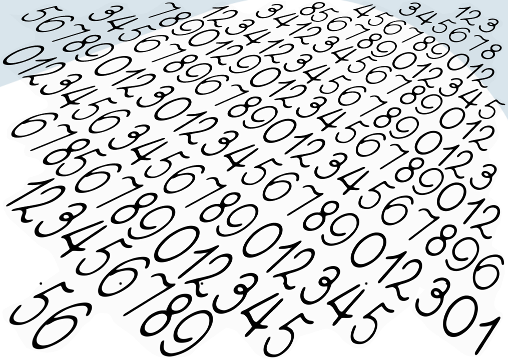
H T
W I
G N

Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik



1 Elementare Algebra

1.1 Mengen & Schreibweisen

1.2 Zahlmengen

Mathe I

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Definition

Definition: Menge

Eine “Menge” ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Objekte einer Menge heißen “Elemente”.

Definition

Es gibt zwei Darstellungsformen von Mengen.

“aufzählende Form”:

$$M = \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{\text{Elemente}}\}$$

Definition

Es gibt zwei Darstellungsformen von Mengen.

"aufzählende Form":

$$M = \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{\text{Elemente}}\}$$

oder auch

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 16'567\}$$

Definition

Es gibt zwei Darstellungsformen von Mengen.

"aufzählende Form":

$$M = \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{\text{Elemente}}\}$$

oder auch

$$M = \{1, 2, 3, \ldots, 16'567\}$$

"beschreibende Form":

$$M = \{\underbrace{\text{Auto in Konstanz}}_{\text{Grundmenge}} \mid \underbrace{\text{Das Auto hat die Farbe rot}}_{\text{Eigenschaft}}\}$$

Definition

Es gibt zwei Darstellungsformen von Mengen.

“aufzählende Form”:

$$M = \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{\text{Elemente}}\}$$

oder auch

$$M = \{1, 2, 3, \ldots, 16'567\}$$

“beschreibende Form”:

$$M = \{\underbrace{\text{Auto in Konstanz}}_{\text{Grundmenge}} \mid \underbrace{\text{Das Auto hat die Farbe rot}}_{\text{Eigenschaft}}\}$$

Mengen, die keine Elemente enthalten heißen “leere Mengen”:

$$\emptyset := \{\}$$

Peer Instruction (Mengen)

Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Mengen?(Mehrfachauswahl)

- [ ] {1,2,3,4}
- [ ] {}
- [ ] (-1,2)
- [ ] {1,1}
- [ ] {1,{1}}
- [ ] {1,a,bla,Luftballon}

Peer Instruction (Mengen)

Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Meng en?(Mehrfachauswahl)

- {1,2,3,4}
- {}
- (-1,2)
- {1,1}
- {1,{1}}
- {1,a,bla,Luftballon}

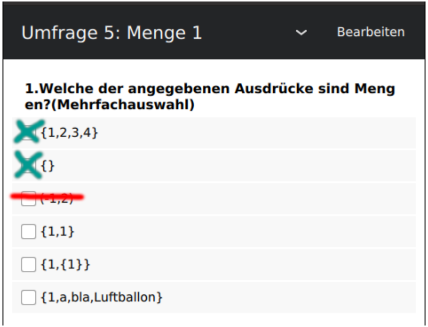
Peer Instruction (Mengen)

Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Meng en?(Mehrfachauswahl)

- [x] {1,2,3,4}
- [x] {}
- [ ] (-1,2)
- [ ] {1,1}
- [ ] {1,{1}}
- [ ] {1,a,bla,Luftballon}

Peer Instruction (Mengen)



Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Meng en?(Mehrfachauswahl)

- {1,2,3,4}
- {}
- ~~(-1,2)~~
- {1,1}
- {1,{1}}
- {1,a,bla,Luftballon}

Peer Instruction (Mengen)

Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Meng en?(Mehrfachauswahl)

- {1,2,3,4}
- {}
- ~~(-1,2)~~
- ~~{1,1}~~
- {1,{1}}
- {1,a,bla,Luftballon}

Peer Instruction (Mengen)

Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Meng en?(Mehrfachauswahl)

- [x] {1,2,3,4}
- [x] {}
- [ ] ~~(-1,2)~~
- [ ] ~~{1,1}~~
- [x] {1,{1}}
- [ ] {1,a,bla,Luftballon}

Peer Instruction (Mengen)

Umfrage 5: Menge 1 Bearbeiten

1.Welche der angegebenen Ausdrücke sind Mengen?(Mehrfachauswahl)

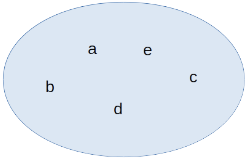
- {1,2,3,4}
- {}
- ~~(-1,2)~~
- ~~{1,1}~~
- {1,{1}}
- {1,a,bla,Luftballon}

(Mengen-)Schreibweisen - Element

Ist a ein Element der Menge M so sagen wir "a ist Element von M" und schreiben

$$a \in M$$

"Venn-Diagramm"

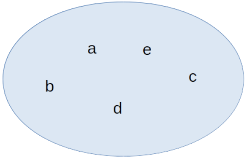


(Mengen-)Schreibweisen - Element

"Venn-Diagramm"

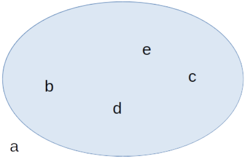
Ist a ein Element der Menge M so sagen wir "a ist Element von M" und schreiben

$$a \in M$$



und ist a hingegen kein Element von M so sagen wir "a ist nicht Element von M" und schreiben

$$a \notin M\,.$$

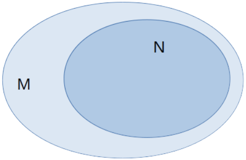


(Mengen-)Schreibweisen - Teilmenge

"N ist in M enthalten"/"N ist Teilmenge von M"

$$N \subseteq M \quad \text{(hier ist } N = M \text{ möglich)}$$

"Venn-Diagramm"



(Mengen-)Schreibweisen - Teilmenge

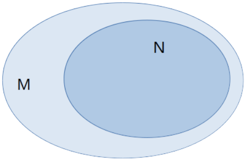
“N ist in M enthalten” /” N ist Teilmenge von M”

$$N \subseteq M \quad \text{(hier ist } N = M \text{ möglich)}$$

“N ist echt in M enthalten” /” N ist echte Teilmenge von M”

$$N \subset M \quad \text{oder} \quad N \subsetneq M$$

“Venn-Diagramm”



(Mengen-)Schreibweisen - Teilmenge

"N ist in M enthalten"/"N ist Teilmenge von M"

$$N \subseteq M \quad \text{(hier ist } N = M \text{ möglich)}$$

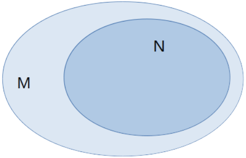
"N ist <u>echt</u> in M enthalten"/"N ist <u>echte</u> Teilmenge von M"

$$N \subset M \quad \text{oder} \quad N \subsetneq M$$

$N \subset M$ ist gleichbedeutend mit:

$$N \subseteq M \text{ und es gibt ein } x \in M \text{ mit } x \notin N$$

"Venn-Diagramm"



(Mengen-)Schreibweisen - Teilmenge

“N ist in M enthalten” /” N ist Teilmenge von M”

$$N \subseteq M \quad \text{(hier ist } N = M \text{ möglich)}$$

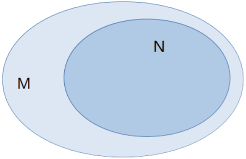
“N ist <u>echt</u> in M enthalten” /” N ist <u>echte</u> Teilmenge von M”

$$N \subset M \quad \text{oder} \quad N \subsetneq M$$

$N \subset M$ ist gleichbedeutend mit:

$$N \subseteq M \text{ und es gibt ein } x \in M \text{ mit } x \notin N$$

“Venn-Diagramm”



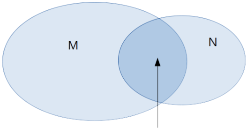
Wir sprechen so:
N ist Teilmenge der Menge M und es gibt ein Element x in M, für das gilt, dass x nicht Element der Menge N ist.

(Mengen-)Schreibweisen - Schnitt und Vereinigung

Der "Schnitt" von M mit N beschreibt alle Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

$$M \cap N$$

"Venn-Diagramm"



(Mengen-)Schreibweisen - Schnitt und Vereinigung

Der "Schnitt" von M mit N beschreibt alle Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

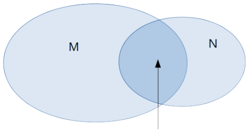
$$M \cap N$$

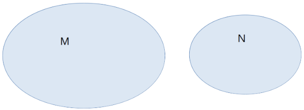
Gibt es keine gemeinsamen Elemente so ist der Schnitt leer, bzw. die leere Menge

$$M \cap N = \emptyset$$

und wir sagen M und N sind "disjunkt".

"Venn-Diagramm"



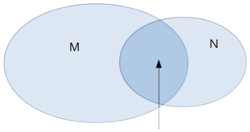


(Mengen-)Schreibweisen - Schnitt und Vereinigung

"Venn-Diagramm"

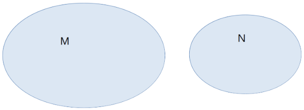
Der "Schnitt" von M mit N beschreibt alle Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

$$M \cap N$$



Gibt es keine gemeinsamen Elemente so ist der Schnitt leer, bzw. die leere Menge

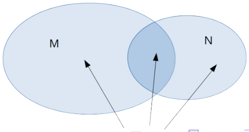
$$M \cap N = \emptyset$$



und wir sagen M und N sind "disjunkt".

Die "Vereinigung" von Mengen

$$M \cup N$$

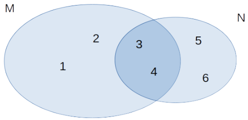


fasst alle Elemente aus M und N - Differenz Doppelungen - zusammen.

Beispiele

$$M = \{1, 2, 3, 4\}\,,\ \ N = \{3, 4, 5, 6\}\,,$$

"Venn-Diagramm"



$\{2, 3\} \subset M$ und $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq M$

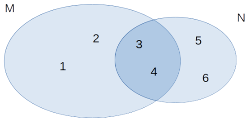
aber

$$N \not\subset M\,.$$

Beispiele

$$M = \{1,2,3,4\}\,,\;\; N = \{3,4,5,6\}\,,$$

“Venn-Diagramm”



$\{2,3\} \subset M$ und $\{1,2,3,4\} \subseteq M$

aber

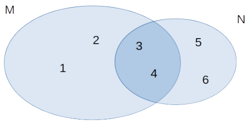
$$N \not\subset M\,.$$

Schnitt: $M \cap N = \{3,4\}\,.$

Beispiele

$$M = \{1,2,3,4\}\,, \;\; N = \{3,4,5,6\}\,,$$

"Venn-Diagramm"



$$\{2,3\} \subset M \quad \text{und} \quad \{1,2,3,4\} \subseteq M$$

aber

$$N \not\subset M\,.$$

Schnitt: $M \cap N = \{3,4\}\,.$

Vereinigung: $M \cup N = \{1,2,3,4,5,6\}$

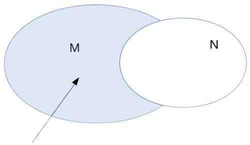
(Mengen-)Schreibweisen - Differenz und Komplement

"M ohne N"

$$M \setminus N$$

beschreibt die Menge, die wir erhalten wenn wir aus M alle Elemente des Schnitts $M \cap N$ entfernen.

"Venn-Diagramm"



Memo:

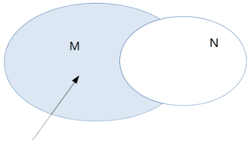
$$M = \{1,2,3,4\}\,,\ N = \{3,4,5,6\}\,,\ A = \{0,1,2,3,4,5\}$$

"Venn-Diagramm"

"M ohne N"

$$M \setminus N = \{1,2\}$$

beschreibt die Menge, die wir erhalten wenn wir aus M alle Elemente des Schnitts $M \cap N$ entfernen.



(Mengen-)Schreibweisen - Differenz und Komplement

Memo:

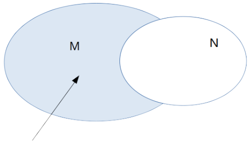
$$M = \{1,2,3,4\}\,,\ N = \{3,4,5,6\}\,,\ A = \{0,1,2,3,4,5\}$$

"Venn-Diagramm"

"M ohne N"

$$M \setminus N = \{1,2\}$$

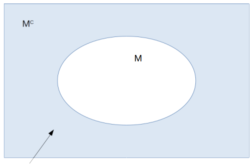
beschreibt die Menge, die wir erhalten wenn wir aus M alle Elemente des Schnitts $M \cap N$ entfernen.



Das "Komplement" einer Menge

$$M^{\complement} \quad \text{oder auch} \quad \overline{M}$$

beschreibt "alles" was nicht Element von M ist. Je nach Kontext bezieht sich "alles" auf eine Übergeordnete Menge A mit $M \subseteq A$.

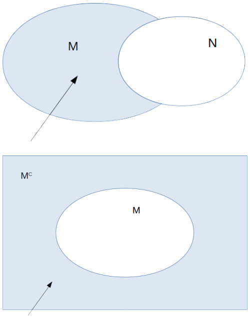


(Mengen-)Schreibweisen - Differenz und Komplement

Memo:

$$M = \{1,2,3,4\}\,,\ N = \{3,4,5,6\}\,,\ A = \{0,1,2,3,4,5\}$$

"Venn-Diagramm"



"M ohne N"

$$M \setminus N = \{1,2\}$$

beschreibt die Menge, die wir erhalten wenn wir aus M alle Elemente des Schnitts $M \cap N$ entfernen.

Das "Komplement" einer Menge

$$M^{\complement} = \{0,5\} \quad \text{oder auch} \quad \overline{M}$$

beschreibt "alles" was nicht Element von M ist. Je nach Kontext bezieht sich "alles" auf eine Übergeordnete Menge A mit $M \subseteq A$.

Klammerung und Reihenfolge

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

Von
$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$
kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

Von
$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$
kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.

Vorfahrtsregel: $^{\complement}$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

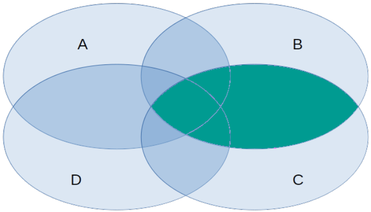
Von

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.

Vorfahrtsregel: $^{\complement}$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$



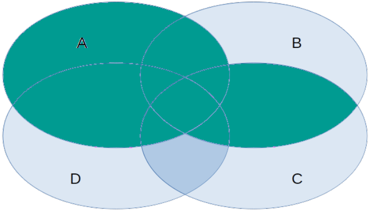
$B \cap C$

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

Von

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.



$A \cup (B \cap C)$

Vorfahrtsregel: $^\complement$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

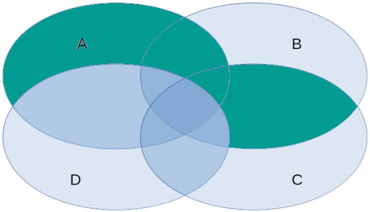
Von

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.

<u>Vorfahrtsregel:</u> $^{\complement}$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$



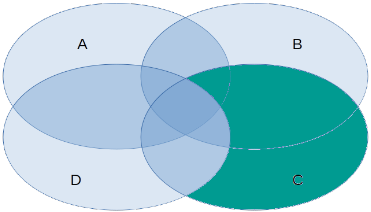
$(A \cup (B \cap C)) \setminus D$

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

Von

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.



$C \setminus D$

Vorfahrtsregel: $^{\complement}$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

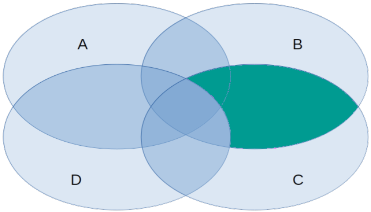
Von

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.

Vorfahrtsregel: $^{\complement}$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$



$B \cap (C \setminus D)$

Vorsicht ist geboten bei der Reihenfolge der Ausführung von Mengenoperationen.

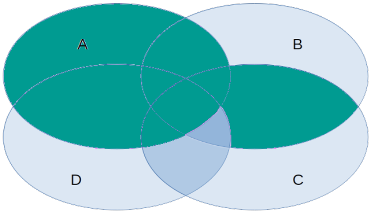
Von

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

kann man sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms überzeugen.

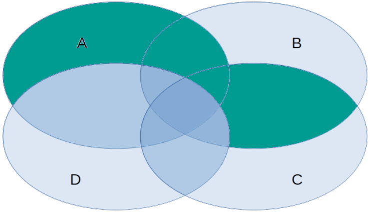
<u>Vorfahrtsregel:</u> $^{\complement}$ vor $\cap$ vor $\cup$ vor $\setminus$

$$A \cup B \cap C \setminus D = (A \cup (B \cap C)) \setminus D$$

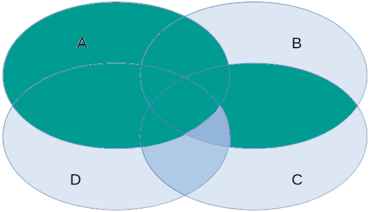


$$A \cup (B \cap (C \setminus D))$$

Klammerung und Reihenfolge



$(A \cup (B \cap C)) \setminus D$



$A \cup (B \cap (C \setminus D))$

Klammerung und Reihenfolge

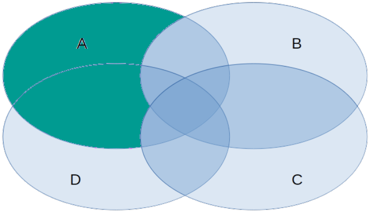
Bei

$$A \cap B \cap C \quad \text{und} \quad A \cup B \cup C$$

ist die Ausführungsreihenfolge egal, aber wie sieht es aus mit

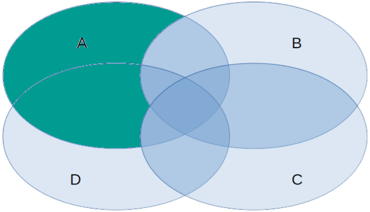
$$A \setminus B \setminus C = ???$$

Klammerung und Reihenfolge

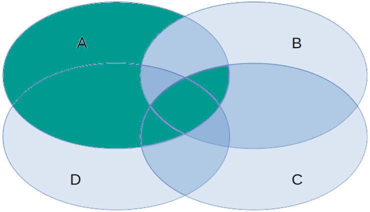


$$(A \setminus B) \setminus C$$

Klammerung und Reihenfolge



$(A \setminus B) \setminus C$



$A \setminus (B \setminus C)$

Peer Instruction (Mengenklammerung)

$$A^{\complement} \cap C \cup B \setminus D^{\complement}$$

Welche der folgenden Klammerungen ist korrekt?

(A) $\left(\left(\left(A^{\complement}\right) \cap C\right) \cup (B \setminus D)^{\complement}\right)$

(B) $\left(\left(A^{\complement}\right) \cap ((C \cup B) \setminus D)\right)^{\complement}$

(C) $\left(\left(\left(\left(A^{\complement}\right) \cap C\right) \cup B\right) \setminus \left(D^{\complement}\right)\right)$

(D) $\left(\left(\left(A^{\complement}\right) \cap (C \cup B)\right) \setminus \left(D^{\complement}\right)\right)$

Peer Instruction (Mengenklammerung)

$$A^{\complement} \cap C \cup B \setminus D^{\complement}$$

Welche der folgenden Klammerungen ist korrekt?

(A)	$\left(\left(\left(A^{\complement}\right) \cap C\right) \cup (B \setminus D)^{\complement}\right)$
(B)	$\left(\left(A^{\complement}\right) \cap ((C \cup B) \setminus D)\right)^{\complement}$
(C)	$\left(\left(\left(\left(A^{\complement}\right) \cap C\right) \cup B\right) \setminus \left(D^{\complement}\right)\right)$
(D)	$\left(\left(\left(A^{\complement}\right) \cap (C \cup B)\right) \setminus \left(D^{\complement}\right)\right)$

Definition

Quantoren

“Allquantor”	
$\forall$	Für alle
$\neg\forall$	Nicht für alle, d.h. wenigstens für eins nicht

Damit spielen wir jetzt ein wenig ;-)

Definition

Quantoren

“Allquantor”	
$\forall$	Für alle
$\neg\forall$	Nicht für alle, d.h. wenigstens für eins nicht

“Existenzquantor”	
$\exists$	Es existiert (mindestens) ein
$\exists!$, $\exists_1$	Es existiert genau ein
$\exists_n$	Es existieren genau n (Stück)
$\nexists$	Es existiert kein

Damit spielen wir jetzt ein wenig ;-)

Definition

Quantoren

"Allquantor"	
$\forall$	Für alle
$\neg\forall$	Nicht für alle, d.h. wenigstens für eins nicht

"Existenzquantor"	
$\exists$	Es existiert (mindestens) ein
$\exists!$, $\exists_1$	Es existiert genau ein
$\exists_n$	Es existieren genau n (Stück)
$\nexists$	Es existiert kein

logische Operatoren (Konjunktion, Disjunktion)	
$\wedge$	und
$\vee$	oder

Damit spielen wir jetzt ein wenig ;-)

Beispiele

1. $$M \subseteq N$$

Beispiele

1.

$$M \subseteq N$$

beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

"Alle Elemente in M sind auch Elemente in N"

Beispiele

1.
$$M \subseteq N$$

beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

“Alle Elemente in M sind auch Elemente in N”

“matheartig” formuliert:

“Für alle Elemente x in M gilt x ist Element von N”

Beispiele

1.

$$M \subseteq N$$

beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

"Alle Elemente in M sind auch Elemente in N"

"matheartig" formuliert:

"$\underbrace{\text{Für alle}}_{\forall}$ Elemente x in M gilt x ist Element von N"

1.
$$M \subseteq N$$
beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

"Alle Elemente in M sind auch Elemente in N"

"matheartig" formuliert:

$$\text{“}\underbrace{\text{Für alle}}_{\forall}\ \underbrace{\text{Elemente } x \text{ in } M}_{x \in M} \text{ gilt } x \text{ ist Element von } N\text{”}$$

Beispiele

1.

$$M \subseteq N$$

beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

"Alle Elemente in M sind auch Elemente in N"

"matheartig" formuliert:

$$\text{"}\underbrace{\text{Für alle}}_{\forall}\ \underbrace{\text{Elemente } x \text{ in } M}_{x\in M}\ \underbrace{\text{gilt}}_{|}\ x \text{ ist Element von } N\text{"}$$

Beispiele

1.
$$M \subseteq N$$
beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

"Alle Elemente in M sind auch Elemente in N"

"matheartig" formuliert:

$$\text{“}\underbrace{\text{Für alle}}_{\forall}\ \underbrace{\text{Elemente } x \text{ in } M}_{x\in M}\ \underbrace{\text{gilt}}_{|}\ \underbrace{x \text{ ist Element von } N}_{x\in N}\text{”}$$

1.

$$M \subseteq N$$

beschreibt, dass alle Elemente in M auch in N enthalten sind, also

"Alle Elemente in M sind auch Elemente in N"

"matheartig" formuliert:

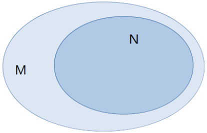
$$\text{“}\underbrace{\text{Für alle}}_{\forall}\ \underbrace{\text{Elemente } x \text{ in } M}_{x \in M}\ \underbrace{\text{gilt}}_{|}\ \underbrace{x \text{ ist Element von } N}_{x \in N}\text{”}$$

mathematische Symbolik:

$$\forall x \in M \mid x \in N$$

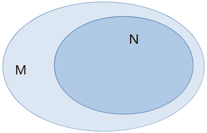
Beispiele

2. $N \subset M$



Beispiele

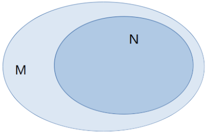
2. $N \subset M$



In Worten:

Elemente von N sind auch Elemente von M und es gibt ein Element von M, das nicht Element von N ist.

2. $N \subset M$



In Worten:

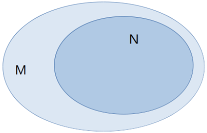
Elemente von N sind auch Elemente von M und es gibt ein Element von M, das nicht Element von N ist.

“mathematisch”:

Für alle Elemente x in N gilt, x ist Element von M und es gibt ein x in M, für das gilt

x ist nicht Element von N.

2. $N \subset M$



In Worten:

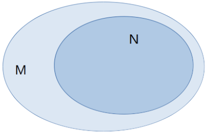
Elemente von N sind auch Elemente von M und es gibt ein Element von M, das nicht Element von N ist.

"mathematisch":

$$\underbrace{\text{Für alle Elemente } x \text{ in } N \text{ gilt},}_{\forall x\in N \;|} \underbrace{x \text{ ist Element von } M}_{x\in M} \underbrace{\text{und}}_{\wedge} \underbrace{\text{es gibt ein } x \text{ in } M, \text{ für das gilt}}_{\exists x\in M \;|}$$

$$\underbrace{x \text{ ist nicht Element von } N}_{x\notin N}.$$

2. $N \subset M$



In Worten:

Elemente von N sind auch Elemente von M und es gibt ein Element von M, das nicht Element von N ist.

“mathematisch”:

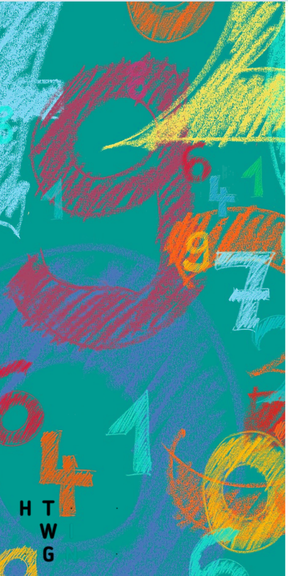
$$\underbrace{\text{Für alle Elemente } x \text{ in } N \text{ gilt}}_{\forall x \in N \;|},\; \underbrace{x \text{ ist Element von } M}_{x \in M} \underbrace{\text{und}}_{\wedge} \underbrace{\text{es gibt ein } x \text{ in } M, \text{ für das gilt}}_{\exists x \in M \;|}$$

$$\underbrace{x \text{ ist nicht Element von } N}_{x \notin N}.$$

mathematische Symbolik:

$$(\forall x \in N \mid x \in M) \;\wedge\; (\exists x \in M \mid x \notin N)$$

Definition



Zahlmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$		"natürliche Zahlen"
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$		
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$		"ganze Zahlen"
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$		"rationale Zahlen"
$\mathbb{R} =$ die ganze Zahlengerade		"reelle Zahlen"
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	(Bsp.: e, $\sqrt{2}$, π, $\ldots$)	"irrationale Zahlen"
$\mathbb{C}$	(Definition später)	"komplexe Zahlen"

x ist eine Primzahl. Beschreiben Sie x in mathematischer Symbolik und verwenden Sie dazu folgende Zeichen (gerne mehrfach, gerne mehr):

$$> \qquad \mathbb{N} \qquad \exists \qquad \neg \qquad \{ \qquad \} \qquad \setminus \qquad \wedge$$

(Haben Sie nicht den Anspruch in 2 Minuten fertig zu sein.)

Tipp: Überlegen Sie welche Eigenschaften eine Primzahl hat, dann wie sie die beschreiben können. Danach verbinden Sie alle BEschreibungen mit einem logischen UND.

x ist eine Primzahl. Beschreiben Sie x in mathematischer Symbolik und verwenden Sie dazu folgende Zeichen (gerne mehrfach, gerne mehr):

$$> \quad \mathbb{N} \quad \exists \quad \neg \quad \{ \quad \} \quad \setminus \quad \wedge$$

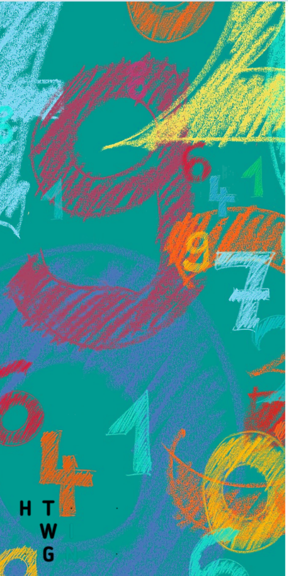
(Haben Sie nicht den Anspruch in 2 Minuten fertig zu sein.)

Tipp: Überlegen Sie welche Eigenschaften eine Primzahl hat, dann wie sie die beschreiben können. Danach verbinden Sie alle BEschreibungen mit einem logischen UND.

Eine Primzahl, hier x, ist nur durch sich selbst und 1 teilbar.

$$\underbrace{(x \in \mathbb{N}) \ \wedge (x > 1)}_{x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \wedge \underbrace{\neg \left(\exists\, k \in \mathbb{N} \setminus \{1, x\} \ : \ \frac{x}{k} \in \mathbb{N} \right)}_{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1,x\} \ : \ \frac{x}{k} \notin \mathbb{N}}$$

Definition

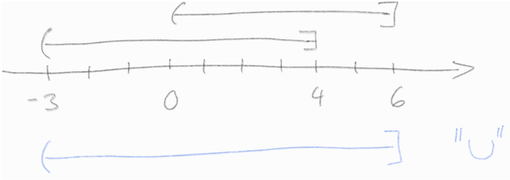


Intervalle

Schreibweise	Definition	Beschreibung
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$	abgeschlossenes Intervall
(a, b)	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subseteq \mathbb{R}$	offenes Intervall
$[a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \subset \mathbb{R}$	(halb–)offenes Intervall
$(a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \subset \mathbb{R}$	(halb–)offenes Intervall

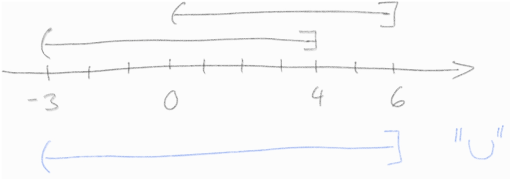
Beispiele

1. $(-3,4] \cup (0,6] = (-3,6]$



Beispiele

1. $(-3, 4] \cup (0, 6] = (-3, 6]$



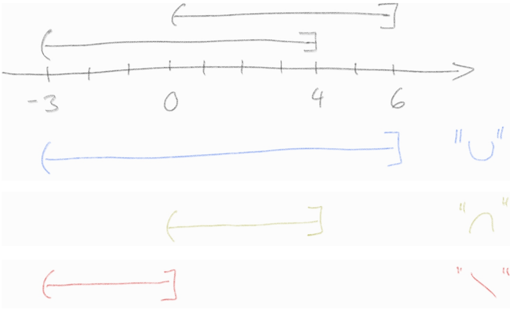
2. $(-3, 4] \cap (0, 6] = (0, 4]$

Beispiele

1. $(-3, 4] \cup (0, 6] = (-3, 6]$

2. $(-3, 4] \cap (0, 6] = (0, 4]$

3. $(-3, 4] \setminus (0, 6] = (-3, 0]$



Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-\infty < a, b < \infty$.

$$\cancel{[a, \infty]} \qquad \text{sondern immer} \qquad [a, \infty)$$

genauso:

$$\cancel{[-\infty, b]} \qquad \text{sondern immer} \qquad (-\infty, b]$$

Eine weitere übliche Schreibweise für offene Intervalle (a, b) ist durch

$$]a, b[$$

gegeben.

Achsenabschnitte

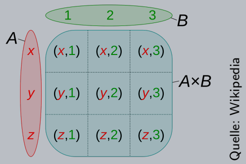
Schreibweise	Definition	Beschreibung
$\mathbb{R}^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$	positive Zahlen
$\mathbb{R}^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$	negative Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$	nicht negative Zahlen
$\mathbb{R}_0^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$	nicht positive Zahlen

Produktmenge / kartesisches Produkt

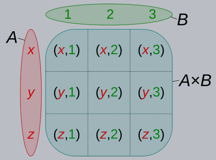
Es seien M und N Mengen: Die "Menge der geordneten Paare / 2-Tupel"

$$M \times N := \{(a, b) \mid (a \in M) \wedge (b \in N)\}$$

heißt "Produktmenge" oder auch "kartesisches Produkt".



Produktmenge / kartesisches Produkt



Quelle: Wikipedia

Es seien M und N Mengen: Die "Menge der geordneten Paare / 2-Tupel"

$$M \times N := \{(a, b) \mid (a \in M) \wedge (b \in N)\}$$

heißt "Produktmenge" oder auch "kartesisches Produkt".

Sukkzessives Fortgesetzen: Seien M_1,..,M_n Mengen, dann ist

$$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i, i = 1, \ldots, n\}$$

ebenfalls eine Produktmenge. Wir nennen die Elemente $(a_1, \ldots, a_n)$ "n-Tupel". Speziell 2-Tupel nennt man auch kurz "Tupel".

Speziell gilt:

$$M^n := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ Mal}}$$

Beispiele

1. Menge von (2-) Tupeln:

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b, c\} =$$

3.

Beispiele

1. Menge von (2-) Tupeln:

$$\{1,2,3\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a)\,,\ (1,b)\,,\ (1,c)\,,\ (2,a)\,,\ (2,b)\,,\ (2,c)\,,\ (3,a)\,,\ (3,b)\,,\ (3,c)\}$$

3.

Beispiele

1. Menge von (2-) Tupeln:

$$\{1,2,3\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a)\,,\ (1,b)\,,\ (1,c)\,,\ (2,a)\,,\ (2,b)\,,\ (2,c)\,,\ (3,a)\,,\ (3,b)\,,\ (3,c)\}$$

2. Menge von 3-Tupeln:

$$\{1,2\} \times \{a,b\} \times \{+,-\} =$$

3.

Beispiele

1. Menge von (2-) Tupeln:

$$\{1,2,3\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a)\,,\ (1,b)\,,\ (1,c)\,,\ (2,a)\,,\ (2,b)\,,\ (2,c)\,,\ (3,a)\,,\ (3,b)\,,\ (3,c)\}$$

2. Menge von 3-Tupeln:

$$\{1,2\} \times \{a,b\} \times \{+,-\} = \{(1,a,+)\,,\ (1,a,-)\,,\ (1,b,+)\,,\ (1,b,-)\,,\ (2,b,+)\,,\ (2,b,-)\}$$

3.

Beispiele

1. Menge von (2-) Tupeln:

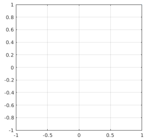
$$\{1,2,3\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a)\,,\ (1,b)\,,\ (1,c)\,,\ (2,a)\,,\ (2,b)\,,\ (2,c)\,,\ (3,a)\,,\ (3,b)\,,\ (3,c)\}$$

2. Menge von 3-Tupeln:

$$\{1,2\} \times \{a,b\} \times \{+,-\} = \{(1,a,+)\,,\ (1,a,-)\,,\ (1,b,+)\,,\ (1,b,-)\,,\ (2,b,+)\,,\ (2,b,-)\}$$

3. Die "Gaußsche/Euklidsche Ebene":

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} &= (-\infty,\infty)^2 \\ &= \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge\ y \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

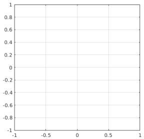


Beispiele

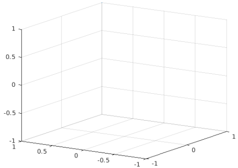
1. Menge von (2-) Tupeln:
$$\{1,2,3\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a)\,,\ (1,b)\,,\ (1,c)\,,\ (2,a)\,,\ (2,b)\,,\ (2,c)\,,\ (3,a)\,,\ (3,b)\,,\ (3,c)\}$$

2. Menge von 3-Tupeln:
$$\{1,2\} \times \{a,b\} \times \{+,-\} = \{(1,a,+)\,,\ (1,a,-)\,,\ (1,b,+)\,,\ (1,b,-)\,,\ (2,b,+)\,,\ (2,b,-)\}$$

3. Die "Gaußsche/Euklidsche Ebene":
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (-\infty,\infty)^2$$
$$= \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}$$

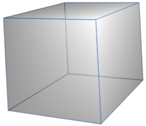


Der "Raum unserer Anschauung":
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (-\infty,\infty)^3$$
$$= \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$



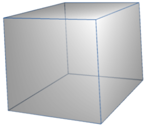
Beispiele

4. Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$: $[0,1]^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1 \wedge 0 \le z \le 1\}$



Beispiele

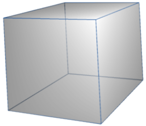
4. Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$: $[0,1]^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$



5. Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ ohne Rand:

$$(0,1)^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \wedge 0 < z < 1\}$$

Beispiele



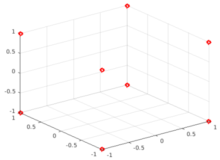
4. Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$: $[0,1]^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$

5. Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ ohne Rand:

$$(0,1)^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \wedge 0 < z < 1\}$$

6. Die Menge aller Eckpunkte des “Einheitsquadrats” $[-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\{-1,1\}^3 = \{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$$

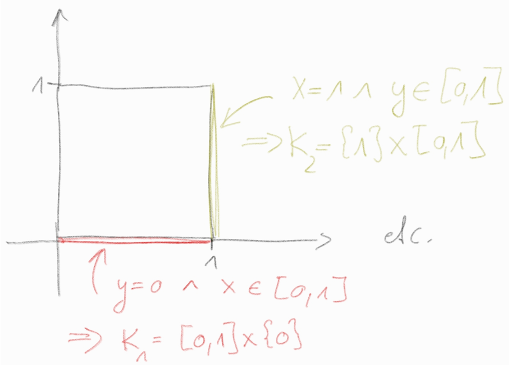


Saalaufgabe

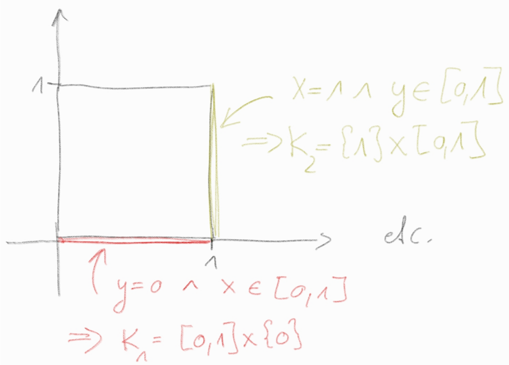
Beschreiben Sie die Menge K alle Kantenpunkte eines Würfels $W = [0, 1]^2$.
Tipp: Machen Sie sich eine kleine Skizze

Saalaufgabe

Beschreiben Sie die Menge K alle Kantenpunkte eines Würfels $W = [0,1]^2$.
Tipp: Machen Sie sich eine kleine Skizze



Beschreiben Sie die Menge K alle Kantenpunkte eines Würfels $W = [0,1]^2$.
Tipp: Machen Sie sich eine kleine Skizze



$$K = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$$

Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\; I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\;\; I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

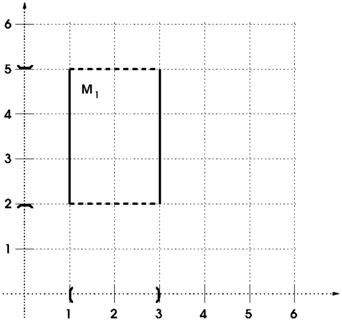
$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\;\; I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$



Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

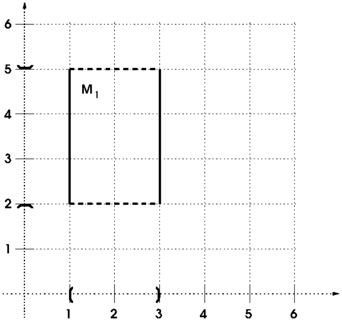
$$I_1 = [1,3]\,,\ \ I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$

$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$

Slizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3



Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

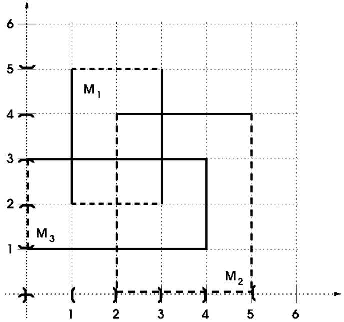
$$I_1 = [1,3]\,,\ \ I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$

$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$

Slizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3



Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\ \ I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

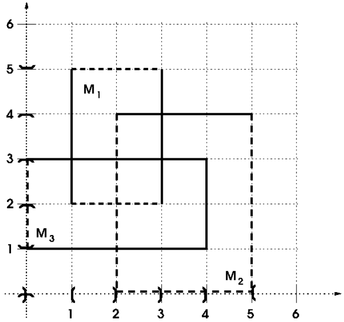
$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$

$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$

Slizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3

$$M_1 \cap M_2 = (2,3] \times (2,4]$$



Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\ \ I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

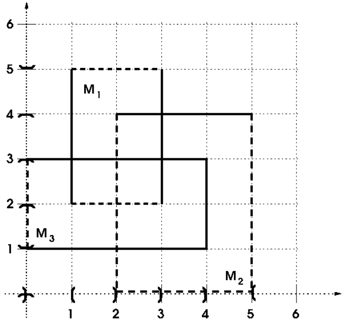
$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$

$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$

Slizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3

$$M_1 \cap M_2 = (2,3] \times (2,4]$$

$$(M_1 \cap M_2) \setminus M_3 = (2,3] \times (3,4]$$



Saalaufgabe

Gegeben seien die Intervalle

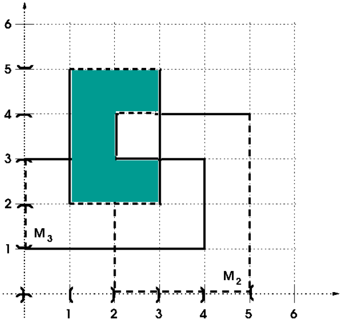
$$I_1 = [1,3]\,,\; I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$

$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$

Slizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3



$$M_1 \cap M_2 = (2,3] \times (2,4]$$

$$(M_1 \cap M_2) \setminus M_3 = (2,3] \times (3,4]$$

Wie klammern?

$$M_1 \setminus M_2 \setminus M_3 =$$

Gegeben seien die Intervalle

$$I_1 = [1,3]\,,\ \ I_2 = (2,5) \quad \text{und} \quad I_3 = (0,4]\,.$$

$$M_1 = I_1 \times I_2 = [1,3] \times (2,5)$$

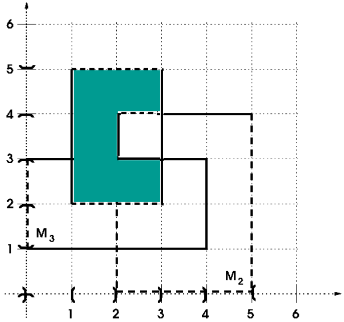
$$M_2 = I_2 \times I_3 = (2,5) \times (0,4]$$

$$M_3 = I_3 \times I_1 = (0,4] \times [1,3]$$

Slizzieren Sie die Mengen M_2 und M_3

$$M_1 \cap M_2 = (2,3] \times (2,4]$$

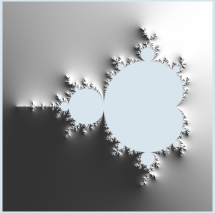
$$(M_1 \cap M_2) \setminus M_3 = (2,3] \times (3,4]$$



Wie klammern?

$$M_1 \setminus M_2 \setminus M_3 = M_1 \setminus (M_2 \setminus M_3)$$

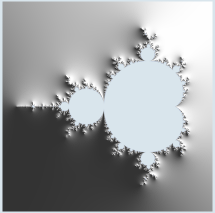
Motivation für die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$



Was ist die Lösung von

$$x^2 = -1\,?$$

Motivation für die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

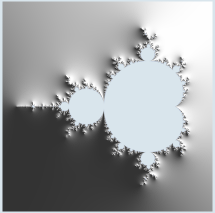


Was ist die Lösung von

$$x^2 = -1\,?$$

$\mathbb{R}$ ist nicht genug!

Motivation für die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$



Was ist die Lösung von

$$x^2 = -1\,?$$

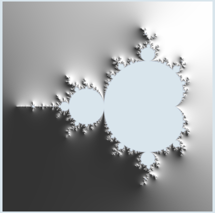
$\mathbb{R}$ ist nicht genug!

Idee: Definiere eine "imaginäre Zahl", wir nennen sie i, mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1\,.$$

Problem gelöst! ;-)

Definition



Komplexe Zahlen

Die Zahlmenge $\mathbb{C}$ mit

$$\mathbb{C} = \{x + i\, y \mid x, y \in \mathbb{R} \ \wedge \ i^2 = -1\}$$

heißt "Menge der Komplexen Zahlen". Für eine komplexe Zahl c in der sogenannten "kartesischen Form", also $c = (x + iy) \in \mathbb{C}$, heißt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(c) &:= x && \text{"Realteil"}, \\ \mathrm{Im}(c) &:= y && \text{"Imaginärteil" und} \\ \bar{c} &:= x - iy && \text{"konjugiert Komplexes" von } c. \end{aligned}$$

Beispiele und geometrische Interpretation

1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

$$\bar{z} = 2 - 3\,i$$

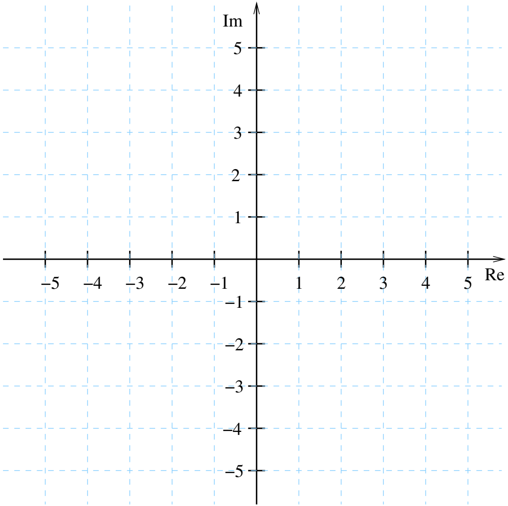
Beispiele und geometrische Interpretation

1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

$$\bar{z} = 2 - 3\,i$$



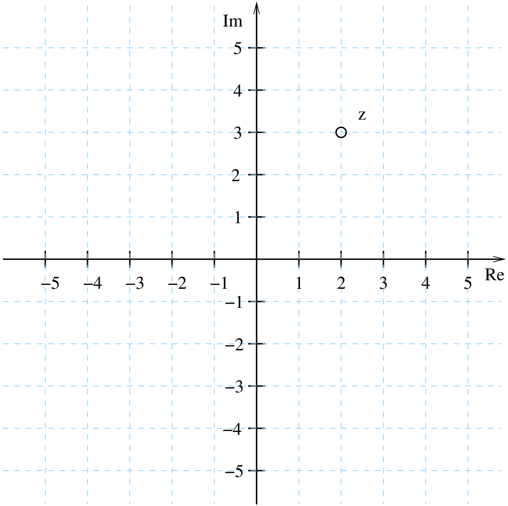
Beispiele und geometrische Interpretation

1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

$$\bar{z} = 2 - 3\,i$$



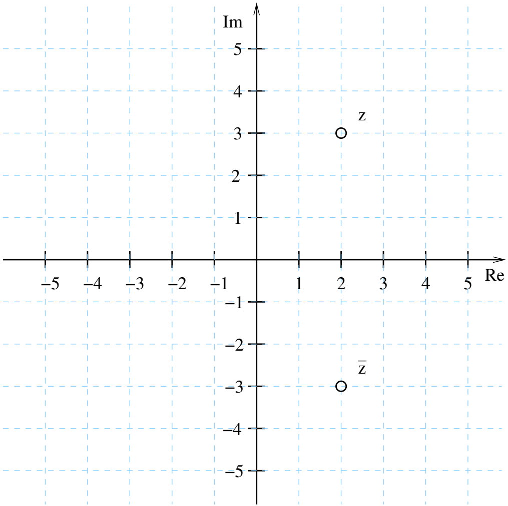
Beispiele und geometrische Interpretation

1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

$$\overline{z} = 2 - 3\,i$$



Beispiele und geometrische Interpretation

1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

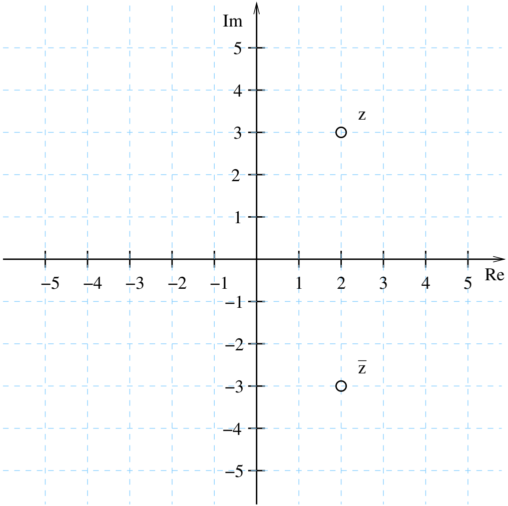
$$\overline{z} = 2 - 3\,i$$

2.

$$w = -4 - 2\,i$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(w) = -4 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w) = -2$$

$$\overline{w} = -4 + 2\,i$$



Beispiele und geometrische Interpretation

1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

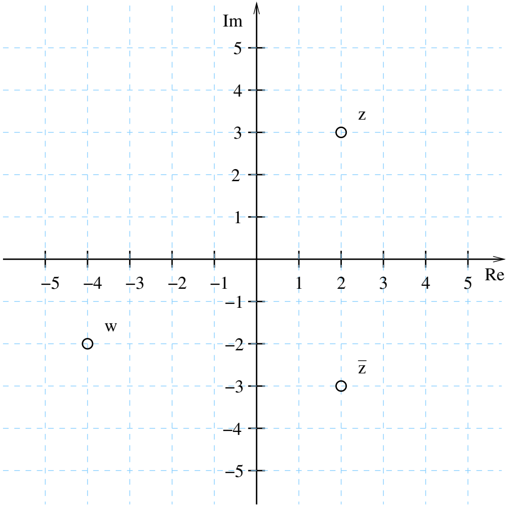
$$\overline{z} = 2 - 3\,i$$

2.

$$w = -4 - 2\,i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(w) = -4 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w) = -2$$

$$\overline{w} = -4 + 2\,i$$



1.

$$z = 2 + 3\,i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

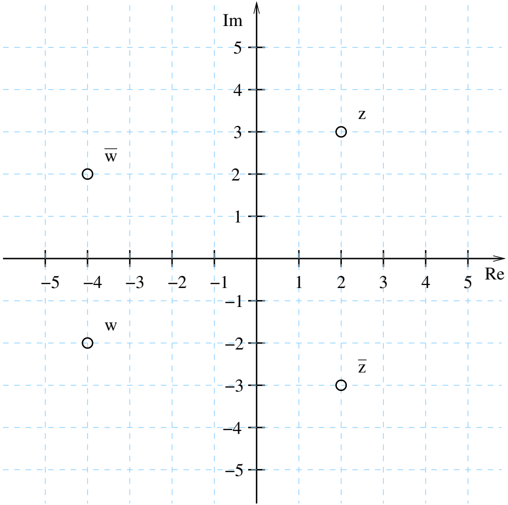
$$\overline{z} = 2 - 3\,i$$

2.

$$w = -4 - 2\,i$$

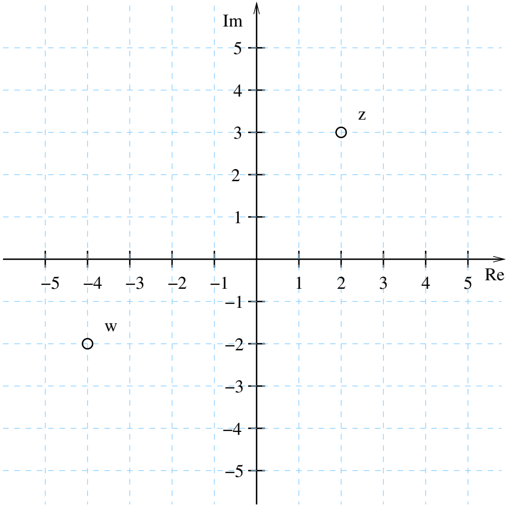
$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(w) = -4 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w) = -2$$

$$\overline{w} = -4 + 2\,i$$



1. Addition & Subtraktion

   $$z + w = (a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

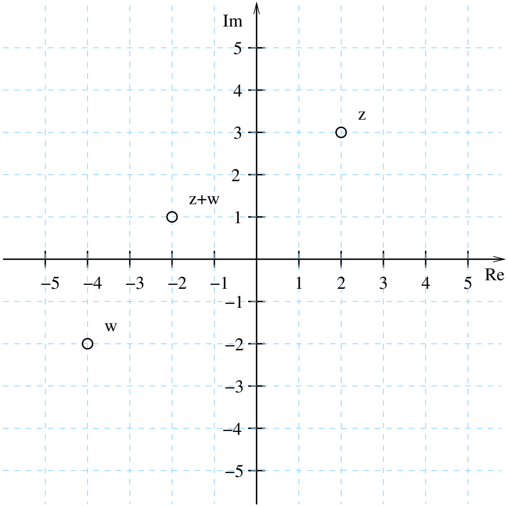


1. Addition & Subtraktion

   $$z + w = (a + i\, b) + (c + i\, d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

   Beispiel:

   $$(2 + 3\, i) + (-4 - 2\, i) = -2 + i$$

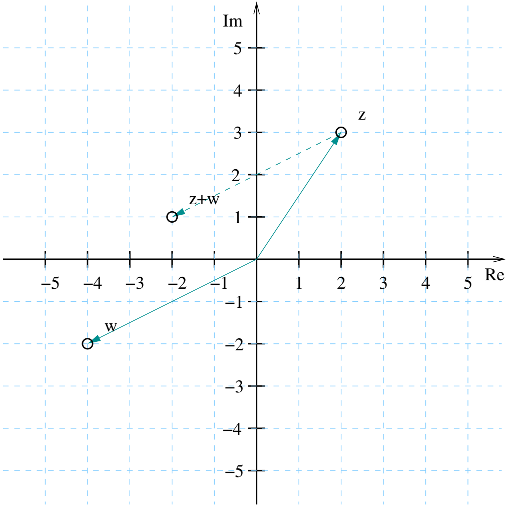


1. Addition & Subtraktion

   $$z + w = (a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

   Beispiel:

   $$(2 + 3\,i) + (-4 - 2\,i) = -2 + i$$

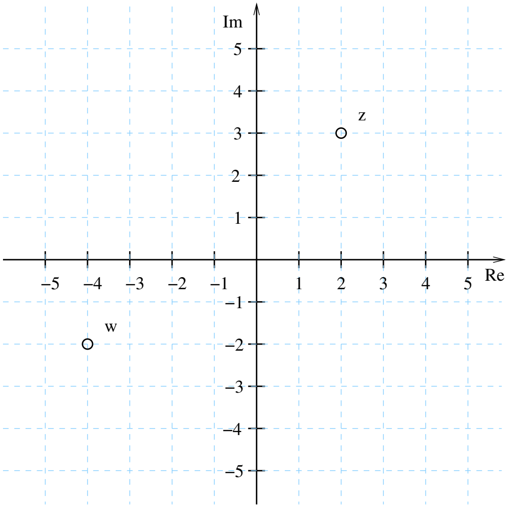


Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z + w = (a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$z - w = (a + i\,b) - (c + i\,d) = (a - c) + i\,(b - d)$$



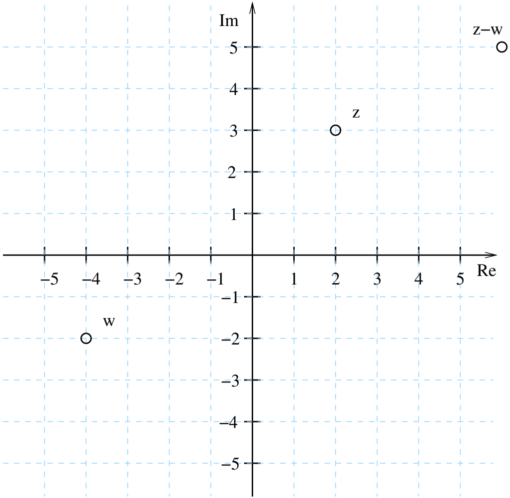
1. Addition & Subtraktion

$$z + w = (a + i\, b) + (c + i\, d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$z - w = (a + i\, b) - (c + i\, d) = (a - c) + i\,(b - d)$$

Beispiel:

$$(2 + 3\, i) - (-4 - 2\, i) = 6 + 5\, i$$



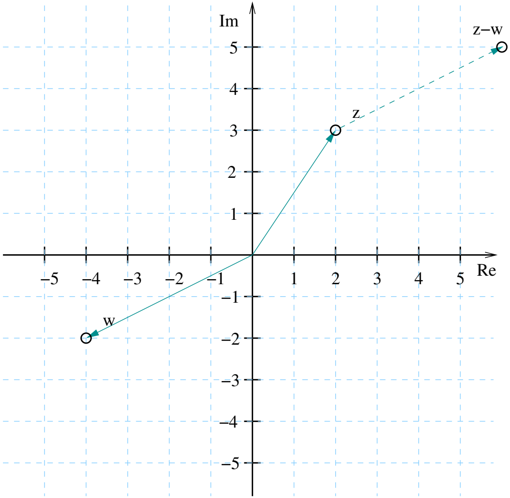
1. Addition & Subtraktion

$$z + w = (a + i\, b) + (c + i\, d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$z - w = (a + i\, b) - (c + i\, d) = (a - c) + i\,(b - d)$$

Beispiel:

$$(2 + 3\, i) - (-4 - 2\, i) = 6 + 5\, i$$



1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = (a + i\,b) \cdot (c + i\,d)$$

Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = (a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = a \cdot c + \underbrace{i^2}_{=-1} b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = (a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = a \cdot c + \underbrace{i^2}_{=-1} b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d) = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

Beispiel:

$$(2 + i)(-4 - 2\,i) = -8 - (-2) + i\,(-4 - 4) = -6 - 8\,i$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z|$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{(a + i\,b)(a - i\,b)}$$

Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

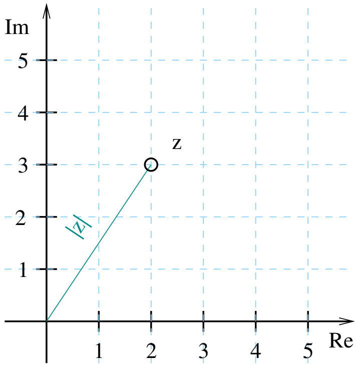
$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{(a + i\,b)(a - i\,b)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$



1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

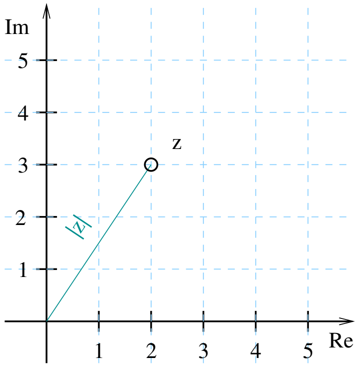
$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel:

$$|2 + 3\,i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{12} \approx 3.61$$



Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w}$$

Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}$$

Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}$$

$$= \frac{(a + i\,b)(c - i\,d)}{c^2 + d^2}$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}$$

$$= \frac{(a + i\,b)(c - i\,d)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{a\,c + b\,d + i\,(b\,c - a\,d)}{c^2 + d^2}$$

Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}$$

$$= \frac{(a + i\,b)(c - i\,d)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{a\,c + b\,d + i\,(b\,c - a\,d)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + i\,\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + i\,\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a + i\,b)(c - i\,d)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{a\,c + b\,d + i\,(b\,c - a\,d)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + i\,\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + i\,\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}$$

Beispiel:

$$\frac{2 + 3\,i}{-4 - 2\,i} = \frac{-8 - 6}{20} + i\,\frac{-12 + 4}{20} = -0.7 - i\,0.4$$

Rechenregeln für Komplexe Zahlen

1. Addition & Subtraktion

$$z \pm w = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

2. Multiplikation

$$z \cdot w = a \cdot c - b \cdot d + i\,(b \cdot c + a \cdot d)$$

3. Betrag

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Division

$$\frac{z}{w} = \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + i\,\frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}$$

5. Potenz und Wurzel (Komplexe Zahlen, Teil II, letztes Kapitel)

   z^k und sowas in der Art "$\sqrt[k]{z}$"

   Ebenso die geom. Interpr. von Mult., Div, Potenz und Wurzel

Fortsetzung folgt !!!

H