# Blatt 4: Gruppen, Ringe & Körper

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab mir die Aufgabe noch gar nicht angeschaut"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

## Mathe als Sprache

**Sprachaufgabe 1:**

(a) Was ist an der folgenden Darstellung falsch?

$$x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$$

(b) Was ist richtig und warum?

$$2^{3^2} = \begin{cases} \square & 64 \\ \square & 512 \end{cases}$$

(c) Erörtern Sie die Aussagen

(A) "Die Operation ist im Allgemeinen kommutativ."

(B) "Die Operation ist im Allgemeinen nicht kommutativ."

und

(C) "Die Opertation ist nicht im Allgemeinen kommutativ."

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 4

## algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe und Körper

**Aufgabe 2:** Gruppe

(I) Benennen Sie in den Beweisschritten von Satz 2.7 die verwendeten Axiome.

(II) Beweisen Sie den ersten Teil in Satz 2.7 (h).

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 4

**Aufgabe 3:** Körper

Welche der Folgenden Mengen sind Körper? Geben Sie gegebenenfalls neutrales und inverses Element bezüglich Addition und Multiplikation an.

(a) $(\{0,1,2\}, \oplus, \odot)$ mit

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| $\odot$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

(b) $(\{0,1,2,3\}, \oplus, \odot)$ mit

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\odot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

**Aufgabe 4:** Ring oder Körper?

Um welche Art Struktur handelt es sich bei $(R, +, \circ)$ auf der Menge

$$R = \{a, b, c, d\}$$

und den Operationen

| + | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

| $\circ$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a |
| b | a | b | c | d |
| c | a | c | a | c |
| d | a | d | c | b |

?

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei die Menge $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Um welche algebraische Struktur handelt es sich bei dem Tripel $(M, \oplus, \odot)$ mit

$$(a,b) \oplus (c,d) := (a\,d + b\,c, b\,d) \quad \text{und} \quad (a,b) \odot (c,d) := (a\,c, b\,d)\,?$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

**Aufgabe* 6:**

Es sei $(G, \cdot)$ ein Gruppe mit neutralem Element $e$. Zeigen Sie: $\forall g \in G \;:\; g^2 = e \Rightarrow G$ ist abelsch.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 8

Lösung 1

(a) Der Operator $\Rightarrow$ wirkt nur zwischen Aussagen. Links und rechts der Implikation stehen aber Terme, ohne Verb. Übersetzt steht da geschrieben:

Aus x Quadrat minus vier folgt das Produkt aus x minus zwei mit x plus zwei.

Das ist selbst zwar ein grammatikalisch korrekter Satz aber keine Aussage; also kein Ausdruck, dem man einen Wahrheitsgehalt zuordnen kann.

(b)

$$2^{3^2} = \begin{cases} \square & 64 \\ \boxtimes & 512 \end{cases},$$

denn es gilt

$$a^{b^c} = a^{\left(b^2\right)}.$$

Tatsächlich gibt es hierfür keine offiziellen "Vorfahrtsregeln". Die aufgeführte Variante ist die gebräuchliche aber schon wenn Sie Ihren Taschenrechner befragen ist es möglich, dass er nach der anderen Variante rechnet. Generell ist es kein Fehler, die ein oder andere Klammer zu viel zu setzen.....

(c) (A) "Die Operation ist im Allgemeinen kommutativ."

bedeutet, dass die Operation <u>ausnahmslos</u> kommutativ ist.

(B) "Die Operation ist im Allgemeinen nicht kommutativ."

bedeutet, dass die Operation <u>ausnahmslos</u> nicht kommutativ ist.

(C) "Die Opertation ist nicht im Allgemeinen kommutativ."

ist die Negation von (B), also

"$\neg$ ($\forall$ Operationen : "Die Operation ist kommutativ")"

was gleichbedeutetnd ist mit

"$\exists$ Operation : $\neg$ ("Die Operation ist kommutativ")"

bzw.

"$\exists$ Operation : "Die Operation ist nicht kommutativ"

Zusammengefasst meint (A), dass alle Operationen kommutativ sind, (B) meint, dass keine Operation kommutativ ist und (C) meint, dass es nicht kommutative Operationen gibt, aber prinzipiell beide Situationen auftreten können.

Lösung 2

(I) (a) Es sei $g \in G$, $g' \in G$ Inverses zu $g$ und $g'' \in G$ Inverses zu $g'$. Dann gilt

$$g \circ g' \overset{(G2)}{=} n \circ (g \circ g') \overset{(G3)}{=} (g'' \circ g') \circ (g \circ g') \overset{(G1)}{=} g'' \circ (g' \circ (g \circ g'))$$

$$\overset{(G1)}{=} g'' \circ ((g' \circ g) \circ g') \overset{(G3)}{=} g'' \circ (n \circ g') \overset{(G2)}{=} g'' \circ g' \overset{(G3)}{=} n\,.$$

(b)

$$g \circ n \overset{(G3)}{=} g \circ (g' \circ g) \overset{(G1)}{=} (g \circ g') \circ g \overset{(a)}{=} n \circ g \overset{(G2)}{=} g$$

(c) Seien $n$ und $\tilde{n}$ neutrale Elemente bzgl. $\circ$. Dann gilt

$$\tilde{n} \overset{(b)}{=} \tilde{n} \circ n \overset{(G2)}{=} n\,.$$

(d) Sei $g \in G$ und $g', \tilde{g}' \in G$ zwei inverse Elemente mit

$$g \circ g' \overset{(a)}{=} n \quad \text{und} \quad g \circ \tilde{g}' \overset{(a)}{=} n\,.$$

Dann gilt

$$\tilde{g}' \overset{(b)}{=} \tilde{g}' \circ n \overset{(a)}{=} \tilde{g}' \circ (g \circ g') \overset{(G1)}{=} (\tilde{g}' \circ g) \circ g' \overset{(G3)}{=} n \circ g' \overset{(G2)}{=} g'\,.$$

(e) Das ist klar, denn es gilt

$$n \underset{(b)}{\overset{(G2)}{=}} n \circ n\,.$$

(f) Für $a, a', a'' \in G$ mit $a \circ a' \overset{(a)}{=} n$ und $a' \circ a'' \overset{(a)}{=} n$ gilt

$$a \overset{(b)}{=} a \circ n \overset{(a)}{=} a \circ (a' \circ a'') \overset{(G1)}{=} (a \circ a') \circ a'' \overset{(a)}{=} n \circ a'' \overset{(G2)}{=} a''\,.$$

(g)

$$h^{-1} \circ g^{-1} \overset{(G2)}{=} n \circ (h^{-1} \circ g^{-1}) \overset{(G3)}{=} \big((g \circ h)^{-1} \circ (g \circ h)\big) \circ (h^{-1} \circ g^{-1})$$

$$\overset{(G1)}{=} (g \circ h)^{-1} \circ \big((g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g^{-1})\big) \overset{(G1)}{=} (g \circ h)^{-1} \circ \big((g \circ (h \circ h^{-1}) \circ g^{-1})\big)$$

$$\overset{(a)}{=} (g\circ h)^{-1}\circ\big((g \circ n) \circ g^{-1})\big) \overset{(b)}{=} (g\circ h)^{-1}\circ(g\circ g^{-1}) \overset{(a)}{=} (g\circ h)^{-1}\circ n \overset{(b)}{=} (g\circ h)^{-1}$$

(h) Es gilt

$$b \overset{(b)}{=} b \circ n \overset{(a)}{=} b \circ (a \circ a') \overset{(G1)}{=} (b \circ a) \circ a' \underset{(h)}{\overset{\text{Vss in}}{=}} (c \circ a) \circ a' \overset{(G1)}{=} c \circ (a \circ a') \overset{(a)}{=} c \circ n \overset{(b)}{=} c\,.$$

(i) Das ist klar, da ja jedes $a \in G$ genau ein Inverses $a'$ besitzt und dann gilt:

$$\forall a, b \in G\ \exists!\, x \in G\ :\ x \underset{(d)}{\overset{(G3)}{=}} a' \circ b$$

Für dieses $x$ gilt dann

$$a \circ x \overset{\text{oben}}{=} a \circ (a' \circ b) \overset{(G1)}{=} (a \circ a') \circ b \overset{(a)}{=} n \circ b \overset{(G2)}{=} b\,.$$

(II)

$$b \overset{(G2)}{=} n \circ b \overset{(G3)}{=} (a' \circ a) \circ b \overset{(G1)}{=} a' \circ (a \circ b) \underset{(h)}{\overset{\text{Vss in}}{=}} a' \circ (a \circ c) \overset{(G1)}{=} (a' \circ a) \circ c \overset{(G3)}{=} n \circ c \overset{(G2)}{=} c$$

Lösung 3

(a) $(\{0, 1, 2\}, \oplus, \odot)$ ist ein Körper, mit dem neutralen Element $0$ bzgl $\oplus$ und $1$ bezgl $\odot$.

(b) $(\{0, 1, 2, 3\}, \oplus, \odot)$ ist kein Körper, denn die $2$ besitzt kein multiplikatives Inverses.

| | |
|---|---|
| neutr. Elt. bzgl. Addition: | $(0, 0)$ |
| inv. Elt. bzgl. Addition von $(a, b)$: | $(-a, -b)$ |
| neutr. Elt. bzgl. Multiplikation: | $(1, 0)$ |
| inv. Elt. bzgl. Multiplikation von $(a, b)$: | $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ |

Lösung 4

Es handelt sich um einen kommutativen Ring mit Einselement. Zu prüfen sind dann die Gesetze (G1) bis (G4) für $(R, +)$, (G1), (G2) und (G4) für $(R, \circ)$ und (R3) für $(R, +, \circ)$.

$(R, +, \circ)$ ist kein Körper. Es gibt kein multiplikatives Inverses.

Lösung 5

Untersuchung von $(M, \oplus)$:

(G1)

$$\begin{aligned}((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f) &= (ad+bc,bd)\oplus(e,f)\\ &= (adf+bcf+bde,bdf)\\ &= (a,b)\oplus(cf+ed,df)\\ &= (a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f))\end{aligned}$$

(G2)

$$\begin{aligned} && (a,b)\oplus\underbrace{(c,d)}_{=n} &= (a\,d+b\,c,b\,d)=(a,b)\\ \Rightarrow && n &= (0,1)\end{aligned}$$

(G3)

$$\begin{aligned} && (a,b)\oplus\underbrace{(c,d)}_{(a,b)^{-1}} &= (a\,d+b\,c,b\,d)=n=(0,1)\\ \Rightarrow && (a,b)^{-1} &= \left(-\frac{a}{b^2},\frac{1}{b}\right)\notin\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\end{aligned}$$

(G4)

$$\begin{aligned}(a,b)\oplus(c,d) &= (a\,d+b\,c,b\,d)\\ &= (c\,b+d\,a,d\,b)=(c,d)\oplus(a,b)\end{aligned}$$

Untersuchung von $(M,\odot)$:

(G1)

$$\begin{aligned}\Big((a,b)\odot(c,d)\Big)\odot(e,f) &= (a\cdot c,b\cdot d)\odot(e,f)\\ &= ((a\cdot c)\cdot e,(b\cdot d)\cdot f)\\ &\text{Assoziativität in } \mathbb{Z} \text{ führt auf}\\ &= (a\cdot(c\cdot e),b\cdot(d\cdot f))\\ &= (a,b)\odot(c\cdot e,d\cdot f)\\ &= (a,b)\odot\Big((c,d)\odot(e,f)\Big)\end{aligned}$$

(G2)

$$
\begin{aligned}
& (a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d) = (a,b) \\
\Rightarrow \quad & (c,d) = (1,1)
\end{aligned}
$$

(G3)

$$
\begin{aligned}
& (a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d) = (1,1) \\
\Rightarrow \quad & (c,d) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \notin \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}
$$

(G4)

$$
(a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d) = (c \cdot a, d \cdot b) = (c,d) \odot (a,b)
$$

Insgesamt gilt, dass $M$ sowohl mit $\oplus$ als auch mit $\odot$ ein abelscher Monoid darstellt.

Haben Sie bemerkt, dass es sich hierbei um Bruchrechnen (ohne Kürzen) handelt? ;-)

Lösung 6

Seien $a, b \in G$. Dann gilt $a \cdot a = e$, $a \cdot e = e$ und $b \cdot e = b$, sowie $a \cdot b, b \cdot a \in G$ und damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& a \cdot a = e \\
\Rightarrow \quad & b \cdot a \cdot a = b \cdot e \\
\Rightarrow \quad & b \cdot a \cdot a \cdot b = b \cdot e \cdot b = b \cdot b = e \\
\Rightarrow \quad & (b \cdot a) \cdot (a \cdot b) = e \\
\Rightarrow \quad & (b \cdot a) \cdot (a \cdot b)^2 = e \cdot (a \cdot b) \\
\Rightarrow \quad & (b \cdot a) \cdot e = (a \cdot b) \\
\Rightarrow \quad & b \cdot a = a \cdot b \quad .
\end{aligned}
$$

Es gilt also auch die Kommutativität und somit ist die Gruppe $(G, \cdot)$ abelsch. $\square$