Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

3 Differentiation

3.1-3.4 Elementare Funktionen & Ableitungsregeln

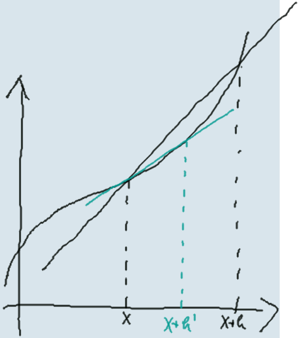
Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Differentiation

Potenzfunktionen und Summe/Differenz von Ableitungen
Sinusfunktionen und Produkt/Quotient von Ableitungen
Kettenregel und Ableitung der Umkehrabbildung
Exponential- und Logarithmusfunktion ableiten



Definition: Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als die Ableitung von f im Punkt x.
Notation:

$$f'(x)\,,\ \underbrace{\frac{d}{dx} f(x)\,,\ \frac{df}{dx}(x)\,,\ \frac{df}{dx}}_{\text{Leibnizsche Symbolik}}$$

Potenzfunktionen

$$p(x) = x^r$$

Exponentialfunktionen

$$u(x) = a^x$$

trigonometrische Funktionen

$$v(x) = \sin x$$

Potenzfunktionen

$$p(x) = x^r \qquad p'(x) = r\,x^{r-1}$$

Exponentialfunktionen

$$u(x) = a^x \qquad u'(x) = a^x \ln a$$

trigonometrische Funktionen

$$v(x) = \sin x \qquad v'(x) = \cos x$$

Überblick

Potenzfunktionen

$$p(x) = x^r \qquad p'(x) = r\,x^{r-1} \qquad p''(x) = r\,(r-1)\,x^{r-2}$$

Exponentialfunktionen

$$u(x) = a^x \qquad u'(x) = a^x\ \ln a \qquad p''(x) = a^x\ \ln^2 a$$

trigonometrische Funktionen

$$v(x) = \sin x \qquad v'(x) = \cos x \qquad v''(x) = -\sin x \qquad \cdots$$

Potenzfunktionen

$$p(x) = x^r \qquad p'(x) = r\,x^{r-1} \qquad p''(x) = r\,(r-1)\,x^{r-2} \qquad \cdots \qquad p^{(r)}(x) = r!$$

Exponentialfunktionen

$$u(x) = a^x \qquad u'(x) = a^x\;\ln a \qquad p''(x) = a^x\;\ln^2 a \qquad \cdots \qquad u^{(n)}(x) = a^x\;\ln^n$$

trigonometrische Funktionen

$$v(x) = \sin x \qquad v'(x) = \cos x \qquad v''(x) = -\sin x \qquad \cdots$$

$$v^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für} \quad k = 4\,m \\ \cos x & \text{für} \quad k = 4\,m+1 \\ -\sin x & \text{für} \quad k = 4\,m+2 \\ -\cos x & \text{für} \quad k = 4\,m+3 \end{cases}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

<u>Beweis:</u> $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

Satz: Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Beweis: $r = 3$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

Für allgemeine Monome mit $r \in \mathbb{N}$ geht das genauso. Man braucht dann die Binomische Formel.

$\square$

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$(x^6)' = 6\,x^5$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”
$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung
$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^{6}\right)' = 6\,x^{5}$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^{0}\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

4.

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

4.

$$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)'$$

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

4.

$$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}\,x^{\frac{5}{4}-1}$$

Beispiele

1. Monome “den Hut ziehen”

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

4.

$$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}\,x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}\,x^{\frac{1}{4}}$$

Beispiele

1. Monome "den Hut ziehen"

$$\left(x^6\right)' = 6\,x^5$$

2. konstante Funktionen haben keine Steigung

$$(1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

3. Wurzelfunktionen

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

4.

$$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}\,x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}\,x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\,\sqrt[4]{x}$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Beweis:

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))'$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Beweis:

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) + \beta\, g(x+h) - \alpha\, f(x) - \beta\, g(x)}{h}$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) + \beta\, g(x+h) - \alpha\, f(x) - \beta\, g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x) + \beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h}\end{aligned}$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) + \beta\, g(x+h) - \alpha\, f(x) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x) + \beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h}
\end{aligned}$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) + \beta\, g(x+h) - \alpha\, f(x) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x) + \beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
\end{aligned}$$

Satz: Linearität des Ableitungsoperators

Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) + \beta\, g(x+h) - \alpha\, f(x) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x) + \beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) - \alpha\, f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\beta\, g(x+h) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2. $$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)'$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2. $$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)'$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2. $$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2.

$$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2.

$$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2.

$$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

3.

$$\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x^8} + 4\right)'$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2. $$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

3. $$\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x}^8 + 4\right)' = -\left(x^{\frac{4}{5}}\right)' + 3\,\left(\sqrt[3]{x}^8\right)' + (4)'$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2. $$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

3. $$\begin{aligned}\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x}^8 + 4\right)' &= -\left(x^{\frac{4}{5}}\right)' + 3\,\left(\sqrt[3]{x}^8\right)' + (4)' \\ &= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{4}{5}-1} + 3\,\left(x^{\frac{8}{3}}\right)'\end{aligned}$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2.

$$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

3.

$$\begin{aligned}\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x}^8 + 4\right)' &= -\left(x^{\frac{4}{5}}\right)' + 3\,\left(\sqrt[3]{x}^8\right)' + (4)' \\ &= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{4}{5}-1} + 3\,\left(x^{\frac{8}{3}}\right)' \\ &= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}} + 3 \cdot \frac{8}{3}\,x^{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

Beispiele

1. Konstante Funktionen haben Steigung 0:

$$(4)' = 4\,(1)' = 4 \cdot 0 = 0$$

2. $$(2\,x^5 + 3\,x^2 - 10)' = 2\,\left(x^5\right)' + 3\,\left(x^2\right)' = 2 \cdot 5\,x^4 + 3 \cdot 2\,x = 10\,x^4 + 6x = 2\,x\,(5\,x^3 + 3)$$

3. $$\begin{aligned}\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\,\sqrt[3]{x}^8 + 4\right)' &= -\left(x^{\frac{4}{5}}\right)' + 3\,\left(\sqrt[3]{x}^8\right)' + (4)' \\ &= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{4}{5}-1} + 3\,\left(x^{\frac{8}{3}}\right)' \\ &= -\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}} + 3 \cdot \frac{8}{3}\,x^{\frac{5}{3}} \\ &= -\frac{4}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + 8\,\sqrt[3]{x}^5\end{aligned}$$

Beispiele

4.

$$\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\sqrt[3]{x}^{8} + 4\right)''$$

4.

$$\left(-x^{\frac{4}{5}}+3\sqrt[3]{x}^{8}+4\right)''=\left(-\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}}+8\,x^{\frac{5}{3}}\right)'$$

Beispiele

4.

$$\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\sqrt[3]{x^8} + 4\right)'' = \left(-\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}} + 8\,x^{\frac{5}{3}}\right)'$$
$$= \frac{4}{25}\,x^{\frac{-6}{5}} + \frac{40}{3}\,x^{\frac{2}{3}}$$

4.

$$\left(-x^{\frac{4}{5}} + 3\sqrt[3]{x}^{8} + 4\right)'' = \left(-\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}} + 8\,x^{\frac{5}{3}}\right)'$$
$$= \frac{4}{25}\,x^{\frac{-6}{5}} + \frac{40}{3}\,x^{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{4}{25\,x^{\frac{5+1}{5}}} + \frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^{2}$$

Beispiele

4.

$$\begin{aligned}\left(-x^{\frac{4}{5}}+3\,\sqrt[3]{x}^{8}+4\right)'' &= \left(-\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}}+8\,x^{\frac{5}{3}}\right)' \\ &= \frac{4}{25}\,x^{\frac{-6}{5}}+\frac{40}{3}\,x^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{25\,x^{\frac{5+1}{5}}}+\frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^{2} \\ &= \frac{4}{25\,x\cdot x^{\frac{1}{5}}}+\frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^{2}\end{aligned}$$

Beispiele

4.

$$\begin{aligned}\left(-x^{\frac{4}{5}}+3\sqrt[3]{x}^{8}+4\right)'' &= \left(-\frac{4}{5}\,x^{\frac{-1}{5}}+8\,x^{\frac{5}{3}}\right)' \\ &= \frac{4}{25}\,x^{\frac{-6}{5}}+\frac{40}{3}\,x^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{25\,x^{\frac{5+1}{5}}}+\frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^{2} \\ &= \frac{4}{25\,x\cdot x^{\frac{1}{5}}}+\frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^{2} \\ &= \frac{4}{25\,x\,\sqrt[5]{x}}+\frac{40}{3}\,\sqrt[3]{x}^{2}\end{aligned}$$

Satz: Ableitung der Sinusfunktion

$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$

Satz: Ableitung der Sinusfunktion

$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$

Beweis:

$$\sin' x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \boxtimes$$

Additionstheorem:

Satz: Ableitung der Sinusfunktion

$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$

Beweis:

$$\sin' x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \boxtimes \qquad \text{Additionstheorem:}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}\,, \qquad a = x + h\,,\ b = x\,:$$

Satz: Ableitung der Sinusfunktion

$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$

Beweis:

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \boxtimes \qquad \text{Additionstheorem:}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\,, \qquad a = x+h\,,\ b = x\,:$$

$$\boxtimes = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

Satz: Ableitung der Sinusfunktion

$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$

Beweis:

$$\sin' x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \boxtimes \qquad \text{Additionstheorem:}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}\,, \qquad a = x + h\,,\ b = x:$$

$$\boxtimes = \lim_{h \to 0} \frac{2}{h} \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2} = \lim_{h' \to 0} \cos(x + h') \underbrace{\frac{\sin h'}{h'}}_{\to 1\,,\ h' = \frac{h}{2}}$$

Satz: Ableitung der Sinusfunktion

$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$

Beweis:

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \boxtimes \qquad \text{Additionstheorem:}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\,, \qquad a = x+h\,,\ b = x\,:$$

$$\boxtimes = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2} = \lim_{h'\to 0}\cos(x+h')\underbrace{\frac{\sin h'}{h'}}_{\to 1\,,\ h'=\frac{h}{2}} = \cos x$$

Beweis: $\cos' x = -\sin x$ ist analog. □

Beispiel

1.

$$\left(2\,\sin x + \frac{\pi}{2}\,\cos x\right)'$$

Beispiel

1.
$$\left(2\,\sin x + \frac{\pi}{2}\,\cos x\right)' = 2\,\sin' x + \frac{\pi}{2}\,\cos' x$$

Beispiel

1.
$$\left(2\,\sin x + \frac{\pi}{2}\,\cos x\right)' = 2\,\sin' x + \frac{\pi}{2}\,\cos' x = 2\,\cos x - \frac{\pi}{2}\,\sin x$$

1.
$$\left(2\,\sin x + \frac{\pi}{2}\,\cos x\right)' = 2\,\sin' x + \frac{\pi}{2}\,\cos' x = 2\,\cos x - \frac{\pi}{2}\,\sin x$$

Satz: Produkt- und Quotientenregel

Produktregel:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))'$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}\ ,\ \text{Wir addieren eine “}0\text{=-f(x) g(x+h)+f(x) g(x+h)”:}$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}\;,\ \text{Wir addieren eine "}0\text{=-f(x) g(x+h)+f(x) g(x+h)"}:$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \text{ , Wir addieren eine ``0=-f(x) g(x+h)+f(x) g(x+h)'':}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}\,, \text{ Wir addieren eine ``0=-f(x) g(x+h)+f(x) g(x+h)'':}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{h}$$

Beweis Produktregel:

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$, Wir addieren eine "0=-f(x) g(x+h)+f(x) g(x+h)":

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

□

(Beweis zur Quotientenregel ist analog.)

Beispiele: Produktregel

1.

$$\begin{aligned}(\sin x \cdot \cos x)' &= \sin' x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos' x \\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{oder} \qquad = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

Saalaufgabe

1. Produktregel:

$$\left(\left(x^2+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)\right)'$$

Saalaufgabe

1. Produktregel:

$$\left(\left(x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right)\right)'$$
$$= \left(x^2 + 2\sqrt{x}\right)' \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right)'$$

Saalaufgabe

1. Produktregel:

$$\left((x^2+2\sqrt{x})\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)\right)'$$
$$=(x^2+2\sqrt{x})'\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)+(x^2+2\sqrt{x})\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)'$$
$$=\left(x^2+2x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)+(x^2+2\sqrt{x})\cdot(-3x+x^{-1})'$$

1. Produktregel:

$$
\begin{aligned}
&\left((x^2 + 2\sqrt{x}) \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= (x^2 + 2\sqrt{x})' \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right) + (x^2 + 2\sqrt{x}) \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right)' \\
&= \left(x^2 + 2x^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right) + (x^2 + 2\sqrt{x}) \cdot (-3x + x^{-1})' \\
&= \left(2x + x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(-3x + \frac{1}{x}\right) + (x^2 + 2\sqrt{x}) \cdot (-3 - x^{-2})
\end{aligned}
$$

Saalaufgabe

1. Produktregel:

$$\left(\left(x^2+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$=\left(x^2+2\sqrt{x}\right)'\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\left(x^2+2x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3x+x^{-1}\right)'$$

$$=\left(2x+x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3-x^{-2}\right)$$

$$=\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(-3x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+2\sqrt{x}\right)\cdot\left(-3-\frac{1}{x^2}\right)$$

Saalaufgabe

2. Quotientenregel:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\,x^2 + 2\,x}{\sqrt{x}} \right)'$$

Saalaufgabe

2. Quotientenregel:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)'\,\sqrt{x}-\sqrt{x}'\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{\sqrt{x}^2}$$

Saalaufgabe

2. Quotientenregel:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)'\,\sqrt{x}-\sqrt{x}'\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{(x+2)\,\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}^{-1}\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{x}$$

Saalaufgabe

2. **Quotientenregel:**

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)'\,\sqrt{x}-\sqrt{x}'\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{\sqrt{x}^2}\\
&= \frac{(x+2)\,\sqrt{x}-\frac{1}{2}\,\sqrt{x}^{-1}\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{x}\\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\,\left((x+2)\,x-\frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)\right)}{x}
\end{aligned}
$$

Saalaufgabe

2. **Quotientenregel:**

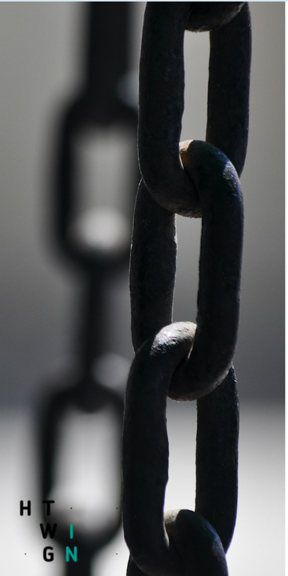
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)'\,\sqrt{x}-\sqrt{x}'\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{\sqrt{x}^2}\\
&= \frac{(x+2)\,\sqrt{x}-\frac{1}{2}\,\sqrt{x}^{-1}\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{x}\\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\,\left((x+2)\,x-\frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)\right)}{x}\\
&= \frac{x^2+2\,x-\frac{1}{4}\,x^2-x}{x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}\,x^2+x}{x^{1+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Saalaufgabe

2. Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)'\,\sqrt{x}-\sqrt{x}'\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{\sqrt{x}^2} \\
&= \frac{(x+2)\,\sqrt{x}-\frac{1}{2}\,\sqrt{x}^{-1}\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)}{x} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\,\left((x+2)\,x-\frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2}\,x^2+2\,x\right)\right)}{x} \\
&= \frac{x^2+2\,x-\frac{1}{4}\,x^2-x}{x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}\,x^2+x}{x^{1+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{3}{4}\,x+1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}\,x+1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Mehrfachverkettung



Satz: Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Wir sprechen beim Term $g'(x)$ auch vom “Nachdifferenzieren”.
Leibnizsche Schreibweise:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dg} f(g(x)) \frac{d}{dx}\, g(x)$$

oder auch

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx}$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$\sin(2\,x)' = ?$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$\sin(2\,x)' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2\,x$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$f(g(x))' = \sin(2x)' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2x$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$f(g(x))' = \sin(2\,x)' = ?$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2\,x \\ f'(x) &= \cos x \quad \text{und} \quad g'(x) = 2\,. \end{aligned}$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$f(g(x))' = \sin(2\,x)' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2\,x$$
$$f'(x) = \cos x \quad \text{und} \quad g'(x) = 2\,.$$

$$\Rightarrow \qquad f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = \cos g(x)\,(2\,x)' = \cos(2\,x)\,2$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$f(g(x))' = \sin(2\,x)' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2\,x$$
$$f'(x) = \cos x \quad \text{und} \quad g'(x) = 2\,.$$

$$\Rightarrow \qquad f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = \cos g(x)\,(2\,x)' = \cos(2\,x)\,2$$

2. Es ist also:

$$\sin(2\,x)' = 2\,\cos(2\,x)$$

Beispiel: Kettenregel

1. Fragestellung:

$$f(g(x))' = \sin(2\,x)' = ?$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 2\,x \\ f'(x) &= \cos x \quad \text{und} \quad g'(x) = 2\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = \cos g(x)\,(2\,x)' = \cos(2\,x)\,2$$

2. Es ist also:

$$\sin(2\,x)' = 2\,\cos(2\,x)$$

und

$$\sin'(2\,x) = \cos(2\,x)\,.$$

Beispiel: Kettenregel

3.
$$\sin(\cos(x))' = ?$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit

$$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

$\Rightarrow$ $$\sin(\cos(x))' = f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

Beispiel: Kettenregel

3.
$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned} \sin(\cos(x))' &= f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x) \\ &= -\cos(\cos x)\, \sin x \end{aligned}$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\cos(x))' = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$
$$= -\cos(\cos x)\ \sin x$$

4.

$$|x|' = ?$$

Beispiel: Kettenregel

3.
$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$\begin{aligned} & f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x \\ \text{mit} \quad & f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sin(\cos(x))' &= f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x) \\ &= -\cos(\cos x)\, \sin x \end{aligned}$$

4.
$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ?$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$\begin{aligned} & f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x \\ \text{mit} \quad & f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \sin(\cos(x))' &= f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x) \\ &= -\cos(\cos x)\, \sin x \end{aligned}$$

4.

$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ?$$

$$(x^2)' = 2\,x \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $\quad f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow \quad \sin(\cos(x))' = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$
$$= -\cos(\cos x)\, \sin x$$

4.

$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ?$$

$$(x^2)' = 2x \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad |x|'$$

Beispiel: Kettenregel

3.
$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

$\Rightarrow$ $$\sin(\cos(x))' = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x) = -\cos(\cos x)\ \sin x$$

4.
$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ?$$

$$(x^2)' = 2\,x \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ $$|x|' = \sqrt{x^2}'$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $$f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

$\Rightarrow$ $$\begin{aligned} \sin(\cos(x))' &= f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x) \\ &= -\cos(\cos x)\ \sin x \end{aligned}$$

4.

$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ?$$

$$(x^2)' = 2x \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ $$|x|' = \sqrt{x^2}' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}\, 2x$$

Beispiel: Kettenregel

3.

$$\sin(\cos(x))' = ?$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos x$$

mit $\quad f'(g(x)) = \cos(\cos(x)) \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow \quad \sin(\cos(x))' = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$
$$= -\cos(\cos x)\, \sin x$$

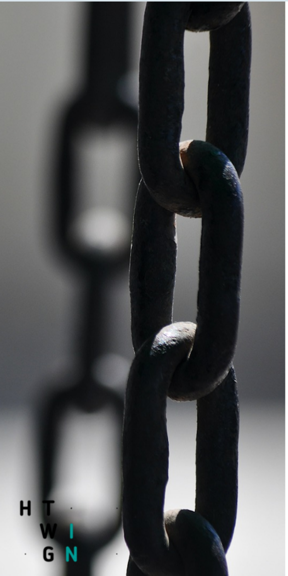
4.

$$|x|' = \sqrt{x^2}' = ?$$

$$(x^2)' = 2x \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad |x|' = \sqrt{x^2}' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}\, 2x = \frac{x}{|x|}\,, \quad x \neq 0$$

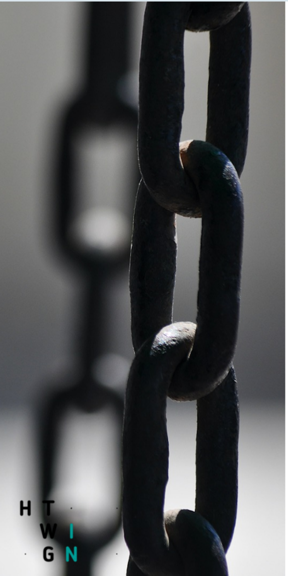
Mehrfachverkettung



mehrfach verkettet:

$$(f \circ v \circ w \circ p)'(x) = f(v(w(p(x))))' = f'(v(w(p(x))))\, v'(w(p(x)))\, w'(p(x))\, p'(x)$$

Mehrfachverkettung



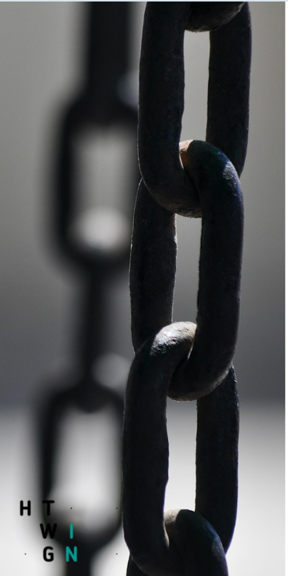
mehrfach verkettet:

$$(f \circ v \circ w \circ p)'(x) = f(v(w(p(x))))' = f'(v(w(p(x))))\, v'(w(p(x)))\, w'(p(x))\, p'(x)$$

Leibnizsche Symbolik:

$$\frac{d}{dx}(f \circ v \circ w \circ p)(x) = \frac{d}{dx} f(v(w(p(x))))' = \frac{d}{dv} f(v)\, \frac{d}{dw} v(w)\, \frac{d}{dp} w(p)\, \frac{d}{dx} p(x)$$

Mehrfachverkettung



mehrfach verkettet:

$$(f \circ v \circ w \circ p)'(x) = f(v(w(p(x))))' = f'(v(w(p(x))))\, v'(w(p(x)))\, w'(p(x))\, p'(x)$$

Leibnizsche Symbolik:

$$\frac{d}{dx}(f \circ v \circ w \circ p)(x) = \frac{d}{dx} f(v(w(p(x))))' = \frac{d}{dv} f(v)\, \frac{d}{dw} v(w)\, \frac{d}{dp} w(p)\, \frac{d}{dx} p(x)$$

Oder auch ganz kurz:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}\,\frac{dv}{dw}\,\frac{dw}{dp}\,\frac{dp}{dx}$$

Folgerung: Kettenregel bei mehrfacher Verkettung

Es sei $\tilde{f}$ die Verkettung der n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$:

$$\tilde{f}(x) = \left(\bigcirc_{k=1}^{n} f_k \right)(x) = (f_1 \circ \cdots \circ f_n)(x)$$

Dann gilt

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{df_k}{df_{k+1}} \frac{df_n}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \frac{df_2}{df_3} \cdots \frac{df_{n-1}}{df_n} \frac{df_n}{dx}$$

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$f(x) = x^2,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$f(x) = x^2\,,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 2\,x$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$\begin{aligned} & f(x) = x^2\,,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ \Rightarrow \quad & f'(x) = 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x} \end{aligned}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$f(x) = x^2\,,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x)' = \sqrt{x}' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$f(x) = x^2, \ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x)' = \sqrt{x}' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$f(x) = x^2\,,\ \ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ $$f'(x) = 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ $$f^{-1}(x)' = \sqrt{x}' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

direkt: $$\sqrt{x}' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \qquad \checkmark$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$\begin{array}{ll} & f(x) = x^2\,,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ \Rightarrow & f'(x) = 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x} \\ \Rightarrow & f^{-1}(x)' = \sqrt{x}' = \dfrac{1}{f'(\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}} \\ \text{direkt:} & \sqrt{x}' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}} \qquad \checkmark \end{array}$$

2.

$$\arcsin{}' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= x^2\,,\ \ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \\
&\Rightarrow & f'(x) &= 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x} \\
&\Rightarrow & f^{-1}(x)' &= \sqrt{x}' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \\
&\text{direkt:} & \sqrt{x}' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

2.

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Beispiel

Satz: Ableitung der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.

$$f(x) = x^2\,,\ \ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2\,x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) = 2\,\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x)' = \sqrt{x}' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

direkt: $$\sqrt{x}' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \qquad \checkmark$$

2.

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Satz: Exponentialfunktionen ableiten

$$(a^x)' = a^x \ln a\,, \qquad \log_a x' = \frac{1}{x \ln a}$$

Satz: Exponentialfunktionen ableiten

$$(a^x)' = a^x \ln a\,, \qquad \log_a x' = \frac{1}{x \ln a}$$

Beweis:

Schritt 1:	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	mit der Kettenregel
Schritt 2:	$\ln' x = \dfrac{1}{x}$	mit der Abl. der Umkehrabbildung
Schritt 3:	$\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$	mit Basiswechsel der Logarithmusfkt.
Schritt 4:	$(a^x)' = a^x \ln a$	mit der Abl. der Umkehrabbildung

Schritt 1: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Schritt 1: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Kettenregel:

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Schritt 1: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Kettenregel:

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

Schritt 1: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Kettenregel:

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}^{\to \mathrm{e}^x}}{\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{\to 1}}$$

Schritt 1: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Kettenregel:

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}^{\to\mathrm{e}^x}}{\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{\to 1}} = \mathrm{e}^x$$

Schritt 2: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad \text{von} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Schritt 2: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad \text{von} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Es ist:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = \mathrm{e}^{\ln x}$$

Schritt 2: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad \text{von} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Es ist:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = \mathrm{e}^{\ln x}$$

Daraus folgt:

$$\ln' x = \left(f^{-1}(x)\right)'$$

Schritt 2: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad \text{von} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Es ist:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = \mathrm{e}^{\ln x}$$

Daraus folgt:

$$\ln' x = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Schritt 2: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad \text{von} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Es ist:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = \mathrm{e}^{\ln x}$$

Daraus folgt:

$$\ln' x = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}}$$

Schritt 2: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad \text{von} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

Es ist:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad f'(f^{-1}(x)) = \mathrm{e}^{\ln x}$$

Daraus folgt:

$$\ln' x = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Schritt 3: $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$

Basiswechsel:

$$\log_a' x = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\ln' x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Schritt 4: $(a^x)' = a^x \ln a$

Ableitung der Umkehrabbildung $f^{-1}(x) = a^x$ von $f(x) = \log_a x$:

$$(a^x)' = \frac{1}{\log_a'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \ln a$$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

1.
$$(4^x)' = 4^x \ln 4$$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

1. $$(4^x)' = 4^x \ln 4$$

2. $$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \ln \mathrm{e} = \mathrm{e}^x$$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

1.
$$(4^x)' = 4^x \, \ln 4$$

2.
$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \, \ln \mathrm{e} = \mathrm{e}^x$$

3.
$$\left(\frac{1}{5}\, 2^x\right)' = \frac{1}{5}\, (2^x)' = \frac{\ln 2}{5}\, 2^x$$

Saalaufgabe

1.
$$\left(3\,\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{4}\,5^{x}\right)'$$

2.
$$\left(8^{-x}\right)'$$

Saalaufgabe

1.

$$\left(3\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\,5^x\right)' = 3\,\mathrm{e}^x - \frac{\ln 5}{4}\,5^x$$

2.

$$\left(8^{-x}\right)'$$

Saalaufgabe

1. $$\left(3\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\,5^x\right)' = 3\,\mathrm{e}^x - \frac{\ln 5}{4}\,5^x$$

2. $$\left(8^{-x}\right)' = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^x\right)'$$

Saalaufgabe

1.
$$\left(3\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\,5^x\right)' = 3\,\mathrm{e}^x - \frac{\ln 5}{4}\,5^x$$

2.
$$\left(8^{-x}\right)' = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{8}\right)^x \ln\frac{1}{8}$$

Saalaufgabe

1.
$$\left(3\,\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{4}\,5^{x}\right)'=3\,\mathrm{e}^{x}-\frac{\ln 5}{4}\,5^{x}$$

2.
$$\left(8^{-x}\right)'=\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\right)'=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\ln\frac{1}{8}=-8^{-x}\,\ln 8$$

Saalaufgabe

1. $$\left(3\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\,5^x\right)' = 3\,\mathrm{e}^x - \frac{\ln 5}{4}\,5^x$$

2. $$(8^{-x})' = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{8}\right)^x \ln\frac{1}{8} = -8^{-x}\ln 8 = -8^{-x}\,3\,\ln 2$$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

4.

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

4.

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

Komposition: $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \sqrt{x}$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

4.

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

Komposition: $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \sqrt{x}$

dafür gilt: $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Beispiele: Ableitungen von Exponentialfunktionen

4.

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

Komposition: $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \sqrt{x}$

dafür gilt: $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

folglich: $f'(g(x)) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

4.

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

Komposition: $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \sqrt{x}$

dafür gilt: $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

folglich: $f'(g(x)) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

Insgesamt: $\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)' = f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Beispiele: Ableitung von Logarithmusfunktionen

5.

$$\log_3 x' = \frac{1}{x \ln 3}$$

Beispiele: Ableitung von Logarithmusfunktionen

5. $$\log_3 x' = \frac{1}{x \ln 3}$$

6. $$\ln\left(x^2\right)' = \frac{1}{x^2}\, 2\, x = \frac{2}{x}$$

Beispiele: Ableitung von Logarithmusfunktionen

5.
$$\log_3 x' = \frac{1}{x \ln 3}$$

6.
$$\ln\left(x^2\right)' = \frac{1}{x^2}\, 2\, x = \frac{2}{x}$$

7.
$$\ln'\left(x^2\right) = \frac{1}{x^2}$$

Beispiele: Ableitung von Logarithmusfunktionen

5.
$$\log_3 x' = \frac{1}{x \ln 3}$$

6.
$$\ln\left(x^2\right)' = \frac{1}{x^2}\, 2\, x = \frac{2}{x}$$

7.
$$\ln'\left(x^2\right) = \frac{1}{x^2}$$

8.
$$\ln x' = \frac{1}{x}$$

Beispiele: Ableitung von Logarithmusfunktionen

5.

$$\log_3 x' = \frac{1}{x \ln 3}$$

6.

$$\ln \left(x^2\right)' = \frac{1}{x^2}\, 2\, x = \frac{2}{x}$$

7.

$$\ln' \left(x^2\right) = \frac{1}{x^2}$$

8.

$$\ln x' = \frac{1}{x}$$

9.

$$\ln(a\, x)' = \frac{1}{a\, x}\, a = \frac{1}{x}$$

Beispiel: Königsetappe

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Beispiel: Königsetappe

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom $$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$$

Beispiel: Königsetappe

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

Beispiel: Königsetappe

$$e^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}$$

Beispiel: Königsetappe

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)}$$

Beispiel: Königsetappe

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{p(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

Beispiel: Königsetappe

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{p(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

eine Sinusfunktion	$s(x) = -\sin x$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}=?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x)=\frac{1}{2}x^2+4$
eine Potenzfunktion	$v(x)=x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)}=\mathrm{e}^{p(x)}\cdot\mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

eine Sinusfunktion	$s(x)=-\sin x$
eine Exponentialfunktion	$f(x)=\mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{p(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

eine Sinusfunktion	$s(x) = -\sin x$
eine Exponentialfunktion	$f(x) = \mathrm{e}^x$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{p(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}=?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x)=\frac{1}{2}x^2+4$
eine Potenzfunktion	$v(x)=x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{p(x)-\sin v(x)}=\mathrm{e}^{p(x)}\cdot\mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

eine Sinusfunktion	$s(x)=-\sin x$
eine Exponentialfunktion	$f(x)=\mathrm{e}^x$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{e}^{p(x)}\cdot\mathrm{e}^{-\sin v(x)}=f(p(x))\cdot\mathrm{e}^{s(v(x))}$$

Beispiel: Königsetappe

$$e^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = ?$$

Wir suchen zunächst die elementaren Funktionen im Gesamtausdruck:

ein Polynom	$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
eine Potenzfunktion	$v(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = e^{p(x)-\sin v(x)} = e^{p(x)} \cdot e^{-\sin v(x)}$$

eine Sinusfunktion	$s(x) = -\sin x$
eine Exponentialfunktion	$f(x) = e^x$

$\Rightarrow$

$$e^{p(x)} \cdot e^{-\sin v(x)} = f(p(x)) \cdot e^{s(v(x))} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$
$$v'(x) = -x^{-2}$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$
$$v'(x) = -x^{-2}$$
$$s'(x) = \cos x$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad\qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \qquad f'(p(x))$$

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = e^x \qquad e^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(p(x)) = e^{p(x)}$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4}$$

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}$$

$$f'(s(v(x)))$$

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))}$$

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\, x^2 + 4 - \sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\, x^2 + 4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)}$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,, \qquad v(x) = x^{-1}\,,$$

$$s(x) = -\sin x\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4-\sin\frac{1}{x}} = f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))$$

Ableitungen aller beteiligter Funktionen:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x^2+4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}$$

jetzt ableiten:

Memo:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}$$

jetzt ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left(f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))\right)$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}$$

jetzt ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left(f(p(x))\cdot f(s(v(x)))\right) = \frac{d}{dx}\left(f(p(x))\right)\cdot f(s(v(x))) + f(p(x))\cdot\frac{d}{dx}\left(f(s(v(x)))\right)$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(p(x)) = e^{p(x)} = e^{\frac{1}{2} x^2 + 4}$$

$$f'(s(v(x))) = e^{s(v(x))} = e^{-\sin v(x)} = e^{-\sin \frac{1}{x}}$$

jetzt ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left(f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))\right) = \frac{d}{dx}\left(f(p(x))\right) \cdot f(s(v(x))) + f(p(x)) \cdot \frac{d}{dx}\left(f(s(v(x)))\right)$$

$$= f'(p(x))\, p'(x) \cdot f(s(v(x))) + f(p(x)) \cdot f'(s(v(x)))\, s'(v(x))\, v'(x)$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p'(x) = x$$

$$v'(x) = -x^{-2}$$

$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad f'(p(x)) = \mathrm{e}^{p(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}$$

$$f'(s(v(x))) = \mathrm{e}^{s(v(x))} = \mathrm{e}^{-\sin v(x)} = \mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}$$

jetzt ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f(p(x))\cdot f(s(v(x)))\right) &= \frac{d}{dx}\left(f(p(x))\right)\cdot f(s(v(x))) + f(p(x))\cdot\frac{d}{dx}\left(f(s(v(x)))\right)\\ &= f'(p(x))\,p'(x)\cdot f(s(v(x))) + f(p(x))\cdot f'(s(v(x)))\,s'(v(x))\,v'(x)\\ &= \mathrm{e}^{p(x)}\,x\cdot\mathrm{e}^{s(v(x))} + \mathrm{e}^{p(x)}\cdot\mathrm{e}^{s(v(x))}\,\cos(v(x))\,\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Beispiel: Königsetappe

Memo:

$$p'(x) = x$$
$$v'(x) = -x^{-2}$$
$$s'(x) = \cos x \qquad s'(v(x)) = \cos \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(p(x)) = e^{p(x)} = e^{\frac{1}{2}x^2+4}$$
$$f'(s(v(x))) = e^{s(v(x))} = e^{-\sin v(x)} = e^{-\sin \frac{1}{x}}$$

jetzt ableiten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(p(x)) \cdot f(s(v(x)))\right) &= \frac{d}{dx}\left(f(p(x))\right) \cdot f(s(v(x))) + f(p(x)) \cdot \frac{d}{dx}\left(f(s(v(x)))\right) \\
&= f'(p(x))\, p'(x) \cdot f(s(v(x))) + f(p(x)) \cdot f'(s(v(x)))\, s'(v(x))\, v'(x) \\
&= e^{p(x)}\, x \cdot e^{s(v(x))} + e^{p(x)} \cdot e^{s(v(x))} \cos(v(x)) \frac{1}{x^2} \\
&= e^{\frac{1}{2}x^2+4}\, x \cdot e^{-\sin\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{2}x^2+4} \cdot e^{-\sin\frac{1}{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Beispiel: Königsetappe

jetzt ableiten:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(p(x))\cdot f(s(v(x)))\right) &= \frac{d}{dx}\left(f(p(x))\right)\cdot f(s(v(x))) + f(p(x))\cdot\frac{d}{dx}\left(f(s(v(x)))\right)\\
&= f'(p(x))\,p'(x)\cdot f(s(v(x))) + f(p(x))\cdot f'(s(v(x)))\,s'(v(x))\,v'(x)\\
&= \mathrm{e}^{p(x)}\,x\cdot\mathrm{e}^{s(v(x))} + \mathrm{e}^{p(x)}\cdot\mathrm{e}^{s(v(x))}\,\cos(v(x))\,\frac{1}{x^2}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}\,x\cdot\mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4}\cdot\mathrm{e}^{-\sin\frac{1}{x}}\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Insgesamt:

$$
\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+4-\sin\frac{1}{x}}\left(x+\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)
$$

Satz: Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung n-ter Ordnung erhalten wir durch die Ableitung $n-1$-ter Ordnung, diese wiederum durch die Ableitung $n-2$-ter Ordnung, usw. Der Prozess wird sukkzessive fortgeführt bist zur ersten Ableitung:

$$\frac{d^n f}{d^n x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{d^{n-1} x}\right), \quad n \geq 1$$

Satz: Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung n-ter Ordnung erhalten wir durch die Ableitung $n-1$-ter Ordnung, diese wiederum durch die Ableitung $n-2$-ter Ordnung, usw. Der Prozess wird sukkzessive fortgeführt bist zur ersten Ableitung:

$$\frac{d^n f}{d^n x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{d^{n-1} x}\right), \quad n \geq 1$$

Funktionen, die m mal differenzierbar sind und deren Ableitungen bis zur Ordnung m in Ω stetig sind heißen m-mal stetig differenzierbar. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir kurz mit

$$C^m(\Omega) := \{f \, : \, \Omega \to \mathbb{R} \mid f^{(m)} \in C^0(\Omega)\}.$$

Notation: C^m ohne Argument bezieht sich auf ganz $\mathbb{R}$.

Lernziele

- Sie können die Elementaren Funktionen e^x , x^a , $\sin x$ ableiten.
- Sie können Kombinationen $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, f^{-1} erkennen und die jeweilige Ableitungsregel (Lineareität, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Ableitung der Umkehrabbildung) zuordnen und anwenden.