergenz und Grenzwert einer Folge) *Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a Grenzwert der Folge:⇔*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert so heißt sie konvergente Folge.
Notation: Wir schreiben auch

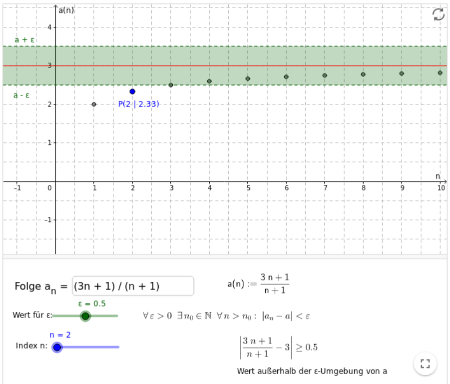
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \quad \text{und auch} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty)\,.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist heißt divergente Folge.

Eine Folge heißt bestimmt divergiert, wenn der Limes entweder $+\infty$ oder $-\infty$ liefert. Damit wird ausgedrückt, dass man weiß "wohin die Folge läuft". Wir nennen dann auch $+\infty$, bzw. $-\infty$ - je nachdem - einen uneigentlichen Grenzwert.
Eine Folge heißt unbestimmt divergent, wenn der Limes unaufhörlich zwischen Werten hin- und herspringt.

Diese Definition nützt uns nur dann etwas, wenn wir bereits die Vermutung eines Grenzwertes haben, weil wir den entsprechenden Wert mit dem sogenannten ϵ-*Krituerium* (Def. 1.2) auf Konvergenzeigenschaft prüfen können. Es klärt nicht, wie wir einen Grenzwert berechnen können.

Geogebra 3 Grenzwert einer Folge



Betrachten Sie die Situation auf https://www.geogebra.org/m/HPjMS7c7 und machen Sie sich den Grenzwertbegriff anschaulich klar.

Beispiel 4 Grenzwertüberprüfung

Für $a_n = \frac{1}{n}$ wählen wir ein beliebiges, positives ϵ; sagen wir $\epsilon = 10^{-12}$. a_n ist eine konvergente Folge mit Grenzwert $a = 0$ (das ist erst mal eine Vermutung), wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt, dass

$$
\begin{aligned}
& & \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< 10^{-12} \\
&\Leftrightarrow & \left|\frac{1}{n}\right| &< 10^{-12} \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{n} &< 10^{-12} \\
&\Leftrightarrow & n &> \frac{1}{10^{-12}} \\
&\Leftrightarrow & n &> 10^{12}
\end{aligned}
$$

Mit $n_0 = 10^{12}+1$ ist dann $a_n = \frac{1}{n}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a = 0$. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Eine Folge mit Grenzwert Null heißt *Nullfolge*.

Es gibt leider keine allgemeingültige Methode wie man einen Grenzwert berechnen kann. Die Bandbreite geht von "wenige leicht erkennbare Schritte" bis hin zu "nicht berechenbar, obwohl Konvergenz bewiesen ist". Bevor wir uns ein paar Beispielen zuwenden sollten wir zunächst Rechenregeln für den Limes klären.

Satz 1.3 Rechenregeln für den Limes *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

Folgerung: *Sind die Voraussetzungen von Satz 1.3 erfüllt so gilt auch:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,, \quad \text{falls } b \neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{(\lim_{n\to\infty} b_n)} = a^b\,, \quad \text{falls } a, b \neq 0$$

Beispiel 5 Grenzwertberechnung

(a) "einfach zu berechnen"

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\,(2 - \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}\,(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} = 2$$

(b) auch "einfach zu berechnen"

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0 = 1$$

(c) "gut zu wissen, können wir heute aber noch nicht beweisen"

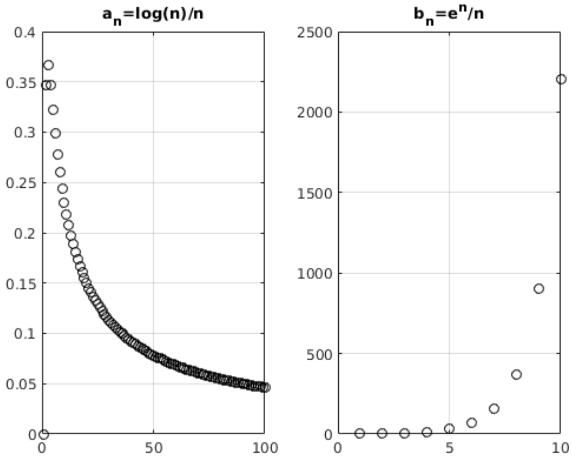
Der Logarithmus über n^p, egal zu welcher Basis, ist "langsamer" als jedes n^s mit noch so kleiner Potenz s:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^s} = 0$$

Und analog dazu gibt es diesen wertvollen Zusammenhang:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^p} = \infty$$

e^n ist "schneller" als jedes n^p, ganz gleich wie groß p ist.



Den Beweis zu diesen beiden weitreichenden Tatsachen besprechen wir später in Kapitel 5.2.2, Beispiel 103. Die Abbildung oben rechts diene zunächst der Plausibilität.

(d) "ein wenig knobeln"

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \left[\infty^0\right]$$

ist ein *unbestimmter Ausdruck*. Bei unbestimmten Ausdrücken muss man mehr oder weniger tief in die Trickkiste greifen. Hier bedienen wir uns folgender Umformungsmöglichkeit:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b\,\ln a}$$

Für unsere Situation sieht das so aus:

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\,\ln n}$$

Und damit gilt, auch weil $(b_n)_n = \mathrm{e}$ eine konvergente Folge ist, mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\,\ln n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\ln n} = \mathrm{e}^0 = 1\,.$$

Nun haben wir die beiden Situationen "prüfen ob eine Zahl Grenzwert ist" und "Berechnen eines Grenzwertes" betrachtet. Es gibt noch eine dritte Situation, nämlich die, in der wir lediglich die Konvergenz einer Folge feststellen können, auch wenn wir dazu noch keinen Grenzwert erhalten.

Definition 1.4 (Monotonie & Beschränktheit) *Eine Folge $(a_n)_n$ heißt nach oben (nach unten)* beschänkt*, falls gilt:*

$$\exists C \; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; a_n < \; (>) \; C$$

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
Die Folge heißt monoton *wachsend (fallend), falls gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; a_n \leq \; (\geq) \; a_{n+1}$$

Im Falle von $<$ $(>)$ statt $\leq$ $(\geq)$ sprechen wir von streng monoton *wachsend (fallend).*

Beispiel 6 Monotonie und Beschränktheit

(a) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist wegen

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

streng monoton fallend und wegen

$$\frac{1}{n} > 0$$

nach unten beschränkt. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

(b) Wie im Tutorial “Die Eulersche Zahl” gezeigt ist die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

steng monoton wachsend und nach oben beschränkt. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: \mathrm{e}\,.$$

Eigenschaften von Folgen:

- Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.
- Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen sind konvergent.
- Monoton fallende und nach unten beschränkte Folgen sind konvergent.
- Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beispiel 7 (un-)bestimmt divergent und konvergent

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+10000000} = \infty$$
ist eine bestimmt divergente Folge.

(b) Die alternierende Folge
$$a_n = (-1)^n$$
ist eine unbestimmt divergente Folge, da sie keinen Grenzwert bestitzt. Es ist
$$a_n = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)\,.$$

(c) Auch
$$a_n = (-2)^n$$
ist eine unbestimmt divergente Folge.

(d) und alternierend und trotzdem konvergent:
$$\frac{(-1)^n}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Folgen wie in Beispiel 7 (b) haben noch eine besondere Eigenschaft. Sie sind zwar nicht konvergent, besitzen aber konvergente Teilfolgen. In diesem Fall
$$a_n^1 = a_{2\,n} = 1 \quad \text{und} \quad a_n^2 = a_{2n+1} = -1\,.$$
Ihre Grenzwerte bezeichnet man mit Häufungspunkt der ursprünglichen Folge.

Definition 1.5 (Häufungspunkte) *Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a Häufungspunkt:*$\Leftrightarrow$
$$\forall \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \ :\ |a_n - a| < \epsilon$$

Die Definition des Grenzwertes verlangt also, dass in jeder Umgebung des Grenzwertes ab einem gewissen Index alle Folgenglieder liegen; die Definition des Häufungspunktes verlangt lediglich, dass in jeder Umgebung unendlich viele Folgenglieder liegen. Häufungspunkte sind Grenzwerte von Teilfolgen einer Folge.

Beispiel 8 Häufungspunkt Die Folge
$$(a_n)_n = (1, 1, 2, 1, 2, 2.5, 1, 3, 2.6\bar{7}, 1, 4, 2.75, \dots)$$
hat die Häufungspunkte
$$HP_1 = 1 \quad \text{und} \quad HP_2 = 3\,.$$
Eine dritte Teilfolge divergiert (bestimmt). Die Folge $(a_n)_n$ selbst ist divergent (unbestimmt). Sie ist nach unten beschränkt, aber nicht monoton. Können Sie das sehen?

Eigenschaften von Folgen:

- Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
- Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben aber nicht mehr als einen Grenzwert.

Die Folgen, die wir bisher betrachten haben nennt man, ihrer explisiten Darstellung wegen auch *explizite Folgen*. Im Gegenzug gibt es noch die *implizite Folge* oder auch *rekursive Folge*, wenn Sie so dargestellt ist, dass man zur Berechnung eines Folgenglieds die jeweils vorherigen einsetzen muss.

Definition 1.6 ((implizite/rekursive) Folge) *Eine implizite oder auch rekursive Folge ist eine Folge, deren $n+1$-tes Folgenglied von davorliegenden Folgengliedern abhängt.*

Spezielle implizite Folgen mit Startwert a_1:

geometrische Folge	$a_{n+1} = q\, a_n$
arithmetsiche Folge	$a_{n+1} = c + a_n$

Aus der Überlegung heraus erhält man häufig zunächst eine implizite Folge. Will man bestimmte Folgenglieder ermitteln ist das mit der impliziten Darstellung schwierig, da man für das 100-ste Folgenglied alle vorherigen erst mal berechnen muss. Bei einer expliziten Folge kann man a_{100} direkt berechnen. Dafür hat man es oft einfacher, wenn man - sofern vorhanden - den Grenzwert einer Folge bestimmen will.

Beispiel 9 implizite Folgen

(a) Die *Fibonacci-Zahlen* erhalten wir durch folgende implizite Folge:

$$a_1 = 1\,,\; a_2 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Das sind die Zahlen

$$a_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)\,.$$

Die Folge ist bestimmt divergent.

(b) Bilden wir Brüche aus aufeinanderfolgenden Folgengliedern der Fibonacci-Folge in (a) so erhalten wir die konvergente Folge

$$b_1 = 1\,,\; b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \to S\,,$$

wobei der Grenzwert bekannt ist unter dem Namen *Goldener Schnitt*[2].

(c) Das *Heron-Verfahren* stellt eine konvergente, implizite Folge dar, die näherungsweise die zweite Wurzel aus zwei berechnet. Sie lautet:

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Wenn man von einer impliziten Folge weiß, dass sie konvergiert, etwa weil man Monotonie und Beschränktheit überprüft hat, dann ist klar, dass es ein a gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Es gilt dann für Beispiel 9 (c) weiter (achten Sie auf die Rechenregeln des Limes!)

$$\begin{aligned}
&& a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
\Rightarrow && \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
&& &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) \\
\Rightarrow && a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \\
\Rightarrow && a &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$-\sqrt{2}$ kommt nicht in Frage, da die Folge nicht negativ werden kann.

Eine solche Vorgehensweise ist nur erlaubt, wenn wie von der Konvergenz der Folge prinzipiell ausgehen können. Andernfalls hätten Sie damit eine Vermutung für das ϵ-Kriterium.

Wir wollen uns anschauen wie man von einer Darstellungsform in die andere wechseln kann. Von einer expliziten auf eine implizite Darstellung kann man es immer schaffen aber umgekehrt gilt das nicht im Allgemeinen.

Beispiel 10 von implizit zu explizit

(a) Die implizite geometrische Folge mit Œ $a_1 > 0$ in expliziter Darstellung

$$a_{n+1} = q\,a_n = q^2\,a_{n-1} = \cdots = q^k\,a_{n-k+1} = \cdots = q^n\,a_1$$

[2] Hierzu kann man spannende Sachen untersuchen, die leider unseren zeitlichen Rahmen sprengen würden. Die Fibonacci-Zahlen enstanden aus einem Wachstumsgedanken. Der Goldene Schnitt findet sich an vielen Orten in der Natur wieder und dadurch Anwndung in Kunst und Fotographie. Fühlen Sie sich gerne motiviert, im Internet nach diesen Themen zu stöbern. Sie werden es nicht bereuen.

Es gilt dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^n\, a_1 = \begin{cases} \text{“}\pm\infty\text{''} & q \le -1 \quad \text{unbest. div.} \\ \infty & q > 1 \quad \text{best. div.} \\ a_1 & q = 1 \quad \text{konvergent} \\ 0 & |q| < 1 \quad \text{konvergent} \end{cases}$$

(b) Die implizite arithmetische Folge in expliziter Darstellung

$$a_{n+1} = c + a_n = 2\,c + a_{n-1} = \cdots = k\,c + a_{n-k+1} = \cdots = n\,c + a_1$$

Es gilt dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} n\,c + a_1 = \mathrm{sig}(c)\infty$$

(c) Eine typische Vorgehensweie zur Berechnung einer expliziten aus einer impliziten Darstellung können wir an folgendem Beispiel gut erkenne:

$$a_0 = 0\,,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2}$$

Wir starten in der obersten Stufe und setzen sukkzessive die Bildungsgesetze für vorangegangene Folgenglieder:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2}\,a_{n-1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2^2}\,a_{n-1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} \\
&= \frac{1}{2^2}\,\left(\frac{1}{2}\,a_{n-2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} \\
&= \frac{1}{2^3}\,a_{n-2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\,a_{n-k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^1} \\
&\vdots (k = n) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\,a_0 + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$a_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{und folglich} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Es ist auch $a_0 = 0$. Jetzt erst wissen wir tatsächlich, dass $(a_n)_n$ konvergent ist. Es gilt auch direkt:

$$\begin{aligned}
& & a_{n+1} &= \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow & a &= \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow & a &= 1
\end{aligned}$$

Das ist jetzt nicht überraschend. Lustig ist das Ergebnis in Beispiel 11 (b)

Beispiel 11 von explizit zu implizit

(a) Von explizit zu implizit geht immer:

$$\begin{aligned}
& & a_n &= \frac{1}{n} \\
& & a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \\
&\Rightarrow & a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n\,(n+1)} \\
&\Leftrightarrow & a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{n\,(n+1)}
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $a_n \to 0$, können das aber an der impliziten Darstellung nicht mehr ablesen, denn hier gilt nach Limesbildung

$$a = a\,.$$

Das ist zwar "wahr" liefert aber keine Erkenntnis über a.

(b) Wir wollen einmal die explizite Folge, die wir in Beispiel 10 (c) aus einer impliziten Darstellung berechnet haben, wieder in eine implizite Darstellung bringen:

$$\begin{aligned}
& & a_n &= 1 - \frac{1}{2^n} \\
&\text{und} & a_{n+1} &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

führt auf

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - 1 + \frac{1}{2^n} \\
&= a_n + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= a_n + \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

also insgesamt

$$
a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}}
$$

Auf die implizite Darstellung nun den Limes angewandt führt abermals (wie in Teil (a)) auf

$$
a = a
$$

und hilft nicht wirklich weiter.

1.2 Reihen als solche und Konvergenzkriterien

Eine *(unendliche) Reihe* ist eine unendliche Summe, das heißt eine Summe, deren Indexende unbeschränkt ist:

Indexende **Bildungsvorschrift**

$$
\sum_{n=m}^{\infty} a_n
$$

Laufvariable **Startindex**

Was nun interessiert ist die Frage nach der Beschränktheit des Reihenwertes. Welche Eigenschaft muss die Bildungsvorschrift a_n haben, damit beim Aufsummieren von unendlich vielen ihrer Glieder noch immer ein beschränkter Wert entsteht? Wenn man ein endliches Indexende einsetzt, die Reihe also zu einer Summe macht

$$
s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,,
$$

so erhalten wir im Grunde wieder eine Folge. Die Frage ist also, ob und wohin diese Folge konvergiert. Wir werden uns in diesem Kapitel hauptsächlich der Fragestellung des "ob" widmen. Erkenntnisse daraus benötigen wir später im Kapitel 6.2.

Definition 1.7 (Reihe) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge*

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$$

heißt Folge der Partialsummen*. Der Limes*

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

heißt (unendliche) Reihe *und stellt gleichzeitig bei Konvergenz den Grenzwert von $(s_k)_k$ dar.*
Die spezielle Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

heißt alternierende Reihe.

Die Folgenglieder stellen sich dann dar als

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0\\
s_1 &= a_0 + a_1\\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2\\
&\vdots\\
s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n
\end{aligned}$$

Beispiel 12 Geometrische Reihe Wir betrachten folgende Geometrische Reihe[3]

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für $q \neq 1$. Wie entwickelt sich diese, wenn wir n gegen ∞ streben lassen?

[3]Die Geometrische Reihe ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen. Sie wurde schon 1593 von Vieta (1540–1603) gefunden. Mit einiger Überinterpretation kann man den Spezialfall $q = \frac{1}{4}$ sogar auf Archimedes (287–212 v.Chr.) zurückführen.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1}{1-q} && \text{falls } |q|<1
\end{aligned}$$

Beispiel 13

Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren?

Es ist

$$\begin{aligned}
0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\
&= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\
&= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= -1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} \\
&= -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
&= -1 + \frac{10}{9} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Genauso (probieren Sie es einmal selbst) erhalten wir

$$0.\bar{9} = 9\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 1$$

und damit

$$0.\bar{9} + 0.\bar{1} = \frac{10}{9} = 1.\bar{1}\,.$$

Bei dieser Fragestellung ist noch einmal die genaue Definition des Grenzwertes von Bedeutung. Meinen wir 0.99999 mit nicht enden wollenden Neunen oder

$$9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \,?$$

Bei Letzterem sprechen wir implizit vom Grenzwert - hier 1 - einer Folge (nämlich der Partialsumme), der aber nie wirklich erreicht wird.

Eine Reihe ist konvergent, sowie die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Das dürfte klar sein.Um Reihen auf Konvergenz zu untersuchen gibt es verschiedene Konvergenzkriterien:

(1) Integralvergleichskriterium
(2) Das Majoranten-/Minorantenkriterium
(3) Das Leibnizkriterium
(4) Das Wurzelkriterium
(5) Das Quotientenkriterium

Wir werden die einzelenen Kriterien definieren und je zwei Beispiele, mit und ohne Konvergenzeigenschaft, durchrechnen. Die Reihenfolge der Auflistung ist nicht willkürlich. Das Integralvergleichskriterium ist ein Kriterium, das nicht immer leicht zu berechnen ist, da eine Stammfunktion gefunden werden muss, aber es funktioniert (bei Einhaltung der Voraussetzungen) theoretisch immer. Beim Majoranten-/Minorantenkriterium vergleicht man jeweils mit einer größeren/kleineren Reihe, von deren Konvergenz/Divergenz man bereits weiß. Das Leibnizkriterium ist das am einfachsten zu untersuchende, gilt aber nur für alternierende Reihen. Wurzel- und Quotientenkrterium sind die schwächsten Kriterien. Unter Umständen liefern sie keine Information aber wenn, dann sind sie in der Regel leicht zu berechnen.

Fangen wir mit dem ersten an:

Integralvergleichskriterium :
Die Reihe

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=p}^{\infty} f(k)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_{p}^{\infty} f(x)\, dx < \infty$$

erfüllt ist. Dabei muss sei $f(k)$ eine monoton fallende Folge sein, die nur positive Werte annimmt. Des weiteren muss $f \in C^0[p, \infty)$.

Im Grunde greifen wir hier im Unterrichtsverlauf ein wenig vor, da wir über Integration noch nicht gesprochen haben. Wir tragen diesem Umstand damit Rechnung, dass wir uns auf zwei einfache Beispiele beschränken, die dann aber erlauben, dass wir das Thema lückenlos durcharbeiten können.

Beispiel 14 Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent, denn das uneigentliche Integral

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

existiert nicht.

Beispiel 15

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist konvergent, denn das Integral

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b} + 1 = 1$$

ist beschränkt.

Der Wert des uneigentlichen Integrals sagt nur etwas über die Beschränktheit der Reihe, nicht über den Wert der Reihe, falls diese beschränkt ist.

Beispiel 16

Betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 30}{n - \sqrt{30}}$$

so stellen wir fest, dass

$$f(x) = \frac{x^2 - 30}{x - \sqrt{30}}$$

bei $x = \sqrt{30} \in [1, \infty)$ eine Polstelle besitzt. Damit sind die Voraussetzungen des Integralvergleichskriteriums verletzt. Das Kriterium kann hier nicht angewendet werden.

Majorantenkriterium :
Die Reihe
$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$
konvergiert, wenn es eine konvergente Reihe
$$\sum_{k=m}^{\infty} b_k$$
gibt mit
$$|a_k| < b_k\,,\ \forall k \geq m\,.$$

Minorantenkriterium :
Die Reihe
$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$
diveriert, wenn es eine divergente Reihe
$$\sum_{k=m}^{\infty} b_k$$
gibt mit
$$a_k \geq b_k\,,\ \forall k \geq m\,.$$

Beispiel 17 Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$
konvergiert, denn es gilt
$$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Beispiel 18 Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
divergiert, denn es gilt
$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,.$$

Leibnizkriterium:
Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konvergiert, wenn $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beispiel 19 alternierende Reihen

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$ ist divergent

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2$$ ist konvergent

(3) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$ ist konvergent

Wurzelkriterium :
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Wurzelkriterium keine Aussage.

Beispiel 20

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

konvergiert, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Quotientenkriterium :
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Quotientenkriterium keine Aussage.

Beispiel 21 Quotientenkriterium

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ konvergiert.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k}$ divergiert.

Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium. Was sich hier nach Gewürzeigenschaften anhört ist eine ganz einfache Eigenschaft: Untersucht man eine Reihe mit dem Wurzelkriterium und erhält keine Aussage, also

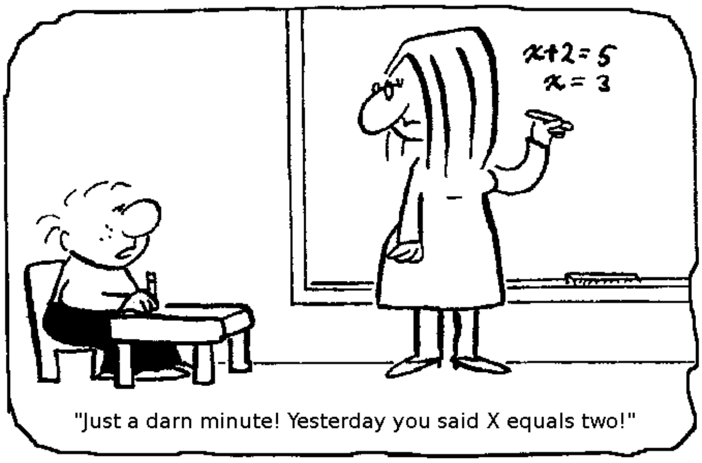
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

so wird auch das Quotientenkriterium bei dieser Aufgabe keine Aussage liefern können. Anders herum ist es aber möglich: Liefert das Quotientenkriterium keine Aussage, so kann man immer noch das Wurzelkriterium probieren.

Funktionen 2

Wir behandeln:

- Eigenschaften, Kombinationen und Umkehrungen von elementaren Funktionen
- Grundlegendes zu Verhalten im Unendlichen und Grenzwertberechnung



Die Welt der Funktionen ist riesig. Wir beschränken uns zunächst auf eindimensionale Exemplare, d.h. Funktionen, die von einem eindimensionalen Raum, dem $\mathbb{R}$ wieder in einen eindimensionalen Raum, wieder dem $\mathbb{R}$ abbilden. Eine kleine aber feine Erkenntnis ist die, dass wir es in dieser Situation im Grunde nur mit drei Funktionen zu tun haben. Den sogenannten elementaren Funktionen.

Definition 2.1 (Elementare Funktion) *Unter den elementaren Funktionen verstehen wir grundlegende Funktionen, aus denen mittels Operationen wie Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division, Zusammensetzung, Verkettung und Umkehrung alle anderen existierenden Funktionenarten erzeugt werden können.*

$p(x) = x^r$	$u(x) = a^x$	$v(x) = \sin x$
Potenzfunktionen	*Exponentialfunktionen*	*Sinusfunktionen*

Alle anderen - von denen es wie bereits erwähnt sehr viele gibt - werden aus den elementaren Funktionen gebildet. Die Bildung erstreckt sich dabei über simples Addieren/Differenzieren, Multiplizieren/Dividieren, Verketten und Umkehren. Damit ist die Situation gut strukturiert:

Mit dem Verständnis von den elementaren Funktionen und allen Kombinationsmöglichkeiten haben wir dann nahezu alles "im Griff". Das ist natürlich ein wenig illusorisch aber es beschreibt gut die typische Vorgehensweise. Die folgende Tabelle stellt eine Übersicht über einige Funktionen dar, die aus den elementaren Funktionen gebildet werden und die wir im weiteren Verlauf untersuchen wollen. Selbstredend hat die Tabelle keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

elementare Fkt	**Beispiele**	**Kombinationen**
Potenzfunktion	Monom	Polynom
$f(x) = x^r$	$x\,,\ x^2\,,\ x^3\,,\ \ldots$	$2\,x^2 - x^4 + \frac{1}{3}\,x^{12}$
	Wurzelfunktion	
	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x}^3$ $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{x+3} + x^7 - \sqrt[8]{2\,x - x^2}$
Exponentialfkt.	e-Funktion	Hyperbelfunktion
$f(x) = a^x$	e^x	$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$ $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
	allgemein	
	$2^x\,,\ 0.5^x = \frac{1}{2^x}\,,\ \ldots$	$2\,\pi^{\frac{x+1}{x^2}}$
Sinusfunktion		Kosinusfunktion
$f(x) = \sin x$		$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
		Tangensfunktion
		$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
		Arkussinus
		$\arcsin x = \sin^{-1} x$

Streng genommen können wir auch die Sinusfunktion durch Potenzfunktionen darstellen, so dass wir uns tatsächlich auf zwei elementare Funktionen beschränken könnten aber erstens werden wir diesen Sachverhalt erst in Kapitel 6.1 kennenlernen und zweitens rechnen wir de facto mit Ausdrücken die die Sinusfunktion als solche beinhaltet. Es ist also aus praktischen Gründen sinnvoll die Sinusfunktion als elmentare Funktion mit aufzuführen.

Zu unserer Liste in der obigen Tabelle kommt dann noch die Möglichkeit von zusammengesetzten Funktionen hinzu, wie etwa

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} \quad . \tag{1}$$

(siehe Abbildung 1)

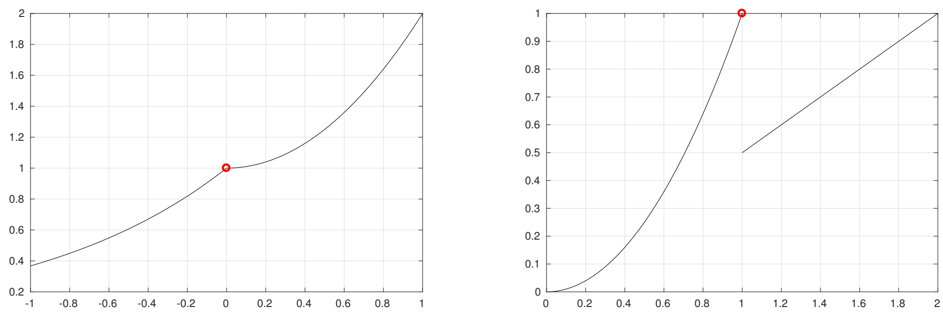


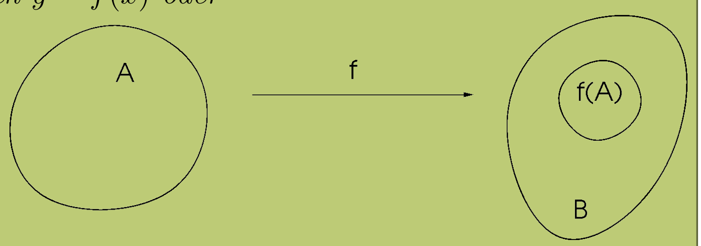
Abbildung 1: Graphen der Funktionen f und g aus (1)

2.1 Definition einer Funktion

Schenken wir aber noch kurz der sauberen Definition einer Funktion unsere Aufmerksamkeit:

Definition 2.2 (Funktionen) *Seien A, B Mengen. Eine Funktion oder Abbildung von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.*
Statt $(x, y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$ oder

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y \, . \end{aligned}$$



Schreibweise	Definition/Sprechweise
$y = f(x)$	heißt *Funktionswert von* f *an der Stelle* x.
A	heißt *Definitionsbereich von* f (auch $\mathbb{D}_f$).
B	heißt *Wertebereich* von f.
Für $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$	heißt
$f(A')$	$:= \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$
	Bild (–menge) von A' *(unter* f*).*
$f^{-1}(B')$	$:= \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$
	Urbild (–menge) von B' *(unter* f*).*

Beispiel 22

Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

(Siehe Abb. 2). Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ und die Bildmenge von $\mathbb{R}$ unter f sind alle nicht negativen Zahlen in $\mathbb{R}$, also:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$$

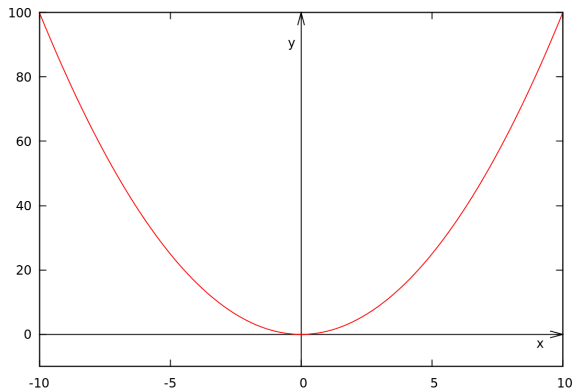


Abbildung 2: $f(x) = x^2$

Betrachten wir die Funktion f als das was per Definition 2.2 ist, nämlich als Teilmenge (Relation) der Produktmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dann ist die Funktion die Menge

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} .$$

Die bildliche Darstellung der Punktmenge G_f im Achsenkreuz nennen wir *Graph* der Funktion f.

Wenn man sich diesen Sachverhalt klar macht, dann erhält die folgende Definition, wann zwei Funktionen gleich sind, auch ihre Sinnhaftigkeit. Es genügt eben nicht, wenn nur die Abbildungsvorschrift gleich ist.

Definition 2.3 (Gleichheit von Funktionen) *Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, genau dann wenn sowohl die Abbildungsvorschriften von f und g gleich sind und jeweils Definitions– und Bildbereiche übereinstimmen. Das heißt:*

$$(f = g) :\Leftrightarrow \begin{cases} A = C\,, & \\ B = D & \text{und} \\ f(x) = g(x) & \forall x \in A\,. \end{cases}$$

Man sagt auch die Funktionen sind identisch gleich : $f \equiv g$

Beispiel 23 nicht gleiche Funktionen Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht gleich der Funktion $g(x) = x^2$, wenn sich die Definitionsbereiche unterscheiden, also wenn etwa $\mathbb{D}_f = [-1, 0]$ und $\mathbb{D}_g = [0, 1]$ ist, da wir für die beiden Funktionen ganz unterschliedliche Punktmengen erhalten.

Wir haben gesehen, dass die Wahl des Definitionsbereiches einer Funktion wesentlich zu deren Bestimmung ist. Da das ständige Angeben des Definitions– und Wertebereichs lästig ist wollen wir eine Vereinbarung treffen:

Definition 2.4 (Definitionsbereich/Wertebereich)
Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der größtmögliche Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.
Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die Bildmenge $f(\mathbb{D}_f)$ des Definitionsbereichs gemeint.

Größtmöglich ist noch ein wenig flapsig formuliert: Wir meinen damit alle Werte an denen f existiert, das heißt wenn $f(x)$ einen endlichen Wert annimmt; dort also nicht nach ∞ strebt.

Beispiel 24

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

existiert bei allen Werten außer $x = 0$ (siehe Abb. 3). Der Definitionsbereich von f, sofern nicht anders angegeben ist dementsprechend gegeben durch

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

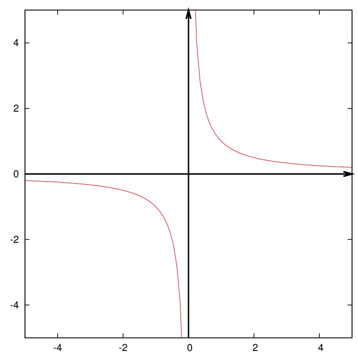


Abbildung 3: $f(x) = \frac{1}{x}$

Beispiel 25 nicht gleiche Funktionen Die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{x^3}{x}$ haben, wenn nichts anderes angegeben ist, laut Vereinbarung die Definitionsbereiche $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x = 0$ darf für g nicht eingesetzt werden. Der Graph für g hat ein Loch, eine sogenannte *Definitionslücke* oder auch kurz *Lücke* . f und g sind damit nicht gleich.

2.2 Untersuchung von Definitionslücken

Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ und wollen wissen welchen Wert $f(x)$ annimmt, wenn sich x dem Wert a nähert:

$$''\lim_{x\to a} f(x) = ?''$$

Im Grunde können wir uns der Kenntnisse durch Folgen bedienen, indem wir derart Substituieren, dass aus $\lim_{x\to a}$ ein gleichbedeutender $\mathbb{N} \to \infty$ entsteht.

Beispiel 26

Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

so interessiert uns besonders was bei der Definitionslücke $x = 1$ passiert, also was

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$$

liefert. Mit der Substitution $x = 1 \pm \frac{1}{n}$ transferieren wir das Problem in

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 \pm \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \pm n = \pm\infty$$

und können so unsere Kenntnisse aus Kapitel 1.1 anwenden. Mit etwas Übung benörtigt man das dann aber nicht mehr.

Da wir aber nun nicht nur "Richtung Unendlich", was ein Blick von links nach rechts ist, schauen sondern "Richtung einen Wert a", müssen wir nun das Objekt des Interesses von links und von rechts betrachten. In dieser Sache unterscheidet sich der Grenzwertbegriff ein wenig von dem bisher bekannten.

Definition 2.5 (Grenzwert von Funktionen) *Es sei f eine Funktion. Dann heißt die Zahl c mit $|c| < \infty$, bzw. d mit $|d| < \infty$ und*

$c = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$	*linksseitiger Grenzwert von f für x gegen a*
$d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$	*rechtsseitiger Grenzwert von f für x gegen a.*
$c = d \quad \Rightarrow \quad c = \lim\limits_{x \to a} f(x)\,,$	*Grenzwert von f für x gegen a, das heißt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen:* $$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ sagen wir f existiert am Punkt a, wenn es einen Grenzwert gibt und

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$$

gilt.

Notationen:

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Definition 2.6 (Stetigkeit einer Funktion) *$f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in I$, falls*

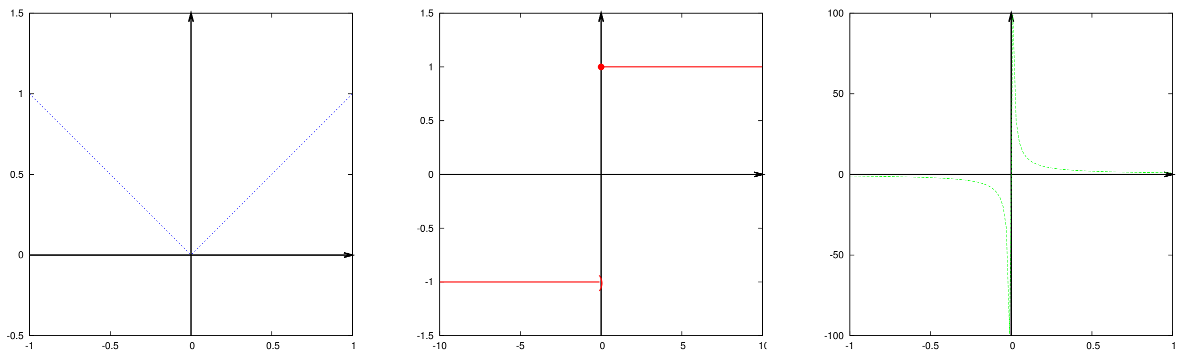
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

- *Falls x_0 ein Randpunkt von I ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.*
- *Die Funktion f heißt auf I stetig, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.*

Die Menge der aller stetigen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit:

$$C^0(\Omega) := \{f \;:\; \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } \Omega\}$$

Noch einmal in Worte zusammengefasst bedeutet Stetigkeit von f an einer Stelle a: Sofern a ein innerer Punkt ist prüfen wir ob links– und rechtsseitiger Grenzwert jeweils existieren und auch übereinstimmen. Dann ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig.



$f(x) = |x|$ $\qquad$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Abbildung 4: Beipiele von Funktionen fúr die bei $x = 0$ etwas "passiert".

Beispiel 27 Abbildung 4 zeigt die Graphen von drei verschiedenen Funktionen, die wir uns bei $x_0 = 0$ betrachten wollen.

(a) Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x|\,.$$

Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} |x| = \lim_{x \searrow 0} x = 0$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} |x| = \lim_{x \nearrow 0} -x = 0\,.$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein und sind nicht $\pm\infty$. Also lautet der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$$

f ist stetig. Wir sagen f *existiert bei* $x = 0$.

(b) Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} 1 = 1$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} -1 = -1\,.$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein. Demzufolge ist f nicht stetig. Wir sagen f *existiert bei* $x = 0$.

(c) Gegeben ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein. Demzufolge hat f bei $x = 0$ keinen Grenzwert und ist nicht stetig. Wir sagen f *existiert nicht bei* $x = 0$.

(d) Gegeben ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{|x|}\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{-x} = \infty\,.$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert existiert jeweils nicht und damit ist der Ausdruck

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$$

gar nicht definiert. f existiert nicht bei $x = 0$.

Sind zwei Funktionen stetig so sind es auch ihre Summe, Produkt und ihr Quotient, sofern der Nenner nicht verschwindet. Dafür sorgen die Rechenregelen für Grenzwerte:

Die Rechenregeln für Grenzwerte sind die gleichen wie die für Grenzwerte bei Folgen (siehe Satz 1.3 auf Seite 6)

In Worten bedeutet das, dass man den Limes einer/s Summe/Produktes/Quotienten von Funktionen nur dann als Summe/Produkt/Quotient der Limes schreiben darf, wenn jeweils Konvergenz gegeben ist. Hier passieren beliebte Rechenfehler.

Kommen wir nun zu einem besonderen Phänomen bei der Grenzwertbildung: Der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$$

führt auf einen Bruch, der sowohl im Zähler als auch im Nenner nach Null strebt. Einen solchen Ausdruck beschreiben wir symbolisch durch

$$\left[\frac{0}{0}\right] .$$

Ein Ausdruck dieser Form gibt uns keinerlei Auskunft darüber, ob die Funktion bei $x = 0$ einen Grenzwert hat oder nicht. Wenn wir die Funktion ein wenig umformulieren erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Eine andere Funktion, deren Limes x gegen 0 von der gleichen Form ist, nehmen wir einmal

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} ,$$

liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty ,$$

was ein völlig anderes Ergebnis ist. Es gibt verschiedene solcher Formen, die einer besonderen Behandlung bedürfen. Wir fassen einmal alle in folgender Definition zusammen:

Definition 2.7 (unbestimmter Ausdruck) *Als unbestimmte Ausdrücke bezeichnen wir Limes, die von folgender Form sind:*

$$\left[\frac{0}{0}\right]\,,\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\,,\ [0\cdot\infty]\,,\ \left[0^0\right]\,,\ \left[1^\infty\right]\,,\ \left[\infty^0\right]\,,\ [\infty-\infty]$$

Beispiel 28 unbestimmte Ausdrücke Beispiele, die auf unbestimmte Ausdrücke führen:

(a)
$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}\rightsquigarrow\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

(b)
$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}\cdot x\rightsquigarrow[0\cdot\infty]$$

(c)
$$a=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{a}\right)^k\rightsquigarrow\left[1^\infty\right]$$

Videotipp: Hier ein lustiges Filmchen von "TheSimpleMaths" was so passieren kann, wenn man Grenzwertregeln missachtet. Es ist fast ein wenig schade, dass wir diese Regeln einhalten müssen...
$https://www.youtube.com/watch?v=iUeeLtl3yLE$

Beispiel 29 Polstellen und Lücken

(a) Die Funktion
$$g(x)=\frac{x^3}{x}$$
hat eine Lücke im Definitionsbereich bei $x=0$. Sie ist dort nicht definiert, also auch nicht stetig. Wir können
$$g\in C^0(\mathbb{R}\setminus\{0\})$$
schreiben aber es ist
$$g\notin C^0(\mathbb{R})\,.$$
Da
$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}\lim_{x\to 0}x^2=0$$
gilt (und wir meinen damit beide Seiten des Grenzwertes existieren und stimmen überein) können wir unsere Funktion g fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\tilde{g}$ gemäß
$$\tilde{g}(x):=\begin{cases} g(x) & \text{für} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Für diese fortgesetzte Funktion gilt

$$\tilde{g} \in C^0(\mathbb{R}) .$$

Wenn so eine Lücke sich derart füllen lässt, dass wir eine stetige Funktion erhalten so sagen wir, g ist *stetig fortsetzbar* .

(b) Etwas weniger leicht ersichtlich ist das da:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Na? Was meinen Sie?

(c) Die Funktion f aus Beispiel 27 (b) ist nicht stetig fortsetzbar.

(d) Die Funktion f aus Beispiel 27 (c) hat bei $x = 0$ eine Lücke, bei der Funktionswert unbeschrenkt ist. Wir sprechen dann von einer *Polstelle* . Selbstredend, dass eine Funktion an einer Polstelle nicht stetig fortsetzbar ist.

Beispiel 30 Untersuchung gebrochen rationaler Funktionen

(a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4}$$

hat den Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} .$$

Wie verhält sich der Graph in der Nähe dieser Lücke? Handelt es sich hierbei um eine sogenannte *hebbare Unstetigkeit* oder eine Polstelle?

Der rechtsseitige Limes liefert

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = \infty$$

und der linksseitige

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^3} = -\infty .$$

f hat also bei $x = 1$ eine Polstelle. Nähern wir uns von links ($x < 1$) so ist f nach unten unbeschränkt. Nähern wir und von rechts ($x > 1$) so ist f nach oben unbeschränkt.

(b) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

hat ebenfalls den Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} .$$

Ihr verhalten bei $x = 1$ sieht aber so aus:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} (x + 1) = 2$$

und

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} (x + 1) = 2$$

Damit ist die Unstetigkeitsstelle bei $x = 1$ hebbar und die Funktion f stetig fortsetzbar zu:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 2 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

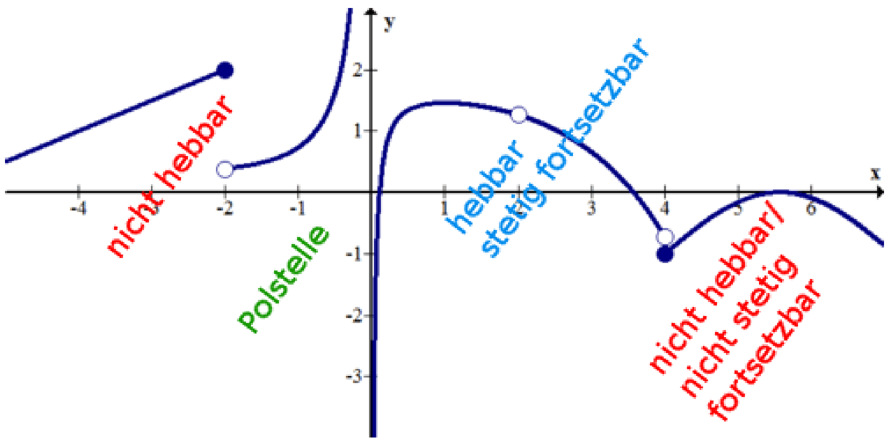


Abbildung 5: Arten von Unstetigkeitsstellen/Definitionslücken

2.3 Umkehrabbildungen

Bei einer Funktion, etwa

$$y = f(x) = 2\,x$$

ist es ja so: Wir tun ein x rein und es kommt ein y raus. Für $x = 3$ erhalten wir $y = 2 \cdot 3 = 6$. Die Frage ist nun, ob dieser Prozess umkehrbar ist. Also welches x erhalten wir für ein bestimmtes y? Dazu lösen wir die Gleichung

$$y = 2\,x$$

nach x auf. Das führt dann auf die Gleichung

$$x = \frac{1}{2}\,y\,.$$

Jetzt wissen wir, dass wir für ein $y = 8$ zum Beispiel ein $x = 4$ erhalten. Klar, oder? Die Umkehrabbildung von f nennen wir f^{-1} und erhält ebenfalls x als Variablenname. Wir schreiben dann

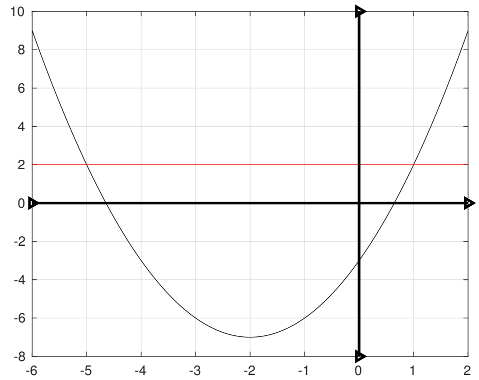
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x$$

für die Umkehrabbildung von f.

Ein wenig schwieriger wird es bereits bei diesem Beispiel (s. Abb. rechts):

$$y = x^2 + 4\,x - 3$$

Da wird das Auflösen nach x ein Problem und auch die Beschreibung der Umkehrabbildung ist so eine Sache, da wir bestimmte y, betrachten wir etwa $y = 2$, durch mehr als ein x erreichen; hier nämlich $x \in \{-5, 1\}$.



Es kann sich hier also nicht um eine Funktion handeln, da nur ein Bildpunkt pro Argument zugelassen ist. Wir können also eine Funktion nur dann umkehren, wenn jede horizontale Linie die Funktion nur einmal schneidet, was genau dann der Fall ist, wenn die Funktion streng monoton ist.

Definition 2.8 (Monotonie von Funktionen) *Wir nennen eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *auf* $[a,b]$ *monoton wachsend (monoton fallend), falls*

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ x_1 < x_2\ :\ f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$$

gilt. f *heißt streng monoton wachsend (streng monoton fallend), falls*

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ x_1 < x_2\ :\ f(x_1) < (>) f(x_2)\,.$$

gilt. Wir nennen f *streng monoton, wenn* f *entweder streng monoton wachsend (smw) oder streng monoton fallend (smf) ist.*

Die Begriffe Injektivität, Surjektivität und Bijektivität kennen wir schon aus der Linearen Algebra (Vorlesung Mathematik I) aber der Vollständigkeit halber führen wir die Definition für unseren Kontext noch einmal auf.

Definition 2.9 (Injektiv, Surjektiv & Bijektiv) *Es seien* A, B *Mengen. Eine Abbildung* $f : A \to B$ *heißt*

surjektiv	:⇔	$f(A) = B$	*(f bildet A auf B ab)*
injektiv	:⇔	$\forall x_1 \neq x_2\ :\ f(x_1) \neq f(x_2)$	*(f ist eineindeutig)*
bijektiv	:⇔	*f ist surjektiv und injektiv*	*(f bildet eineindeutig A auf B ab)*

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to B$ streng monoton, so ist f injektiv, denn

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 < x_2 \vee x_1 > x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Beispiel 31

1. $f(x) = x + 3$ ist smw
2. $f(x) = x^2$ ist smw auf $\mathbb{R}_0^+$ und smf auf $\mathbb{R}_0^-$ und nicht monoton auf $\mathbb{R}$
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv $\wedge$ nicht injektiv
   $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist bijektiv

Satz 2.10 Umkehrfunktion : *Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt*

$$\forall x \in A \; \exists!\, y \in B \; : \; f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B \; \exists!\, x \in A \; : \; f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists \; f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

$f^{-1} : B \to A$ ist ebenfalls bijektiv und

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Die Verkettung von f und f^{-1} bildet die Identität. Hier gilt dann auch

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = Id(x) = x$$

(ohne Beweis)

Man berechnet die Umkehrfunktion von f, indem man $y = f(x)$ nach x auflöst und dann y durch x vertauscht. Die Umkehrabbildung nennen wir dann $f^{-1}(x)$.

Wenn eine Funktion bijektiv ist so ist sie auch umkehrbar. Das heißt aber noch lange nicht, dass wir die Gleichung $y = f(x)$ ohne Weiteres nach x auflösen können. In diesen Fällen definieren wir einfach einen Namen für die Umkehrabbislung.

Beispiel 32

Wir berechnen nun die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2 + 4x - 3$. Erst lösen wir nach x auf:

$$y = x^2 + 4x - 3 = (x+2)^2 - 7 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = y + 7 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| = \sqrt{y+7}$$

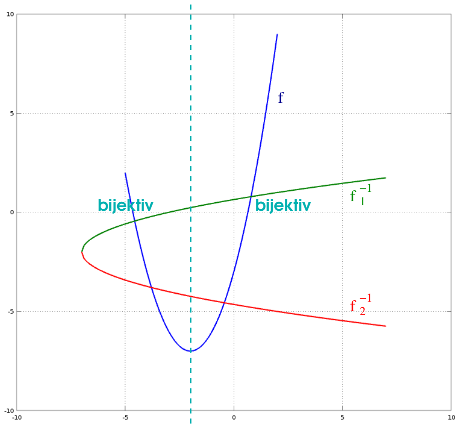
Durch das Wurzel ziehen erhalten wir die Betragsstrichen und gehen weiter mit einer Fallunterscheidung.

$\Rightarrow$

$$x = \begin{cases} \sqrt{y+7}-2 & \text{für} \quad x \geq -2 \\ -\sqrt{y+7}-2 & \text{für} \quad x < -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{y+7}-2$$
$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{y+7}-2$$



Geometrische Interpretation:

Die Grafen von f und f^{-1} liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$. (Siehe Abbildung 6)

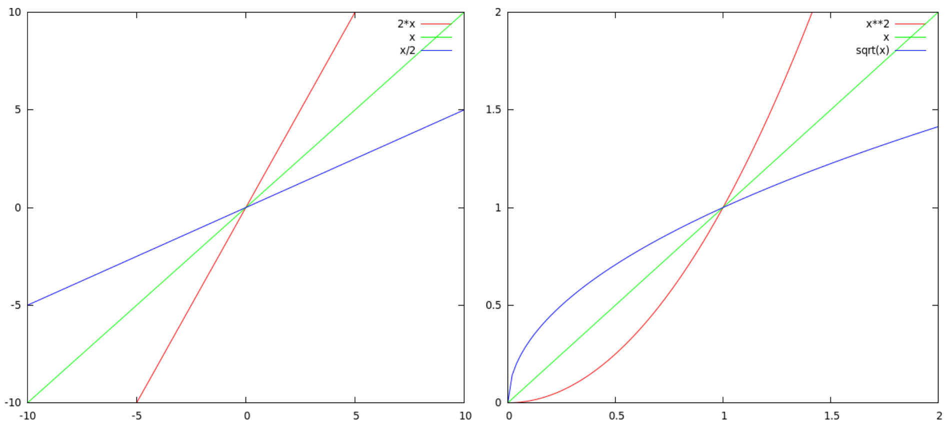


Abbildung 6: Grafen von Funktionen und deren Umkehrfunktionen

Wenn wir nun in f ein x einsetzen und das resultierende y wieder in f^{-1} einsetzen so erhalten wir das ursprüngliche x zurück. Wenn nicht haben wir etwas falsch gemacht. Dieses Hintereinanderausführen von Funktionen können wir elegant durch die Verkettung von Funktionen beschreiben.

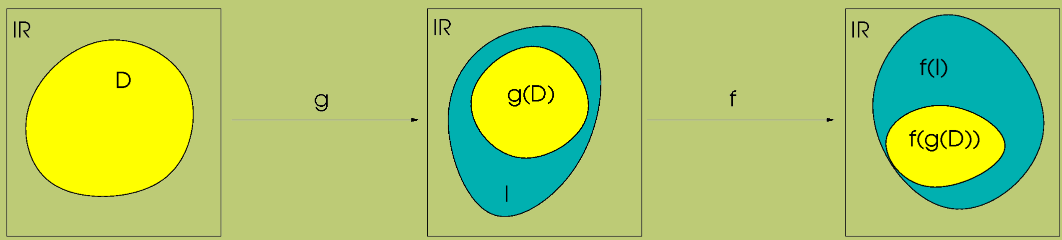
Der hochgestellte Index -1 bei der Beschreibung der Umkehrfunktion ist nicht zu verwecheln mit der Kehrwertbildung, die auch mit einer hochgestellten -1 versehen wird:

$$f(x) = 2\,x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x \quad \text{und} \quad f(x)^{-1} = \frac{1}{2\,x}$$

Sehen Sie den Unterschied?

Definition 2.11 (Komposition/Verkettung von Funktionen) *Durch* $f : I \to \mathbb{R}$ *und* $g : D \to \mathbb{R}$ *mit* $g(D) \subseteq I$ *kann man die Komposition/Verkettung* $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ *bilden. Sie ist definiert durch*

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) .$$



Beispiel 33

Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17$$

und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22 .$$

Es gilt die Kommutativität für die $\circ$-Operation zwischen Funktionen f und deren Umkehrabbildung f^{-1}:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$$

Für beliebige Funktionen g und f gilt dies nicht im Allgemeinen:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Beispiel 34

Die Verkettung von f und f^{-1} aus dem Beispiel zu Beginn des Kapitels führt dann auf

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}2x = x$$

oder auch

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) = 2\frac{1}{2}x = x .$$

Besondere Vorsicht ist geboten bei der Klammerung von verketteten Ausdrücken oder vielmehr dabei, wenn Sie nicht klammern:

Beispiel 35

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\mathrm{e}^{\left(x^2\right)}\right) &= \sin \mathrm{e}^{x^2} \\
\left((\sin \mathrm{e})^x\right)^2 &= \left((\sin \mathrm{e})^x\right)^2 \\
(\sin \mathrm{e})^{\left(x^2\right)} &= (\sin \mathrm{e})^{x^2} \\
(\sin(\mathrm{e}^x))^2 &= \sin(\mathrm{e}^x)^2 = \sin^2(\mathrm{e}^x) = \sin^2 \mathrm{e}^x \neq \sin \mathrm{e}^{x^2}
\end{aligned}
$$

Generell gilt: Lieber eine Klammer zu viel als zu wenig platzieren.

Wir wissen also, dass Funktionen umkehrbar sind, wenn sie bijektiv resp. injektiv sind. An die Umkehrfunktion kommt man dann heran, wenn man $y = f(x)$ nach x auflöst. Soweit so gut aber das geht nicht immer. Betrachten wir einmal die auf ganz $\mathbb{R}$ bijektive Funktion

$$f(x) = a^x ,$$

($a > 0$). Wie löst man

$$y = a^x$$

nach x auf? Ja, da ist guter Rat teuer. Geht so ohne weiteres nicht. Wir wissen aber, dass es eine Umkehrabbildung gibt, haben aber keinen Namen dafür. Also definieren wir uns einen:

$$x = \log_a y$$

Genau. Die Logarithmusfunktion . Kennen Sie schon nicht wahr? Es wurde an dieser Stelle also ein Funktionsname an eine Funktion vergeben, von der wir wissen, dass sie ein sinnvoller Ausdruck ist. Damit man dann auch damit rechnen kann müssen noch Rechenregeln erklärt werden.

Rechenregeln für Exponential– und Logarithmusfunktionen: Es seien $a, b > 0$:
Exponentialfunktion:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{-x} = \tfrac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1$$

$$p \cdot a^x + q \cdot a^x = (p+q) \cdot a^x \qquad \tfrac{a^x}{b^x} = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarithmusfunktion:

$$\log_a(b^n) = n \log_a(b) \quad \Rightarrow \quad \log_a \tfrac{1}{b} = -\log_a(b)$$

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \Rightarrow \quad \log_a \tfrac{b}{c} = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Basiswechsel:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Notation:

$$\log b := \log_{10} b \qquad \text{und} \qquad \ln b := \log_{\mathrm{e}} b$$

Beweis von Satz ?? auf Seite ??.

Beispiel 36

(a)

$$\log_a a = 1 \quad \text{denn} \quad a^1 = a\,.$$

(b)

$$\log_3 81 = \log_3(3^4) = 4 \log_3 3 = 4$$

(c)

$$\log_2 \frac{8}{16} = \log_2 8 - \log_2 16 = 3 - 4 = -1$$

(d)

$$\log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1$$

Beispiel 37

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{und} \quad \log_a a^x = x$$

Auf dem Taschenrechner stehen der dekadische Logarithmus ($\log$) und der natürliche Logarithmus zur Basis e ($\ln$) zur Verfügung. Häufig muß man aber Logarithmen zu anderen Basen als 10 oder e berechnen. Das machen wir dann mit dem Basiswechsel.

Beispiel 38

Wie löst man

$$(1.2)^x = 3.4$$

nach x auf, wenn der Taschenrechner den Logarithmus zur Basis 1.2 nicht hergibt? Wir wechseln einfach die Basis, so dass wir Logarithmendarstellungen haben, die wir dann auch berechnen können und erhalten tatarata:

$$\log_{1.2} 3.4 = \frac{\log 3.4}{\log 1.2} \approx 6.71218178...$$

Im Hinblick auf die Invertierbarkeit der Trigonometrischen Funktionen sind diese auf Bijektivität zu prüfen. Betrachten wir alle Funktionen eingeschränkt auf ihren Definitionsbereich und den entsprechend zugehörigen Bildmengen so stellen wir fest, dass zwar alle Trigonometrischen Funktionen surjetiv, nicht aber injektiv sind. Für jede dieser Funktionen kann aber ein Teilintervall im Definitionsbereich bestimmt werden, auf den eingeschränkt die Funktion dann auch injektiv, also insgesamt bijektiv und in diesem Bereich dann invertierbar ist. Abbildung ?? soll diesen Sachverhalt verdeutlichen.

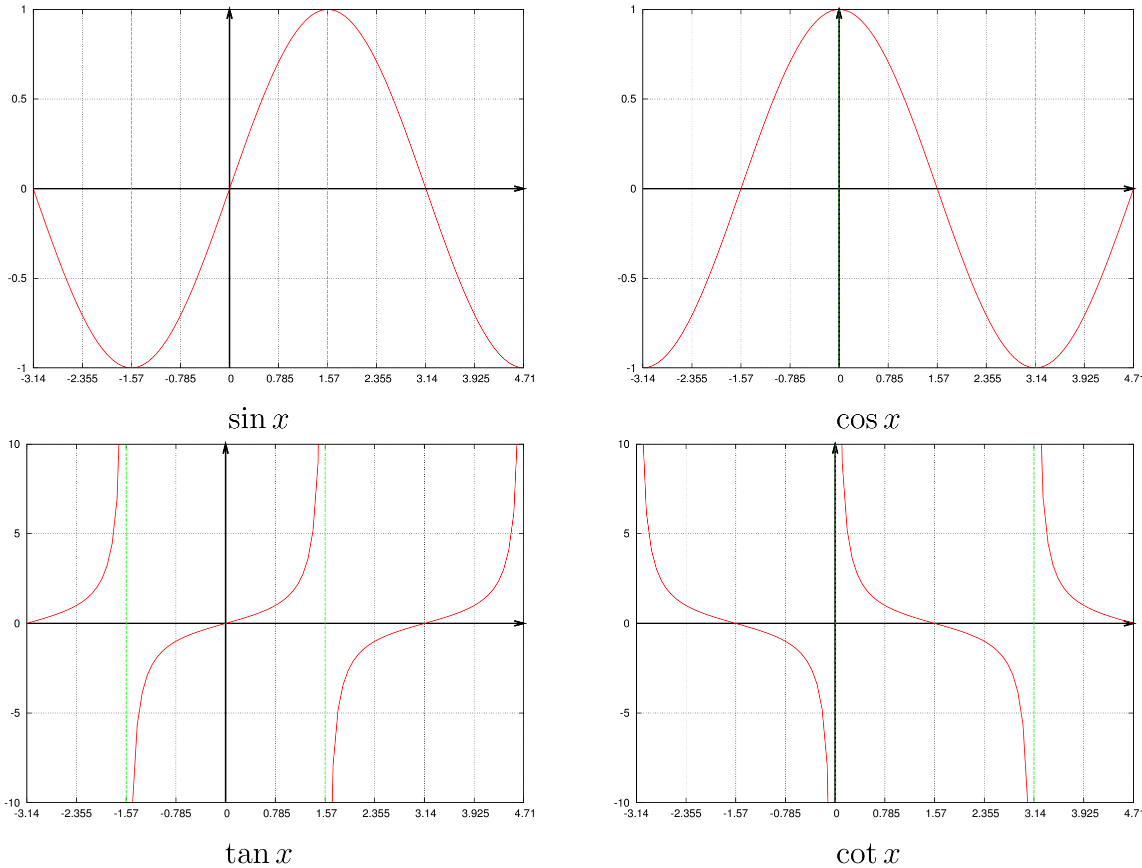


Abbildung 7: Abschnitte in denen die Trigonometrischen Funktionen bijektiv sind

Definition 2.12 (Arkusfunktionen) *Die Abbildungen*

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \qquad \cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \qquad \cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$$

sind bijektiv. Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen heißen Arkusfunktionen und lauten

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

Es gibt unendlich viele Intervalle, auf die eingeschränkt die Sinusfunktionen bijektiv sind. Die, in Definition 2.12 angegebenen, sind konventionell festgelegt und darüber sind die Arkusfunktionen definiert. Sie werden diese und keine anderen Umkehrfunktionen in Ihrem Taschenrechner vorfinden.

Eine grafische Darstellung der Umkehrfunktionen ist in Abbildung ?? gegeben.

″

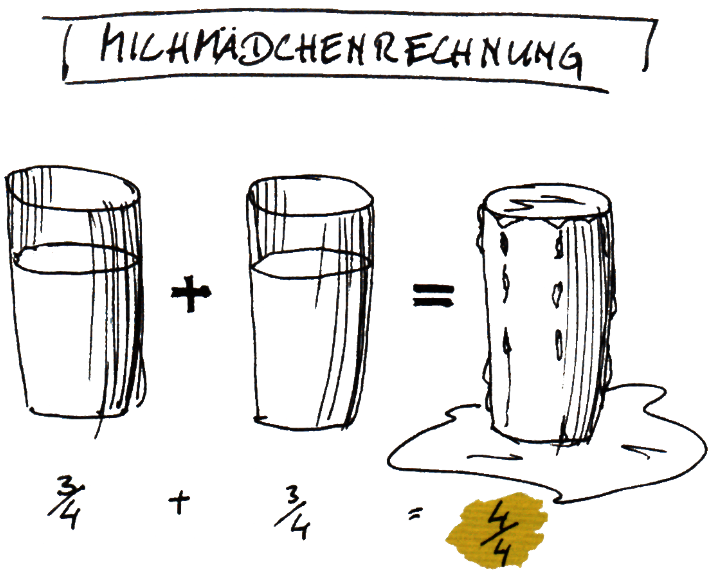
''''

Differenzieren
... ist ein Handwerk

3

Wir behandeln:

- Ableitungen der elementaren Funktionen
- Ableitung von Umkehrabbildungen
- Ableitungsregeln für alle Kombinationsmöglichkeiten von elementaren Funktionen
- Ableitungen von diskreten Funktionen & Implementierung



Ausgehend von der Differentiation der elementaren Funktionen werden wir die Rechenregeln zur Differentiation aller Kombinationsmöglichkeiten von Funktionen kennenlernen. Am Ende werden wir in der Lage sein, alles differenzieren zu können, was differenzierbar ist. Die Definition der Differenzierbarkeit als Eigenschaft einer Funktion und der Ableitung der einer Funktion gehen Hand in Hand in folgender Definition:

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit) *Eine Funktion $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als die Ableitung von f im Punkt x.
Notation:

$$f'(x)\,,\ \underbrace{\frac{d}{dx}\,f(x)\,,\ \frac{df}{dx}(x)\,,\ \frac{df}{dx}}_{\text{Leibnizsche Symbolik}}$$

Die Vorgehensweise ist nun diese, dass wir uns zunächst die Ableitung der elementaren Funktionen anschauen:

Potenzfunktionen

$$p(x) = x^r \qquad p'(x) = r\,x^{r-1} \qquad p''(x) = r\,(r-1)\,x^{r-2} \qquad \cdots \qquad p^{(r)}(x) = r!$$

Exponentialfunktionen

$$u(x) = a^x \qquad u'(x) = a^x\ \ln a \qquad p''(x) = a^x\ \ln^2 a \qquad \cdots \qquad u^{(n)}(x) = a^x\ \ln^n$$

trigonometrische Funktionen

$$v(x) = \sin x \qquad v'(x) = \cos x \qquad v''(x) = -\sin x \qquad \cdots$$

$$v^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für} \quad k = 4\,m \\ \cos x & \text{für} \quad k = 4\,m+1 \\ -\sin x & \text{für} \quad k = 4\,m+2 \\ -\cos x & \text{für} \quad k = 4\,m+3 \end{cases}$$

Wir werden Rechenregeln für Summe/Differenz, Produkt/Quotient, Verkettung und Umkehrabbildung von Funktionen kennenlernen. Da sich alle Funktionen als Summe/Differenz, Produkt/Quotient, Verkettung und Umkehrabbildung der elementaren Funktionen darstellen lassen können wir am Ende alles differenzieren was grundsätzlich differenzierbar ist.

Wir kümmern uns zunächst nur um das WIE wird abgeleitet und erst am Ende noch einmal kurz um das OB eine Funktion differenzierbar, bzw. stetig differenzierbar ist und was das genau bedeutet.

3.1 Potenzfunktionen und Ableitung von Summe/Differenz von Funktionen

Satz 3.2 (Ableitung von Potenzfunktionen)

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis für $r \in \mathbb{N}$ auf Seite 139

Beispiel 39 Potenzfunktion: Monome ableiten

(a)

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

(b)

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

Beispiel 40 Potenzfunktion: Wurzelfunktionen ableiten

(a)

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

(b)

$$\left(\sqrt[4]{x}^5\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}\,x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}\,x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\,\sqrt[4]{x}$$

Beispiel 41 Potenzfunktion: allgemein

$$(x^\pi)' = \pi\,\left(x^{\pi-1}\right)$$

Satz 3.3 (Linearität des Ableitungsoperators) *Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$(\alpha\,f(x) + \beta\,g(x))' = \alpha\,f'(x) + \beta\,g'(x)$$

Beweis auf Seite 140

Damit können wir bereits alle Polynome ableiten, denn die Ableitung einer LInearkombination von Monomen ist die Linearkombination der Ableitung der Monome. Klar? :)

Ein paar Beispiele:

Beispiel 42 Polynomableitung

(a)

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

(b)

$$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\ \left(x^5\right)' + 3\ \left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

(c)

$$\begin{aligned}
\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x}^8 + 4\right)' &= -\left(x^{\frac{4}{5}}\right)' + 3\,\left(\sqrt[3]{x}^8\right)' + (4)' \\
&= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{4}{5}-1} + 3\,\left(x^{\frac{8}{3}}\right)' \\
&= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}} + 3 \cdot \frac{8}{3}\,x^{\frac{5}{3}} \\
&= -\frac{4}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + 8\,\sqrt[3]{x}^5
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x}^8 + 4\right)'' &= \left(-\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}} + 8\,x^{\frac{5}{3}}\right)' \\
&= \frac{4}{25}\,x^{\frac{-6}{5}} + \frac{40}{3}\,x^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{4}{25\,x^{\frac{5+1}{5}}} + \frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^2 \\
&= \frac{4}{25\,x \cdot x^{\frac{1}{5}}} + \frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^2 \\
&= \frac{4}{25\,x\,\sqrt[5]{x}} + \frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^2
\end{aligned}$$

3.2 Sinusfunktionen und Ableitung von Produkt/Quotient von Funktionen

Satz 3.4 (Ableitung der Sinusfunktion)

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

Beweis auf Seite 141

Beispiel 43

$$\left(2\,\sin x + \frac{\pi}{2}\,\cos x\right)' = 2\,\sin' x + \frac{\pi}{2}\,\cos' x = 2\,\cos x - \frac{\pi}{2}\,\sin x$$

Satz 3.5 (Produktregel)

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Beweis auf Seite 142

Beispiel 44

(a)

$$\begin{aligned}
&\left(\left(x^2+2\,\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3\,x+\frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= \left(x^2+2\,\sqrt{x}\right)'\cdot\left(-3\,x+\frac{1}{x}\right) + \left(x^2+2\,\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3\,x+\frac{1}{x}\right)' \\
&= \left(x^2+2\,x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\left(-3\,x+\frac{1}{x}\right) + \left(x^2+2\,\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3\,x+x^{-1}\right)' \\
&= \left(2\,x+x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-3\,x+\frac{1}{x}\right) + \left(x^2+2\,\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3-x^{-2}\right) \\
&= \left(2\,x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(-3\,x+\frac{1}{x}\right) + \left(x^2+2\,\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3-\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(\sin x \cdot \cos x)' &= \sin' x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos' x \\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

Satz 3.6 (Quotientenregel)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis auf Seite 142

Beispiel 45 Quotientenregel für trigonometrische Funktionen und gemischte Ausdrücke

(a)

$$\begin{aligned}\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\tan' x &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\frac{1}{2}\, x^2 + 2\, x}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\left(\frac{1}{2}\, x^2 + 2\, x\right)' \sqrt{x} - \sqrt{x}' \left(\frac{1}{2}\, x^2 + 2\, x\right)}{\sqrt{x}^2} \\ &= \frac{(x+2)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}^{-1}\left(\frac{1}{2}\, x^2 + 2\, x\right)}{x}\end{aligned}$$

noch ein wenig Termvereinfachung zur Übung

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left((x+2)\,x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,x^2 + 2\,x\right)\right)}{x} \\
&= \frac{x^2 + 2\,x - \frac{1}{4}\,x^2 - x}{x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}\,x^2 + x}{x^{1+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{3}{4}\,x + 1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}\,x + 1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

(c)

$$\left(\frac{x^3 - 10\,x}{\cos x}\right)' = \frac{(3\,x^2 - 10)\ \cos x + (x^3 - 10\,x)\ \sin x}{\cos^2 x}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tan x}{\sin x}\right)' &= \frac{(1 + \tan^2 x)\sin x - \tan x\ \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{(1 + \tan^2 x)\sin x - \sin x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\tan^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\tan x}{\cos x}
\end{aligned}$$

... lustig, oder?

3.3 Kettenregel und Ableitung der Umkehrabbildung

Bevor wir uns mit den Ableitungsberechungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen beschäftigen richten wir unser Augenmerk auf zwei sehr wichtige Ableitungsregeln, nämlich die sogenannte Kettenregel und die Regel zur Ableitung der Umkehrabbildung.

Es empfiehlt sich, die Kettenregel sehr gut zu verstehen und auch fehlerfrei anzuwenden, da sie in der Praxis häufig auftritt. Sie verschafft uns die Möglichkeit Funktionen abzuleiten, die aus der Komposition von mehreren Funktionen besteht, deren Ableitung wir bereits kennen.

Die Ableitungsregel für Umkehrabbildungen erlaubt es uns Funktionen abzuleiten, die nur darüber definiert sind, dass sie eine Umkehrabbildung zu einer bijektiven Funktion ist. Beispielsweise wissen wir über den Arkussinus lediglich, was der Definitions- und Bildbereich ist und dass es die Umkehrung der Sinusfunktion darstellt. Das war's. Wie soll man sowas ableiten? Naja, eben mit der "Ableitung der Umkehrfunktion" (Diese Regel hat eigentlich einen schnittigeren Namen verdient.)

Wir starten mit der

Satz 3.7 (Kettenregel)

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Wir sprechen beim Term $g'(x)$ auch vom "Nachdifferenzieren".

Beweis auf Seite 143

Beispiel 46

(a) Fragestellung:

$$\sin(2\,x)' = ?$$

Es ist

$$f(x) = \sin x \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2\,x$$

Die Ableitungen leiten jeweils

$$f'(x) = \cos x \qquad \text{und} \qquad g'(x) = 2\,.$$

Im Ausdruck

$$f'(g(x))$$

benötigen wir die Ableitung von f, ausgewertet bei $g(x)$. Es gilt dann also weiter

$$f'(g(x)) = \cos g(x) = \cos(2\,x)$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned} \sin(2\,x)' &= \sin'(2\,x)\,(2\,x)' \\ &= \cos(2\,x)\,2\,. \end{aligned}$$

(b) Es ist also:

$$\sin(2\,x)' = 2\,\cos x$$

und

$$\sin'(2\,x) = \cos(2\,x)\,.$$

(c) Oder wie sieht es aus mit

$$\sin(\cos(x))'\,?$$

Es sei

$$f(x) = \sin x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \cos x$$

mit
$$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \qquad \text{und} \qquad g'(x) = -\sin x\,.$$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\cos(x))' &= f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)\\ &= -\cos(\cos x)\,\sin x\end{aligned}$$

(d)
$$|x|' =?$$
Es ist ja
$$|x| = \sqrt{x^2}\,.$$
Also ist die Betragsfunktion die Komposition der Quadratfunktion x^2 und der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$. Mit
$$\left(x^2\right)' = 2\,x \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\,.$$
Insgesamt erhalten wir dann
$$|x|' = \sqrt{x^2}' = \frac{1}{2\,\sqrt{x^2}}\,2\,x = \frac{x}{|x|}\,,\ x \neq 0\,.$$

Die Kettenregel kann man auch auf mehrfach verkettete Funktionen anwenden. Die Regel wird einfach sukkzessive fortgesetzt:

$$(f\circ v\circ w\circ p)'(x) = f(v(w(p(x))))' = f'(v(w(p(x))))\,v'(w(p(x)))\,w'(p(x))\,p'(x)$$

In der Leibnizschen Symbolik/Notation erhält der Ausdruck einen bestechend suggestiven Charakter:

$$\frac{d}{dx}\,(f\circ v\circ w\circ p)(x) = \frac{d}{dx}\,f(v(w(p(x))))' = \frac{d}{dv}\,f(v)\,\frac{d}{dw}\,v(w)\,\frac{d}{dp}\,w(p)\,\frac{d}{dx}\,p(x)$$

Oder auch ganz kurz:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}\,\frac{dv}{dw}\,\frac{dw}{dp}\,\frac{dp}{dx}$$

Folgerung: Kettenregel bei mehrfacher Verkettung *Es sei $\tilde{f}$ die Verkettung der n Funktionen $f_1,\ldots,f_n$:*

$$\tilde{f}(x) = \left(\bigcirc_{k=1}^{n} f_k\right)(x) = (f_1\circ\cdots\circ f_n)\,(x)$$

Dann gilt

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{df_k}{df_{k+1}} \frac{df_n}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \frac{df_2}{df_3} \cdots \frac{df_{n-1}}{df_n} \frac{df_n}{dx}$$

Beispiel 47 Königsetappe

(a)

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{p(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

$\Rightarrow$

eine Sinusfunktion	$s(x) = -\sin x$
eine Exponentialfunktion	$f(x) = \mathrm{e}^x$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{p(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = f(p(x)) \cdot \mathrm{e}^{s(v(x))} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Wir benötigen später die Ableitungen aller beteiligter Funktionen. Machen wir das schon mal:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= x \\
v'(x) &= -x^{-2} \\
s'(x) &= \cos x & s'(v(x)) &= \cos\frac{1}{x} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^x & f'(p(x)) &= \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4} \\
& & f'(s(v(x))) &= \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Das können wir nun ableiten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(p(x))\cdot f(s(v(x)))\right) &= \frac{d}{dx}\left(f(p(x))\right)\cdot f(s(v(x))) + f(p(x))\cdot \frac{d}{dx}\left(f(s(v(x)))\right)\\
&= f'(p(x))\,p'(x)\cdot f(s(v(x)))\\
&\quad + f(p(x))\cdot f'(s(v(x)))\,s'(v(x))\,v'(x)\\
&= \mathrm{e}^{p(x)}\,x\cdot \mathrm{e}^{s(v(x))}\\
&\quad + \mathrm{e}^{p(x)}\cdot \mathrm{e}^{s(v(x))}\,\cos(v(x))\,\frac{1}{x^2}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}\,x\cdot \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}\\
&\quad + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}\cdot \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also Folgendes berechnet:

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}\left(x+\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \tag{2}$$

Die Rechnung war jetzt sehr aufwendig. Wenn man aber etwas Übung hat kann man solch eine Ableitung auch direkt hinschreiben. Ehrlich!

Es ist auch die Wahl der beteiligten Funktionen und die entsprechende "Verkettungsart" nicht eindeutig:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(u(x))\,,\ u(x) = p(x)+s(v(x))$$

wäre auch eine Möglichkeit gewesen. Die Ableitung ist dann (ohne Produktregel jetzt):

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}\right)' &= f(p(x)+s(v(x)))'\\
&= f'(p(x)+s(v(x)))\,(p'(x)+s(v(x))')\\
&= f'(p(x)+s(v(x)))\,(p'(x)+s'(v(x))\,v'(x))
\end{aligned}$$

Wenn Sie nun die entsprechenden Terme wieder einsetzen erhalten Sie den gleichen Ausdruck wie in (2).

Satz 3.8 (Ableitung der Umkehrabbildung)

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beweis auf Seite 144

Beispiel 48 Ableitung der Umkehrabbildung Sei $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Dann gilt:

$$f'(x) = 2\,x \qquad \text{und} \qquad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x}$$

und damit ist dann

$$f^{-1}(x)' = \sqrt{x}' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Wir können es auch direktberechnen:

$$\sqrt{x}' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Interessant ist diese Formel wenn die Umkehrabbildung in geschlossener Form gar nicht vorhanden ist, wie es etwa beim Arkussinus der Fall ist.

Beispiel 49 Ableitung der Arkussinusfunktion

$$\arcsin{}'x = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Der Ausdruck $\cos(\arcsin(x))$ ist etwas unhandlich. Wir wollen diesen umofrmulieren. Dazu gibt es einen schönen Trick:

Es ist doch $\cos^x + \sin^2 x = 1$. Dann gilt doch auch

$$\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1\,.$$

Da $\sin^2(\arcsin(x)) = (\sin(\arcsin(x)))^2 = x^2$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} & \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Tjaha, jetzt müssen wir nur noch kurz überlegen, welches Vorzeichen der Wurzelausdruck erhalten soll. Mit Definition 2.12 wissen wir, dass

$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und da

$$\cos\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$$

ist, kommt ein negatives Vorzeichen gar nicht in Frage. Es gilt demnach

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

und damit insgesamt

$$\arcsin{}' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin{(x)})} = \frac{1}{\cos(\arcsin{(x)})} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Im folgenden Unterkapitel werden wir mit der Formel in Satz 3.8 die Ableitung der Logarithmusfunktion, als Umkehrabbildung der Exponentialfunktion herleiten können.

3.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen ableiten

Satz 3.9 (Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion)

$$(a^x)' = a^x \ \ln a$$

$$\log_a x' = \frac{1}{x \ \ln a}$$

Beweis auf Seite 144

Beispiel 50 Ableitung von Exponentialfunktionen

(a)

$$(4^x)' = 4^x \ \ln 4$$

(b)

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \ \ln \mathrm{e} = \mathrm{e}^x$$

(c)

$$\left(\frac{1}{5}\,2^x\right)' = \frac{1}{5}\,(2^x)' = \frac{\ln 2}{5}\,2^x$$

(d)

$$\left(3\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\,5^x\right)' = 3\,\mathrm{e}^x - \frac{\ln 5}{4}\,5^x$$

(e)

$$(8^{-x})' = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{8}\right)^x \ \ln\frac{1}{8} = -8^{-x} \ \ln 8 = -8^{-x}\,3 \ \ln 2$$

(f)

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

Wir zerlegen in die Komposition

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{x}\,,$$

wofür Folgendes gilt:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

und folglich

$$f'(g(x)) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,.$$

Wir erhalten dann

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\,\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\,\sqrt{x}}\,.$$

Es sei $g'(x) \neq 1$. Dann gilt

$$f'(g(x)) \neq f(g(x))'\,.$$

Ist Ihnen das klar? ;-)

Beispiel 51 Ableitung von Logarithmusfunktionen

(a)

$$\log_3 x' = \frac{1}{x\,\ln 3}$$

(b)

$$\ln\left(x^2\right)' = \frac{1}{x^2}\,2\,x = \frac{2}{x}$$

(c)

$$\ln'\left(x^2\right) = \frac{1}{x^2}$$

(d)

$$\ln x' = \frac{1}{x}$$

(e)

$$\ln(a\,x)' = \frac{1}{a\,x}\,a = \frac{1}{x}$$

Bei mehrfachen Ableitungen wiederholen wir die Ableitungsoperation entsprechend:

Satz 3.10 Ableitungen höherer Ordnung *Die Ableitung n-ter Ordnung erhalten wir durch die Ableitung $n-1$-ter Ordnung, diese wiederum durch die Ableitung $n-2$-ter Ordnung, usw. Der Prozess wird sukkzessive fortgeführt bist zur ersten Ableitung:*

$$\frac{d^n f}{d^n x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{d^{n-1} x}\right), \quad n \geq 1$$

Beispiel 52 Ableitungen höherer Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x^2 &= (\cos x^2)' \\
&= -2\,x\,\sin x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\cos x^2 &= (\cos x^2)'' \\
&= (-2\,x\,\sin x^2)' \\
&= -2\,\sin x^2 - 4\,x^2\,\cos x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\cos x^2 &= \left(\cos x^2\right)''' \\
&= (-2\,x\,\sin x^2)'' \\
&= (-2\,\sin x^2 - 4\,x^2\,\cos x^2)' \\
&= (-2\,\sin x^2)' - (4\,x^2\,\cos x^2)' \\
&= -4\,x\,\cos x^2 - (8\,x\,\cos x^2 - 8\,x^3\,\sin x^2) \\
&= -12\,x\,\cos x^2 + 8\,x^3\,\sin x^2
\end{aligned}$$

Funktionen, die m mal differenzierbar sind und deren Ableitungen bis zur Ordnung m in Ω stetig sind heißen m-mal stetig differenzierbar . Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir kurz mit

$$C^m(\Omega) := \{f \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \mid f^{(m)} \in C^0(\Omega)\}\,.$$

Notation: C^m ohne Argument bezieht sich auf ganz $\mathbb{R}$.

Es ist durchaus möglich, dass eine Funktion zwar differenzierbar ist, die Ableitung aber nicht stetig, womit die Funktion dann nicht stetig differenzierbar ist.

Zusammenfassung

Potenzfunktion		Spezialfälle	
$(x^r)' = r\,x^{r-1}$		$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-q}{q}}$ $(1)' = 0$	
Exponential- und Logarithmusfunktion			
$(a^x)' = a^x\ \ln a$	$\log_a' x = \frac{1}{x\,lna}$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\ln' x = \frac{1}{x}$
trigonometrische Funktion			
$\sin' x = \cos x$	$\cos' x = -\sin x$	$\tan' x = 1 + \tan^2 x$	

Linearität der Ableitung
$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$
Produktregel
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
Quotientenregel
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
Ableitung der Umkehrabbildung
$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
Kettenregel
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

3.5 Ableitung von diskreten Funktionen und Anwendungen

Es eine Funktion $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch deren Auswertung an Stellen $x_i \in I$ gemäß:

$$\overline{u}_i = u(x_i)$$

Wir stellen uns dabei eine Zerlegung des Intervalls I in N Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ vor, so dass

$$I = \bigcup_{i=1}^{N-1} [x_i, x_{i+1}]$$

$\underline{-a^2 \sin^2} + \underline{a^2 \cos^2 - a^2 \sin}$

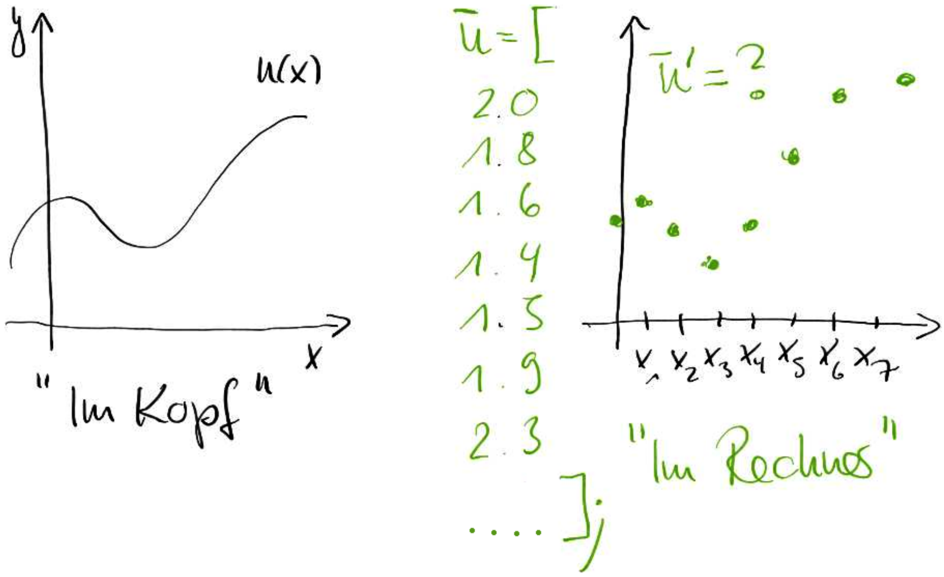


Abbildung 9: kontinuierliche und diskrete Funktion

gilt und den Vektor mit Funktionswerten von u nennen wir

$$\overline{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N .$$

Zur Veranschaulichung siehe Abb. 9.

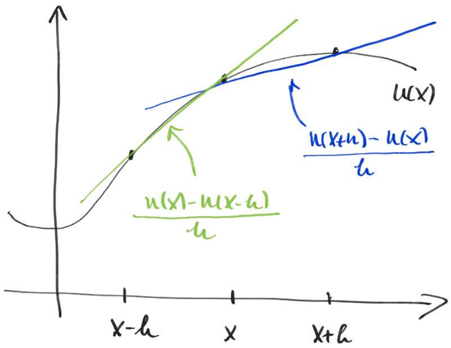
Beispiel 53 Soweit können Sie das schon mal implementieren. Zum Beispiel für $u(x) = \sin(2\,\pi\,x)$.

```
I = [0,1];                    % waehlbar
N = 10;                       % waehlbar

%% ab hier stellt sich alles automatisch ein
h = (I(2)-I(1))/(N-1);        % Gitter-/Schrittweite
func = @(x) sin(2*pi*x);      % kontinuierliche Funktion

x   = I(1):h:I(2);            % Feld x
u   = func(x);                % diskrete Funktion

plot(x,u,'k-');
```

Source/src/DiskreteAbleitung1.m

Abbildung 10: Initialisierung einer diskreten Funktion

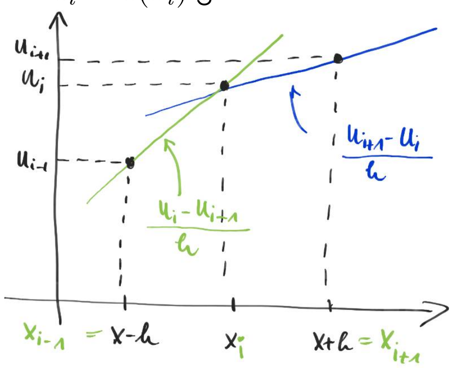
Ableitung haben wir über den Limes - so er existiert - des Differenzenquotienten erklärt. Bei diskreten Funktionen geht das so nicht mehr. Will man dennoch mit Ableitungsbegriffen arbeiten so bleibt uns nichts anderes übrig als wieder auf den Differenzenquotienten zurückzugreifen. Den Differenzenquotienten der kontinuierlichen Funktion u



$$\begin{aligned} u'(x) &\approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{vorwärst} \\ &\approx \frac{u(x)-u(x-h)}{h} && \text{rückwärst} \\ &\approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2\,h} && \text{gemittelt} \end{aligned}$$

können wir direkt übertragen auf den den Differenzenquotienten von $\overline{u}$, wobei wir dann noch die Freiheit haben, zwischen vorwärts-, rückwärts- und gemitteltem Quotienten zu wählen:

Für die Zerlegung $I = [0,1] = \bigcup_{i=1}^{N-1}[x_i, x_{i+1}]$ und die diskrete Funktion $u = (u_1, \ldots, u_N)$ mit $u_i = u(x_i)$ gilt



$$\begin{aligned} u_i' &\approx \frac{u_{i+1}-u_i}{h} && \text{vorwärst} \\ &\approx \frac{u_i-u_{i-1}}{h} && \text{rückwärst} \\ &\approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\,h} && \text{gemittelt} \end{aligned}$$

Beim Vorwärtsdifferenzenquotient lassen wir mal den letzten, beim Rückwärtsdifferenzenquotient den letzten Wert aus. Beim gemittelten wählt man gerne für den ersten Knoten alternativ den Vorwärts- und beim letzten dann den Rcükwärtsdifferenzenquotient.

Der Algorithmus in Abb. 11 liefert dann für $N = 10$ und $N = 100$ die Graphiken in Abb. 12.

An dieser Stelle wäre es interessant, sich über die Approimationsgüte Gedanken zu machen aber das ist dann doch eher Teil der Numerik. Sie können aber sicher sein, dass die diskreten Ableitungen, egal welche Variante davon, für $h \to 0$ gegen die kontinuierliche Ableitung konvergiert, sofern wir es mit einer differenzierbaren Funktion u zu tun haben.

Wir wollen nun noch eine Variante der Berechnung der diskreten Ableitung kennenlernen, nämlich über die Darstellung in Matrix-Vektor-Form. Jaja. Das ist keine Schikane - ich weiß, dass es Ihnen Spass machen wird - sondern hat nachher noch einen praktischen Nutzen.

```
I = [0,1];
N = 10;
h = (I(2)-I(1))/(N-1);
func = @(x) sin(2*pi*x);
dfunc = @(x) 2*pi*cos(2*pi*x);

%%
x    = I(1):h:I(2);
u    = func(x);
d1u = dfunc(x); % exakte/kontinuierliche erste Ableitung

%% erste Ableitung (vorwaerts, rueckwaerts und gemittelt)
duv = zeros(1,N); dur = zeros(1,N); dum = zeros(1,N);
for i=1:N
    if i<N; duv(i) = (u(i+1)-u(i))/h; end
    if i>1; dur(i) = (u(i)-u(i-1))/h; end
    if i<N & i>1; dum(i) = (u(i+1)-u(i-1))/2/h; end
end

%%
plot(x,u,'k-',x,d1u,'k-');
hold on
grid on
plot(x(2:N-1),duv(2:N-1),'r-');
plot(x(2:N-1),dur(2:N-1),'b-');
plot(x(2:N-1),dum(2:N-1),'m-');
```

Source/src/DiskreteAbleitung2.m

Abbildung 11: diskrete erste Ableitung, Variante 1

Nun, die Fragestellung kennen Sie aus der Linearen Algebra (lineare Abbildunge in Matrix-Vektorform darstellen). Wie muss die Matrix $D1$ aussehen, so dass $D1 \cdot \overline{u} = \overline{du}$ erfüllt ist? machen Sie sich folgenden Ausdruck klar, indem Sie einige Zeilen nach der Multiplikation exemplarisch herausgreifen:

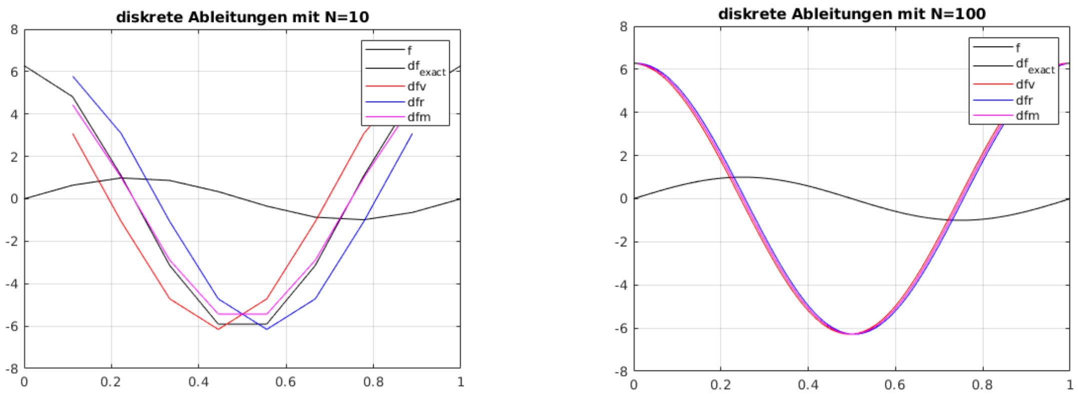


Abbildung 12: Diskrete erste Ableitungen der Funktion $u(x) = \sin(2\,\pi\,x)$

Matrix-Vektor-Darstellung der ersten diskreten Ableitung, gemittelt in den inneren Knoten:

$$\frac{1}{2\,h}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_i \\ \vdots \\ du_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_2-u_1}{h} \\ \vdots \\ \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\,h} \\ \vdots \\ \frac{u_N-u_{N-1}}{h} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{vorwärts} \\ \vdots \\ \text{gemittelt} \\ \vdots \\ \text{rückwärts} \end{matrix}$$

Die Implementierung entnehmen Sie Abb. 13. Darin verbirgt sich noch eine spezielle Matlab-Syntax, mit der sich derartige Matrizen unkompliziert erzeugen lassen, und zwar mit der Funktion `diag`.

`diag` liefert die Diagonale einer Matrix als Vektor, wenn es sich bei der Eingabe um eine Matriz handelt. Etwa so:

`diag([[1 2];[3 4]])` gibt `[1 4]` zurück.

Handelt es sich um einen Vektor als Argument so gibt die Funktion eine Diagonalmatrix zurück, deren Diagonale gerade die Werte des Vektors enthält. Etwa so:

`diag([1 4])` gibt `[[1 0];[0 4]]` zurück.

Mit einem zusätzlichen Eingabeparameter kann man den Vektor auch als Nebendiagonale erklären. So:

> `diag([1 4],1)` gibt `[[0 1 0];[0 0 4];[0 0 0]]` zurück

und

> `diag([1 4],2)` gibt `[[0 0 1 0];[0 0 0 4];[0 0 0 0][0 0 0 0]]` zurück

bzw.

> `diag([1 4],-1)` gibt `[[0 0 0];[1 0 0];[0 4 0]]` zurück

Am besten Sie probieren das einfach mal aus. Jedenfalls kann man wie in Abb. 13 abzulesen ist, die Matrixdarstellung der ersten diskreten Ableitung sehr einfach implementieren.

Natürlich stellt man sich in dieser Situation zwei Fragen: Wozu der Aufwand, und so viele Nullen speichern und auch bei einer Multiplikation verrechnen? Natürlich speichert man in der Praxis nicht die komplette Matrix sondern nur die nicht Null Einträge. Dazu baut man sich eine schlaue Multiplikation, die damit was anfangen kann. Für uns ist das aber im Moment egal. Wir würden da auch anfangen in die Numerik-Vorlesung hineinzukrätschen. Sie dürfen sich leichtfüssig im Glauben wiegen, dass man das schon schlau machen kann. Für uns interessanter ist die zweite Frage, nämlich wozu man das nun brauchen kann. Diese Frage werden wir tatsächlich erst im nächsten Kapitel klären; dann wenn wir auch über Integration sprechen, was ja die Umkehrung der Differentiation ist und Sie ahnen es sicher schon, das hat dann auch was mit der Umkehrung dieser Differentiationsmatrizen zu tun ;-)

Dennoch will ich Ihnen das Vergnügen lassen, bereits zu diesem Zeitpunkt, ein Beispiel aus bekanntem Kontext zu rechnen:

Beispiel 54 diskrete Verteilung

Für die diskrete Verteilungsfunktion (sto, S. 126, nach der Definition "Verteilungsfunktion")

$$\overline{u} = \left(0, \frac{1}{25}, \frac{3}{25}, \frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{15}{25}, \frac{19}{25}, \frac{22}{25}, \frac{24}{25}, 1\right)$$

lässt sich nun mit einer Multiplikation der Matrix zum Vorwärtdifferenzenquotient die zugehörige Verteilung berechnen:

$$\overline{du} = D^0_{1,r} \cdot \overline{u}',$$

wobei

```
I = [0,1];
N = 10;
h = (I(2)-I(1))/(N-1);
func = @(x) sin(2*pi*x);
dfunc = @(x) 2*pi*cos(2*pi*x);

%%
x   = I(1):h:I(2);
f   = func(x);
d1f = dfunc(x);

% erste Ableitung (gemittelt) als Matrix
D1 = diag(ones(N-1,1),1)-diag(ones(N-1,1),-1);
D1(1,1:2) = [-2 2]; D1(N,N-1:N) = [-2 2]; D1 = D1/2/h;

df = D1*f';

%%
plot(x,f,'k-',x,d1f,'o');
hold on
plot(x,df,'r-');
```

Source/src/DiskreteAbleitung3.m

Abbildung 13: diskrete erste Ableitung, Variante 2

$$\left(D^0_{1,r}\right)_{i>1,j} = \left(D_{1,r}\right)_{i>1,j}$$

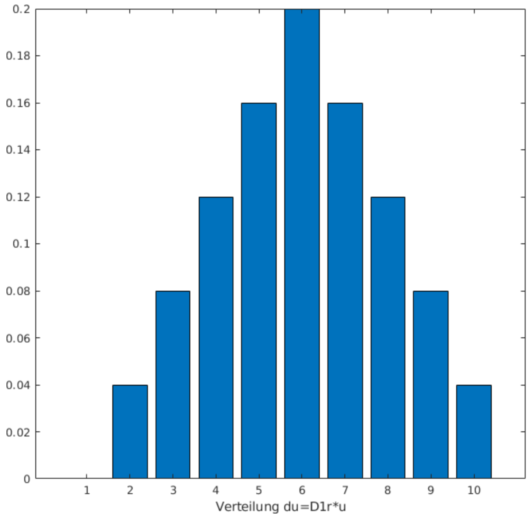
und

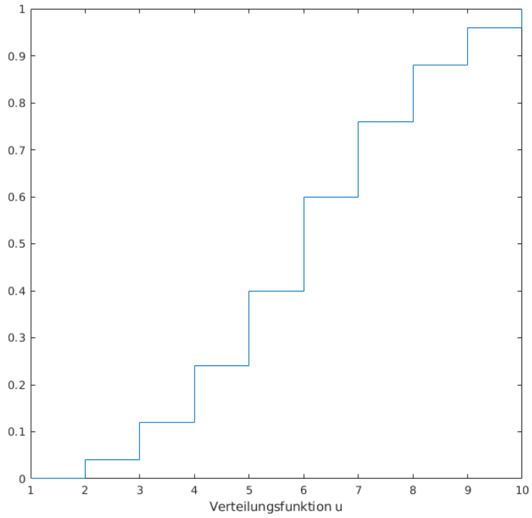
$$\left(D^0_{1,r}\right)_{11} = 1\,.$$

Die erste Zeile war ja zunächst noch eine Nullzeile. Durch diese kleine Variation haben wir

$$du(1) = u(1)$$

festgelegt, was ja auch sinnvoll ist. Es ist überdies üblich, diese "unfertigen" Randzeilen in den Ableitungsmatrizen, schlau zu belegen. Was man macht hängt dann vom jeweiligen Kontext ab.





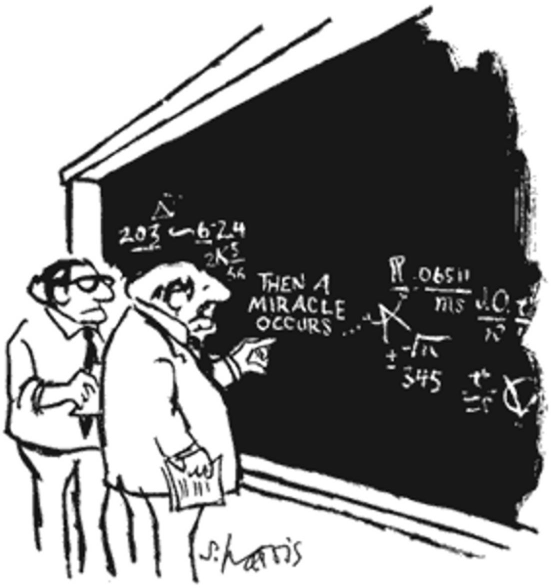
Damit wird auch im Sinne der Differentiation der Zusammenhang zwischen Verteilung und Verteilungsfunktion etwas klarer. Rechnen Sie das als Übung gerne nach.

Im nächsten Kapitel werden wir noch weitere Anwendungen kennenlernen und dieses Thema noch einmal aufgreifen. Für den Moment soll es genug sein.

Differentiation in höher-dimensionalen Räumen 4

Wir behandeln:

- Ableitungen von Bahnkurven und Flächen
- Kettenregel in höherdimensionalen Räumen
- Der Fluss, ein zentrales Element in der Modellbildung
- Anwendungen von Differentiationen in höheren Raumdimensionen



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

Wir haben Ableitungen von Funktionen bisher als momentante Änderungsrate einer Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ kennengelernt. In diesem Kapitel wollen wir uns dem Ableitungsbegriff für Funktionen in höheren Raumdimensionen befassen. Wir können uns etwa eine Temperaturverteilung in einem Zimmer vorstellen. Jeder Punkt im Raum ist ein $x \in \mathbb{R}^3$ und eine Funktion ordnet diesem Punkt eine Temperatur $T(x) \in \mathbb{R}$ zu. Wir haben es ja dann mit einer Funktion $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu tun. Von einer Ableitung der Temperatur erwarten wir nun eine Auskunft darüber, wie sich die Temperatur ändert, wenn wir den Ort im Raum wechseln. Nun gibt es da ja jede Menge Richtungen. Im Eindimensionalen war das nicht der Fall. Sie sehen, dass sich da schon mehr Möglichkeiten auftun werden.

Generell bedeutet Funktion im Höherdimensionalen alle Varianten von

$$\begin{aligned} u:\ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} u^1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ u^m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}, \ u^i\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

In Kapitel 4.1 führen wir den grundlegendsten Ableitungsbegriff, nämlich die partielle Ableitung, ein, die eine tragende Rolle spielen wird bei den meisten weiteren Begriffen. Wir betrachten dabei zunächst nur skalare Funktionen (m=1) mehrer Veränderlicher (n>1) und dazu die Anwendungsbereiche Optimierung/Extremalstellen (Kapitel **??**) und Optimierung mit Nebenbedingung (Kapitel **??**).

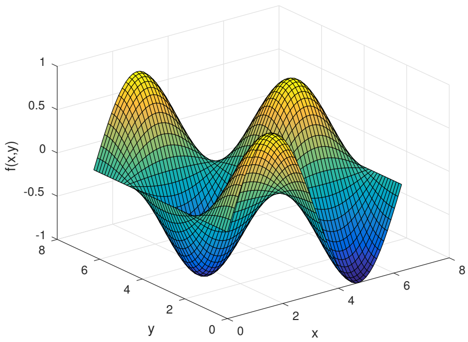
Zur Einstimmung betrachten bildliche Darstellungen von den verschiedenen Funktionsarten.

Beispiel 55 $m = n = 1$: Graph

$$\begin{aligned} u:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Beispiel 56 $m = 2\,,\ n = 1$: Fläche

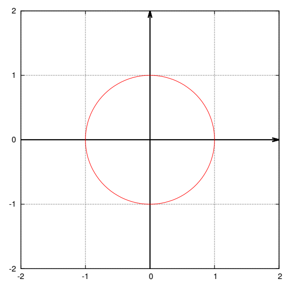
$$\begin{aligned} u:\ & [0,2\,\pi) \times [0,2\,\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \sin x_1 \cos x_2 \end{aligned}$$



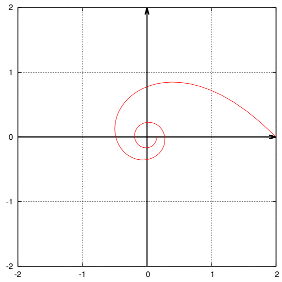
Beispiel 57 $m = 1\,,\ n = 2$: Kurve in der Ebene

(a)

$$\begin{aligned} u:\ & [0,2\pi) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

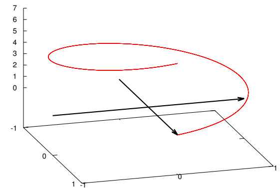


(b)
$$u:\ [0,4\pi)\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$
$$x\mapsto \frac{2}{x+1}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$$

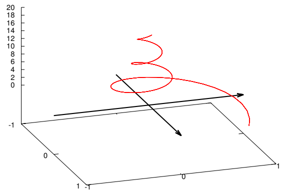


Beispiel 58 $m=1\,,\ n=3$: Kurve im Raum

(a)
$$u:\ [0,2\pi)\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$
$$x\mapsto \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\\ x\end{pmatrix}$$



(b)
$$u:\ [0,6\pi)\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$
$$x\mapsto \frac{2}{x+1}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\\ x\end{pmatrix}$$

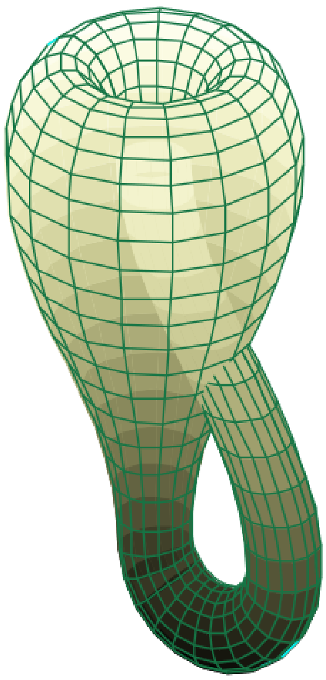


Beispiel 59 $m=2\,,\ n=3$: Fläche im Raum (Kleinsche Flasche)

$$u:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u_1(x_1,x_2)\\ u_2(x_1,x_2)\\ u_3(x_1,x_2)\end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}u_1(x_1,x_2) &= 2\,(1-\sin x_1)\,\cos x_1\\ &\quad + (2-\cos x_1)\,\cos x_2\,(2\,e^{-(\frac{x_1}{2}-\pi)^2}-1)\\ u_2(x_1,x_2) &= (2-\cos x_1)\,\sin x_2\\ u_3(x_1,x_2) &= 6\,\sin x_1+\frac{1}{2}\,(2\\ &\quad -\cos x_1)\,\sin x_1\cos x_2\,e^{-(x_1-\frac{3}{2}\pi)^2}\end{aligned}$$



Quelle: Wikipedia

4.1 Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

4.1.1 Ableitungen erster Ordnung

Wir betrachten zunächst skalare Funktionen

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,.$$

Solche Funktionen beschreiben “Flächen” im $\mathbb{R}^{n+1}$. Der Wert einer Ableitung oder Steigung in einem Punkt einer solchen Fläche hängt davon ab in welche Richtung man “schaut”. Infolgedessen haben wir es nun mit sogenannten Richtungsableitungen zu tun.

Definition 4.1 (Richtungsableitung) *Die Richtungsableitung von u am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $y \in \mathbb{R}^n$, mit $|y| = 1$, ist gegeben durch den Grenzwert (sofern existent)*

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\,y) - u(x)}{h}\,.$$

Wir schreiben auch u_y oder $D_y u$ statt $\frac{\partial}{\partial y} u$.

Wenn man eine Fläche mit der Ebene schneidet, die die betrachtete Richtung y enthält so reduziert sich der Ableitungsbegriff auf genau den, den wir schon im Zusammenhang mit Funtkionen vom Typ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen.

Ein Spezialfall einer Richtungsableitung ist die in Richtung der Koordinatenachsen:

Definition 4.2 (partielle Ableitung) *Die partiellen Ableitungen von u am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\,e_i) - u(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{h}\,, \quad i = 1, \ldots, n\end{aligned}$$

Beispiel 60 Die partiellen Ableitungen von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) &= 2\,x_1 + \sin(x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) &= x_1 \cos(x_2)\,.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von u bei $x = (1,2)^T$ sind dann gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(1,2) = 2 + \sin 2 \approx 2.9093$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} u(1,2) = \cos 2 \approx -0.41615\,.$$

Definition 4.3 (Gradient) *Der Gradient einer Funktion u ist gegeben durch*

$$\operatorname{grad}(u)^T = \nabla u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}.$$

∇ *heißt Nabla-Operator.*

Der Nabla-Operator liefert immer einen Spaltenvektor, wärend hingegen der

$$\operatorname{grad} f := (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$$

einen Zeilenvektor beschreibt. Die Komponenten sind aber die Gleichen.

Beispiel 61 Der Gradient von $u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1\,\sin(x_2)$ ist gegeben durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 + \sin(x_2) \\ x_1\,\cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von $u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1\,\sin(x_2)$ am Punkt $x = (1,0)$ ist gegeben durch

$$\left(\nabla u\right)(x)\Big|_{x=\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gradient, grad oder ∇, ist ein Vektor. Er hat eine Richtung und eine Länge

$$\nabla\, u(x) = \underbrace{\|\nabla\, u(x)\|}_{\text{Länge}}\; \underbrace{\frac{\nabla\, u(x)}{\|\nabla\, u(x)\|}}_{\text{Richtung}}$$

Der Betragt $\|\nabla\, u\|$ beinhaltet den Wert der Steigung von u am Punkt x in Richtung $\frac{\nabla\, u}{\|\nabla\, u\|}$.

Im folgenden Satz klären wir Rechenregeln des Gradienten, hinter denen letztlich Rechenregeln der partiellen Ableitungen stecken. Es wird nichts Überraschendes dabei herauskommen, da die Rechenregeln für die partiellen Ableitungen wie zu erwarten, sich wie diejenigen im eindimensionalen Fall verhalten. Der Vollständigkeit halber und auch um Sicher zu gehen werfen wir dennoch einen Blick darauf:

Satz 4.4 *Für alle Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und Skalarfelder $u,\ v:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:*

$$\nabla c = \vec{0}$$

Linearität

$$\nabla (c \cdot u) = c \cdot \nabla u$$
$$\nabla (u + v) = \nabla u + \nabla v$$

Produktregel

$$\nabla (u\, v) = u\ \nabla v + v\ \nabla u$$
$$\nabla (u^n) = n\, u^{n-1}\ \nabla u \quad \text{für} \quad n \neq 0$$

(ohne Beweis)

Im Folgenden wollen wir einen Zusammenhang zwischen partieller und Richtungsableitung herstellen. Bisher haben wir für die Richtungsableitung ja lediglich den Differenzenquotient notiert, so ist sie definiert. Für die partielle Ableitung haben wir aber schon eine bequeme Methode entdeckt, wie wir sie jeweils berechnen können. Wir werden gleich in Satz 4.6 sehen, dass wir die Richtungsableitung über die Bestimmung der partiellen Ableitungen berechnen können. Das ist natürlich sehr viel einfacher, als jeweils einen Grenzwert zu berechenen. Wir benötigen nur eben noch zwei Kenntnisse, um den entsprechenden Satz schnell einzusehen.

Wenn wir eine Parametrisierung $g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, t \mapsto g(t)$, hier also eine Kurve im Raum, ableiten wollen haben wir es ja nur mit einer Variablen $t \in \mathbb{R}$ zu tun. Da sich die Ableitungen auf jede der m Komponenten von $g(t) \in \mathbb{R}^m$ beziehen erhalten wir dort unseren altbekannten Ableitungebegriff für Funktionen im Eindimensionalen:

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_M'(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel 62 Erste Ableitung einer Parametrisierung

$$g(t) = \begin{pmatrix} t \\ t\,\sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t\,\cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\cos t - t\,\sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Das ist auch schon alles an Eigenschaften, was wir für unsere Zwecke von Parametrisierungen benötigen. Damit können wir nun folgende Definition aussprechen.

Satz 4.5 (Kettenregel) *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}\,(f \circ g)\,(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t)) g_k'(t)\,.$$

Beweis auf Seite 150

Beispiel 63 Erst mal ein einfaches Beispiel: Es sei $f(x) = x_1 \cdot x_2$ und $g(t) = (t, t)$. Dann ist

$$(f \circ g)(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) = t \cdot t = t^2\,.$$

Direkt nach t abgeleitet ergibt

$$(f \circ g)'(t) = 2\,t$$

und der Weg über Kettenregel sieht so aus:

$$(f \circ g)'(t) = f_{g_1}(g)g_1'(t) + f_{g_2}(g)g_2'(t) = g_2(t) \cdot 1 + g_1(t) \cdot 1 = t + t = 2\,t$$

Jetzt etwas schwieriger

Beispiel 64 Es sei $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2\,\cos x_1$ und $g(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$. Dann lautet die Verkettung

$$(f \circ g)(t) = f(g_1(t), g_2(t)) = g_1(t) + g_2(t) \cos g_1(t) = \cos t + \sin t \cos(\cos t)\,.$$

Leiten wir diese Funktion nach t ab, so erhalten wir

$$(f \circ g)'(t) = (\cos t + \sin t \cos(\cos t))' = -\sin t + \cos t\,\cos(\cos t) + \sin^2 t \sin(\cos t)\,.$$

Das gleiche machen wir nun über die Kettenregel und verwenden dazu die Ableitungen

$$g_1'(t) = -\sin t \quad \text{und} \quad g_2'(t) = \cos t$$

und

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 1 - x_2 \,\sin x_1 & \Rightarrow && f_{g_1}(g) &= 1 - g_2(t)\,\sin g_1(t) \\ f_{x_2} &= \cos x_1 x_1 & \Rightarrow && f_{g_2}(g) &= \cos g_1(t)\,. \end{aligned}$$

Jetzt die Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(g(t)) &= f_{g_1} g_1'(t) + f_{g_2} g_2'(t) \\ &= (1 - g_2(t)\,\sin g_1(t))(-\sin t) + \cos g_1(t)\cos t \\ &= -(1 - \sin t\,\sin(\cos t))\sin t + \cos t\,\cos(\cos t) \end{aligned}$$

Voilà!

Das war die Königsetappe, aber die mühevolle Arbeit wird belohnt werden. Wir erhalten jetzt ein Werkzeug, mit dessen Hilfe wir bequem jede Richtungsableitung berechnen können:

Satz 4.6 (Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung) *Sei* $\nu \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|\nu\| = 1$. *Dann gilt*

$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu\,.$$

Beweis auf Seite 150

Folgerung: *Aus Satz 4.6 können wir direkt folgern, dass der Gradient einer Funktion* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *immer in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt, denn es gilt* $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|\nu\| = 1$

$$|u_\nu| = |\nabla u \cdot \nu| = \|\nabla u\|\,\|\nu\| \underbrace{\cos\angle(\nabla u, \nu)}_{\leq 1} \leq \|\nabla u\|\,\|\nu\| = \|\nabla u\|\,.$$

Da der Gradient immer in Richtung des steilsten Anstiegs Am Punkt x zeigt ist entsprechend $-\nabla u$ die Richtung des steilsten Abstiegs. Man sagt auch *Flussrichtung* zu $-\nabla u$. In diese Richtung würde an diesem Punkt Wasser fließen.

Diese Eigenschaft macht den Gradienten zu einem zentralen Element bei der Differentiation in höheren Raumdimensionen. Er findet Einsatz bei der Modellierung, sobald etwas fließt; ob das ein Temperatur- oder Druckausgleich ist, Wasser, Lawinen, eine Konzentration einer chemischen Substanz in einer Flüssigkeit, ein Elektronenfluss oder Ähnliches.

Beispiel 65 Der Wert des steilsten Anstiegs von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = \binom{1}{0}$ ist gegeben durch:

$$\|\nabla u(1,0)\| = \left\| \begin{pmatrix} u_{x_1}(1,0) \\ u_{x_2}(1,0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}\,.$$

Eine beliebige Richtungsableitung erhalten wir durch

$$\nabla u \cdot \nu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 2\,\nu_1 + \nu_2\,.$$

Bei der Ableitung einer Parametrisierung, also einer vektorwärtigen Funktion mit einer Veränderlichen konnten wir einfach die eindimensionale Ableitung komponentenweise durchführen. Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher brauchten wir auch immer eine Richtung. Liegt nun eine vektorwärtige Funktion mehrerer Veränderlicher vor so werden diese beiden Methoden kombiniert. Der Gradient wird komponentenweise angewandt. Das Resultat ist dann ein Vektor mit je einem Gradienten in jeder Komponente; also eine Matrix.

Definition 4.7 (Jacobi-Matrix) *Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt die Matrix*

$$J\,f = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von f.

Jede einzelne Komponente der Matrix stellt eine skalarwertige Funktion mit n Veränderlichen dar:

$$f^i_{x_j} = f^i_{x_j}(x) = f^i_{x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

Beispiel 66 Jacobi-Matrix Für $f(x) = \binom{|x|^2}{x_1 + 2\,x_2}$ lautet die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} J\,f &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1}|x|^2 & \frac{d}{dx_2}|x|^2 \\ \frac{d}{dx_1}(x_1 + 2\,x_2) & \frac{d}{dx_2}(x_1 + 2\,x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 2\,x_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Spur der Jacobi-Matrix liefert uns einen weiteren Ableitungsbegriff erster Ordnung, nämlich die sogenannte Divergenz.

Definition 4.8 (Divergenz) *Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt die skalare Funktion*

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} = f^1_{x_1} + \cdots + f^n_{x_n}$$

Divergenz von f.

Beispiel 67 Divergenz

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos x_2^2 \\ \tan x_3 \end{pmatrix} = \frac{d}{x_1} \sin(x_1 + x_2) + \frac{d}{dx_2} \cos x_2^2 + \frac{d}{dx_3} \tan x_3$$
$$= \cos(x_1 + x_2) - 2\, x_2 \, \sin x_2^2 + \frac{1}{\cos^2 x_3}$$

4.1.2 Ableitungen höherer Ordnung

Mit Ableitungen bis zur Ordnung (m) meint dabei m partielle Ableitungen in alle möglichen Achsenrichtungen. Also bei $m = 1$ bezeichnet $f^{(1)}$ erste Ableitung in x_1- und erste in x_2-Richtung und für $m = 2$ meint $f^{(2)}$ zwei Ableitungen in Richtung x_1, also $f_{x_1 x_1}$, zwei in Richtung x_2, also $f_{x_2 x_2}$ und Mischformen, d.h. erste in x_1, zweite in x_2 und umgekehrt, also $f_{x_1 x_2}$ und $f_{x_2 x_1}$.

Wir müssen bei solchen Operationen auch immer voraussetzen, dass die Funktion, die wir betrachten auch entsprechend oft differenzieren können. Dazu gibt es eine nette, handliche Bezeichnung, die wir, um die weitere Schreibarbeit zu vereinfachen, an dieser Stelle noch einführen wollen:

Definition 4.9 ($C^k(D)$) *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D* k-mal stetig differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind. Wir schreiben*

$$f \in C^k(D) := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f^{(m)} \in C^0(D) \, , \ m \leq k \}$$

Zurück zum Thema. Werfen wir also noch einen Blick auf Ableitungen höherer Ordnung grad von ∇:

$$\mathrm{grad}\, \nabla f = \mathrm{grad} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_x \\ \mathrm{grad} f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix, die für diese Art zweiter Ableitung steht hat einen Namen:

Definition 4.10 (Hessematrix) *Sei $f \in C^2(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, also auf D zwei mal partiell differenzierbar. Dann heißt die Matrix*

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Hessematrix der Funktion f.
Dabei meint

$$f_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

erste partielle Ableitung in Richtung x_i und zweite partielle Ableitung in Richtung x_j.

Beispiel 68 Es sei $f(x) = 2\,x_1 + x_2^3$, dann gilt

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 2\,, & f_{x_2} &= 3\,x_2^2\,, \\ f_{x_1x_1} &= 0\,, & f_{x_1x_2} &= 0\,, \\ f_{x_2x_1} &= 0\,, & f_{x_2x_2} &= 6\,x_2\,. \end{aligned}$$

Die Hessematrix lautet dann

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6\,x_2 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.11 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(D)$, dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n\,.$$

(ohne Beweis)

Definition 4.12 (Laplace-Operator) *Der Operator $\Delta : C^2(D \subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mit*

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

heißt Laplace-Operator. Und zu einer skalaren Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt die Abbildung

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_1 x_1}$$

Laplace von u.

Beispiel 69 Laplace Sei

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x_1^2 + \cos x_2 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\Delta f = 2 - \cos x_2 \,.$$

Der Laplace einer Funktion u ist die Spur der Hessematrix von u, denn es gilt

$$\mathrm{Spur} H u = \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \Delta u \,.$$

Darüberhinaus ist der Laplace-Operator die Divergenz des Gradienten einer Funktion, denn es gilt

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u \,,$$

denn:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot & \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dx_1} u_{x_1} + \cdots + \frac{d}{dx_n} u_{x_n} \\ &= u_{x_1, x_1} + \cdots + u_{x_n, x_n} \\ &= \Delta u \end{aligned}$$

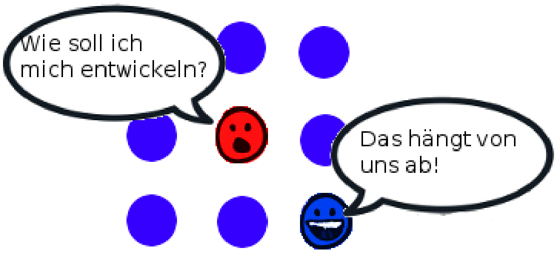
4.1.3 Zusammenfassung

Abbildung	1. Ableitung	2. Ableitung
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$	Gradient $\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$	Hessematrix $Hf = \operatorname{grad} \nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$
		Laplace $\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}$
Bemerkung: Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs Der Laplace ist die Divergenz des Gradienten: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ und die Spur der Hessematrix: $\Delta f = \mathrm{Spur} Hf$		
	Richtungsableitungen	
$v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = \|v\| = 1$	$f_v = \nabla f \cdot v$	$f_{vw} = v^T\, Hf\, w$
$u, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\|u(x)\| = \|g(x)\| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$	$f_{u(x)}(x) = \nabla f(x) \cdot u(x)$	$f_{u(x)g(x)} =$ $u(x)^T\, Hf(x)\, g(x)$ $+\nabla f(x)^T Du\, g(x)$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $t \mapsto \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{pmatrix}$	$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_m'(t) \end{pmatrix}$	$g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ \vdots \\ g_m''(t) \end{pmatrix}$
Bemerkung: Alle Ableitungen werden kptw durchgeführt		
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$	Jacobi-Matrix $Df =$ $\begin{pmatrix} f_{1,x_1} & \cdots f_{1,x_n} \\ \vdots & \cdots \vdots \\ f_{m,x_1} & \cdots f_{m,x_n} \end{pmatrix}$	
Bemerkung: Die Jacobi-Matrix des Gradienten ist die Hessematrix: $D\nabla f = Hf$		
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	Divergenz $\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^n f_{i,x_i}$	
Bemerkung: Die Divergenz ist die Spur der Jacobi-Matrix		
Kettenregel:	$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \sum_{i=1}^n f_{g_i}(g)\, g_i'(t) = \nabla f(g) \cdot g'(t)$	

Abbildung 14: Übersicht der verschiendenen Differentialoperatoren

4.2 Anwendungsbeispiele aus der Bildverarbeitung

Die Diffusionsgleichung oder auch Wärmeleitungsgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung und der räumlichen Änderung einer Konzentration an einem Ort in einem Körper und eignet sich zur Berechnung instationärer Temperaturfelder.

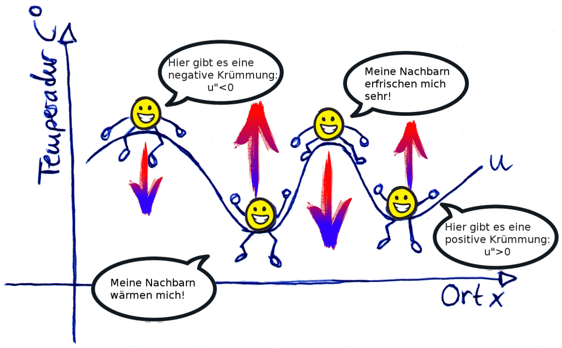


Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die besagt, dass die zeitliche Entwicklung von Wärme an einem Ort, von der Wärmeverteilung der unmittelbaren Umgebung abhängt.

In einer Raumdimension kann man sich das so vorstellen. Die Wärmeentwicklung in der Zeit bezogen auf Zu- und Abnahme der Energie wird vom Krümmungsverhalten im Ort der Temperaturkurve bestimmt. Es gilt in 1d

$$u_t \sim u''$$

$$u_t \sim C\,\Delta u = C\,(u_{xx} + u_{yy})\,.$$



Definition 4.13 (Diffusionsgleichung) *Es sei F ein Quellterm (etwa eine Hitzequelle, die von außen auf das System wirkt), $C \in \mathbb{R}$ der Diffusionskoeffizient. Dann heißt die Gelichung*

$$u_t - \nabla \cdot (C\,\nabla u) = F$$

Diffusions- oder auch Wärmeleitungsgleichung.

Mathematisch sind Wärmeleitungsgleichung und Diffusionsgleichung identisch, statt Temperatur und Temperaturleitfähigkeit treten hier Konzentration und Diffusionskoeffizient auf.

Beispiel 70 Beispiel aus der Bildverarbeitung

Satz 4.14 *Für zwei beliebige Richtungen ν, $\tau \in \mathbb{R}^2$ mit $|\nu| = |\tau| = 1$ und $u \in C^2(D)$ gilt*

$$u_{\nu\nu} + u_{\tau\tau} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u\,.$$

Beweis Satz 4.14: ÜA

Die Diffusionsgleichung in Definition 4.13 beschreibt eine isotrope Diffusion. Das bedeutet, dass die Ausbreitung der Substanzen keine Vorzugsrichtungen haben. Wählen wir für den Laplace

$$\Delta u = u_{\nu\nu} + u_{\tau\tau}$$

und unterdrücken eine Richtung, sagen wir τ dann erhalten wir einen diffusiven Prozess, der eine Vorzugsrichtung hat. Wir sprechen dann von einer anisotropen Diffusion.

Beispiel 71 anisotrope Diffusion für Bilder

Wenn wir die Anisotropie so wählen, dass die Vorzugsrichtung ortsabhängig ist, haben wir direkt nochmal was zu rechnen. Bisher haben wir uns Richtungsableitungen zweiter Ordnung nur mit konstanten Richtungen angeschaut. Wie sieht das aber aus wenn wir an

$$u_{v(x)w(x)} = ?$$

interessiert sind? Rechnen wir das doch mal durch.

Satz 4.15 *Die Richtungsableitungen zweiter Ordnung in Richtung vektorwertiger Funktionen* $v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *mit* $\|v\| = \|w\| = 1$ *in jedem Punkt lautet*

$$u_{v(x)w(x)}(x) = v^T(x)\, Hu(x)\, w(x) + \nabla u^T(x)\, Dv(x)\, w(x)\,.$$

Beweis von Satz 4.15 auf Seite 151

Wenn nun gerade

$$v = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

ist, dann gilt

$$\nabla u^T(x)\, Dv(x) = 0$$

und wir erhalten die folgende spezielle Situation:

Satz 4.16 *Für*

$$v = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

und $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *beliebig mit* $\|w\| = 1$ *in jedem Punkt lautet*

$$u_{vw}(x) = \frac{\nabla u^T}{\|\nabla u\|}\, H u\, w\,.$$

Speziell ist dann

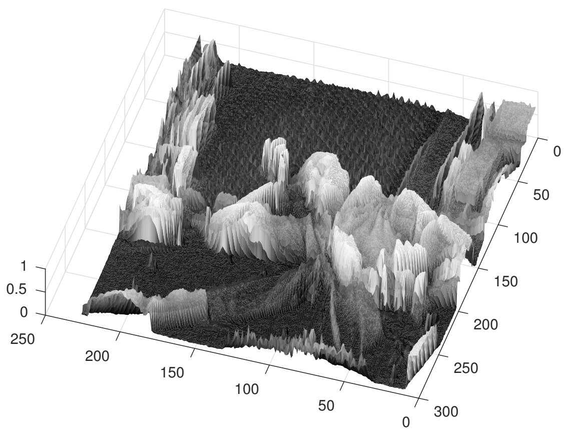
$$u_{\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}}(x) = \frac{\nabla u^T}{\|\nabla u\|}\, H u\, \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\,,$$

was gerade wieder der Form der zweiten Richtungsableitung für konstante Richtungen entspricht.

Nun ein paar Bildbeispiele, wie sich die verschiedenen Diffusionen auf digitale Bilder auswirken, je nachdem ob es sich um eine isotrope oder anisotrope Diffusion handelt. Man kann an diesen Beispielen sehr schön die gewählten Richtungen sehen.

Beispiel 72 iso- und anisotrope Diffusion

Original

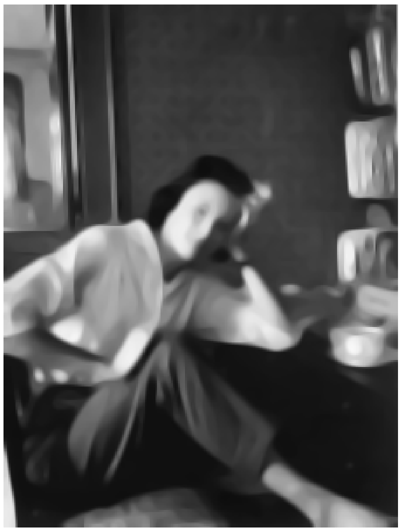


Das Bild als Graph (spiegelverkehrt)

$$u_t - \Delta u = 0$$

$$u_t - u_{vv} = 0\,,\ v = (1,1)^T$$

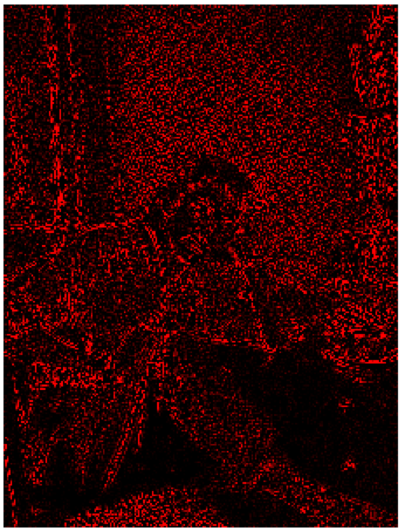
$$u_t - u_{\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}} = 0$$



$$u_t - u_{\frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u\|}\frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u\|}} = 0$$

Beispiel 73 Texturerkennung

Sehr schön ist auch die Überlegung wie sich mittel Richtungsableitungen Texturen im Bild detektieren lassen. Die Idee ist dabei, dass sich bei sehr rauhen, unregelmäßigen Bereichen die Ableitung der normierten Gradienten in tangentialer Richtung an Texturen stark ändern und bei glatten Kanten eher nicht. Die Änderung der Richtungsbaleitung $u_{\frac{\nabla}{\|\nabla u\|}}$ in tangentialer Richtung ist ja



$$u_{\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u\|}} = \frac{\nabla u^T H u \nabla u^\perp}{\|\nabla u\|^2}$$

Digitale Bilder (Darstellung: 8-bit, RGB) können wir als diskrete Funktionen interpretieren. An Stelle von

$$\begin{aligned} u \,:\, \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto u(x,y) \end{aligned}$$

betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} P \,:\, I_M \times I_N \subset \mathbb{N}^2 &\to [0,255]^3 \\ (i,j) &\mapsto (P_{ij}^R, P_{ij}^G, P_{ij}^B) \end{aligned}$$

mit $I_N = [1,N] \cap \mathbb{N}$ und $I_M = [1,M] \cap \mathbb{N}$, was die jeweiligen Zeilen und Spalten eines Bildes beschreibt. NIcht unüblich ist es, den Wertebereich auf $[0,1]^3$ zu skalieren. Je nach Farbraum müssen die Werte nicht RGB-Werte sein. Bei grauwertigen Bildern mit skaliertem Wertebereich sieht die Abbildung - und solche wollen wir betrachten - dann so aus:

$$\begin{aligned} P \,:\, I_M \times I_N \subset \mathbb{N}^2 &\to [0,1] \\ (i,j) &\mapsto P_{ij} \end{aligned}$$

Definition 4.17 (digitale Bilder als diskrete Funktionen) *Auf den Indexmengen* $I_N = [1, N] \cap \mathbb{N}$ *und* $I_M = [1, M] \cap \mathbb{N}$ *werden folgende Abbildungen definiert:*
a-bit, RGB:

$$\begin{aligned} P \,:\, I_M \times I_N \subset \mathbb{N}^2 &\to [0, 255]^3 \\ (i, j) &\mapsto (P_{ij}^R, P_{ij}^G, P_{ij}^B) \end{aligned}$$

skaliert, grauwertig:

$$\begin{aligned} P \,:\, I_M \times I_N \subset \mathbb{N}^2 &\to [0, 1] \\ (i, j) &\mapsto P_{ij} \end{aligned}$$

4.3 Ableitungen von diskreten Funktionen mehrerer Veränderlicher

4.3.1 Gradient und Richtungsableitung

Für eine kontinuierliche Funktion u

$$\begin{aligned} u \,:\, \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto u(x, y) \end{aligned}$$

sind Gradient ∇u und Richtungsableitung u_v

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_v = \nabla u \cdot v \, \frac{1}{\|v\|} \, .$$

über die partiellen Ableitungen definiert. Für diskrete Funktionen

$$\begin{aligned} P \,:\, \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, M\} \subsetneq \mathbb{N}^2 &\to [0, 1] \\ (i, j) &\mapsto P_{ij} \end{aligned}$$

muss man also einfach die diskreten partiellen Ableitungen aufstellen. Diese liefern dann, analog zum kontinuierlichen Fall, den diskreten Gradienten $\nabla_h P$ und die entsprechende diskrete Richtungsableitung $P_v^{\pm}$.

Wir erhalten die diskreten partiellen Ableitungen jeweils über Differenzenquotienten in die entsprechende Richtung:

Definition 4.18 (Differenzenquotient für partielle Ableitungen) *in x- und y-Richtung:*

$$
\begin{aligned}
u_x^+ &\approx \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}\\
u_x^- &\approx \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} && \text{Rückwärtsdifferenzenquotient}\\
u_x^\pm &\approx \frac{1}{2}\left(u_x^+ + u_x^-\right) && \text{gemittelter Differenzenquotient}\\
u_y^+ &\approx \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}\\
u_y^- &\approx \frac{u(x,y)-u(x,y-h)}{h} && \text{Rückwwärtsdifferenzenquotient}\\
u_y^\pm &\approx \frac{1}{2}\left(u_y^+ + u_y^-\right) && \text{gemittelter Differenzenquotient}
\end{aligned}
$$

P_{ij}, also der Pixel des digitalen Bildes in der i-ten Zeile und j-ten Spalte beschreibe jetzt gerade den Wert der Funktion u an der Stelle (x,y) und $P_{i+1,j}$ den Wert von u an der Stelle $(x,y+h)$ usw. Mit der Wahl von $h=1$ gilt dann insgesamt:

$$
\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c}
P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i-1,j+1}\\ \hline
P_{i,j-1} & P_{i,j} & P_{i,j+1}\\ \hline
P_{i+1,j-1} & P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1}
\end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|c|c}
u(x-1,y-1) & u(x,y-1) & u(x+1,y-1)\\ \hline
u(x-1,y) & u(x,y) & u(x+1,y)\\ \hline
u(x-1,y+1) & u(x,y+1) & u(x+1,y+1)
\end{array}\right)
$$

Damit können wir nun die diskreten partiellen Ableitungen aufsetzen:

Definition 4.19 (Differenzenquotient für Pixel)

$$
\begin{aligned}
P^{\pm}_{ij,x} &= \frac{1}{2}\left(P^{+}_{ij,x} + P^{-}_{ij,x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{\pm}_{ij,y} &= \frac{1}{2}\left(P^{+}_{ij,y} + P^{-}_{ij,y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(P_{i+1,j} - P_{i-1,j}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \nabla_h P_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{i,j+1} - P_{i,j-1} \\ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} \end{pmatrix}
$$

Beispiel 74

Für das Patch

$$
\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)
$$

erhalten wir den diskreten Gradienten

$$
\nabla_h P_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-4 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix}
$$

und die Richtungsableitung $P_{ij,v}$ in Richtung $v = \binom{2}{-1}$

$$
P_{ij,v} = \nabla_h P_{ij} \cdot v \frac{1}{\|v\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-3.5}{\sqrt{4}}
$$

4.3.2 Der diskrete Laplace Operator

Der Laplace für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist ja zwei Mal nach x plus zwei Mal nach y abgeleitet:

$$
\Delta u = u_{xx} + u_{yy}
$$

Wir mitteln die Differenzenquotienten dadurch, dass wir erst eine rückwärts, dann eine vorwärts "gehen":

$$
\begin{aligned}
\Delta_h u &= u_{h,xx} + u_{h,yy}\\
u_{h,xx} &= \frac{u_{h,x}(x+h,y) - u_{h,x}(x,y)}{h} && \text{vorwärts}
\end{aligned}
$$

Für die auftretenden ersten Ableitungen wählen wir dann jeweils Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$u_{h,x}(x+h,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} \qquad \text{rückwärts}$$
$$u_{h,x}(x,y) = \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} \qquad \text{rückwärts}$$

Eingesetzt in $u_{h,xx}$ erhalten wir dann

Definition 4.20 (Laplace-Operator für diskrete Funktionen)

$$u_{h,xx} = \frac{u(x+h,y)-2\,u(x,y)-u(x-h,y)}{h}$$
$$u_{h,yy} = \frac{u(x,y+h)-2\,u(x,y)-u(x,y-h)}{h}$$

Wir übertragen das auf diskrete Bilder mit $P_{i+1,j} = u(x,y+h)$, etc. und erhalten mit $h=1$:

Definition 4.21 (diskreter Laplace-Operator für Pixel)

$$P_{ij,xx} = P_{i,j+1} - 2\,P_{ij} + P_{i,y-1}$$
$$P_{ij,yy} = P_{i+1,j} - 2\,P_{ij} + P_{i-1,y}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_h P_{ij} = P_{i+1,j} + P_{i-1,y} + P_{i,j+1} + P_{i,y-1} - 4\,P_{ij}$$

Beispiel 75

Für das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i-1,j+1} \\ \hline P_{i,j-1} & P_{i,j} & P_{i,j+1} \\ \hline P_{i+1,j-1} & P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

erhalten wir die diskreten zweiten Ableitungen

$$P_{ij,xx} = 2 - 2\cdot 6 + 4 = -6$$
$$P_{ij,yy} = 5 - 2\cdot 6 + 2 = -5$$

und damit den Laplace

$$\Delta_h P_{ij} = -6 - 5 = -11$$

4.4 Diskrete Modelle

4.4.1 Kontrastdetektor für diskrete Funktionen

Der Kontrastdetektor für diskrete Bilder ist einfach $C(x)$ aus Teil 01 ausgewertet für diskrete Gradienten:

$$(C \circ \nabla_h P)(i,j) = \frac{\beta}{\sqrt{\|\nabla_h P_{ij}\|^2 + \beta^2}}$$

Was wir also benötigen ist die Filterdarstellung für den diskreten Gradienten, bzw die diskreten partiellen Ableitungen. Also los.

Wir betrachten grauwertige Bilder. Ein **Bildpatch** ist dann ein 3×3-Feld mit P_{ij} im Zentrum:

$$\mathcal{P}_{ij} = \begin{pmatrix} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i-1,j+1} \\ P_{i,j-1} & P_{i,j} & P_{i,j+1} \\ P_{i+1,j-1} & P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \in [0,1]^{3\times 3}$$

Eine Filterverarbeitung funktioniert mit der sogenannten

Definition 4.22 (Hadamar-Multiplokation) *welche eine Multiplikation ist, die komponentenweise ausgeführt wird:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Die **diskrete partielle Ableitung** erhalten wir über (vorwärts und rückwärts) gemittelte Differenzenquotienten:

Definition 4.23 (diskrete partielle Ableitungen für digitale Bilder)

$$
\begin{aligned}
P_{x,ij} &= \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) \\
&= \sum_{\substack{Zeilen \\ Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{F}_x} : \mathcal{P}_{ij} = \sum_{l,k} \left(\mathcal{F}_x : \mathcal{P}_{ij}\right)_{lk} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{y,ij} &= \frac{1}{2}\left(P_{i+1,j} - P_{i-1,j}\right) \\
&= \sum_{\substack{Zeilen \\ Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{F}_y} : \mathcal{P}_{ij} = \sum_{l,k} \left(\mathcal{F}_y : \mathcal{P}_{ij}\right)_{lk} ,
\end{aligned}
$$

$P_{x,ij}$ ist die Zahl, die die (diskrete) Ableitung in x-Richtung des Bildes am "Punkt" P_{ij} also in der i-ten Zeile und j-ten Spalte beschreibt. Um den zu erhalten benötigen wir das 3×3 Patch $\mathcal{P}_{ij}$ um den Punkt P_{ij} und einen passenden 3×3-Filter. Das Analoge gilt für die Ableitung in y-Richtung. Der diskrete Gradient ergibt sich dann gemäß:

Definition 4.24 (diskrete Richtungsableitung für digitale Bilder)

$$
\nabla_h P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{x,ij} \\ P_{y,ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_{i,j+1} - P_{i,j-1} \\ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l,k} \left(\mathcal{F}_x : \mathcal{P}_{ij}\right)_{lk} \\ \sum_{l,k} \left(\mathcal{F}_y : \mathcal{P}_{ij}\right)_{lk} \end{pmatrix}
$$

Und entsprechend erhalten wir für die Richtungsbaleitung $P_{v,ij}$ dann

$$
\begin{aligned}
P_{v,ij} = \begin{pmatrix} P_{x,ij} \\ P_{y,ij} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\|v\|} &= \left(P_{x,ij}\, v_1 + P_{y,ij}\, v_2\right) \frac{1}{\|v\|} \\
&= \frac{v_1}{\|v\|} \sum_{l,k} \left(\mathcal{F}_x : \mathcal{P}_{ij}\right)_{lk} + \frac{v_2}{\|v\|} \sum_{l,k} \left(\mathcal{F}_y : \mathcal{P}_{ij}\right)_{lk}
\end{aligned}
$$

Beispiel 76 Ein digitales, grauwertiges Bild A sei wie rechts abgebildet (schwarze Zahlwerte) gegeben. Stellen Sie das Feld A_x auf, dass für jeden Pixel P_{ij} die partielle Ableitung in Richtung x, bzw. e_1 beinhaltet. Wenn der Patch $\mathcal{P}_{ij}$ über den Bildrand hinausragt (wie es zum Beispiel bei P_{11} der Fall ist) dann setzen Sie das Bild konstant fort (rote Zahlen). Sie erhalten auch negative Werte. Wenn Sie die Werte von A_x als Bild speichern wollen so addieren Sie auf alle Zahlen

127, ein mittleres grau. Das Bild zeigt dann für Steigung 0 ein mittleres grau, für betragsmäsig groše Ableitungen dann jeweils etwas viel helleres Feld bishin zu weiš oder ein viel dunkleres Feld bishin zu schwarz.

Das gleiche können Sie für A_y machen und dann ist es ein Einfaches, die Werte für $\|\nabla_h P\|$ aufzustellen, bzw. P_v für ein beliebiges (Normierung nicht vergessen) v. Im Falle von $\|\nabla_h P\|$ müssen Sie beim Speichern eines Bildes die Korrektur mit Mittelwert 127 nicht vornehmen, da Sie dann sicher nur nicht negative Werte erhalten. Erzeugen Sie eine Bilddatei `A.png` (irgendein verlustfrei komprimiertes Format), die das Feld A entält.

A=

	P_{11}					
0	0	0	128	100	20	20
0	0	0	128	100	20	20
0	0	128	254	200	100	100
128	128	254	254	254	200	200
0	0	10	254	200	100	100
10	10	254	254	254	200	200
10	10	254	254	254	200	200
10	10	254	254	254	200	200

Definition 4.25 (Diskrete Kontrast-Funktion)

$$C(\nabla_h P_{ij}) = \frac{\beta}{\sqrt{\|\nabla_h P_{ij}\|^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\left(\sum_{l,k} (\mathcal{F}_x : \mathcal{P}_{ij})_{lk}\right)^2 + \left(\sum_{l,k} (\mathcal{F}_y : \mathcal{P}_{ij})_{lk}\right)^2 + \beta^2}}$$

$$C(P_{v,ij}) = \frac{\beta}{\sqrt{\|P_{v,ij}\|^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\left(\frac{v_1}{\|v\|} \sum_{l,k} (\mathcal{F}_x : \mathcal{P}_{ij})_{lk} + \frac{v_2}{\|v\|} \sum_{l,k} (\mathcal{F}_y : \mathcal{P}_{ij})_{lk}\right)^2 + \beta^2}}$$

4.4.2 Isotrope Diffusion für digitale Bilder

Aus der Diffusionsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

erhalten wir eine iterative, in der Zeit diskrete Vorschrift

$$u^{k+1} = u^k + \delta \Delta u^k \,.$$

Für digitale Bilder oder generell diskrete Funktionen bedeutet das

$$P^{\text{neu}} = P^{\text{alt}} + \delta \Delta_h P^{\text{alt}} \,.$$

Der Prozess kann über ein längeres Zeitfenster erfolgen, indem man ihn mehrfach wiederholt. Filterschreibweise:

Satz 4.26 Laplace-Operator für digitale Bilder

$$P_{xx,ij} = P_{i,j+1} - 2\,P_{ij} + P_{i,j-1} = \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{xx} : \mathcal{P}_{ij})_{lk}$$
$$P_{yy,ij} = P_{i+1,j} - 2\,P_{ij} + P_{i-1,j} = \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{yy} : \mathcal{P}_{ij})_{lk}$$

$$\Delta_h P_{ij} = P_{xx,ij} + P_{yy,ij} = \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{xx} : \mathcal{P}_{ij})_{lk} + \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{yy} : \mathcal{P}_{ij})_{lk}$$
$$= \sum_{l,k} ((\mathcal{F}_{xx} + \mathcal{F}_{yy}) : \mathcal{P}_{ij})_{lk} = \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{\Delta} : \mathcal{P}_{ij})_{lk}$$

Beispiel 77 Wie sehen hier die verwendeten Filter aus?

$$\mathcal{F}_{xx} = \left(\begin{array}{c|c|c} \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \end{array}\right)$$

$$\mathcal{F}_{yy} = \left(\begin{array}{c|c|c} \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \end{array}\right)$$

$$\mathcal{F}_{\Delta} = \left(\begin{array}{c|c|c} \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \end{array}\right)$$

4.4.3 Anisotrope Diffusion für digitale Bilder

Aus der Diffusionsgleichung
$$u_t - u_{vv} = 0$$
mit konstanter Richtung $v \neq v(x)$ erhalten wir eine iterative, in der Zeit diskrete Vorschrift
$$u^{k+1} = u^k + \delta u^k_{vv}\,.$$
Für digitale Bilder oder generell diskrete Funktionen bedeutet das
$$P^{\text{neu}} = P^{\text{alt}} + \delta P^{\text{alt}}_{h,vv}\,.$$

Der Prozess kann über ein längeres Zeitfenster erfolgen, indem man ihn mehrfach wiederholt. Filterschreibweise. Wir wissen schon aus 14_Modelle:

$$\begin{aligned} P_{xx,ij} &= \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{xx} : \mathcal{P}_{ij})_{lk} \\ P_{yy,ij} &= \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{yy} : \mathcal{P}_{ij})_{lk} \end{aligned}$$

Jetzt kommen neu die

Definition 4.27 (Mischterme)

$$\begin{aligned} P_{xy,ij} &= \frac{1}{2}(P_{x,i+1,j} - P_{x,i-1,j}) \\ &= \frac{1}{4}(P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j-1} - P_{i-1,j+1} + P_{i-1,j-1}) \\ &= \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{xy} : \mathcal{P}_{ij})_{lk} \end{aligned}$$

analog

$$P_{yx,ij} = \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{yx} : \mathcal{P}_{ij})_{lk}$$

Beispiel 78

Wie sieht der neue Filter aus?

$$\mathcal{F}_{xy} = \mathcal{F}_{yx} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Definition 4.28 (Richtungsableitung zweiter Ordnung)

$$
\begin{aligned}
P_{vv,ij} &= \frac{v^T\, HP \cdot v}{\|v\|^2} = \frac{1}{\|v\|^2} \sum_{l,k=1}^{2} v_l H_{lk} v_k \\
&= \underbrace{\frac{v_1^2}{\|v\|^2}}_{=\alpha} P_{xx,ij} + \underbrace{\frac{2\, v_1\, v_2}{\|v\|^2}}_{=\beta} P_{xy,ij} + \underbrace{\frac{v_2^2}{\|v\|^2} P_{yy,ij}}_{=\gamma} \\
&= \alpha \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{xx} : \mathcal{P}_{ij})_{l,k} + \beta \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{xy} : \mathcal{P}_{ij})_{l,k} + \gamma \sum_{l,k} (\mathcal{F}_{yy} : \mathcal{P}_{ij})_{l,k} \\
&= \sum_{l,k} ((\alpha\, \mathcal{F}_{xx} + \beta\, \mathcal{F}_{xy} + \gamma\, \mathcal{F}_{yy}) : \mathcal{P}_{ij})_{l,k}
\end{aligned}
$$

Beispiel 79

Filterkombination für die zweite Richtungsableitung in Richtung $v = (1, 2)$, $\|v\|^2 = 5$:

$$
P_{vv,ij} = \sum_{l,k} \left(\frac{1}{5}\, (\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{xx})_{l,k} + (\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{xy})_{l,k} + \frac{4}{5}\, (\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{yy})_{l,k} \right)
$$

Für den Patch

$$
\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}
$$

gilt dann

$$
\begin{aligned}
P_{,vv} &= \sum_{l,k} \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \right)_{l,k} \\
&= \frac{1}{20} \sum_{l,k} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 16 & -40 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 32 & 0 \\ 0 & -160 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \end{pmatrix} \right)_{l,k} \\
&= \frac{1}{20} \sum_{l,k} \begin{pmatrix} 5 & 32 & -15 \\ 16 & -200 & 24 \\ -35 & 128 & 5 \end{pmatrix}_{l,k} \\
&= \frac{-40}{20} = -2
\end{aligned}
$$

Integrieren
... ist eine Kunst

5

Wir behandeln:

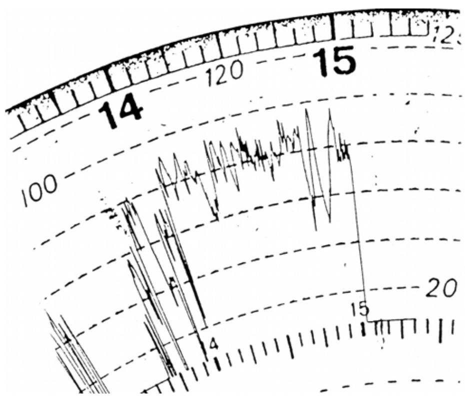
- Umkehrung der Differentiation (unbestimmte Integration)
- Flächen unter Graphen (bestimmte Integration)
- Zusammenhang von unbestimmter und bestimmter Integration (HDI)
- Was wenn unbegrenzte Situationen auftreten (uneigentliche Integration)

BEI MATHEMATIKERN ZU HAUSE

5.1 unbestimmte Integration (Ableitung umkehren)

5.1.1 Einführung und Stammfunktionen von Potenzfunktionen

Wir wollen uns mit der Fragestellung auseinandersetzen, ob man eine Funktion, deren Änderungsrate in jedem Punkt eines Intervalls bekannt ist, rekonstruieren kann. Wir stehen also vor folgendem Problem: Es ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben, von der wir wissen, dass sie die Ableitung einer zunächst noch unbekannten Funktion F ist: $f = F'$ auf I. Gesucht ist F.



Beispiel 80 Fahrtenschreiber (Teil I)

Betrachten wir einmal das folgende Beispiel: Ein Fahrtenschreiber eines LKWs zeichnet im Verlaufe des Vormittags – 8.00 Uhr bis 12.00 Uhr – die gefahrene Geschwindigkeit des LKWs auf:

Zeit $[t] = h$	0.00	0.44	0.89	1.33	1.78	2.22	2.67	3.11	3.56	4.00
Geschw. $[f(t)] = \frac{km}{h}$	52.50	53.15	55.09	58.33	62.87	68.70	75.83	84.26	93.98	105

Wir machen eine Polynominterpolation durch die Messpunkte und erhalten die Funktion

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right) .$$

Wenn wir aber nun eigentlich daran interessiert sind, zu erfahren wann der LKW–Fahrer wieviel Kilometer zurückgelegt hat, so benötigen wir diejenige Funktion, deren Ableitung gerade $f(t)$ ist; also der Geschwindigkeitsmessung entspricht (siehe Abb. 15). Gesucht ist also eine Funktion $F(t)$ mit

$$F'(t) = f(t) .$$

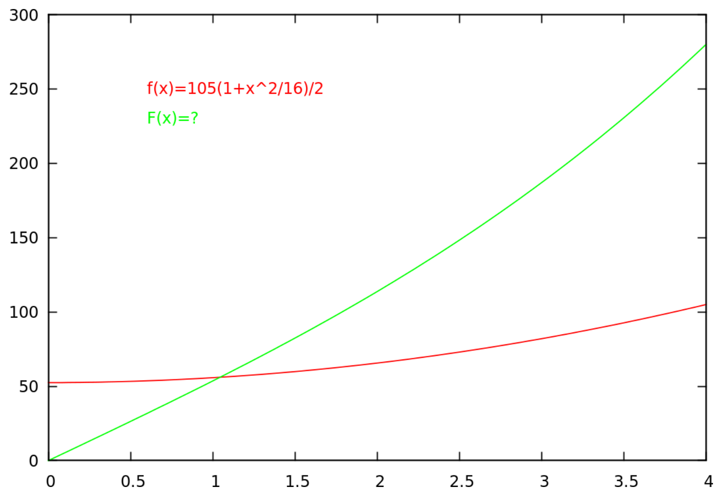


Abbildung 15: Gesucht ist die Stammfunktion der Geschwindigkeitsbeschreibung

Im Grunde ist das, was wir suchen die Umkehrung der Ableitung. Wir nennen die Funktion, die sich aus eben dieser Umkehrung ergibt Stammfunktion und machen dazu folgende Definition:

Definition 5.1 (Stammfunktion & unbestimmtes Integral) *F heißt Stammfunktion zu f auf dem Intervall I, wenn $\forall\, x \in I$:*

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Wir sagen auch F ist ein unbestimmtes Integral von f auf I. In Leibnizscher Symbolik schreiben wir für das unebstimmte Integral

$$\int f(x)\ dx \quad oder \quad \int f\ dx\,.$$

Wir sagen Integral f von x dx oder Integral f dx. f bezeichnen wir als Integranden und x als Integrationsvariable.

Bemerkung 5.1. *Eine Stammfunktion ist ohne Weiteres nicht eindeutig bestimmt: Aus einer Stammfunktion $F_0(x)$ zu $f(x)$ auf I erhält man alle weiteren Stammfunktionen in der Form $F(x) = F_0(x) + C$ mit einer beliebigen Zahl C, da eine Konstante bei der Ableitung verschwindet.*

Wir halten fest, dass das unbestimmte Integral die Umkehrung der Ableitung ist und deshalb gilt

$$\int F'\ dx = F + C\,.$$

Das unbestimmte Integral ist wiederrum eine Funktion, die von der Variablen x abhängt. Je nach Situation ist das freie C dann noch zu bestimmen.

Bei der Überlegung wie sich Stammfunktionen von Potenzfunktionen berechnen lassen müssen wir nur ein wenig rückwärts denken: Wir wissen ja wie die Ableitung aussieht, nämlich

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Das ist äquivalent zu

$$x^{n-1} = \frac{1}{n}\,(x^n)'$$

was direkt auf die Berechnung einer Stammfunktion führt:

$$\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$$

Und das genügt schon für's Erste. Auch wenn der Exponent rational ist lässt sich diese Strategie anwenden. Aus der Ableitnugsregel

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-q}{q}}\,,\ p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\,,\ p \neq -q\ (!!!)$$

erhalten wie die Regel zur Berechnung von Stammfunktionen, nämlich:

$$\int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q}{p+q}\,x^{\frac{p+q}{q}}$$

Es ist ja dann gerade die Ableitung aller Stammfunktionen

$$\left(\frac{q}{p+q}\,x^{\frac{p+q}{q}} + C\right)' = x^{\frac{p}{q}} \tag{3}$$

gerade wieder der Integrant.

Vorsicht ist geboten im Fall $p = -q$, denn in diesem Fall ist die Gleichung in (3) gar nicht definiert. Diesen Fall müssen wir gesondert betrachten. Aber das ist einfach. Welche Funktionen haben die Ableitung

$$F'(x) = \frac{1}{x}\,?$$

Genau: Der natürliche Logarithmus. Es ist dann

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,.$$

Wir sammeln die bereits angesammelten Erkenntnisse:

Satz 5.2 (Stammfunktionen von Potenzfunktionen :)

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C && n \in \mathbb{N}\\
\int x^{\frac{p}{q}}\,dx &= \frac{q}{p+q}\,x^{\frac{p+q}{q}} + C && p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\,,\ p \neq -q\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C && x \neq 0
\end{aligned}$$

Beweis auf Seite 146

Die erste Zeile ergibt sich gerade aus der zweiten für $p = n\,q$. Beim Logarithmus als Stammfunktion empfiehlt sich die Betragsstriche zu setzen, um negative x zuzulassen. Überzeugen Sie sich davon, dass das Setzen der Beträge am Ergebnis nichts ändert.

Die Linearität des Ableitungsoperators überträgt sich auf die Integration uns es gilt:

Satz 5.3 Regeln der unbestimmten Integration: (Linearität des unbestimmten Integrals)
Das integral ist linear, das heißt für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx\,.$$

Beweis auf Seite 146

Damit können wir bereits beliebige Linearkombinationen von Potenzfunktionen integrieren.

Beispiel 81 Sei $a \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter.

$$\begin{aligned}\int 2\,x^3 + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{a}{x}\,dx & \\ &= 2\int x^3\,dx + \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - a\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 2\,\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - a\,\ln|x| + C \\ &= \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{2}{9}\,\sqrt{x}^3 - a\,\ln|x| + C\end{aligned}$$

Damit können wir nun das Beispiel 80 weiterrechnen:

Beispiel 82 Fahrtenschreiber (Teil II)

Der Kilometerstand des Fahrtenschreibers aus unserem LKW–Fahrer Beispiel 80 berechnet sich demnach so:

$$F(t) = \int f(t)\ dt = \int \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)\ dt = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$

Da der LKW–Fahrer morgens losgefahren ist, der Kilometerstand bei $t = 0$ also auf Null stand gilt weiter

$$F(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0\,,$$

woraus sich die Funktion $F(t)$ für den Kilometerstand durch

$$F(t) = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right)$$

berechnet. Angenommen die Aufzeichnungen seien am Nachmittag gemacht worden und der Fahrer habe bereits $200km$ am Vormittag zurückgelegt, so dass zum Startzeitpunkt $F(0) = 200$ gelte, so berechnete sich die Konstante durch

$$F(0) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad C = 200\,,$$

woraus sich

$$F(t) = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + 200$$

ergäbe.

Im Übrigen erhalten wir alle gefahrenen Kilometer in diesem Zeitraum über die Differenz der Kilometerzahl zum Endzeitpunkt mir der zum Startzeitpunkt:

$$\begin{aligned}\text{Gesamtkilometerzahl} &= F(4) - F(0)\\ &= \frac{105}{2}\left(4 + \frac{1}{48}4^3\right) + 200 - 200\\ &= \frac{105}{2}\left(4 + \frac{1}{48}4^3\right)\end{aligned}$$

(offensichtlich spielt die Anzahl der Startkilometer keine Rolle!)

$$\begin{aligned}&= \frac{105}{2}\left(4 + \frac{4}{3}\right)\\ &= \frac{105}{2}\frac{16}{3} = 280\end{aligned}$$

Der LKW–Fahrer ist also 280 km gefahren, ganz gleich wie hoch die Kilometerzahl zum Startzeitpunkt gewesen ist. C kürzt sich raus.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer kleinen physikalischen Interpretation. Die Zeichen $[\ ]$ geben die physikalische Größe dessen an, was in sie eingeschlossen ist, dann gilt für unser LKW–Beispiel:

Zeit	t :	$[t] = h$	(Stunde)
Geschwindigkeit	f :	$[f] = \left[\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}\right] = \frac{[F(x_1)-F(x_2)]}{[x_1-x_2]} = \frac{km}{h}$	(Kilometer pro Stunde)
Kilometerstand	F :	$[F] = [\int f(t)\,dt] = [f]\underbrace{[dt]}_{\text{Zeitintervall}} = km$	(Kilometer)

Oder denken wir an einen Radfahrer, der über die Berge fährt. Entweder messen wir mit f wieviel Höhe er gewinnt je nach gefahrener Strecke:

Weg	x :	$[x] = m$	(Meter)
Höhe	f :	$[f] = m$	(Meter)
Steigung	f' :	$[f'] = \frac{m}{m} = 1$	(dimensionslos)

oder wieviel Höhe er gewinnt je nach gefahrener Zeit:

Zeit	t :	$[t] = h$	(Stunde)
Höhe	f :	$[f] = m$	(Meter)
Änderungsrate	f' :	$[f'] = \frac{m}{h}$	(Meter pro Stunde)

5.1.2 Partielle Integration und Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

In diesem Kapitel geht es nun um die Fragestellung nach Stammfunktionen zu Logarithmus– und Exponentialfunktionen. Wir starten mit e^x, weil das am einfachsten ist: Wir wissen, dass die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion wieder sie selbst ist, also

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \,.$$

Demzufolge ist sie selbst auch eine ihrer Stammfunktionen. Es ist also leicht einzusehen, dass

$$\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + C$$

gilt. Mit ein wenig weiterem "von-hinten-durch-die-Brust-nach-vorne"-Denken können wir auch schon Varianten berechnen:

Beispiel 83

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} + C \,,$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} + C\right) = \frac{1}{\alpha}\alpha\mathrm{e}^{\alpha x} = \mathrm{e}^{\alpha x} \,,$$

was genau dem Integranten entspricht.

Beispiel 84 Die Funktion e^{x^2} besitzt zwar das unbestimmte Integral

$$\int \mathrm{e}^{x^2} \, dx$$

(was noch zu beweisen wäre...) aber keine Stammfunktion in geschlossener Darstellung.

Die Beispiele 83 und 84 zeigen, dass es keine generelle Regel zur Berechnung einer Stammfunktion zu Verknüpfungen der natürlichen Exponential– mit allgemeinen Funktionen gibt. Jede Situation muss für sich neu ausgeknobelt werden.

Betrachten wir die allgemeine Exponentialfunktion a^x. Wir wissen, dass die Ableitung durch $a^x \ln a$ gegeben ist. Suchen wir also eine Stammfunktion, so müssen wir den Faktor $\ln a$ korrigieren. Es ist demnach

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \,,$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x \,.$$

Wir können sogar schon einen Schritt weiter gehen:

Beispiel 85

$$\int a^{\beta\, x} \, dx = \frac{a^{\beta\, x}}{\beta \ln a} + C$$

Die Berechnung des unbestimmten Integrals von einer Logarithmusfunktion geht nicht so "straight forward". Wir werden zunächst einen kleinen Trick (Nr. 1!) kennenlernen, der uns in vielen Situationen auf bestechend banale Art und Weise äußerst hilfreich sein wird.

Wir wissen von der Produktregel zur Multiplikation, dass

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

gilt. Damit gilt dann auch

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

und demzufolge

$$\int u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \, dx \,.$$

Satz 5.4 Regeln der unbestimmten Integration: (Partielle Integration)

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx$$

Beweis auf Seite 146

Sie glauben gar nicht, was für ein enormes Werkzeug wir damit in der Hand haben. Wir können nun Ableitungen von einer Funktion im Produkt auf eine andere "wandern" lassen. Man nennt das im prosaischen Sprachgebrauch auch Ableitung wälzen [4].

Was bringt uns das? Sehr viel, denn wir können uns mit diesem kleinen Trick unliebsame Ausdrücke vom Hals schaffen. Zum Beispiel

Beispiel 86

$$\begin{aligned} \int x\,\mathrm{e}^x\,dx &=: \int u(x)v'(x)\,dx & u(x) &:= x\,,\ v'(x) := \mathrm{e}^x \\ &\overset{\text{pI}}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx & v(x) &= \mathrm{e}^x \\ &= x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx \\ &= x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x-1) \end{aligned}$$

Ganz ähnlich machen wir das mit dem natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= \int \ln x \cdot 1\,dx \\ &=: \int u(x)v'(x)\,dx & u(x) &:= \ln x\,,\ v'(x) := 1 \\ &\overset{\text{pI}}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx & u'(x) &= \frac{1}{x}\,,\ v(x) = x \\ &= x\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx \\ &= x\,\ln x - x = x(\ln x - 1) & &\text{voilà} \end{aligned}$$

Beispiel 87

$$\int \ln(\alpha\,x)\,dx = x(\ln(\alpha\,x) - 1) + C$$

Beispiel 88

[4] Das ist einer der Grundbausteine der Variationsformulierung, worauf der ganze Finite–Elemente Apparat aufgebaut ist.

$$\int x^2 \ln x \overset{\text{pI}}{=} \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 \, dx = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1)$$

Beispiel 89

$$\int \ln^2 x \, dx = x \, \big((\ln x - 1)^2 + 1\big)$$

Damit sind wir quasi schon für allgemeine Logarithmusfunktionen durch, denn $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ kombiniert mit der Kenntnis über Stammfunktionen des natürlichen Logarithmus führt direkt auf

$$\int \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C\,.$$

Bevor wir das Kapitel abschließen wollen wir uns noch Trick Nr. 2 der Integration einverleiben: Wir wissen, weil wir die Ableitung des Logarithmus und die Kettenregel kennen, dass

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

gilt. Wir sollten also beim Anblick des Integrals unbedingt darauf achten, ob der Integrant von obiger Form (rechts vom Gleichheitszeichen) ist.

Beispiel 90

$$\int \frac{2}{2\,x+1} \, dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln|g(x)| + C = \ln|2\,x+1| + C$$

Ob die Betragsstriche rechts nötig sind hängt vom betrachteten Definitionsbereich ab. Beim Integranten sind - wenn nichts weiter gefordert wird - alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ erlaubt. Wenn das auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ebenfalls der Fall sein sollte, so müssen die Beträge gesetzt werden.

Beispiel 91

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \, dx = \ln|\ln x| + C$$

Zu Expoenential- und Logarithmusfunktionen haben wir nun folgende Ausdrücke gesammelt:

Satz 5.5 Stammfunktionen von Exponential- und Logarithmusfunktionen :

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \log_a x \, dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$$
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln g(x) + C$$

Beweis auf Seite 146

5.1.3 Stammfunktionen von trigonometrischen Funtkionen und unbestimmte Integration durch Substitution

Die Stammfunktionen der Trigonometrischen Funktionen können wir nun aus all unserem bisherigen Wissen herleiten. Es ist ganz einfach. Wir wissen, dass $\sin' x = \cos x$. Daraus folgt direkt, dass

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

gilt. Und genauso

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C\,.$$

Zur Behandlung der Tangensfunktionen holen wir zunächst ein wenig aus und betrachten die Integrationsmethode der Substitution. Dieser Methode zugrunde liegt die Kettenregel der Differentiation.

Satz 5.6 (Substitutionsregel) *Es sei F eine Stammfunktion von f. Man substituiere gemäß $x = g(t)$. Dann ist $dx = g'(t)\, dt$ und es gilt*

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(t))g'(t) \, dt = F(g(t)) + C\,.$$

Beweis Satz 5.6 auf Seite 148

Es stellt sich nun natürlich die berechtigte Frage "Warum sollte man das tun, wenn eine Stammfunktion doch schon gegeben ist?" Dann kann man doch direkt das Integral auf der linken Seite im Satz 5.6 berechnen. In der Praxis ist es aber so, dass das vorliegende Integral mit $\int f(g)g'\,dt$ korrespondiert und man versucht, es in Form $\int f\,dx$ zu bringen; gerade weil man dort eine Stammfunktion zur Hand hat. Verstehen Sie? Wir machen ein paar Beispiele.

Beispiel 92

$$\int (2-3t)^4\,dt \qquad \text{Substitution:} \quad \begin{aligned} g &= 2-3t \\ dg &= -3\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\int g^4\,dg \\ &= -\frac{1}{15}g^5 + C \\ &= -\frac{1}{15}(2-3t)^5 + C \end{aligned}$$

Beispiel 93

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx \qquad \text{Substitution:} \quad \begin{aligned} s &= x-1 \\ ds &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{s+1}{s}\,ds = \int 1 + \frac{1}{s}\,ds \\ &= s + \ln|s| + C = x - 1 + \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Beispiel 94

Wenn es bis auf einen konstanten Faktor nicht passt ...

$$\int x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,dx$$

... dann macht man sich den einfach passend!

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\,dx \qquad \text{Substitution:} \quad \begin{aligned} t &= x^3 \\ dt &= 3x^2\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^t\,dt \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^t + C \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C \end{aligned}$$

Mit $f(x) := \sin x$ gilt

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C = \ln|\sin x| + C \,.$$

Stammfunktionen der Tangensfunktion erhalten wir auf analoge Weise und die Umkehrabbildungen behandeln wir wieder mit der Partiellen Integration. Es ist

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{v} \, dx &= u\,v - \int u\,v' \\
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \arcsin x - \int x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx \\
&= x \arcsin x + \int \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' \, dx \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v} \, dx &= u\,v - \int u\,v' \\
&= x \, \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= x \, \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C \,.
\end{aligned}$$

$\arccos$ und $\arctan$ werden auf analoge Weise behandelt und dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen. Wir fassen alles zusammen:

Satz 5.7 Stammfunktionen von Trigonometrischen Funktionen :

$$\begin{aligned}
\int \sin x \; dx &= -\cos x + C & \int \arcsin x \; dx &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \\
\int \cos x \; dx &= \sin x + C & \int \arccos x \; dx &= x \; \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \\
\int \tan x \; dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \arctan x \; dx &= x \; \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
\int \cot x \; dx &= \ln|\sin x| + C & \int \operatorname{arccot} x \; dx &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

5.2 bestimmte Integration (Riemann-Integral)

5.2.1 Einführung über Flächen unter Graphen

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ eine in $[a, b]$ stetige und nicht negative Funktion. Wir wollen den Flächeninhalt A berechnen, der von f, der x–Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird. (s. Abb. 16)

Wir nähern uns an den gesuchten Flächeninhalt und zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle mit $a = x_0$ und $b = x_n$:

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x2] \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

Jedes Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ hat eine Länge von $\frac{b-a}{n}$. Wir bezeichnen nun auf jedem Teilintervall das Minimum und das Maximum, das die Funktion f jeweils annimmt mit

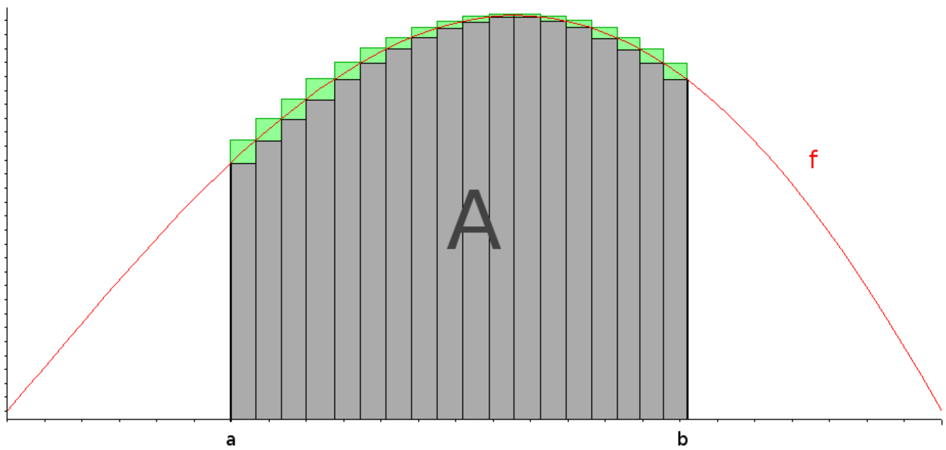


Abbildung 16: Bildung von Teilintervallen zur approximativen Flächenberechnung

$$m_i := \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x_i)$$

und

$$M_i := \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x_i) \,.$$

Wir bilden nun Obersumme S_n und Untersumme s_n. s_n beschreibe den Flächeninhalt der grauen Flächenanateile in Abbildung 16 und S_n den der grauen und grünen Flächeninahlte zusammen. Dann gilt für die beiden Summen:

$$S_n := M_0 \frac{b-a}{n} + \cdots + M_{n-1} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

$$s_n := m_0 \frac{b-a}{n} + \cdots + m_{n-1} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

Ober- und Untersumme sind näherungsweise Berechnungen, sogenannte Approximationen des gesuchten Flächeninhalts. S_n beinhaltet nun etwas weniger und s_n etwas mehr Fläche als die gesuchte, denn es gilt

$$s_n \leq A \leq S_n \, .$$

Die Idee ist nun, dass die Approximationen besser werden je mehr Stützstellen x_i, bzw. größer wir n wählen. Bilden wir nun den Limes über Ober- und Untersumme getrennt voneinander und konvergieren beide, und zwar mit dem gleichen Grenzwert, so sagen wir *das bestimmte Integral existiert*. Wir bezeichnen es dann - und nur dann - mit dem "Schlange-Symbol" :)

Wir fassen das zusammen:

Definition 5.8 (Riemann-Integral) *Für die Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ und die Zerlegung des Intervalls*

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

seien mit

$$(m_i, M_i) := (\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x))$$

die Folgen "Obersumme S_n" und "Untersumme s_n"

$$S_n := \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

$$s_n := \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

gegeben. Haben die Summen S_n und s_n einen gemeinsamen Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} s_n = A$$

so heißt f Riemann–integrierbar oder R–integrierbar und das bestimmte Integral der Funktion f von a bis b

$$A = \int_a^b f(x) \; dx$$

heißt Riemann–Integral.

Beispiel 95 Riemann-Integral

Wir suchen die Fläche unter dem Graphen

$$\begin{aligned} f\ :\ [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in n Teilintervalle gemäß

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] .$$

f nimmt jeweils die Minima und Maxima

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n} \right)^2$$

und

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{i+1}{n} \right)^2$$

an.

Daraus ergeben sich Unter- und Obersumme wie folgt:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} \overset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{= \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}} - 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n\,(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=1+1+1+\ldots=n} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} \left(n\,(n+1)\,(2\,n+1) - 6\,n\,(n+1) + 6 \right) \\ &\overset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$$

und somit lautet das Riemann-Integral, bzw. das bestimmte Integral

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\,.$$

Wir sind uns sicher einig, dass diese Rechnung nun recht mühsam war; und das obwohl der Integrant von recht einfacher Form ist.

Wie können wir "elegant" bestimmte Integrale berechnen? Hier kommt nun der Zusammenhang zwischen unbestimmtem Integral aus dem letzten Kapitel mit dem bestimmten Integral dieses Kapitels zum Tragen. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Integralbegriffen wird durch den nachfolgenden Satz beschrieben, der einer der Kernaussagen in der Analysis darstellt. Wichtige Sätze haben Namen und so auch dieser:

Satz 5.9 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)) *Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b$$

gegeben.

Erklärung auf Seite 147

Dieser Zusammenhang ist nicht direkt ersichtlich. Den Beweis dieses Satzes besprechen wir nicht aber wir können uns den Sachverhalt plausibel machen. Um der Plausibilitätserklärung etwas mehr Klarheit zu verschaffen, bedarf es noch einer speziellen Regel für bestimmte Integrale:

Satz 5.10 Regeln der bestimmten Integration: (Zerlegung des Integrals) *Das Integral auf* $[x_0, x_n]$ *läßt sich in die Summe von* n *Integralen auf nicht notwendigerweise äquidistante Teilintervalle* $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, \dots, n-1)$ *mit* $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ *zerlegen:*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

Stetige Funktionen sind Riemann–integrierbar. Das heißt aber nicht, dass nicht stetige Funktionen nicht Riemann–integrierbar sind. Nur eben nicht alle. Bei abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen kann man das Integral so zerlegen, dass wieder nur stetige Funktionen als Integranten auftreten.

Obacht ist geboten wenn an den Unstetigkeitsstellen Polstellen vorliegen. Dann handelt es sich nämlich um ein uneigentliches Integral. Wie diese genau definiert und zu behandeln sind werden wir in Kapitel 5.2.2 besprechen.

Wir können also Berechnungen von bestimmten Integralen auf Berechnungen von Stammfunktionen zurückführen.

Das ist nicht selbstverständlich. Überlegen Sie sich das mal! Der HDI gibt uns eine Möglichkeit an die Hand, bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen elegant zu berechnen. Leider sind wir nicht immer in der Lage zu einer gegebenen Funktion, die prinzipiell R-integrierbar ist, eine Stammfunktion in geschlossener Form hinzuzuschreiben[5]. Anders als bei der Differentiation gibt es bei der Integration nicht ein Sammelsurium an klar umrissenen Methoden, von denen man weiß welche in welcher Situation passend ist und die dann auch sicher zum Ziel führt. Wir sagen deshalb, dass Integrieren eine Kunst ist.

Beispiel 96 Riemann-Integral, Bsp 95

[5] Ist nun die Stammfunktion zu f nicht bekannt, wie etwa bei $\int e^{x^2}\, dx$, so kann diese Näeherungsweise über sogenannte Quadraturformeln berechnet werden. Quadraturformeln sind spezielle, endliche Summenformeln, die je nach Charakteristika von f aufgestellt werden und mehr oder weniger gute Approximationseigenschaften haben. Es gibt Quadraturformeln, die sind exakt, das heißt sie stellen den Integralwert ohne Fehler über eine endliche Summe dar. Cool, oder? Ist aber Thema der Numerik.

Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0, x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Es ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

eine Stammfunktion. Damit und dem HDI berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Das ging doch deutlich schneller.

Bemerkung 5.2. *Wegen des HDI (Satz 5.9) können wir natürlich auch die Berechnung der Stammfunktion auf die Berechnung des bestimmten Integrals zurückführen, für den Fall, was doch spürbar häufig vorkommt, dass eine Stammfunktion in geschlossener Darstellung nicht bekannt ist:*

$$F(x) = \int_a^x f(y)\ dy + F_a$$

Wie immer sind Rechenregeln nötig, je mehr desto besser. Über die Kopplung des HDI können wir nun die bereits bekannten Regeln der unbestimmten Integration auf die der bestimmten Integration übertragen. Es gilt nämlich für Stammfunktionen F von f, G von g und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx &\overset{\text{HDI}}{=} \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a)\\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a))\\ &\overset{\text{HDI}}{=} \alpha\int_a^b f(x)\ dx + \beta\int_a^b g(x)\ dx\,.\end{aligned}$$

Satz 5.11 Regeln der bestimmten Integration: (Linearität des bestimmten Integrals)
Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha\int_a^b f\ dx + \beta\int_a^b g\ dx\,.$$

Beweis s.o.

Auch die partielle Integration der unbestimmten Integration lässt sich nun direkt auf das bestimmte Inregral mittels

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

übertragen. Wir fassen zusammen:

Satz 5.12 Regeln der bestimmten Integration: (Partielle Integration)
Für $g, f \in C^1((a,b))$ gilt

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx\,.$$

Wollen wir die Regel der Substitution auf bestimmte Integrale übertragen so müssen wir noch die Integrationsgrenzen im Auge behalten.

Satz 5.13 (Substitutionsregel) *Mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)\ dt$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\ dt\,.$$

Beweis von Satz 5.13 auf Seite 149

Beispiel 97

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \; dx \qquad\qquad g(x) = 2(x+1)$$

$$g'(x) = 2$$
$$f(x) = x^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 f(g(x))g'(x) \; dx = \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(2)} f(g) \; dg$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^6 g^2 \; dg = \frac{1}{6}\left[g^3\right]_2^6 = \frac{1}{6}\left(6^3 - 2^3\right) = \frac{104}{3}$$

- Bei der Transformation

$$g : [-1,3] \to [0,1]$$
$$x \mapsto (x+1)\frac{1}{4}$$

findet sowohl eine Translation als auch eine Stauchung des Gebietes statt. Der Graph muss diese Transformation "mitmachen", d.h. $f(x)$ wird durch $f(g(t))$ ersetzt. Wird das Integrationsgebiet verschoben so verschieben wir eben auch den Graphen. Bei eine Streckung oder Stauchung muss der neu entstandene Integrant noch einen Korrekturfaktor erhalten, der die Verfälschung des Integrationsgebietes wieder "gut" macht. Das bewirkt $g'(t)$. Ist g eine Stauchung, so wird g' klein sein, andernfalls groß. In diesem Beispiel staucht g das Intervall $[-1,3]$ auf $[0,1]$ zusammen. Das unten stehende rechte Integrationsgebiet ist größer und muss demzufolge nach "unten" korrigiert werden und zwar genau um den Stauchungsfaktor $\frac{1}{4}$. Daraus erhalten wir die Formel

$$\int_{0=g(-1)}^{1=g(3)} f(x) \; dx = \int_{-1=g^{-1}(0)}^{3=g^{-1}(1)} f\left(\frac{1}{4}(x+1)\right)\frac{1}{4} \; dt$$

- Wir habe also ein Integral der Form

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) \; dt$$

vorliegen. Wir suchen nun ein "gutes" g. Wie wir g wählen ist im Grunde egal, so lange es sich um eine invertierbare Funktion handelt. Wichtig ist nur, dass die Funktion f, die wir damit erhalten von einer Form ist, deren Stammfunktion wir kennen. Wir ersetzen dann $g'(t)\,dt$ durch dg und sorgen dafür, dass kein t mehr im Integrant auftaucht. Zu berechnen haben wir dann

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(g)\,dg = F(g(b)) - F(g(a))$$

Ein typischer Fehler bei der Anwendung der Substitutionsregel ist, die falschen Integrationsgrenzen zu verwenden: Entweder wir machen eine Rücktransformation und verwenden die Originalgrenzen oder aber wir werten die Stammfunktion des transformierten Integranten aus und wählen dann auch die transformierten Integrationsgrenzen!!!

Wollen wir nun tatsächlich Flächeninhalte berechnen können wir uns also getrost des bestimmten Integrals bedienen und dazu unsere Kenntnisse bei der Ermittlung von Stammfunktionen verwenden. Aufpassen müssen wir nun nur noch auf das Vorzeichen, denn das bestimmte Integral erhält ein negatives Vorzeichen für Bereiche auf denen f negativ ist. Siehe Abbildung 17. Wir müssen also darauf achten, ob lediglich ein Integral berechnet werden soll oder wirklich nach dem Flächeninhalt gefragt wurde. Ein Flächeninhalt ist immer etwas positives.

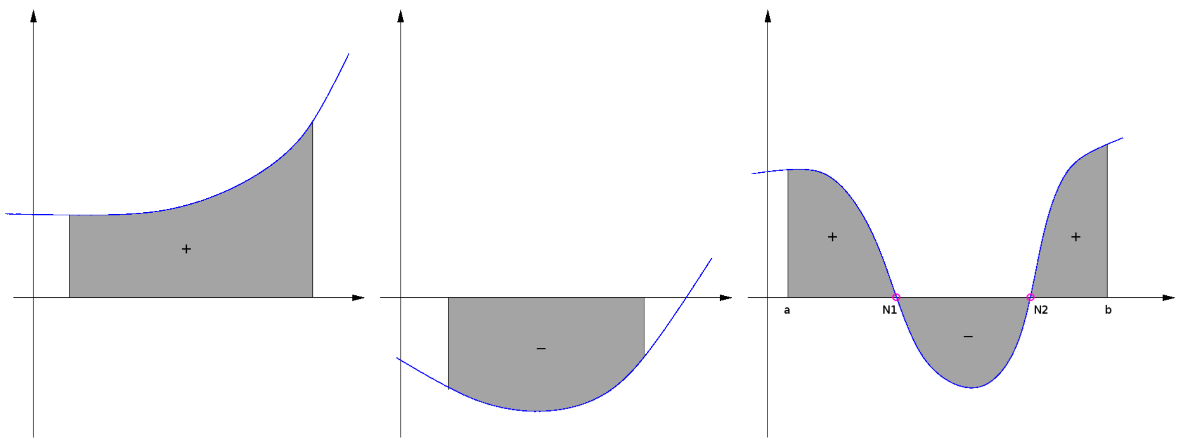


Abbildung 17: Vorzeichen bei der Flächenberechnung

Im Beispiel ganz rechts von Abbildung 17 müssen zunächst die Nullstellen der Funktion bestimmt werden. Durch Einsetzen von Werten links und rechts der Nullstellen, stellen wir fest in welchen Bereichen die Funktion positiv und in welchen negativ ist. Den gesuchten Flächeninhalt berechnen wir, indem wir Integrale über die einzelnen Bereiche berechnen, mit entsprechenden Vorzeichen versehen und dann aufaddieren:

$$A = \int\limits_{a}^{N1} f(x)\,dx - \int\limits_{N1}^{N2} f(x)\,dx + \int\limits_{N2}^{b} f(x)\,dx$$

Beispiel 98

1. Der Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist wird so berechnet: Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionen:

$$f(x) - g(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(1-x) = 0$$

Dazwischen gilt

$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5)\,.$$

Also erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt, indem wir vom Flächeninhalt unter f den unter g subtrahieren (siehe Abbildung 18:

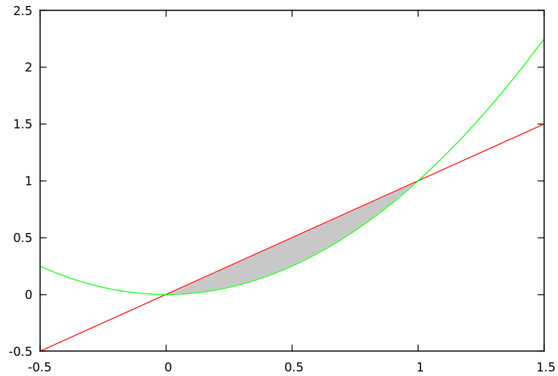


Abbildung 18: Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2. Welchen Flächeninhalt hat das durch folgende Ungleichungen beschriebene Gebiet?

$$2y \geq x^3 \qquad \wedge \qquad y \leq 4.5x \qquad \wedge \qquad x \geq 0$$

Die entsprechende Fläche ist in Abbildung 19 dargestellt. Wir machen an dieser Stelle das Gleiche wie in Beispiel 2, nur, dass wir noch $x \geq 0$ berücksichtigen müssen. Wie lauten die beteiligten Funktionen?

$$f(x) = 4.5x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^3$$

Wo sich die beiden Funktionen schneiden finden wir durch Lösen der Gleichung

$$f(x) - g(x) = 4.5x - \frac{1}{2}x^3 = x(4.5 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x(9 - x^2) = \frac{1}{2}x(3-x)(3+x) = 0\,.$$

Ein Kinderspiel also, denn die gesuchten Werte x sollen positiv sein. $f(1) > g(1)$. Damit erhalten wir nun den gesuchten Flächeninhalt

$$A = \int_0^3 4.5x - \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^3 = \frac{81}{8}\,.$$

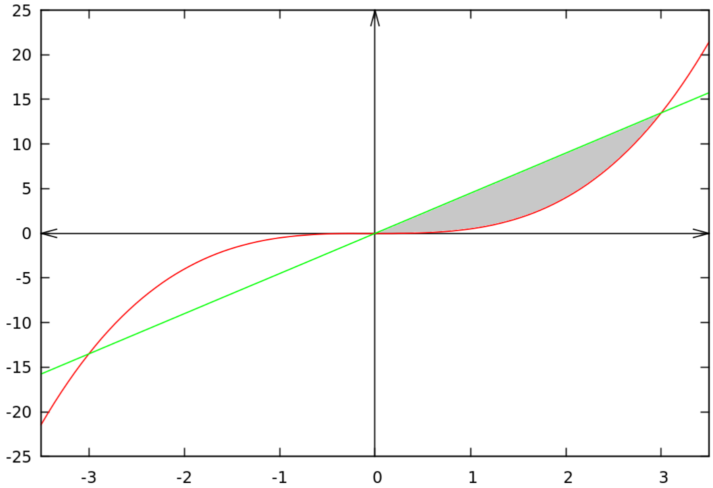


Abbildung 19: Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

Berechnung von Fächeninhalten: Der Flächeninhalt A, der Fläche, die von den zwei Graphen f, g und den vertikalen Geraden durch a und b eingeschlossen wird lautet

$$A = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)| \, dx \, .$$

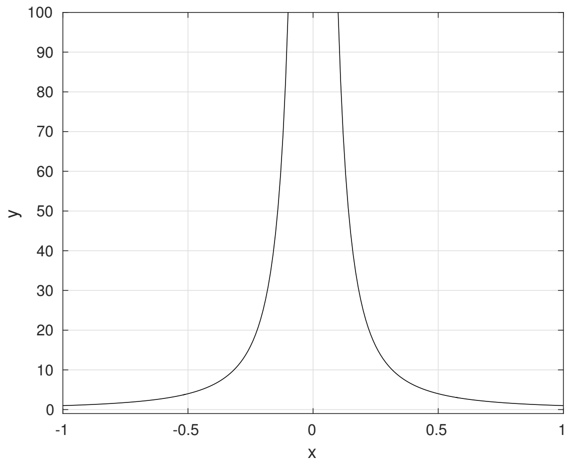
Dabei ist $x_0 = a$, $x_N = b$ und x_j so, dass $f(x_j) = g(x_j)$ für $j = 1, \ldots, N-1$.

5.2.2 uneigentliche Integrale

Wir erinnern uns an die Herleitung des bestimmten Integrals über den Grenzwert von Folgen aus Ober- und Untersumme in Kapitel 5.2.1. Das Integral ist nur dann erklärt, wenn die entsprechenden Grenzwerte exisiteren und übereinstimmen. Dann haben wir über den HDI in Satz 5.9 festgestellt, dass wir zur Berechnung des bestimmten Integrals das unbestimmte, bzw. die Berechnung von Stammfunktionen hinzuziehen können. So. Das war eine gute Idee, weil wir uns damit sehr viel Rechenaufwand erpart haben. Nun kann es aber leicht passieren, dass man bei der ganzen Rechnerei diese unbedingte Eigenschaft "Grenzwert existiert" ein wenig übersieht.

Beispiel 99 Falsche Rechnung!!! Zum Beispiel könnte einem so eine Rechnung passieren:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$



Wir können mithilfe der Abbildung rechts vermuten, dass dieses Ergebis nicht richtig sien kann. Überdies ist ein neagtives Ergebnis eigentlich nicht möglich, wenn wir eine nicht negative Funktion integrieren. Der Fehler, der im Beispiel 99 gemacht wurde, ist der, dass das Integral gar nicht existiert und in Folge dessen auch gar nicht definiert ist.

Wann immer bei einem bestimmten Integral der Form

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

irgendwas "unendlich" ist, sprechen wir von uneigentlicher Integration. Es könnte etwa sein, dass entweder $a = -\infty$ oder $b = \infty$ ist oder aber die Funktion f an einer Stelle $\eta \in [a, b]$ nicht existiert. Die Frage, die sich dann stellt ist die Frage nach der Existenz des Integrals oder anders formuliert, danach, ob das angegebene uneigentliche Integral einen beschränkten Wert hat. A-priori ist das nicht klar sondern muss in jedem Fall speziell untersucht werden.

Zunächst ein Beispiel:

Beispiel 100 Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx$$

konvergiert für $s < 1$. Denn:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^s}\, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \frac{\epsilon^1}{\epsilon^s}\right) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \frac{\epsilon^1}{\epsilon^s}\right) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty & s > 1 \\ [\ln x]_\epsilon^1 = -\ln \epsilon \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty & s = 1 \end{cases}$$

Definition 5.14 (uneigentliches Integral)

1. *Sei* $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die über jedem Intervall* $[a, R]$, $a < R < \infty$ *Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert* $\lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\ dx$ *existiert, heißt das Integral*
$$\int\limits_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\ dx$$
konvergent. *Analog definiert man das Integral für* $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

2. *Sei* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die über jedem Teilintervall* $[a + \epsilon, b]$, $a < a + \epsilon < b$, *Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert* $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)\ dx$ *existiert, so heißt das Integral*
$$\int\limits_a^b f(x)\ dx := \lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)\ dx$$
konvergent. *Analog definiert man das Integral für* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

3. *Sei* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die über jedem Teilintervall* $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ *Riemann–integrierbar ist und sei* $c \in]a, b[$ *beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale*
$$\int\limits_a^c f(x)\ dx = \lim_{\alpha\searrow a} \int\limits_\alpha^c f(x)\ dx$$
und
$$\int\limits_c^b f(x)\ dx = \lim_{\beta\nearrow b} \int\limits_c^\beta f(x)\ dx$$
existieren, heißt das Integral
$$\int\limits_a^b f(x)\ dx := \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$$
konvergent. *Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von* $c \in]a, b[$.

Beispiel 101 In Beispiel 100 haben wir festgestellt, dass das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

nur für $s < 1$ konvergiert. Wie sieht es nun aus mit dem Integral

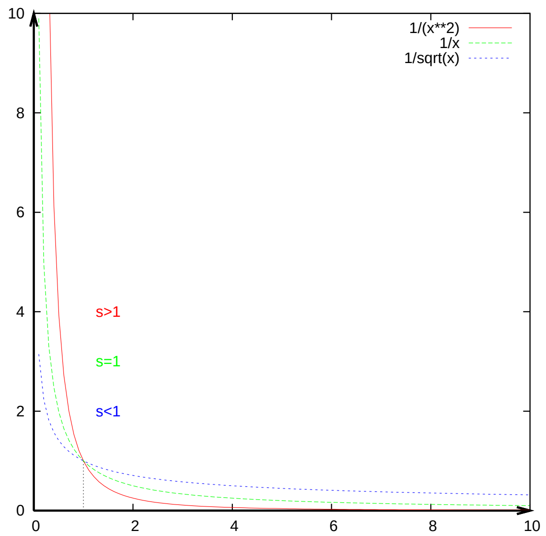
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx\,?$$

$$\int_1^c \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^c & = \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s}-1\right) \quad \xrightarrow{c\to\infty} \infty \quad s<1 \\ \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^c & = \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s}-1\right) \quad \xrightarrow{c\to\infty} \frac{-1}{1-s} \quad s>1 \\ \left[\ln x\right]_1^c & = \ln c \quad \xrightarrow{c\to\infty} \infty \quad s=1 \end{cases}$$

Wir fassen beide Ergebnisse zusammen:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & \text{für} \quad s<1 \\ \infty & \text{für} \quad s>1 \\ \infty & \text{für} \quad s=1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad s<1 \\ \frac{-1}{1-s} & \text{für} \quad s>1 \\ \infty & \text{für} \quad s=1 \end{cases}$$



Es dürfte klar sein, dass das Integral bis ins Unendliche über eine, sagen wir positive Funktion nicht existiert, falls die Funktion im Unendlichen nicht verschwindet. Dies ist eine notwenige aber nicht hinreichende Bedingung.

Im obigen Beispiel verschwinden die Funktionen für jede Wahl von s und x gegen unendlich. Dennoch existiert nicht jedes Integral.

Beispiel 102 Cauchyscher Hauptwert

In Beispiel 100 haben wir festgestellt, dass die Integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$$

jeweils nicht existieren. Jetzt machen wir einmal Folgendes: Wir zerlegen den integrationsbereich $[-1,1]$ in $[-1,-b] \cup [b,1]$ und bilden dann den Limes $b \searrow 0$:

$$\lim_{b\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\right) = \lim_{b\searrow 0} \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - 1 + 1 - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

Und plötzlich existiert da "was". Das scheint im Widerspruch zu dem zu stehen, was wir vorher gezeigt haben.

Erinnern Sie sich an die Grenzwertregeln im vergangenen Semester. Der Limes über die Summe zweier Funktionen ist nur dann gleich der Summe der Limes der jeweiligen Funktionen, wenn diese konvergieren. Also

$$\lim_{x\to a} f(x) < \infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} g(x) < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Bei unserem Beispiel gilt aber

$$\lim_{b\searrow 0} \int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx = \infty \quad \wedge \quad \lim_{b\searrow 0} \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = -\infty$$

und die Konvergenz dieser beiden Limes war Voraussetzung bei der Definition des Uneigentlichen Integrals. Daher folgt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \overset{!!!}{\neq} \lim_{b\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\right).$$

Der Limes der Summe der Funktionen, sofern er existiert, heißt *Cauchyscher Hauptwert*.

Wenn man Grenzwerte sucht und berechnen will sollte man unbedingt einen äußerst wertvollen Trick kennen, nämlich:

Satz 5.15 von de l'Hospital *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall (a,b) und $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:*

- $\lim_{x\searrow a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\searrow a} g(x) = 0$ *oder*
- $\lim_{x\searrow a} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\searrow a} g(x) = \pm\infty$.

Dann ist

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Limes existiert. Das Analoge gilt für $x \nearrow b$.

Beweis auf Seite 148

Unter Umständen ist es notwendig die Regel von de l'Hospital mehrfach hintereinander auszuführen.

Beispiel 103 Grenzwertberechnung mit de l'Hospital, geht dann meist ziemlich fix:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n\,x^n} = 0$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n\,x^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n!} = \infty$$

Folgerung: *Der Logarithmus wächst langsamer als noch eine noch so kleine Potenz von x und die Exponentialfunktion wächst schneller als eine noch so größe Potenz von x.*

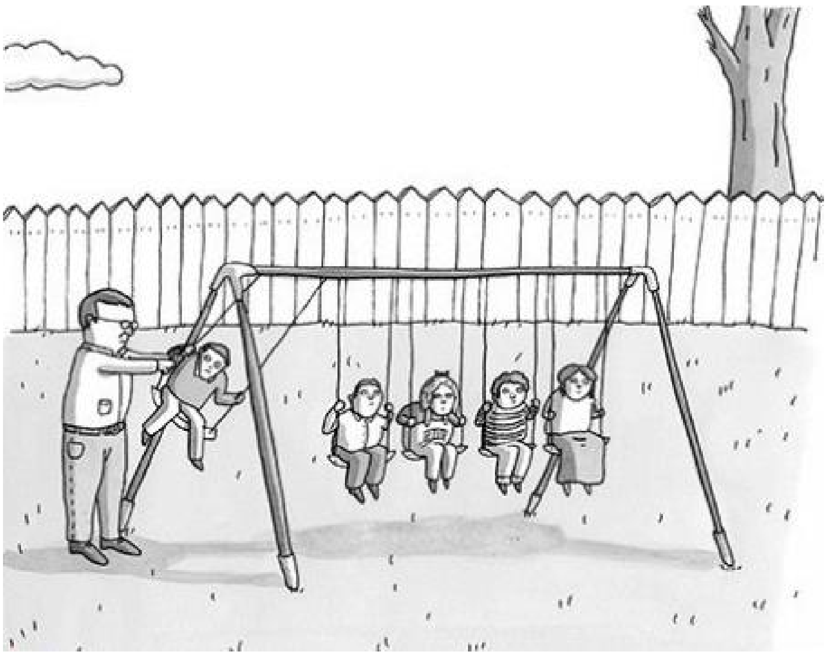
5.3 Zusammenfassung für Stammfunktionen

Potenzfunktion	Spezialfälle
$\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1}\, x^{r+1} + C$	$\int 1\, dx = x + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\, \sqrt{x}^3 + C$
Exponential- und Logarithmusfunktion	
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int \log_a x\, dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$	$\int \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e}^x + C$ $\int \ln x\, dx = x\,(\ln x - 1) + C$
trigonometrische Funktion	
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\int \tan x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$ $\int \cot x\, dx = \ln\|\sin x\| + C$	$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ $\int \arccos x\, dx = x\, \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ $\int \arctan x\, dx = x\, \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ $\int \operatorname{arccot} x\, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
Linearität der Integration	
$\int \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\, dx = \alpha\, \int f(x)\, dx + \beta\, \int g(x)\, dx$	
partielle Integration	
$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$	
Substitution/Transformationsformel	
$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C\,, \quad F'(x) = f(x)$	
HDI: Hauptsatz der Differentiation und Integration	
$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,, \quad F'(x) = f(x)$	

Mit dem Taylorpolynom Kurven ertasten 6

Wir behandeln:

- Mit einem Taylorpolynom ersetzen wir komplizierte Funktionsausdrücke.
- Konvergenz von Reihen und Konvergenzradius von Taylorreihen:
  Kann man das immer machen?
- Restgliedabschätzung:
  Wie gut ist das Taylorpolynom und was bedeutet "gut" eigentlich?



Eine Situation, die sehr häufig auftritt ist die, in der wir es mit einer viel zu komplizierten Funktion zu tun haben. An dieser Stelle sind wir uns sicher einig. Was nun "zu kompliziert" bedeutet hängt von der Situation ab. Vielleicht verhält es sich gerade so, dass wir das unbestimmte Integral

$$\int \cos\left(x^2\right)\ dx$$

berechnen wollen, was sich als besonders schwierig herausstellt, da sich die Stammfunktion des Integranten $\cos\left(x^2\right)$ nicht in geschlosseneer Form darstellen lässt. Die Idee ist nun diesen etwas unhandlichen Funktionsausdruck durch ein Polynom, ein sogenanntes Taylorpolynom, zu ersetzen. Die Idee ist erst mal gut, da wir mit einem Polynom problemlos allerlei Rechnungen durchführen können. Eine komplizierte Funktion durch ein einfaches Polynom ersetzen ist natürlich etwas, was wir nicht geschenkt kriegen: Wir machen einen Fehler. Noch schlimmer: Manchmal geht das auch gar nicht.

Konzentrieren wir uns zunächst darauf wie der Trick funktioniert, d.h. wie berechnet man ein Taylorpolynom. Dann betrachten wir auch Beispiele des Misserfolgs und anschließend schauen wir uns an, was wir für den Spaß bezahlen müssen, d.h. welchen Fehler machen wir dabei?

6.1 Das Taylorpolynom

Es sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Wir suchen ein Polynom $T_{f,n}(x, x_0) \in \mathbb{P}_n$, welches in der Nähe von $x_0 \in I$ die Funktion f näherungsweise gut beschreibt.

Bei der Entwicklung eines Taylorpolynoms ist der Ausgangspunkt der, dass wir an einem sogenannten Entwicklungspunkt x_0 fordern, dass das approximierende Polynom T und die zu approximierende Funktion f übereinstimmen:

$$T(x_0) = f(x_0)$$

Betrachten wir den einfachsten Fall für einen exemplarischen Fall:

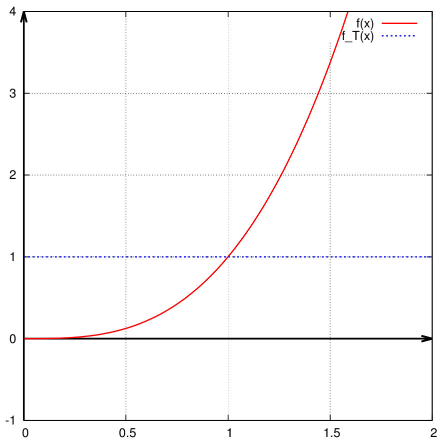


Abbildung 20: $T_{f,0}(x, 1)$ für $f(x) = x^3$

Wir wollen die Funktion $f(x) = x^3$ bei $x_0 = 1$ durch eine konstante Funktion approximieren.

$$T_{f,0}(x, 1) = 1$$

erfüllt die Eigenschaft $T_{f,0}(1, 1) = f(1) = 1$ und damit ist $T_{f,0}(x, 1) = 1$ eine gute Approximation in einem kleinen Bereich. Nahe bei $x_0 = 1$ ist der Fehler klein (s. Abb. 20).

Die Approximation ist augenscheinlich nicht gut genug. Schön wäre noch, wenn nicht nur der Wert bei x_0 übereinstimmt sondern auch die erste Ableitung. Wir bilden den Differenzenquotient für dir erste Ableitung bei $x = x_0$:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dann erhalten wir eine Näherung für f durch

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

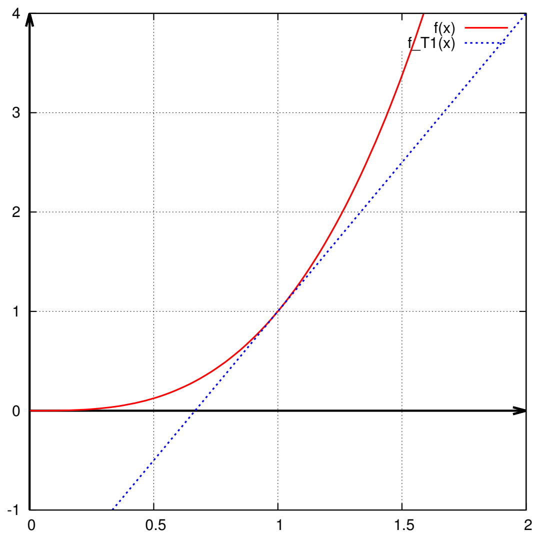


Abbildung 21: $T_{f,1}(x, 1)$ für $f(x) = x^3$

Wir definieren für das Polynom vom Grad 1:

$$T_{f,1}(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \in \mathbb{P}_1$$

Dafür gilt, dass Funktionswert und erste Ableitung bei x_0 von f und $T_{f,1}$ übereinstimmen:

$$T_{f,1}(x_0, x_0) = f(x_0) \qquad \text{und} \qquad T'_{f,1}(x_0, x_0) = f'(x_0)$$

Beispiel 104 An unserem Beispiel, dargestellt in Abbildung 21 mit $x_0 = 1$ sieht das so aus:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f'(1) &= 3 \\ T_{f,1}(x, 1) &= 1 + 3\,(x - 1) = 3\,x - 2 \end{aligned}$$

Es gilt für $T_{f,1}(x, 1)$

$$\begin{aligned} T_{f,1}(1, 1) &= 3 - 2 = 1 = f(1) \\ T'_{f,1}(1, 1) &= 3 = f'(1) \end{aligned}$$

Das ist schon gar nicht schlecht aber wir kriegen den Hals nicht voll und wollen noch mehr. Es sollte sich die Approximation noch besser an die Kurve bei $(x_0, f(x_0))$ anschmiegen. Wir fordern daher noch, dass

$$T''_{f,2}(x_0, x_0) = f''(x_0)$$

gilt. Wir setzen für ein beliebiges $a_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$T_{f,2}(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2$$

an und bstimmen die Konstante a_2 so, dass unser Wunsch erfüllt wird. Damit erhalten wir

$$T''_{f,2}(x_0, x_0) = f''(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_2 = \frac{1}{2}\, f''(x_0)\,.$$

Mit

$$T_{f,2}(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

gilt nun:

$$\begin{aligned} T_{f,2}(x_0, x_0) &= f(x_0) \\ T'_{f,2}(x_0, x_0) &= f'(x_0) \\ T''_{f,2}(x_0, x_0) &= f''(x_0) \end{aligned}$$

Beispiel 105 Für unser Beispiel, dargestellt in Abb. 22 sieht das so aus:

$$\begin{aligned} T_{f,2}(x, 1) &= 1 + 3\,(x - 1) + \frac{1}{2}\,6\,(x - 1)^2 \\ &= 3\,x^2 - 3\,x + 1 \end{aligned}$$

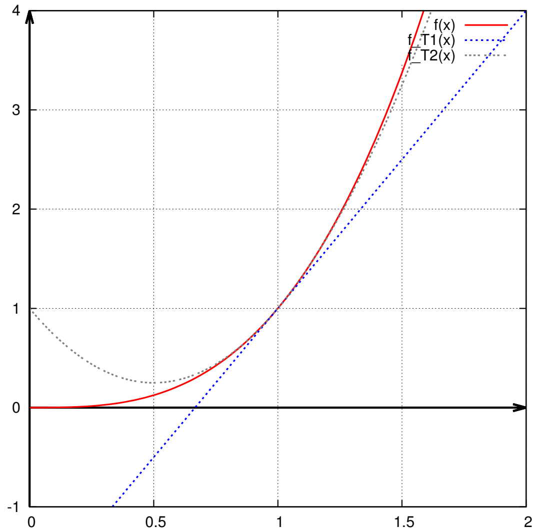


Abbildung 22: $T_{f,2}(x, 1)$ für $f(x) = x^3$

Wir wollen nun diese Vorgehensweise auf beliebige Ableitungsordnungen erweitern und setzen dazu die Funktion

$$T_{f,n}(x, x_0) = f(x_0)\,\underbrace{(x - x_0)^0}_{\in \mathbb{P}_0} + f'(x_0)\,\underbrace{(x - x_0)^1}_{\in \mathbb{P}_1} + \cdots + a_n\,\underbrace{(x - x_0)^n}_{\in \mathbb{P}_n}\,.$$

Die n-te Ableitung dieser Funktion ist gerade die n-te Ableitung des letzten Terms in $\mathbb{P}_n$, da alle anderen Terme verschwinden. Es gilt also

$$\begin{aligned} T^{(n)}_{f,n}(x, x_0) &= (a_n\,(x - x_0)^n)^{(n)} \\ &= \left(a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}\right)^{(n-1)} \\ &= \left(a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}\right)^{(n-2)} \\ &\;\;\vdots \\ &= a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 1 \cdot (x - x_0)^0 \\ &= n!\, a_n\,. \end{aligned}$$

Damit können wir schlussendlich die Konstante a_n bestimmen:

$$T^{(n)}_{f,n}(x, x_0) = f^{(n)}(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)$$

Wir halten dieses wertvolle Ergebnis fest:

Definition 6.1 (Taylorpolynom) *Für eine in $x_0 \in I$ n–mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt das Polynom*

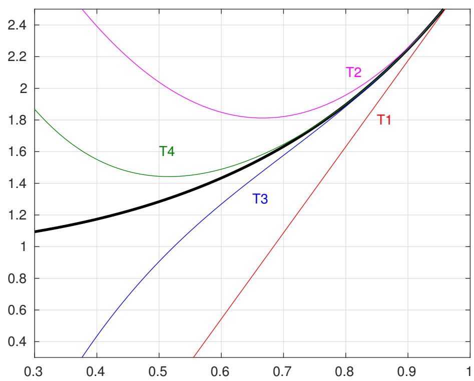
$$T_{f,n}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das Taylorpolynom *der Ordnung n von f an der Stelle x_0.*

Diesen Prozess können wir an allen Funktionen f für beliebig viele Ableitungen n durchführen, sofern die Funktion an der Stelle x_0 auch n-mal differenzierbar ist.

Beispiel 106 Taylorpolynom Wir berechnen $T_{f,i}(x, 1)$, $i = \{1, 2, 3, 4\}$ zur Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.



Ist die Funktion f gar ∞-oft differenzierbar, so kann man auch die entsprechende Reihe bilden:

Definition 6.2 (Taylorreihe) *Sei $f \in C^\infty(I)$. Dann heißt die Potenzreihe*

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die Taylorreihe *der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0. Wir sagen die Funktion ist* taylorentwickelbar, *wenn $f(x) = T_f(x, x_0)$ gilt.*

Beispiel 107

1. $$f(x) = \sin x$$

   entwickelt um $x_0 = 0$: Wie lautet die n–te Ableitung der Sinusfunktion bei $x = 0$?

$$\begin{aligned}
\sin^{(1)}(0) &= \cos(0) = 1 & \sin^{(2)}(0) &= -\sin(0) = 0\\
\sin^{(3)}(0) &= -\cos(0) = -1 & \sin^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0\\
\sin^{(5)}(0) &= \cos(0) = 1 & \sin^{(6)}(0) &= -\sin(0) = 0\\
\sin^{(7)}(0) &= -\cos(0) = -1 & \sin^{(8)}(0) &= \sin(0) = 0\\
&\vdots & & \\
\sin^{(4n-3)}(0) &= 1 & \sin^{(4n)}(0) &= 0\\
\sin^{(4n-1)}(0) &= -1 & \sin^{(4n-2)}(0) &= 0\\
&\vdots & & \\
\sin^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n & \sin^{(2n)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

   Daraus ergibt sich die Taylorreihe (siehe Abbildung 23)

$$T_{\sin}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

2. Wir entwickeln die Funtkion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

   mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ um $x_0 \neq 1$:

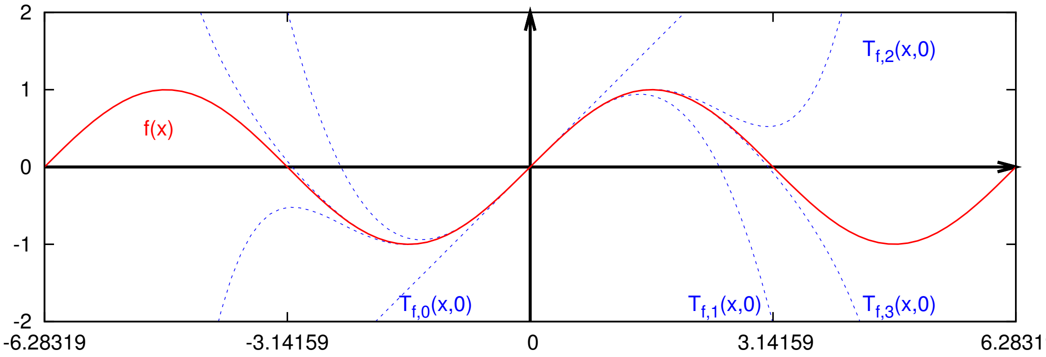


Abbildung 23: Taylorpolynome für $n = 0, 1, 2, 3,\ x_0 = 0$ und $f(x) = \sin x$

$$f^{(0)}(x_0) = \frac{1}{1 - x_0} \qquad f^{(3)}(x_0) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1 - x_0)^4}$$
$$f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{(1 - x_0)^2} \qquad \vdots$$
$$f^{(2)}(x_0) = \frac{1 \cdot 2}{(1 - x_0)^3} \qquad f^{(k)}(x_0) = \frac{k!}{(1 - x_0)^{k+1}}$$

Daraus ergibt sich zunächst die Reihe

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{(1 - x_0)^{k+1}} \,.$$

Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhalten wir die Geometrische Reihe

$$T_f(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \,,$$

von der wir ja wissen, dass sie nur auf dem Bereich $(-1, 1)$ konvergiert (s. Abb. 24).

3.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \,.$$

Für eine Taylorentwicklung mit Mittelpunkt $x_0 = 0$ benötigen wir alle Ableitungen an diesem Punkt:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \\
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \\
f''(0) &= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$T_f(x,0) = 0$ ist die Taylorreihe von f. Ohne darüber gesprochen zu haben sind wir uns sicher einig, dass es sich hierbei nicht um eine gute Approximation handelt.

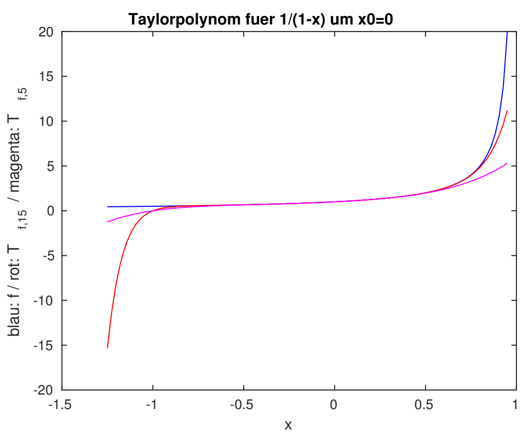


Abbildung 24: $T_{f,n}(x,x_0)$ für $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ mit $n \in \{5, 15\}$

Jeder in x_0 unendlich oft differenzierbare Funktion kann um x_0 einer Taylorreihe $T_f(x,x_0)$ zugeordnet werden. Diese Potenzreihe ist der einzig mögliche Kandidat, welcher die Funktion f in einer Umgebung von x_0 darstellen könnte. Die Taylorreihe stellt jedoch nicht notwendigerweise die Funktion f dar. (s. Beispiel 107: 2.,3.)

6.2 Konvergenzradius und Restgliedabschätzung

Definition 6.3 (Konvergenzradius) *Falls für fast alle Koeffizienten a_n einer* Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

$a_n \neq 0$ gilt und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, so ist der Konvergenzradius *der Potenzreihe durch*

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

gegeben.

Eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

mit Konvergenzradius ρ ist für alle $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ konvergent und divergiert für $|x-x_0| > \rho$. Das Intervall

$$K = (x_0-\rho, x_0+\rho)$$

heißt Konvergenzintervall *oder auch* Konvergenzbereich *der Potenzreihe.*

Das Konvergenzverhalten an den beiden Randpunkten $x_0 \pm \rho$ muss separat untersucht werden. Dazu setzen wir $x = x_0 \pm \rho$ und untersuchen die entstehende Reihe wie gewohnt auf Konvergenzkriterien.

Beispiel 108 Wir untersuchen eben die Konvergenzbereiche der Taylorreihen aus Beispiel 107:

1.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2\,n+3)!}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{-1}{(2\,n+2)\,(2\,n+3)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Rightarrow \quad K = (x_0-\infty, x_0+\infty) = \mathbb{R}$$

Die Taylorreihe von $\sin x$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.

2.

$$\begin{aligned} & & a_n &= 1 \\ & & a_{n+1} &= 1 \\ \Rightarrow & & \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= 1 \\ \Rightarrow & & \rho &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \Rightarrow & & K &= (-1,1) \end{aligned}$$

Die Taylorreihe von $\frac{1}{1-x}$ konvergiert auf $(-1,1)$, also für $|x|<1$. Da sowohl für $x=-1$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

als auch für $x=1$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}1^k$$

die jeweilige Reihe divergiert, gehören die Randpunkte des offenen Intervalls auch nicht zum Konvergenzbereich.

3. Formal erhalten wir für bestimme $c_k \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x_0^{n+2\,k}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x_0^2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_k}{x_0^{n+1+2\,k}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x_0^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)} \frac{\frac{1}{x_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x_0^{n+2\,k}} + \frac{c_{n+1}}{x_0^{3\,n+3}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x_0^{n+2\,k}}}$$

$$\leq \frac{c_{\max}}{c_{\min}} \frac{1}{(n+1)} \frac{\frac{1}{x_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_0^{n+2\,k}} + \frac{1}{x_0^{3\,n+3}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_0^{n+2\,k}}} \qquad C := \frac{c_{\max}}{c_{\min}}$$

$$= C \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_0^{3\,n+3}}{x_0^{n+2\,k}}} \right)$$

$$= C \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^{2\,n+1} + x_0^{2\,n-1} + \cdots + x_0^{3}} \right)$$

$$\overset{x_0 \to 0}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Rightarrow \qquad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} = \infty$$

$$\Rightarrow \qquad \rho = 0$$

Die Reihe konvergiert also nur im Punkt 0, womit sich der Konvergenzbereich auf ein mageres

$$K = \{0\}$$

beschränkt. So spielt das Leben eben manchmal....

Auf ihrem Konvergenzbereich K ist eine Potenzreihe eine Funktion. Selbstredend ist eine Funktionsapproximation mittels Taylorpolynom auch nur auf dem Konvergenzbereich der entsprechenden Taylorreihe sinnvoll.

Satz 6.4 (Restfunktion, Fehler) *Sei f $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt für die Restfunktion $R_{f,n}$ der Taylorapproximation*

$$f(x) = T_{f,n}(x, x_0) + R_{f,n}(x, x_0)\,,$$

dass $R_{f,n}(x_0, x_0) = 0$ gilt und für $x \neq x_0$ erhalten wir die Darstellung

$$R_{f,n}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

mit einer Stelle ζ zwischen x und x_0. Falls zusätzlich die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ beschränkt ist auf I, also eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\left|f^{(n+1)}(\zeta)\right| \leq C \qquad \forall \zeta \in I\,,$$

dann gilt

$$|R_{f,n}(x, x_0)| \leq \frac{C}{(n+1)!}\,|x - x_0|^{n+1} \qquad \forall x \in I\,.$$

ohne Beweis

Beispiel 109 Restgliedabschätzung

Auf $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ schätzen wir das Restglied

$$R_{\sin,3}(x, 0)$$

ab:

$$|R_{\sin,3}(x, 0)| = \left|\frac{\sin^{(4)}(\zeta)}{4!}\,x^4\right| = \frac{|\sin(\zeta)|}{4!}\,x^4 \leq \frac{|x|^4}{4!} \leq \frac{\pi^4}{2^4\,4!} < 2.54\,10^{-1}$$

Definition 6.5 (taylorentwickelbar) *Wir sagen $f : I \to \mathbb{R}$ ist taylorentwickelbar wenn auf $I \subset \mathbb{R}$*

$$f(x) = T_{f,n}(x, x_0) + R_{f,n}(x, x_0)\,,$$

und

$$\lim_{n\to\infty} R_{f,x_0}(x, x_0) = 0$$

gilt.

Wir können nun das Integral oder auch die Ableitung einer Funktion f näherungsweise durch Integration oder Differentiation des zugehörigen Taylorpolynoms berechnen:

Integration:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx \approx \int T_{f,n}(x,x_0)\,dx &= \int \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!}\,(x-x_0)^{k+1} + C\end{aligned}$$

Differentiation:

$$\frac{d}{dx}\,f(x) \approx \frac{d}{dx} T_{f,n}(x,x_0) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\,(x-x_0)^{k-1}$$

Wir können nun das Integral oder auch die Ableitung einer Funktion f näherungsweise durch Integration oder Differentiation des zugehörigen Taylorpolynoms berechnen:

Integration:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx \approx \int T_{f,n}(x,x_0)\,dx &= \int \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!}\,(x-x_0)^{k+1} + C\end{aligned}$$

Differentiation:

$$\frac{d}{dx}\,f(x) \approx \frac{d}{dx} T_{f,n}(x,x_0) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\,(x-x_0)^{k-1}$$

A Beweise

Beweis Satz 3.2:

Betrachten wir zunächst den speziellen Fall für $r = 3$*. Es sei also*

$$p(x) = x^3\,.$$

Nach Aussage des Satzes ist dann die Ableitung dieses Monoms gegeben durch

$$p'(x) = 3x^2\,.$$

Das prüfen wir über die Definition der Ableitung (Differenzenquotient) nach:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 \\
&= 3x^2 + 0 + 0 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

Für allgemeine Monome mit $r \in \mathbb{N}$ *geht das genauso:*

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\left((x+h)^r - x^r\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}x^{r-k}\,h^k - x^r\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\left(\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}x^{r-k}\,h^k + \underbrace{\binom{r}{0}x^r\,h^0 - x^r}_{=0}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k=2}^{r}\binom{r}{k}x^{r-k}\,h^{k-1} + \underbrace{\binom{r}{1}x^{r-1}\,h^0}_{=r\,x^{r-1}}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \sum_{k=2}^{r}\binom{r}{k}x^{r-k}\,h^{k-1}}_{=0} + r\,x^{r-1} \\
&= r\,x^{r-1}
\end{aligned}
$$

□

Beweis Satz 3.3:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\,f(x)+\beta\,g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha\,f(x+h)+\beta\,g(x+h)-\alpha\,f(x)-\beta\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha\,f(x+h)-\alpha\,f(x)+\beta\,g(x+h)-\beta\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha\,f(x+h)-\alpha\,f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\beta\,g(x+h)-\beta\,g(x)}{h} \\
&= \alpha\,\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \beta\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \alpha\,f'(x)+\beta\,g'(x)
\end{aligned}
$$

□

Lemma A.1. *Es gilt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Beweis Lemma A.1:

Wir untersuchen etwas nahe der Null so dürfen wir uns problemlos auf das Intervall $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ *einschränken. Zunächst sei* $x \in (0,\frac{\pi}{4})$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
& 0 < \sin x < x < \tan x && \mid :\sin x\\
\Leftrightarrow\quad & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} &&\\
\Leftrightarrow\quad & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x &&\\
\Rightarrow\quad & 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x = 1\,. &&
\end{aligned}$$

Unser gesuchter Ausdruck ist nach unten und oben in die 1 *eingespannt und demzufolge muss*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gelten. Das war jetzt nur der rechtsseitige Grenzwert aber wir werden schnell einsehen, dass der linksseitige Grenzweite auf das gleiche Ergebnis führt. Es sei also nun $x \in (-\frac{\pi}{4},0)$*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
& 0 > \sin x > x > \tan x && \mid :\sin x\\
\Leftrightarrow\quad & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} &&
\end{aligned}$$

Die Ungleichheitszeichen haben sich umgedreht, weil $\sin x < 0$ *ist; wir dividierten also mit einem negativen Ausdruck die Ungleichung. Der Rest des Beweis verläuft wie im ersten Fall, so dass insgesamt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

gilt.

$\square$

Beweis Satz 3.4:

$$\sin' x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \boxtimes$$

Wir verwenden das Additionstheorem

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\,,$$

setzen $a = x + h$ und $b = x$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\boxtimes &= \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2} \\
&= \lim_{h'\to 0}\cos(x+h')\underbrace{\frac{\sin h'}{h'}}_{\to 1,\ \textit{Lemma A.1}}\,, \qquad \text{mit } h' = \frac{h}{2} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Die Beweisführung zur Ableitung der Kosinusfunktion ist analog.

□

Beweis Satz 3.5:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

Wir addieren eine "0=-f(x) g(x+h)+f(x) g(x+h)":

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h) - f(x))\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)
\end{aligned}$$

□

Beweis Satz 3.6:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}\right)
\end{aligned}$$

Wir addieren eine "$0 = -f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x)$":

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))\,g(x)}{g(x+h)\,g(x)} \right) - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{g(x+h)\,g(x)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \left(\frac{g(x)}{g(x+h)\,g(x)} \right) - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \left(\frac{f(x)}{g(x+h)\,g(x)} \right) \\
&= f'(x) \left(\frac{g(x)}{g^2(x)} \right) - g'(x) \left(\frac{f(x)}{g^2(x)} \right) \\
&= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Beweis Satz 3.7:

Wir starten mit dem Differenzenquotient für die verkettete Funktion $f \circ g$

$$f(g(x))' = \lim_{h\to\infty} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

und multiplizieren mit 1:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to\infty} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\
&= \lim_{h\to\infty} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
\end{aligned}
$$

Wir benennen die Terme etwas anders, dann ist es leichter ersichtlich. Sagen wir es ist $\tilde{g} := g$ und $\tilde{h} := g(x+h) - \tilde{g}$. Dann ist $\tilde{g} = \lim_{\tilde{h}\to 0} \tilde{g} + \tilde{h} = \lim_{h\to 0} g(x+h) = g$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\tilde{h}\to\infty} \frac{f(\tilde{g} + \tilde{h}) - f(\tilde{g})}{\tilde{h}} \lim_{h\to\infty} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x))\,g'(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

Beweis Satz 3.8:

Die Ableitung der Umkehrfunktion läßt sich leicht einsehen, denn mit

$$y = f(x) \qquad \bar{y} = f(\bar{x})$$
$$f^{-1}(y) = x \qquad f^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$$

gilt

$$\begin{aligned} f^{-1'}(y) &= \lim_{\bar{y}\to y} \frac{f^{-1}(\bar{y}) - f^{-1}(y)}{\bar{y} - y} \\ &= \lim_{\bar{y}\to y} \frac{\bar{x} - x}{f(\bar{x}) - f(x)} \\ &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \, . \end{aligned}$$

□

Beweis Satz 3.9:

Die Gesamtstruktur der Beweisführung sieht folgendermaßen aus:

Schritt 1:	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	mit der Kettenregel
Schritt 2:	$\ln' x = \frac{1}{x}$	mit der Abl. der Umkehrabbildung
Schritt 3:	$\log_a' x = \frac{1}{x \, \ln a}$	mit Basiswechsel der Logarithmusfkt.
Schritt 4:	$(a^x)' = a^x \, \ln a$	mit der Abl. der Umkehrabbildung

Schritt 1:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Kettenregel 3.7:

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}^{\to \mathrm{e}^x}}{\underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)}_{\to 1}} = \mathrm{e}^x$$

Schritt 2: Ableitung der Umkehrabbildung $f^{-1}(x) = \ln x$ von $f(x) = \mathrm{e}^x$ mit Formel 3.8: Es ist ja $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $f'(f^{-1}(x)) = \mathrm{e}^{\ln x}$, also

$$\ln' x = \big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Schritt 3: Basiswechsel der Logarithmusfunktion liefert direkt

$$\log_a' x = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\ln' x}{\ln a} = \frac{1}{x\ \ln a}\,.$$

Schritt 4: Ableitung der Umkehrabbildung $f^{-1}(x) = a^x$ von $f(x) = \log_a x$:

$$(a^x)' = \frac{1}{\log_a'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x\ \ln a}} = a^x\ \ln a$$

$\square$

Beweis Satz 5.2:

Die jeweiligen Aussagen lassen sich durch Ableitung der rechten Seiten prüfen.

□

Beweis Satz 5.3:

Es ist

$$\frac{d}{dx}\int(\alpha f+\beta g)\ dx=\alpha\, f+\beta\, g$$

und

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha\int f\ dx+\beta\int g\ dx\right)=\alpha\frac{d}{dx}\int f\ dx+\beta\frac{d}{dx}\int g\ dx=\alpha\, f+\beta\, g\,.$$

□

Beweis Satz 5.4:

Für Funktionen $u,v\in C^1$ gilt mit der Produktregel

$$(uv)'=u'v+uv'$$

womit

$$(uv)'-u'v=uv'$$

folgt. Wir integrieren die Gleichung und erhalten dann

$$\int uv'\ dx=\int(uv)'\ dx-\int u'v\ dx=uv-\int u'v\ dx\,.$$

□

Beweis Satz 5.5:

Wir prüfen die Aussage, indem wir die rechten Seiten ableiten.

Mit der Ableitungsregel aus Satz 3.9 erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln a}=\frac{a^x\,\ln a}{\ln a}=a^x\,.$$

Die Produktregel aus Satz 3.5 liefert mit dem Basiswechsel aus Satz **??**

$$\frac{d}{dx}\frac{x\,(\ln x-1)}{\ln a}=\frac{\ln x-1+x\,\frac{1}{x}}{\ln a}=\frac{\ln x}{\ln a}=\log_a x\,.$$

$$\frac{d}{dx}\ln g(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\square$

Plausibilitätserklärung Satz 5.9:

Geometrische Interpretation:
Es sei f eine lineare Funktion (siehe Abbildung 25) mit der Darstellung

$$f(x) = mx + c\,.$$

Eine Stammfunktion von f ist dann gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + cx\,.$$

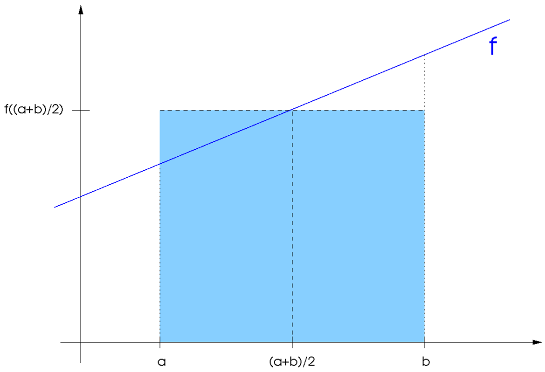


Abbildung 25: Flächeninhalt unter einer linearen Funktion

Auch ohne Stammfunktion können wir den Flächeninhalt unter f direkt berechnen:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\\ &= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\right)(b-a)\end{aligned}$$

Da die Steigung der Geraden gerade $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gilt weiter

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}m(b+a)(b-a) + c(b-a)\\ &= \frac{1}{2}m(b^2-a^2) + c(b-a)\\ &= \left(\frac{1}{2}mb^2 + cb\right) - \left(\frac{1}{2}ma^2 + ca\right)\end{aligned}$$

und das ist gerade

$$= F(b) - F(a)\,.$$

Das klappt. Betrachten wir nun eine beliebige, stetige Funktion. Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle, so wie wir es bei der Bildung der Ober– und Untersumme getan haben. Dieses Mal bilden wir auf allen Intervallen Trapeze, indem wir die Punkte $(x_i, f(x_i))$ jeweils mit $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ verbinden. Wir erhalten damit Näherungen an $f : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$. Jedes einzelne Trapez behandeln wir nun wie im obigen Beispiel.

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) \qquad \text{(Das ist eine Teleskopsumme)} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \cdots \\ &\quad \cdots + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \\ &= F(x_{n-1}) - F(x_0) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Beweis Satz 5.15:

Für den Fall, dass beide Grenzwerte (Zähler– und Nennerfunktion) gegen Null streben, ist die Regel leicht einzusehen: Sei $f(a) = g(a) = 0$ und $\xi \in (a,b)$. Dann gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \cdot \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{x-a}} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Der Limes $x \to a$ liefert dann die Behauptung.

$\square$

Beweis Satz 5.6:

Mit $F' = f$ gilt

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t)\,.$$

Es folgt

$$F(g(t)) = \int (F \circ g)'(t)\;dt = \int f(g(t))\,g'(t)\;dt\,.$$

Gleichzeitig gilt

$$\int f(g)\;dg = \int F'(g)\;dg = F(g) = F(g(t))$$

was insgesamt auf

$$\int f(g)\;dg = \int f(g(t))\,g'(t)\;dt$$

führt.

□

Beweis Satz 5.13:

Es sei F eine Stammfunktion von f. Es gilt also $F'(x) = f(x)$ und mit der Kettenregel gilt

$$F(g(t))' = F'(g(t))\, g'(t)\,.$$

Damit ergibt sich dann für das Integral auf der rechten Seite

$$\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\; dt = \int_c^d F'(g(t))\, g'(t)\; dt = \int_c^d F(g(t))'\; dt = F(g(t))\Big|_c^d = F(g(d)) - F(g(c))\,.$$

Und das Integral auf der linken Seite

$$\int_a^b f(x)\; dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Mit $a = g(c)$ und $b = g(d)$ gilt auch $c = g^{-1}(a)$ und $d = g^{-1}(b)$ und die beiden Integralausdrücke stimmen überein, woraus dann die Behauptung folgt.

□

Beweis Satz 4.5:

Wir beschränken den Beweis auf $n = 2$. Er lässt sich sukkzessive auf höhere Raumdimenionen fortführen. Der Beweis selbst ist ein reines durchrechnen des Differenzenquotienten wir die Ableitung:

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), g_2(t)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g_1(t+h), g_2(t+h)) - f(g_1(t), g_2(t))}{h}$$

Wir addieren eine Null

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(g_1(t+h), g_2(t)) - f(g_1(t), g_2(t))}{h} \right. \\ &+ \left. \frac{f(g_1(t+h), g_2(t+h)) - f(g_1(t+h), g_2(t))}{h} \right) \end{aligned}$$

und multiplizieren mit Eins

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(g_1(t+h), g_2(t)) - f(g_1(t), g_2(t))}{g_1(t+h) - g_1(t)} \cdot \frac{g_1(t+h) - g_1(t)}{h} \right. \\ &+ \left. \frac{f(g_1(t+h), g_2(t+h)) - f(g_1(t+h), g_2(t))}{g_2(t+h) - g_2(t)} \cdot \frac{g_2(t+h) - g_2(t)}{h} \right) \end{aligned}$$

In jedem Summand stecken Faktoren, die Differenzenquotienten darstellen. Mit $\tilde{h} := g_i(t+h) - g_i(t)$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt auch $g_i(t+h) = g_i(t) + \tilde{h}$ und damit:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h,\tilde{h}\to 0} \left(\frac{f(g_1(t) + \tilde{h}, g_2(t)) - f(g_1(t), g_2(t))}{\tilde{h}} \cdot \frac{g_1(t+h) - g_1(t)}{h} \right. \\ &+ \left. \frac{f(g_1(t+h), g_2(t) + \tilde{h})) - f(g_1(t+h), g_2(t))}{\tilde{h}} \cdot \frac{g_2(t+h) - g_2(t)}{h} \right) \\ &= f_{g_1}(g) g_1'(t) + f_{g_2}(g) g_2'(t) \end{aligned}$$

$\square$

Beweis Satz 4.6:

Bei der Richtungsableitung betrachten wir ja die Änderungsrate von u am Punkt x in Richtung ν. Das reduziert unseren Ausdruck auf eine eindimensionale Ableitung und es gilt:

$$u_\nu = \frac{d}{dt} u(x + t\,\nu)\big|_{t=0}$$

für $g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T$ *schreiben wir*

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\, u(g(t))\big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\, u(g_1(t), g_2(t))\big|_{t=0}
\end{aligned}$$

und mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= \left(u_{g_1}\, g_1'(t) + u_{g_2}\, g_2'(t)\right)\big|_{t=0} \\
&= u_{g_1}\,\nu_1 + u_{g_2}\,\nu_2 \\
&= \nabla\, u(x) \cdot \nu
\end{aligned}$$

□

Beweis Satz 4.15:

Es sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *mit* $\|v\| = 1$ *und* $\|w\| = 1$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
& & u_{v(x)}(x) &= \nabla u(x) \cdot v(x) \\
&\Rightarrow & u_{v(x)w(x)}(x) &= \nabla u_{v(x)}(x) \cdot w(x) \\
& & &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (u_{x_j}(x) v_j(x))_{x_i}\, w_i(x) \\
& & &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_i}(x)\, v_j(x)\, w_i(x) + u_{x_j} \underbrace{v_{j,x_i}}_{=Dv_{ji}(x)} w_i(x) \\
& & &= v^T(x)\, Hu(x)\, w(x) + \nabla u^T(x)\, Dv(x)\, w(x)
\end{aligned}$$

□

Index