Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

2 Abstrakte Algebra

2.2 Algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume)

Mathe I

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Gruppe

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $G \neq \emptyset$ und einer zweistelligen Operation "$\circ$" mit

$$g \circ h \in G\,,$$

für $g, h \in G$, die folgende *Gruppenaxiome* erfüllt:

Gruppe

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $G \neq \emptyset$ und einer zweistelligen Operation "$\circ$" mit

$$g \circ h \in G\,,$$

für $g, h \in G$, die folgende *Gruppenaxiome* erfüllt:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)\ \forall g, h, f \in G$ (Assoziativgesetz)

Gruppe

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $G \neq \emptyset$ und einer zweistelligen Operation "$\circ$" mit

$$g \circ h \in G\,,$$

für $g, h \in G$, die folgende *Gruppenaxiome* erfüllt:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)\ \forall g, h, f \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) $\exists\ \mathbb{1} \in G\ :\ \forall g \in G\ :\ \mathbb{1} \circ g = g$ (neutrales Element)

Gruppe

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $G \neq \emptyset$ und einer zweistelligen Operation "$\circ$" mit

$$g \circ h \in G\,,$$

für $g, h \in G$, die folgende *Gruppenaxiome* erfüllt:

(G1)	$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)\ \forall g, h, f \in G$	(Assoziativgesetz)
(G2)	$\exists\ \mathbb{1} \in G\ :\ \forall g \in G\ :\ \mathbb{1} \circ g = g$	(neutrales Element)
(G3)	$\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G\ :\ g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$	(inverses Element)

Gruppe

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $G \neq \emptyset$ und einer zweistelligen Operation "$\circ$" mit

$$g \circ h \in G\,,$$

für $g, h \in G$, die folgende *Gruppenaxiome* erfüllt:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)\ \forall g, h, f \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) $\exists\ \mathbb{1} \in G\ :\ \forall g \in G\ :\ \mathbb{1} \circ g = g$ (neutrales Element)

(G3) $\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G\ :\ g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$ (inverses Element)

Gilt darüberhinaus

(G4) $\forall\ g\ h \in G\ :\ g \circ h = h \circ g$ (Kommutativität)

so heißt die Gruppe *kommutativ* oder *abelsch*.

Gruppe

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $G \neq \emptyset$ und einer zweistelligen Operation "$\circ$" mit

$$g \circ h \in G\,,$$

für $g, h \in G$, die folgende *Gruppenaxiome* erfüllt:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)\ \forall g, h, f \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) $\exists\ \mathbb{1} \in G\ :\ \forall g \in G\ :\ \mathbb{1} \circ g = g$ (neutrales Element)

(G3) $\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G\ :\ g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$ (inverses Element)

Gilt darüberhinaus

(G4) $\forall\ g\ h \in G\ :\ g \circ h = h \circ g$ (Kommutativität)

so heißt die Gruppe *kommutativ* oder *abelsch*.

Gilt hingegen nur das Assoziativgesetz so sprechen wir von einer *Halbgruppe* und gelten nur die Axiome (G1) und (G2) so heißt G *Monoid*.

Beispiele: Gruppe

(a) $(\mathbb{R}, +)$ mit der üblichen Addition als Gruppenoperation ist eine abelsche Gruppe. $\mathbb{1} = 0$ erfüllt die Rolle des neutralen Elements, und zu jeder Zahl g existiert mit $-g$ ein inverses Element.

Beispiele: Gruppe

(a) $(\mathbb{R}, +)$ mit der üblichen Addition als Gruppenoperation ist eine abelsche Gruppe. $\mathbb{1} = 0$ erfüllt die Rolle des neutralen Elements, und zu jeder Zahl g existiert mit $-g$ ein inverses Element.

(b) $(\mathbb{R}^2, +)$ mit

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2$$

ist eine abelsche Gruppe.

Beispiele: Gruppe

(a) $(\mathbb{R}, +)$ mit der üblichen Addition als Gruppenoperation ist eine abelsche Gruppe. $\mathbb{1} = 0$ erfüllt die Rolle des neutralen Elements, und zu jeder Zahl g existiert mit $-g$ ein inverses Element.

(b) $(\mathbb{R}^2, +)$ mit

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2$$

ist eine abelsche Gruppe.

(c) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beispiele: Gruppe

(a) $(\mathbb{R}, +)$ mit der üblichen Addition als Gruppenoperation ist eine abelsche Gruppe. $\mathbb{1} = 0$ erfüllt die Rolle des neutralen Elements, und zu jeder Zahl g existiert mit $-g$ ein inverses Element.

(b) $(\mathbb{R}^2, +)$ mit

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2$$

ist eine abelsche Gruppe.

(c) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(d) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ mit

·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

beschreibt eine endliche, abelsche Gruppe. Jedes Element ist zu sich selbst das inverse Element und $\mathbb{1} = 1$ ist das neutrale Element.

Beispiele: nicht Gruppe

(a) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe.

Beispiele: nicht Gruppe

(a) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe.

(b) $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe aber ein abelsches Monoid.

Beispiele: nicht Gruppe

(a) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe.

(b) $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe aber ein abelsches Monoid.

(c) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe aber ein abelsches Monoid.

Eigenschaften von Gruppen

Für eine Gruppe $(G, \circ)$ gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) Es gilt
$$g \circ g^{-1} = \mathbb{I}\,.$$

(b) Es gilt
$$g \circ \mathbb{I} = g\,.$$

(c) Das neutrale Element von G ist eindeutig bestimmt.

(d) Zu jedem Element von G gibt es genau ein Inverses.

(e) Das neutrale Element ist invers zu sich selbst.

(f) $\forall a \in G \;:\; \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

(g) $\forall g, h \in G \;:\; (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$

(h) Kürzungsregeln: Es gilt
$$a \circ b = a \circ c \quad \Rightarrow \quad b = c \qquad \text{und} \qquad b \circ a = c \circ a \quad \Rightarrow \quad b = c\,.$$

(i) Lösbarkeit von Gleichungen: $\forall a, b \in G \;\exists! x, y \in G \;:\; a \circ x = b \;\wedge\; y \circ a = b$

Beweis (a)

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

Beh. (a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

Beh. (a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$g \circ g'$$

Beweis (a)

Memo:

$$\begin{aligned} &\text{(G1)} \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\ &\text{(G2)} \quad \mathbb{1} \circ g = g \\ &\text{(G3)} \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Beh. (a) $\quad g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$g \circ g' \overset{\text{(G2)}}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g')$$

Beweis (a)

Memo:

(G1)	$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$	Beh. (a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$
(G2)	$\mathbb{1} \circ g = g$	
(G3)	$g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$	

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$g \circ g' \overset{(G2)}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g') \overset{(G3)}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g')$$

Beweis (a)

Memo:

$$
\begin{aligned}
&(\text{G1}) \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\
&(\text{G2}) \quad \mathbb{1} \circ g = g \\
&(\text{G3}) \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Beh. (a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$g \circ g' \overset{(\text{G2})}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g') \overset{(\text{G3})}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \overset{(\text{G1})}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g'))$$

Memo:

$$\begin{aligned} &(G1) \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\ &(G2) \quad \mathbb{1} \circ g = g \\ &(G3) \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Beh. (a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ g' &\overset{(G2)}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g') \overset{(G3)}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \overset{(G1)}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g')) \\ &\overset{(G1)}{=} g'' \circ ((g' \circ g) \circ g') \end{aligned}$$

Memo:

$$
\begin{aligned}
&(\text{G1}) \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\
&(\text{G2}) \quad \mathbb{1} \circ g = g \\
&(\text{G3}) \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Beh. $\quad (a) \quad g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
g \circ g' &\overset{(\text{G2})}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g') \overset{(\text{G3})}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \overset{(\text{G1})}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g')) \\
&\overset{(\text{G1})}{=} g'' \circ ((g' \circ g) \circ g') \overset{(\text{G3})}{=} g'' \circ (\mathbb{1} \circ g')
\end{aligned}
$$

Beweis (a)

Memo:

$$\begin{array}{ll} \text{(G1)} & (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\ \text{(G2)} & \mathbb{1} \circ g = g \\ \text{(G3)} & g^{-1} \circ g = \mathbb{1} \end{array}$$

Beh. (a) $\quad g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$g \circ g' \stackrel{\text{(G2)}}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g') \stackrel{\text{(G3)}}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \stackrel{\text{(G1)}}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g'))$$

$$\stackrel{\text{(G1)}}{=} g'' \circ ((g' \circ g) \circ g') \stackrel{\text{(G3)}}{=} g'' \circ (\mathbb{1} \circ g') \stackrel{\text{(G2)}}{=} g'' \circ g'$$

Beweis (a)

Memo:

$$(G1) \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$$
$$(G2) \quad \mathbb{1} \circ g = g$$
$$(G3) \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$$

Beh. (a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beweis: Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu g und $g'' \in G$ Inverses zu g'. Dann gilt

$$g \circ g' \overset{(G2)}{=} \mathbb{1} \circ (g \circ g') \overset{(G3)}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \overset{(G1)}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g'))$$
$$\overset{(G1)}{=} g'' \circ ((g' \circ g) \circ g') \overset{(G3)}{=} g'' \circ (\mathbb{1} \circ g') \overset{(G2)}{=} g'' \circ g' \overset{(G3)}{=} \mathbb{1} .$$

□

Beweis (b)

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beh. (b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beweis (b)

Memo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(G1)} & (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\
\text{(G2)} & \mathbb{I} \circ g = g \\
\text{(G3)} & g^{-1} \circ g = \mathbb{I}
\end{array}
$$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{I}$

Beh. (b) $g \circ \mathbb{I} = g$

<u>Beweis:</u>

$$g \circ \mathbb{I}$$

Memo:

$$(\mathrm{G1}) \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$$
$$(\mathrm{G2}) \quad \mathbb{1} \circ g = g$$
$$(\mathrm{G3}) \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$$

$$(\mathrm{a}) \quad g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$$

Beh. $(b) \quad g \circ \mathbb{1} = g$

Beweis:

$$g \circ \mathbb{1} \overset{(\mathrm{G3})}{=} g \circ (g' \circ g)$$

Beweis (b)

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beh. (b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beweis:

$$g \circ \mathbb{1} \overset{(G3)}{=} g \circ (g' \circ g) \overset{(G1)}{=} (g \circ g') \circ g$$

Beweis (b)

Memo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(G1)} & (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \\
\text{(G2)} & \mathbb{1} \circ g = g \\
\text{(G3)} & g^{-1} \circ g = \mathbb{1}
\end{array}
$$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beh. (b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beweis:

$$g \circ \mathbb{1} \overset{\text{(G3)}}{=} g \circ (g' \circ g) \overset{\text{(G1)}}{=} (g \circ g') \circ g \overset{\text{(a)}}{=} \mathbb{1} \circ g$$

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

Beh. (b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beweis:

$$g \circ \mathbb{1} \overset{(G3)}{=} g \circ (g' \circ g) \overset{(G1)}{=} (g \circ g') \circ g \overset{(a)}{=} \mathbb{1} \circ g \overset{(G2)}{=} g$$

$\square$

Beweis (c)

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

(b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beh. (c) $\exists!\ \mathbb{1} \in G \ : \ \forall g \in G \ : \ \mathbb{1} \circ g = g$

Beweis (c)

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

(b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beh. (c) $\exists!\, \mathbb{1} \in G \,:\, \forall g \in G \,:\, \mathbb{1} \circ g = g$

Beweis: Seien $\mathbb{1}$ und $\tilde{\mathbb{1}}$ neutrale Elemente bzgl. $\circ$. Dann gilt

Beweis (c)

Memo:

$$(G1) \quad (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$$

$$(G2) \quad \mathbb{1} \circ g = g$$

$$(G3) \quad g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$$

$$(a) \quad g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$$

$$(b) \quad g \circ \mathbb{1} = g$$

Beh. $(c) \quad \exists!\ \mathbb{1} \in G \ :\ \forall g \in G \ :\ \mathbb{1} \circ g = g$

<u>Beweis:</u> Seien $\mathbb{1}$ und $\tilde{\mathbb{1}}$ neutrale Elemente bzgl. $\circ$. Dann gilt

$$\tilde{\mathbb{1}}$$

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

(b) $g \circ \mathbb{1} = g$

Beh. (c) $\exists!\, \mathbb{1} \in G \;:\; \forall g \in G \;:\; \mathbb{1} \circ g = g$

<u>Beweis:</u> Seien $\mathbb{1}$ und $\tilde{\mathbb{1}}$ neutrale Elemente bzgl. $\circ$. Dann gilt

$$\tilde{\mathbb{1}} \overset{(b)}{=} \tilde{\mathbb{1}} \circ \mathbb{1}$$

Beweis (c)

Memo:

(G1) $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$

(G2) $\mathbb{1} \circ g = g$

(G3) $g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$

(a) $g \circ g^{-1} = \mathbb{1}$

(b) $g \circ \mathbb{1} = g$

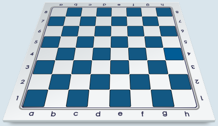
Beh. (c) $\exists!\, \mathbb{1} \in G \,:\, \forall g \in G \,:\, \mathbb{1} \circ g = g$

<u>Beweis:</u> Seien $\mathbb{1}$ und $\tilde{\mathbb{1}}$ neutrale Elemente bzgl. $\circ$. Dann gilt

$$\tilde{\mathbb{1}} \overset{\text{(b)}}{=} \tilde{\mathbb{1}} \circ \mathbb{1} \overset{\text{(G2)}}{=} \mathbb{1}\,.$$

□

Definition



Matrix

Eine Matrix A ist eine strukturierte Anordnung von $m \cdot n$ Zahlen aus $\mathbb{K}$ gemäß

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat m Zeilen und n Spalten.
Notation:

$$A = (A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \qquad \text{oder kurz} \qquad A = (A_{ij})_{ij}$$

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Komponenten aus der Menge $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Beispiel

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A ist eine *quadratische Matrix*, da $m = n$ gilt.

Die Elemente A_{ii} einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *Hauptdiagonale* und $A_{i,i+1}$, bzw $A_{i+1,i}$ heißen *Nebendiagonale*.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A ist eine *quadratische Matrix*, da $m = n$ gilt.

Die Elemente A_{ii} einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *Hauptdiagonale* und $A_{i,i+1}$, bzw $A_{i+1,i}$ heißen *Nebendiagonale*.

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ 0 & -i & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A ist eine *quadratische Matrix*, da $m = n$ gilt.

Die Elemente A_{ii} einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *Hauptdiagonale* und $A_{i,i+1}$, bzw $A_{i+1,i}$ heißen *Nebendiagonale*.

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ 0 & -i & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

C ist eine *symmetrische Matrix*, da $C_{ij} = C_{ji}$ gilt.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A ist eine *quadratische Matrix*, da $m = n$ gilt.

Die Elemente A_{ii} einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *Hauptdiagonale* und $A_{i,i+1}$, bzw $A_{i+1,i}$ heißen *Nebendiagonale*.

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ 0 & -i & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

C ist eine *symmetrische Matrix*, da $C_{ij} = C_{ji}$ gilt.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

R ist eine *obere Dreiecksmatrix*, da $R_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A ist eine *quadratische Matrix*, da $m = n$ gilt.

Die Elemente A_{ii} einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *Hauptdiagonale* und $A_{i,i+1}$, bzw $A_{i+1,i}$ heißen *Nebendiagonale*.

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ 0 & -i & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

C ist eine *symmetrische Matrix*, da $C_{ij} = C_{ji}$ gilt.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

R ist eine *obere Dreiecksmatrix*, da $R_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

U ist eine *echte untere Dreiecksmatrix*, da $U_{ij} = 0$ für $i \leq j$ gilt.

Beispiel

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

D ist eine *Diagonalmatrix*, da $D_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt.

Beispiel

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

D ist eine *Diagonalmatrix*, da $D_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt.

$$E_n = \left(\delta_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

E heißt *Einheitsmatrix*. Dabei heißt

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \textit{Kronecker} - \textit{Symbol}$$

Beispiel

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

D ist eine *Diagonalmatrix*, da $D_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt.

$$E_n = (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

E heißt *Einheitsmatrix*. Dabei heißt

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \textit{Kronecker} - \textit{Symbol}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben auch einfach E für die Einheitsmatrix, wenn die Anzahl Zeilen, bzw Spalten durch dem Kontext klar ist. Manchmal verwendet man auch den Buchstaben I für Identität.

Saalaufgabe

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beschreiben Sie die beiden Mengen.

Saalaufgabe

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beschreiben Sie die beiden Mengen.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Saalaufgabe

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beschreiben Sie die beiden Mengen.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

Saalaufgabe

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beschreiben Sie die beiden Mengen.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4 \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}\,,\ i \in \{1,2,3,4\}\} \end{aligned}$$

Saalaufgabe

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beschreiben Sie die beiden Mengen.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4 \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,2,3,4\}\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \,\middle|\, w, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Rechenregeln für Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Rechenregeln für Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Multiplikation:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beispiel:

Rechenregeln für Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Multiplikation:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie Summe und Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie Summe und Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Lösung:</u>

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie Summe und Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Lösung:</u>

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie Summe und Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Lösung:</u>

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Und jetzt noch so:

$$B \cdot A = ?$$

Berechnen Sie Summe und Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Lösung:</u>

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Und jetzt noch so:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$$

Die Multiplikation ist nicht kommutativ.

Saalaufgabe

Berechnen Sie das Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie das Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

B ist neutrales Element bzgl. $\cdot$.

Saalaufgabe

Berechnen Sie das Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

B ist neutrales Element bzgl. $\cdot$.

Berechnen Sie das Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie das Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

B ist neutrales Element bzgl. $\cdot$.
Berechnen Sie das Produkt der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B ist inverses Element von A bzgl. "$\cdot$".

Beispiel: Matrizen als Gruppe/Monoid

$(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ mit der *komponentenweisen Addition*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

ist eine abelsche Gruppe.

Beispiel: Matrizen als Gruppe/Monoid

$(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ mit der *komponentenweisen Addition*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

ist eine abelsche Gruppe.

$(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ mit der üblichen *Matrixmultiplikation*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

ist ein Monoid.

Ring

Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $R \neq \emptyset$ und zwei Operationen $\circ$ und $+$ mit

$$g + h \in R \qquad \text{und} \qquad g \circ h \in R\,,$$

so dass folgende *Ringaxiome* erfüllt sind:

Ring

Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $R \neq \emptyset$ und zwei Operationen $\circ$ und $+$ mit

$$g + h \in R \qquad \text{und} \qquad g \circ h \in R\,,$$

so dass folgende *Ringaxiome* erfüllt sind:

(R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(R2) $\forall a, b, c \in R \;:\; a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Assoziativität)

(R3) $\forall a, b, c \in R \;:$ (Distributivität)
$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$ und
$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$

Ring

Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $R \neq \emptyset$ und zwei Operationen $\circ$ und $+$ mit

$$g + h \in R \qquad \text{und} \qquad g \circ h \in R\,,$$

so dass folgende *Ringaxiome* erfüllt sind:

(R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(R2) $\forall a, b, c \in R \;:\; a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Assoziativität)

(R3) $\forall a, b, c \in R \;:$ (Distributivität)
$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$ und
$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$

Ein Ring heißt *kommutativ*, wenn Kommutativität bezügl. “$\circ$” ebenfalls gegeben ist.

Ring

Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \circ)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge $R \neq \emptyset$ und zwei Operationen $\circ$ und $+$ mit

$$g + h \in R \qquad \text{und} \qquad g \circ h \in R\,,$$

so dass folgende *Ringaxiome* erfüllt sind:

(R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(R2) $\forall a, b, c \in R \ : \ a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Assoziativität)

(R3) $\forall a, b, c \in R \ :$ (Distributivität)
$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$ und
$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$

Ein Ring heißt *kommutativ*, wenn Kommutativität bezügl. “$\circ$” ebenfalls gegeben ist. Existiert ein neutrales Element $n \in R$ bzgl. “$\circ$”, so dass für alle $a \in R$ gilt $n \circ a = a$, so sprechen wir von einem *Ring mit Einselement*.

Ein Ring mit Einselement ist im Grunde dann gegeben, wenn R bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe, bzgl. der Multiplikation ein Monoid bildet und für beide Verknüpfungen das Distributivgesetz gilt.

Ein Ring mit Einselement ist im Grunde dann gegeben, wenn R bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe, bzgl. der Multiplikation ein Monoid bildet und für beide Verknüpfungen das Distributivgesetz gilt.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

Ein Ring mit Einselement ist im Grunde dann gegeben, wenn R bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe, bzgl. der Multiplikation ein Monoid bildet und für beide Verknüpfungen das Distributivgesetz gilt.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.
- $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins.

Definition

Körper

Eine Menge K mit zwei binären Operationen $+$ und $\circ$ heißt *Schiefkörper*, wenn K ein Ring ist und $K \setminus \{0\}$ bzgl. der Multiplikation eine Gruppe bildet.
K heißt *Körper*, wenn K Schiefkörper ist und $K \setminus \{0\}$ bzgl. der Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet.

Beispiele: Körper

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation sind Körper.

Beispiele: Körper

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation sind Körper.

(b) $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ mit

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper.

Beispiele: Körper

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation sind Körper.

(b) $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ mit

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper.

(c) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation sind Körper.

(b) $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ mit

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper.

(c) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

(d) $M \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ über $\mathbb{R}$ mit

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}\}$$

ist ein Schiefkörper.

Beispiele: keine Körper

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein kommutativer Ring mit Eins aber kein Körper, denn es gibt keine multiplikativen Inversen.

Beispiele: keine Körper

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein kommutativer Ring mit Eins aber kein Körper, denn es gibt keine multiplikativen Inversen.

(b) $(\{0,1,2,3\}, +, \circ)$ mit

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\circ$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

ist ein kommutativer Ring mit Eins und kein Körper, denn die 2 hat kein multiplikatives Inverses.

Vektorraum (VR)

Sei $V \neq \emptyset$, und $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. $(V, (\mathbb{K}, +, \cdot), \oplus, \odot)$ heißt *Vektorraum*, wenn für $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\vec{a} \oplus \vec{b} \in V \quad \wedge \quad \lambda \odot \vec{a} \in V$$

und folgende Bedingungen erfüllt sind:

Addition:

(V1) $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation:

(V2) $\exists 1 \in \mathbb{K}\, \forall \vec{a} \in V \;:\; 1 \odot \vec{a} = \vec{a}$ (*neutrales Element* bezüglich der Multiplikation)

(V3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\, \forall \vec{a} \in V \;:\; \lambda \odot (\mu \odot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \vec{a}$ (*Assoziativgesetz*)

Addition und Multiplikation:

(V4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \;:\; \lambda \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\lambda \odot \vec{a}) \oplus (\lambda \odot \vec{b})$ (*Distributivgesetz*)

(V5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\, \forall \vec{a} \in V \;:\; (\lambda + \mu) \odot \vec{a} = (\lambda \odot \vec{a}) \oplus (\mu \odot \vec{a})$ (*Distributivgesetz*)

...

Definition

Vektorraum (VR)

...

Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren*. Das neutrale Element bezüglich der Addition heißt *Nullvektor*.

Notation:
Wir schreiben kurz V über $\mathbb{K}$ oder auch nur V statt $(V, (\mathbb{K}, +, \cdot), \oplus, \odot)$.

Vektorraum (VR)

...

Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren*. Das neutrale Element bezüglich der Addition heißt *Nullvektor*.

Notation:
Wir schreiben kurz V über $\mathbb{K}$ oder auch nur V statt $(V, (\mathbb{K}, +, \cdot), \oplus, \odot)$.

Der besseren Übersicht wegen:

$$a, b \quad \text{statt} \quad \vec{a}, \vec{b}$$

$$a + b \quad \text{statt} \quad a \oplus b$$

$$\lambda\, a\,,\ \lambda\, \mu \quad \text{statt} \quad \lambda \odot a\,,\ \lambda \cdot \mu$$

Beispiele

(a) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, also $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ oder $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind VRe.

Beispiele

(a) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, also $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ oder $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind VRe.
(b) $\mathbb{R}$ über $\mathbb{C}$, bzw. $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist kein VR.

Beispiele

(a) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, also $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ oder $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind VRe.

(b) $\mathbb{R}$ über $\mathbb{C}$, bzw. $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist kein VR.

(c) $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda\,(a_1, a_2) = (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2)$$

ist ein VR.

Beispiele

(a) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, also $(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $(\mathbb{C},\mathbb{R})$ oder $(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind VRe.

(b) $\mathbb{R}$ über $\mathbb{C}$, bzw. $(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist kein VR.

(c) $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda\,(a_1, a_2) = (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2)$$

ist ein VR.

(d) $(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$ und $(\mathbb{C}^2,\mathbb{R})$ sind ebenfalls VRe, jedoch nicht $(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$.

Beispiele

(a) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, also $(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $(\mathbb{C},\mathbb{R})$ oder $(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind VRe.

(b) $\mathbb{R}$ über $\mathbb{C}$, bzw. $(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist kein VR.

(c) $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda\,(a_1,a_2)=(\lambda\,a_1,\lambda\,a_2)$$

ist ein VR.

(d) $(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$ und $(\mathbb{C}^2,\mathbb{R})$ sind ebenfalls VRe, jedoch nicht $(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$.

(e) $(\mathbb{P}_3,\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten der Form

$$p(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3=\sum_{k=0}^{3}a_kx^k\,,\ \ a_k\in\mathbb{R}$$

mit

$$(p+q)(x)=p(x)+q(x)=\sum_{k=0}^{3}a_kx^k+\sum_{k=0}^{3}b_kx^k=\sum_{k=0}^{3}(a_k+b_k)x^k\in\mathbb{P}_3$$

und

$$\lambda\,p(x)=\sum_{k=0}^{3}\lambda a_kx^k\in\mathbb{P}_3\,,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$

ist ein VR.

(f) $(\mathbb{P}_3, \mathbb{C})$ die Menge aller Polynome vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten ist kein VR, denn

$$\lambda\, p(x) \notin \mathbb{P}_3$$

hat keine reellen Koeffizienten mehr.

(f) $(\mathbb{P}_3, \mathbb{C})$ die Menge aller Polynome vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten ist kein VR, denn

$$\lambda\, p(x) \notin \mathbb{P}_3$$

hat keine reellen Koeffizienten mehr.

(g) $(\mathbb{R}^{2\times 2}, (\mathbb{R}, +, \cdot), \oplus, \odot)$ - kurz $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R})$ - mit der komponentenweisen Addition

$$A \oplus B := \left(A_{ij} + B_{ij}\right)_{ij}$$

und skalaren Multiplikation

$$\alpha \odot A := \left(\alpha A_{ij}\right)_{ij}$$

ist ein Vektorraum.

Komponenten für den Teig

Teig 1

250 g	Butter
250 g	Zucker
4	Eier
500 g	Mehl
1 P	Backp.
125 ml	Milch

Teig 2

250 g	Butter
250 g	Zucker
1 Pr	Salz
1 Stk	Zitronens.
5	Eier
250 g	Mehl
1 P	Backp.
80 ml	Milch

Teig 3

200 g	Butter
180 g	Zucker
4 P	Vanillin
5	Eier
1 Pr	Salz
75 ml	Rum
400 g	Mehl
1 P	Backp.
45 ml	Milch
0.5 Stk	Zitrone

etwas übersichtlicher

	Teig 1	Teig 2	Teig 3
Mehl [g]	500	250	400
Butter [g]	250	250	200
Zucker [g]	250	250	180
Eier [Stk]	4	5	5
Milch [ml]	125	80	45
Backpulver [P]	1	1	1
Vanillin [P]	0	0	4
Salz [Pr]	0	1	1
Zitrone [Stk]	0	1	0.5
Rum [ml]	0	0	75

ein Erzeugendensystem für Rührteige

Wir fassen alle Komponenten der Rezepte in ihren typische Größen als Einheiten zusammen:

$$\mathcal{B} = \{100\ g\ \text{Mehl}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\\ 100\ ml\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}$$

tabellarische Darstellung der Rezepte

Einheiten	Teig 1	Teig 2	Teig 3
Mehl [100 g]	5.00	2.50	4.00
Butter [100 g]	2.50	2.50	2.00
Zucker [100 g]	2.50	2.50	1.80
Eier [1 Stk]	4.00	5.00	5.00
Milch [100 ml]	1.25	0.80	0.45
Backpulver [1 P]	1.00	1.00	1.00
Vanillin [1 P]	0.00	0.00	4.00
Salz [1 Pr]	0.00	1.00	1.00
Zitrone [1 Stk]	0.00	1.00	0.50
Rum [10 ml]	0.00	0.00	7.50

Koordinatenvektoren für die Rührteige

Basis	Teig 1	Teig 2	Teig 3
b_1 = 100 g Mehl	α_1=5.00	β_1=2.50	γ_1=4.00
b_2 = 100 g Butter	α_2=2.50	β_2=2.50	γ_2=2.00
b_3 = 100 g Zucker	α_3=2.50	β_3=2.50	γ_3=1.80
b_4 = 1 Ei	α_4=4.00	β_4=5.00	γ_4=5.00
b_5 = 100 ml Milch	α_5=1.25	β_5=0.80	γ_5=0.45
b_6 = 1 P Backp.	α_6=1.00	β_6=1.00	γ_6=1.00
b_7 = 1 P Vanillin	α_7=0.00	β_7=0.00	γ_7=4.00
b_8 = 1 Pr Salz	α_8=0.00	β_8=1.00	γ_8=1.00
b_9 = 1 Stk Zitrone	α_9=0.00	β_9=1.00	γ_9=0.50
b_{10} = 10 ml Rum	α_{10}=0.00	β_{10}=0.00	γ_{10}=7.50

Koordinatenvektoren für die Rührteige

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 5.00 \\ 2.50 \\ 2.50 \\ 4.00 \\ 1.25 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2.50 \\ 2.50 \\ 2.50 \\ 5.00 \\ 0.80 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 4.00 \\ 2.00 \\ 1.80 \\ 5.00 \\ 0.45 \\ 1.00 \\ 4.00 \\ 1.00 \\ 0.50 \\ 7.50 \end{pmatrix},$$

Darstellung der Rührteige bezüglich der Basis $\mathcal{B}$

$$\text{Teig 1} = \alpha_1\, b_1 + \cdots + \alpha_{10}\, b_{10} = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i\, b_i$$

$$\text{Teig 2} = \beta_1\, b_1 + \cdots + \beta_{10}\, b_{10} = \sum_{i=1}^{10} \beta_i\, b_i$$

$$\text{Teig 3} = \gamma_1\, b_1 + \cdots + \gamma_{10}\, b_{10} = \sum_{i=1}^{10} \gamma_i\, b_i$$

In der Praxis rechnen wir nicht mit den Teigen 1,2,3 sondern mit den Koordinaten α_i, β_i, γ_i, $1 \leq i \leq 10$.

eine Basis für den Rührteig

$$\mathcal{B} = \{100\ g\ \text{Mehl}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}$$

eine Basis für den Rührteig

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{100\ g\ \text{Mehl}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}\end{aligned}$$

Wir nennen ein Erzeugendensystem eine Basis, wenn es minimal ist, d.h. keines der Elemente kann durch die jeweils anderen erzeugt werden. Die Elemente in $\mathcal{B}$ sind "linear unabhängig".

HTWG

eine andere Basis

$$\mathcal{C} = \{\text{100 } g \text{ Mehl} + \text{100 } g \text{ Zucker}\,,\ \text{100 } g \text{ Butter}\,,\ \text{1 Ei}\,,$$
$$\text{100 } g \text{ Milch}\,,\ \text{1 } P \text{ Backp.}\,,\ \text{1 } P \text{ Vanillin}\,,$$
$$\text{1 } Pr \text{ Salz}\,,\ \text{1 } Stk \text{ Zitronenschale}\,,\ \text{10 } ml \text{ Rum}\}$$

eine andere Basis

$$\mathcal{C} = \{100\ g \text{ Mehl} + 100\ g \text{ Zucker}\,,\ 100\ g \text{ Butter}\,,\ 1 \text{ Ei}\,,\ 100\ g \text{ Milch}\,,\ 1\ P \text{ Backp.}\,,\ 1\ P \text{ Vanillin}\,,\ 1\ Pr \text{ Salz}\,,\ 1\ Stk \text{ Zitronenschale}\,,\ 10\ ml \text{ Rum}\}$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig?

eine andere Basis

$$\mathcal{C} = \{100\ g \text{ Mehl} + 100\ g \text{ Zucker}\,,\ 100\ g \text{ Butter}\,,\ 1 \text{ Ei}\,,\ 100\ g \text{ Milch}\,,\ 1\ P \text{ Backp.}\,,\ 1\ P \text{ Vanillin}\,,\ 1\ Pr \text{ Salz}\,,\ 1\ Stk \text{ Zitronenschale}\,,\ 10\ ml \text{ Rum}\}$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja

$$\mathcal{C} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja
Frage: Können mit dieser Basis auch die Rührteige Teig 1, Teig 2 und Teig 3 erzeugt werden?

eine andere Basis

$$\mathcal{C} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja
Frage: Können mit dieser Basis auch die Rührteige Teig 1, Teig 2 und Teig 3 erzeugt werden? Antwort: Nein, nur solche, die gleichen Anteil an Mehl und Zucker im Rezept haben; wie es bei Teig 2 der Fall ist.

$$\mathcal{C} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja
Frage: Können mit dieser Basis auch die Rührteige Teig 1, Teig 2 und Teig 3 erzeugt werden? Antwort: Nein, nur solche, die gleichen Anteil an Mehl und Zucker im Rezept haben; wie es bei Teig 2 der Fall ist. $\rightarrow \mathcal{C}$ erzeugt einen kleineren Raum.

$$\mathcal{D} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,\\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}\ ?$$

nochmal anders

$$\mathcal{D} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,$$
$$1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,$$
$$1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}\,?$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig?

nochmal anders

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \{&100\ g \text{ Mehl} + 100\ g \text{ Zucker},\ 100\ g \text{ Butter},\ 100\ g \text{ Zucker},\\ &1 \text{ Ei},\ 100\ g \text{ Milch},\ 1\ P \text{ Backp.},\ 1\ P \text{ Vanillin},\\ &1\ Pr \text{ Salz},\ 1\ Stk \text{ Zitronenschale},\ 10\ ml \text{ Rum}\}\,?\end{aligned}$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja

nochmal anders

$$\mathcal{D} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,\\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}\,?$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja
Frage: Können mit dieser Basis auch die Rührteige Teig 1, Teig 2 und Teig 3 erzeugt werden?

nochmal anders

$$\mathcal{D} = \{100\ g \text{ Mehl} + 100\ g \text{ Zucker}\,,\ 100\ g \text{ Butter}\,,\ 100\ g \text{ Zucker}\,,\ 1 \text{ Ei}\,,\ 100\ g \text{ Milch}\,,\ 1\ P \text{ Backp.}\,,\ 1\ P \text{ Vanillin}\,,\ 1\ Pr \text{ Salz}\,,\ 1\ Stk \text{ Zitronenschale}\,,\ 10\ ml \text{ Rum}\}\,?$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja
Frage: Können mit dieser Basis auch die Rührteige Teig 1, Teig 2 und Teig 3 erzeugt werden? Antwort: Ja

nochmal anders

$$\mathcal{D} = \{100\ g\ \text{Mehl} + 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 100\ g\ \text{Butter}\,,\ 100\ g\ \text{Zucker}\,,\ 1\ \text{Ei}\,,\ 100\ g\ \text{Milch}\,,\ 1\ P\ \text{Backp.}\,,\ 1\ P\ \text{Vanillin}\,,\ 1\ Pr\ \text{Salz}\,,\ 1\ Stk\ \text{Zitronenschale}\,,\ 10\ ml\ \text{Rum}\}\,?$$

Frage: Sind die Komponenten linear unabhängig? Antwort: Ja
Frage: Können mit dieser Basis auch die Rührteige Teig 1, Teig 2 und Teig 3 erzeugt werden? Antwort: Ja
Frage: Wie sehen die Koordinatenvektoren zu dieser Basis aus?

Koordinatenvektoren zu verschiedenen Basen

	zur Basis $\mathcal{B}$			zur Basis $\mathcal{D}$			
Basis $\mathcal{B}$	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Basis $\mathcal{D}$
b_1	5.00	2.50	4.00	5.00	2.50	4.00	$d_1 = b_1 + b_3$
b_2	2.50	2.50	2.00	2.5	2.50	2.00	$d_2 = b_2$
b_3	2.50	2.50	1.80	-2.5	0.00	-2.20	$d_3 = b_3$
b_4	4.00	5.00	5.00	4.00	5.00	5.00	$d_4 = b_4$
b_5	1.25	0.80	0.45	1.00	0.80	0.45	$d_5 = b_5$
b_6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	$d_6 = b_6$
b_7	0.00	0.00	4.00	1.00	0.00	4.00	$d_7 = b_7$
b_8	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00	$d_8 = b_8$
b_9	0.00	1.00	0.50	0.00	1.00	0.50	$d_9 = b_9$
b_{10}	0.00	0.00	7.50	0.00	0.00	7.50	$d_{10} = b_{10}$

Erkenntnis

Rührteige können bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden.

Erkenntnis

Rührteige können bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden.
Frage: Was können wir damit sinnvolles tun?

Erkenntnis

Rührteige können bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden.
Frage: Was können wir damit sinnvolles tun?
Ziel: Weniger Daten speichern.

Üblicherweise geht man so vor, dass man die betragsmäßig kleinen Koordinaten verwirft und nur nicht Nulleinträge speichert.

Der Teig, den man mit den übrig gebliebenen Koordinaten “rekonstruiert” ist dann nicht mehr der gleiche, d.h. der neue Kuchen wird ein wenig anders schmecken. Ob er dann aber immer noch gut schmeckt hängt davon ab wieviel man verworfen hat und welche Basis man gewählt hat. Je “schlauer” die Basis gewählt wurde, desto besser schmeckt der Kuchen bei gleicher Kompressionsrate.

verlustbehaftete Datenkompression

Zum Beispiel könnten wir sagen, dass alle Koordinaten gelöscht werden, die betragsmäßig kleiner als 2 sind. Für die Koordinaten von Teig 3 bzgl Basis $\mathcal{B}$ bedeutet das etwa

$$\vec{\gamma} \approx \tilde{\vec{\gamma}} = \begin{pmatrix} 4.00 \\ 2.00 \\ \cancel{1.80} \\ 5.00 \\ \cancel{0.45} \\ \cancel{1.00} \\ 4.00 \\ \cancel{1.00} \\ \cancel{0.50} \\ 7.50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 5.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 4.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 7.50 \end{pmatrix}$$

Wir haben dann 50% an nicht Nulleinträgen eingespart. Der Kuchen, der dabei entstanden ist hat nun das Rezept:

Teig 3	
400 g	Mehl
200 g	Butter
5	Eier
4 P	Vanillin
75 ml	Rum*

* Gut, dass der noch drin ist ;-)

Was fehlt ist

1 P	Backp.	nicht so günstig
1 Pr	Salz	verkraftbar
0.5 Stk	Zitrone	verkraftbar
45 ml	Milch	hm...
180 g	Zucker	auch eher schlecht

Man darf vermuten, dass dieser Kuchen kein “Feuerwerk von orchestralen Aromen” wird.

Versuchen wir es mit einer “schlaueren” Basis. Etwa eine, die alle typischen Komponenten mit typischer Größenordnung garantiert beibehält:

$$\mathcal{E} = \{e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,\ e_4\,,\ e_5\,,\ e_6\,,\ e_7\,,\ e_8\,,\ e_9\,,\ e_{10}\}$$

Dabei ist e_1=383 g Mehl + 233 g Butter + 227 g Zucker+4.67 Eier + 83 ml Milch + 1P Packp. + 1.3 P Vanillin + 0.7 Pr Salz + 0.3 Stk Zitrone + 25 ml Rum
und $e_i = b_i$ für $2 \leq i \leq 10$.

Koordinatenvektoren zu verschiedenen Basen

	zur Basis $\mathcal{B}$			zur Basis $\mathcal{E}$			
Basis $\mathcal{B}$	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Basis $\mathcal{E}$
b_1	5.00	2.50	4.00	1.31	0.65	1.04	e_1
b_2	2.50	2.50	2.00	-54.18	97.91	-43.34	e_2
b_3	2.50	2.50	1.80	-46.35	101.83	-57.08	e_3
b_4	4.00	5.00	5.00	-2.10	1.95	0.12	e_4
b_5	1.25	0.80	0.45	16.65	25.82	-41.68	e_5
b_6	1.00	1.00	1.00	-0.31	0.35	-0.04	e_6
b_7	0.00	0.00	4.00	-1.70	-0.85	2.64	e_7
b_8	0.00	1.00	1.00	-0.91	0.54	0.27	e_8
b_9	0.00	1.00	0.50	-0.39	0.80	0.19	e_9
b_{10}	0.00	0.00	7.50	-32.64	-16.32	48.90	e_{10}

Koordinatenvektoren zu verschiedenen Basen

	zur Basis $\mathcal{B}$			zur Basis $\mathcal{E}$			
Basis $\mathcal{B}$	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Basis $\mathcal{E}$
b_1	5.00	2.50	4.00	1.31	0.65	1.04	e_1
b_2	2.50	2.50	2.00	-54.18	97.91	-43.34	e_2
b_3	2.50	2.50	1.80	-46.35	101.83	-57.08	e_3
b_4	4.00	5.00	5.00	-2.10	1.95	~~0.12~~	e_4
b_5	1.25	0.80	0.45	16.65	25.82	-41.68	e_5
b_6	1.00	1.00	1.00	~~-0.31~~	~~0.35~~	~~-0.04~~	e_6
b_7	0.00	0.00	4.00	-1.70	-0.85	2.64	e_7
b_8	0.00	1.00	1.00	-0.91	0.54	~~0.27~~	e_8
b_9	0.00	1.00	0.00	~~-0.39~~	0.80	~~0.19~~	e_9
b_{10}	0.00	0.00	7.50	-32.64	-16.32	48.90	e_{10}

Koordinatenvektoren zu verschiedenen Basen

Basis $\mathcal{B}$	zur Basis $\mathcal{B}$ Teig 1	Teig 2	Teig 3	zur Basis $\mathcal{E}$ Teig 1	Teig 2	Teig 3	Basis $\mathcal{E}$
b_1	5.00	2.50	4.00	1.31	0.65	1.04	e_1
b_2	2.50	2.50	2.00	-54.18	97.91	-43.34	e_2
b_3	2.50	2.50	1.80	-46.35	101.83	-57.08	e_3
b_4	4.00	5.00	5.00	-2.10	1.95	0.00	e_4
b_5	1.25	0.80	0.45	16.65	25.82	-41.68	e_5
b_6	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	e_6
b_7	0.00	0.00	4.00	-1.70	-0.85	2.64	e_7
b_8	0.00	1.00	1.00	-0.91	0.54	0.00	e_8
b_9	0.00	1.00	0.00	0.00	0.80	0.00	e_9
b_{10}	0.00	0.00	7.50	-32.64	-16.32	48.90	e_{10}

neuer Kuchen

	original			neu		
	Teig 1	Teig 2	Teig 3	Teig 1	Teig 2	Teig 3
Mehl [g]	500	250	400	500	250	400
Butter [g]	250	250	200	250	250	200
Zucker [g]	250	250	180	250	250	180
Eier [Stk]	4	5	5	4	5	4.88
Milch [ml]	125	80	45	125	80	45
Backpulver [P]	1	1	1	1.31	0.65	1.04
Vanillin [P]	0	0	4	0	0	4
Salz [Pr]	0	1	1	0	1	0.73
Zitrone [Stk]	0	1	0	0.39	1	0.31
Rum [ml]	0	0	75	0	0	75

verlustbehaftete Datenkompression

Teig 3 im Original

200 g	Butter
180 g	Zucker
4 P	Vanillin
5	Eier
1 Pr	Salz
75 ml	Rum
400 g	Mehl
1 P	Backp.
45 ml	Milch
0.5 Stk	Zitrone

Teig 3 mit Basis $\mathcal{B}$

400 g	Mehl
200 g	Butter
5	Eier
4 P	Vanillin
75 ml	Rum

Teig 3 mit Basis $\mathcal{E}$

200 g	Butter
180 g	Zucker
4 P	Vanillin
4.88	Eier
0.73 Pr	Salz
75 ml	Rum
400 g	Mehl
1.04 P	Backp.
45 ml	Milch
0.31 Stk	Zitrone


en Guete
Backen macht glücklich

H