2

Modellierung mit Wertebereichen

In Modellen von konkreten oder abstrakten Systemen oder Aufgaben kommen Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung vor. Damit die Beschreibung nicht nur ein Beispiel, sondern hinreichend allgemein ist, gibt man für einige Teile des Modells nur an, von welcher Art sie sind, lässt aber offen, welches individuelle Objekt dafür eingesetzt wird. Dafür fassen wir alle infrage kommenden Objekte in einem Wertebereich zusammen, der ihre gemeinsamen, für das Modell relevanten Eigenschaften charakterisiert. Welcher Wert aus dem Wertebereich gewählt wird, kann dann im Modell offen bleiben.

Betrachten wir als kleines Beispiel folgende informell formulierte Aufgabe:

Aufgabe 2.1

Ziehe drei Karten aus einem Kartenspiel. Bestimme die höchste der drei Karten.

Um diese Aufgabe zu präzisieren, müssen wir den Wertebereich für Karten eines Kartenspiels charakterisieren: Jede Karte wird durch zwei Angaben beschrieben: die Kartenart: Kreuz, Pik, Herz oder Karo, und das Kartensymbol: 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass. Jedes Einzelne ist ein Wertebereich. Alle Kombinationen aus einer Kartenart und einem Kartensymbol bilden den Wertebereich eines Kartenspiels, aus dem einzelne Karten als Elemente stammen. Den zweiten Teil der Aufgabe können wir präzisieren, indem wir eine Relation angeben, die für je zwei Karten entscheidet, welche höher ist. Solch eine Relation besteht aus einer Menge von Kartenpaaren. Je nach Spielregel kann es unterschiedliche solcher Vergleichsrelationen geben. Jede von ihnen ist aber Element aus demselben Wertebereich und erfüllt Anforderungen, die an Ordnungsrelationen gestellt werden.

In diesem Kapitel führen wir abstrakte Konzepte ein, mit denen man Wertebereiche für einfache und zusammengesetzte Werte präzise angeben kann. Wertebereiche sind Mengen, die beim Formulieren eines Modells eine bestimmte Rolle spielen. In Abschnitt 2.1 stellen wir deshalb die wichtigsten Begriffe der Mengenlehre vor.

Definition 2.1: Wertebereich

*Ein **Wertebereich ist eine Menge von Werten**, die im Sinne eines Modells als gleichartig angesehen werden: Wo ein Wert eines Wertebereiches W gefordert wird, kann prinzipiell jedes Element aus W diese Rolle übernehmen.* ■

Die Gleichartigkeit im Sinne des Modells illustriert der Wertebereich der Kartensymbole im obigen Beispiel: Er enthält so unterschiedliche Werte wie „10“ und „Bube“, da sie bei der Identifikation von Spielkarten die gleiche Rolle haben.

Aus Wertebereichen für einfache Werte, wie den Kartensymbolen oder Kartenarten, kann man Wertebereiche für zusammengesetzte Werte bilden, z.B. Paare zur Identifikation von Spielkarten. Dafür stellen wir in den Abschnitten 2.2 bis 2.7 die grundlegenden Begriffe Potenzmengen, kartesische Produkte, Vereinigungen, Folgen, Relationen und Funktionen vor. Dabei geben wir jeweils typische Anwendungsbeispiele an und weisen auf spezielle Modellierungstechniken hin.

Durch die Abschnitte hindurch werden wir jeweils Beiträge zu einer zusammenhängenden Modellierungsaufgabe entwickeln. Sie wird hier informell beschrieben und später schrittweise formalisiert:

Beispiel 2.1: Arbeitskreise der EU

Die EU-Kommission hat beschlossen, die Entscheidungsprozesse der EU mit formalen Methoden zu modellieren. Damit sollen drei Arbeitskreise befasst werden. An der Aktion beteiligen sich zunächst die Nationen Deutschland, Frankreich, Österreich und Spanien. Jede entsendet drei Delegierte. Die Arbeitskreise sollen so gebildet werden, dass in jedem Arbeitskreis jede Nation vertreten ist und dass unter Berücksichtigung der Fremdsprachenkenntnisse der Delegierten es in jedem Arbeitskreis eine gemeinsame Sprache gibt, die alle beherrschen. Es soll nur die Situation modelliert werden; ein Lösungsverfahren wird nicht gesucht.

In jeder präzisen, formalen Beschreibung wird angegeben, aus welchen Wertebereichen Objekte und die Werte von Variablen stammen. Das gilt für mathematische oder theoretische Definitionen ebenso wie für Spezifikationen von Aufgaben, sowie von Software- und Hardware-Systemen. Dabei werden die in diesem Kapitel eingeführten Begriffe verwendet, meist ohne sie einem speziellen Kalkül zuzuordnen. Auch andere formale Kalküle definiert man unter Verwendung dieser Begriffe.

Die Abstraktionen, die zur Konstruktion von Wertebereichen benutzt werden, sind auch Grundlage für Typsysteme in Programmiersprachen. So sind z.B. struct-Typen in C und record-Typen in Ada konkrete Ausprägungen der Abstraktion kartesisches Produkt, und abstrakte Folgen entsprechen Listen-Strukturen, wie sie in manchen Sprachen gebildet werden können oder als Typen vordefiniert sind. Deshalb ist auch das Modellieren mit abstrakten Wertebereichen, so wie es hier eingeführt wird, ein wichtiger Entwurfsschritt vor der Implementierung durch Datentypen und -strukturen im Programm. Auf der abstrakten Entwurfsebene kann man sich bemühen, das Modell möglichst gut auf die Aufgabe hin zu entwickeln, ohne dabei technische Restriktionen der Programmierung beachten zu müssen.

2.1 Mengen

Der Mengenbegriff ist grundlegend für das Modellieren mit Wertebereichen. Die dafür nötigen Aspekte der elementaren Mengenlehre fassen wir in diesem Abschnitt zusammen.

Definition 2.2: Menge

*Eine **Menge M** ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den **Elementen der Menge**. a ist ein Element der Menge M. Es wird notiert* $a \in M$.■

Diese informelle Definition reicht hier aus. Die axiomatische Mengenlehre definiert den Mengenbegriff strenger.

Mengen können auf zwei prinzipiell unterschiedliche Weisen angegeben werden:

- *extensional*, d.h. durch Aufzählen ihrer Elemente, z.B. $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ oder
- *intensional*, d.h. durch Angabe einer Bedingung; alle Werte, die sie erfüllen, und nur diese, sind Elemente der Menge, z.B. $\{ a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl und } a < 30\}$.

Die Bedingung entscheidet für jeden Wert unabhängig, ob er Element der Menge ist; Zusammenhänge zwischen mehreren Elementen kann sie nicht ausdrücken. Um unerwünschte Anomalien solcher Definitionen zu vermeiden (siehe unten), geben wir meist als Teil der Bedingung eine größere, schon definierte Menge an, aus der die infrage kommenden Werte stammen, wie $a \in \mathbb{N}$ in obigem Beispiel.

Eine Menge kann beliebig viele Elemente enthalten. Die *leere Menge* schreibt man auch $\emptyset$. Nicht-endliche Mengen kann man intensional definieren. Die beiden oben angegebenen Beispiele beschreiben dieselbe Menge auf unterschiedliche Weise. Genau genommen ist eine Menge ein Abstraktum, das wir nicht direkt angeben, sondern nur in einer ausgewählten Notation beschreiben.

Gemäß Definition 2.1 sind alle Elemente einer Menge verschieden. Die Mengenangabe $\{1, 2, 2, 3\}$ ist zwar korrekt, aber redundant. Sie gibt die gleiche Menge an wie $\{1, 2, 3\}$. Auch durch Vereinigung von Mengen (siehe unten) mit gleichen Elementen kommt kein Wert mehrfach in einer Menge vor. Wenn wir mehrfaches Vorkommen gleicher Werte modellieren wollen, müssen wir andere Konzepte anwenden (Funktion in Abschnitt 2.7 oder Folgen in Abschnitt 2.5).

In einer Menge sind ihre Elemente nicht geordnet. Die Reihenfolge, in der sie extensional aufgezählt werden, ist nicht relevant: $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 3, 2\}$ geben dieselbe Menge an.

Mengen können aus atomaren oder zusammengesetzten Elementen gebildet werden. Zusammengesetzte Elemente können z.B. Paare sein, die Spielkarten modellieren, wie in $\{(\text{Pik}, 10), (\text{Herz}, \text{Dame})\}$. Auch Mengen können Elemente einer Menge sein, z.B. die Menge $\{\{1\}, \{1, 4\}, \emptyset\}$ mit drei mengenwertigen Elementen. Für solche Mengen führen wir in den nächsten Abschnitten spezielle Begriffe ein.

Eine Menge kann auch verschiedenartige oder unterschiedlich strukturierte Elemente enthalten, z.B. in $\{1, (\text{Pik}, 10), \{1, 3\}, 9\}$ zwei ganze Zahlen, ein Paar und eine Menge. Aber bei der Modellierung mit Wertebereichen erlauben wir verschiedenartige Elemente nur in speziellen Fällen (siehe Abschnitt 2.4 Vereinigung).

Wenn wir Mengen als Wertebereiche definieren, geben wir ihnen meist einen Namen. Solche Definitionen notieren wir wie im Beispiel

Nationen := { Deutschland, Frankreich, Österreich, Spanien }

In der Modellierung sollte man möglichst **aussagekräftige Namen** wählen. Für unser Beispiel 2.1 der EU-Arbeitskreise benötigen wir noch folgende Mengen mit einfachen Elementen:

Sprachen := { Deutsch, Französisch, Spanisch }
DelegiertenIndex := { 1, 2, 3 }
ArbeitskreisIndex := { 1, 2, 3 }

Die beiden letzten Mengen haben wir eingeführt, um die Delegierten jeder Nation und die drei Arbeitskreise zu identifizieren. In der Modellierung nennt man solche Mengen, die zur Unterscheidung gleichartiger Objekte eingeführt werden, *Indexmengen*. Zu diesem Zweck werden wir sie bei der Weiterentwicklung des Beispiels in den nächsten Abschnitten einsetzen. Meist werden kleine ganze Zahlen als ihre Elemente gewählt, aber auch beliebige andere Werte erfüllen den Zweck der Indizierung. So hätte man den drei Arbeitskreisen auch symbolische Namen geben können, wie z.B. ParlamentsEntscheidungen, die einen Hinweis auf ihre Aufgabe geben.

Auch wenn man die beiden Indexmengen wie oben gleich definiert, sollte man nicht der Versuchung erliegen, eine davon einzusparen, denn sie spielen ganz verschiedene Rollen und können auch unterschiedliche Werte haben, z.B. wenn eine Nation mehr Delegierte stellt, als es Arbeitskreise gibt.

Bei der Definition und Anwendung von Mengen als Wertebereichen werden auch Verknüpfungen mit Operationen über Mengen formuliert. Wir definieren sie hier informell:

Definition 2.3: Mengenoperationen

Bezeichnung	*Notation*	*Bedeutung*
ist Teilmenge	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
ist echte Teilmenge	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$\{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$\{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$\{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$

Außerdem bedeutet die Formulierung zwei Mengen M und N sind ***disjunkt****, dass gilt* $M \cap N = \emptyset$.

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt ihre ***Kardinalität*** *und wird notiert als* $|M|$ *oder* $Card(M)$. ■

Zum Schluss weisen wir noch darauf hin, dass man mit intensionalen Beschreibungen auch Mengen definieren kann, für die man die Frage „gilt a ∈ M?“ prinzipiell nicht entscheiden kann. Dies wird mit Russels Paradoxon demonstriert:

> *P* sei die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, also $P := \{ x \mid x \notin x \}$. Dann führt die Frage „Ist *P* ein Element von *P*?“ zum Widerspruch.

Die Ursache des Problems liegt darin, dass *P* selbst zum Wertebereich gehört, aus dem die Elemente von *P* stammen. Um solche Anomalien zu vermeiden, geben wir in intensionalen Mengendefinitionen an, aus welchem größeren, schon definierten Wertebereich die Elemente stammen, z.B.:

$M := \{ a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist eine Quadratzahl und } a < 30 \}$

Damit tatsächlich entschieden werden kann, welche Elemente *M* enthält, muss man noch verlangen, dass die Bedingung über *a* entscheidbar ist. Diese Einschränkungen schließen natürlich nicht aus, Mengen rekursiv zu definieren, was häufig sinnvoll ist, z.B.

$$\text{Sonnensystem} := \{ \text{Sonne} \} \cup \{ x \mid x \in \text{Himmelskörper}, x \text{ umkreist } y \text{ und } y \in \text{Sonnensystem} \}$$

2.2 Potenzmengen

Häufig treten in der Modellierung Gegenstände auf, die durch Mengen beschrieben werden, z.B. die Menge der Sprachen, die ein Delegierter spricht. Der Wertebereich, aus dem sie stammen, ist dann eine Menge, welche Mengen als Elemente enthält. Eine spezielle Form davon sind die Potenzmengen:

Definition 2.4: Potenzmenge

*Die **Potenzmenge** (engl. **powerset**) einer Grundmenge U ist die Menge aller Teilmengen von U, geschrieben **Pow** (**U**) oder ℘ (**U**). Als Formel:*

$$Pow(U) := \{ M \mid M \subseteq U \}$$ ■

Zum Beispiel ist zur Grundmenge $U := \{ d, f, s \}$ die Potenzmenge
$Pow(U) := \{ \emptyset, \{ d \}, \{ f \}, \{ s \}, \{ d, f \}, \{ d, s \}, \{ f, s \}, \{ d, f, s \} \}$

Jedes Element der Potenzmenge ist eine Menge, deren Elemente eine Kombination von Elementen der Grundmenge sind. Die Anzahl aller Kombinationen von Elementen aus *U* bestimmt auch die *Kardinalität von Potenzmengen*: Es gilt $|Pow(U)| = 2^n$, falls die Grundmenge *U* endlich ist, $|U| = n$. Falls *U* leer ist, enthält *Pow (U)* nur die leere Menge. Nehmen wir z.B. als Grundmenge

$\text{Sprachen} := \{ \text{Deutsch, Französisch, Spanisch} \}$

dann wird die Potenzmenge SprachMengen := Pow (Sprachen) wie im Beispiel oben gebildet. Wenn wir Werte modellieren, die Teilmengen einer Menge *U* sind, dann stammen sie aus dem Wertebereich Potenzmenge von *U*, z.B.

$\{$ Deutsch, Spanisch $\} \in$ SprachMengen

Potenzmengen kommen auch bei folgender Modellierungstechnik zum Einsatz: Manche Aufgaben haben nicht immer genau eine Lösung, sondern je nach Daten mehrere Lösungen oder keine Lösung. Dann kann man nach der Menge aller Lösungen als Antwort fragen. Sie ist aus dem Wertebereich, der die Potenzmenge des Wertebereiches der Lösungen ist. Eine solche Aufgabe ist z. B. die Frage nach der Zahl der Münzen, die nötig sind, um einen Geldbetrag auszuzahlen. Je nach Betrag und Wert der verfügbaren Münzarten gibt es keine, eine oder mehrere Zahlen als Antwort. Ihr Wertebereich ist $Pow(\mathbb{N})$.

2.3 Kartesische Produkte

Als zweites Grundprinzip zur Bildung zusammengesetzter Werte betrachten wir kartesische Produkte. Dabei werden mehrere Elemente aus jeweils einem Wertebereich zu einem Tupel zusammengesetzt. In Aufgabe 2.1 haben wir Spielkarten durch Paare, wie (Herz, 10), beschrieben, wobei Herz $\in$ KartenArten und 10 $\in$ KartenSymbole stammen.

Definition 2.5: Geordnetes Paar, kartesisches Produkt

Ein ***geordnetes Paar*** *(x, y) besteht aus zwei Werten x und y, wobei x die erste und y die zweite Komponente ist. Das* ***kartesische Produkt*** $M \times N$ ***zweier Mengen*** *M und N ist die Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus M und zweiter Komponente aus N, in Formeln*

$$M \times N := \{ (x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N \}.$$

Falls M oder N leer ist, gibt es kein solches Paar und die Menge $M \times N$ *ist leer.*

Der Begriff wird verallgemeinert zum ***kartesischen Produkt von*** $n > 1$ ***Mengen****, als Menge von geordneten n-Tupeln*

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I \}$$
$$\text{mit Indexmenge } I := \{ 1, \ldots, n \} \text{ und nicht leeren } M_i.$$

Für den Sonderfall, dass alle n Wertebereiche gleich sind, also $M_i = M$ *für alle* $i \in I$ *führen wir die Notation* M^n *ein.* ■

Damit definieren wir zur Aufgabe 2.1:

KartenSpiel := KartenArten $\times$ KartenSymbole

mit

KartenArten := $\{$ Kreuz, Pik, Herz, Karo $\}$
KartenSymbole := $\{$ 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass $\}$

Damit ist der Wertebereich KartenSpiel eine Menge mit den 32 verschiedenen Beschreibungen von Spielkarten.

Die Kardinalität der kartesischen Produkte wird durch die Anzahl der Kombinationen von Werten aus den Wertebereichen der Komponenten bestimmt: Falls alle M_i endlich sind, gilt

$$|M_1 \times M_2 \times .... \times M_n| = \prod_{i \in I} |M_i| \text{ mit } I = \{1, ..., n\}$$

Weitere Beispiele für kartesische Produkte sind etwa

Delegierte := Nationen × DelegiertenIndex
KalenderDaten := Tage × Monate × Jahre

mit Elementen wie

(Deutschland, 1), (Spanien, 3) ∈ Delegierte
(26, Juli, 2002) ∈ KalenderDaten.

Die Reihenfolge der Wertebereiche im kartesischen Produkt ist wichtig, sie bestimmt die Reihenfolge der Werte in den zugehörigen Tupeln.

Selbstverständlich können zur Definition der Wertebereiche der Komponenten beliebige Strukturierungskonzepte angewandt werden, z.B. auch wieder kartesische Produkte wie in

Adressen := Namen × Straßen × Orte
Namen := Vornamen × Zunamen
Orte := Postleitzahlen × Ortsnamen

Vornamen, Zunamen, Postleitzahlen und Ortsnamen seien als Wertebereich für Zeichenreihen definiert.

Jeder Wert dieses Wertebereiches hat Tupel als Komponenten des Tupels, z.B.

((Erika, Mustermann), Hauptstr.3, (D 33098 , Paderborn)) ∈ Adressen

Manchmal sind die Namen der Wertebereiche für Namen und Orte entbehrlich. Dann muss aber die Strukturierung durch Klammern ausgedrückt werden, wenn sie erhalten bleiben soll:

Adressen := (Vornamen × Zunamen) × Straßen × (Postleitzahlen × Ortsnamen)

Man beachte, dass $A \times B \times C$ Tripel wie (a, b, c) als Elemente enthält, während $(A \times B) \times C$ Paare wie $((a, b), c)$ als Elemente enthält, deren jeweils erste Komponente ein Paar ist.

Wenn alle Komponenten der Tupel aus demselben Wertebereich M stammen, schreiben wir M^n für das n-fache kartesische Produkt $M \times ... \times M$

Solch einen Wertebereich verwenden wir, wenn wir eine feste Anzahl gleichartiger Werte in bestimmter Reihenfolge modellieren wollen, z.B. die Ergebnisse dreimaligen Würfelns

DreiWürfe := $\{$ 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\}^3$

Wertebereiche für Folgen beliebiger Länge führen wir im Abschnitt 2.5 ein.

2.4 Vereinigung

Bei der Modellierung mit Wertebereichen spielt unter den Mengenoperationen die Vereinigung eine besondere Rolle: Sie drückt die Zusammenfassung von spezielleren Wertebereichen zu einem allgemeineren aus.

Definition 2.6: Vereinigung

*Seien $W_1, \ldots, W_n$ beliebige Mengen und $n > 1$. Dann ist $V = W_1 \cup \ldots \cup W_n = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ der **vereinigte Wertebereich**. Die W_i können auch verschiedenartig sein und brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.* ■

Für die Kardinalität des vereinigten Wertebereiches gilt $|V| \leq \sum_{i=1}^{n} |W_i|$, falls alle W_i endlich sind.

Als Beispiel variieren wir die Modellierung von Kartenspielen: In manchen Spielregeln werden die Kartensymbole nach Bildern und Zahlwerten unterschieden. Wir modellieren dann den Wertebereich KartenSymbole als Vereinigung:

KartenSymbole := Bilder ∪ ZahlWerte
Bilder := { Bube, Dame, König, Ass }
ZahlWerte := { 7, 8, 9, 10 }

Die Vereinigung von Wertebereichen drückt eine Abstraktion aus: Wenn wir spezielle Regeln für Bilder angeben, benutzen wir den speziellen Wertebereich. Wollen wir allgemeine Aussagen über alle KartenSymbole machen, z.B. den Wertebereich aller Karten definieren, abstrahieren wir vom Unterschied zwischen Bildern und Zahlenwerten und benutzen den vereinigten Wertebereich.

Beim Formulieren von Aussagen über beliebige Elemente des vereinigten Wertebereiches muss man manchmal doch nach der Zugehörigkeit zu einem der speziellen Wertebereiche unterscheiden. Dies wird dann explizit durch eine Bedingung ausgedrückt; z.B. wenn Kartenspiel wie in 2.3 als Paar definiert ist:

Sei (a, s) ∈ Kartenspiel und s ∈ Bilder, dann ....

In unserem Beispiel sind die speziellen Wertebereiche Bilder und ZahlWerte paarweise disjunkt. Das braucht nicht immer so zu sein. Beispielsweise könnten wir bei der Modellierung einer Firmenorganisation Wertebereiche definieren für Kunden und für Lieferanten. Es ist dann durchaus möglich, dass eine Firma in beiden Rollen auftritt, z.B.

Kunden := { Siemens, Benteler, VW }
Lieferanten := { Orga, Siemens }

Modellieren wir einen Wertebereich

Geschäftspartner := Kunden ∪ Lieferanten

so abstrahiert er von der Rolle, die die Partnerfirmen spielen. In unserem Beispiel ist dann natürlich Siemens nur einmal im Wertebereich Geschäftspartner enthalten.

Mit einer besonderen Technik, der *disjunkten Vereinigung*, kann man dafür sorgen, dass im vereinigten Wertebereich die Werte noch nach ihrer Herkunft aus den speziellen Wertebereichen unterschieden werden können, auch wenn diese nicht paarweise disjunkt sind. Dazu kombiniert man die Werte mit einer Kennzeichenkomponente zu Paaren:

Definition 2.7: Disjunkte Vereinigung

*Seien $W_1, ..., W_n$ beliebige Mengen, $n > 1$ und $I := \{1, .., n\}$ eine Indexmenge. Dann ist die **disjunkte Vereinigung** der Wertebereich*

$$V = \{(i, a_i) \mid i \in I \text{ und } a_i \in W_i\} \subseteq \mathrm{I} \times \bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

*Die erste Komponente heißt **Kennzeichenkomponente** (engl. **tag field**). Die W_i können auch verschiedenartig sein und brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.* ■

Man kann zur Indizierung der W_i und als Wertebereich der Kennzeichenkomponente auch eine andere Indexmenge als die mit den ersten *n* natürlichen Zahlen wählen. Für die Kardinalität von V gilt, falls alle W_i endlich sind, $|V| = \sum_{i=1}^{n} |W_i|$.

Beachte: Die Bezeichnung *disjunkte Vereinigung* ist hier als Kurzform für *disjunkt gemachte Vereinigung* zu verstehen. Man sollte sie nicht verwechseln mit der *Vereinigung disjunkter Mengen*, die in der Mathematik auch als *disjunkte Vereinigung* abgekürzt wird.

Für das obige Beispiel ergibt sich mit der disjunkten Vereinigung

Ind := {Kunde, Lieferant}
Geschäftspartner :=
{(Kunde, f) | f ∈ Kunden} ∪ {(Lieferant, f) | f ∈ Lieferanten} =
{(Kunde,Siemens), (Kunde, Benteler), (Kunde, VW),
(Lieferant, Orga), (Lieferant, Siemens)}

Da jeder Wert seine Herkunft mit sich trägt, kann man aus dem vereinigten Wertebereich differenziert selektieren, ohne eine Bedingung separat zu formulieren, z.B. (Lieferant, x), ∈ GeschäftsPartner. Es ist dann sicher, dass x ∈ Lieferanten ist.

2.5 Folgen

In Abschnitt 2.3 haben wir Wertebereiche wie A^n als Spezialfall kartesischer Produkte eingeführt, deren Tupel jeweils eine feste Anzahl *n* Komponenten aus demselben Wertebereich *A* haben. Mit dem Begriff der Folgen gehen wir über zu Wertebereichen mit Tupeln unterschiedlicher Länge und gleichartigen Komponenten.

Definition 2.8: Endliche Folgen

*Ein n-Tupel aus A^n, mit $n > 1$ Komponenten aus der Menge A heißt **Folge der Länge n über A**; (a), mit $a \in A$, ist eine Folge der Länge 1 über A; ( ) oder ε* *steht für die* ***leere Folge.*** *Wir definieren den Wertebereich der endlichen, nicht-leeren Folgen über A als*

$$A^+ := \{ (a) \mid a \in A \} \cup \{ x \mid x \in A^i \text{ und } i > 1 \}$$

Der Wertebereich der endlichen Folgen über A ist definiert als

$$A^* := \{ \varepsilon \} \cup A^+$$

Ist die Grundmenge A leer, so sind auch alle A^n *leer und deshalb auch* A^+, A^* *enthält nur* ε *.* ■

Damit werden endliche Folgen jeder Länge einheitlich in der Form $(a_1, \ldots , a_n)$ notiert. Man beachte, dass der Begriff der n-Tupel nur Folgen länger als 1 umfasst und deshalb Folgen der Längen 1 und 0 in der Definition 2.8 explizit ergänzt werden.

Falls A nicht leer ist, sind A^+ und A^* nicht-endliche Mengen.

Man benötigt immer dann Folgen zur Modellierung, wenn eine unbestimmte Anzahl gleichartiger Werte vorliegen, wobei die Reihenfolge, in der sie auftreten, relevant ist. So ist es zum Beispiel für den Ablauf eines Würfelspieles von Bedeutung, welche Zahlen ein Spieler in welcher Reihenfolge würfelt. Deshalb modellieren wir Protokolle seiner Würfe durch Folgen wie

WürfelWerte := {1, 2, 3, 4, 5, 6}
WürfelProtokoll := WürfelWerte*

Unterschiedliche Werte aus diesem Wertebereich sind zum Beispiel

(6, 1, 1), (1, 6, 1), (6, 1, 1, 3, 1), (5), ( )

Dabei könnte die leere Folge den Stand kurz vor Spielbeginn charakterisieren. Falls der ausdrücklich ausgeschlossen werden soll, hätten wir WürfelWerte$^+$ verwendet. Wenn es andererseits nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge die gewürfelten Zahlen anfallen, dann bräuchten wir nur zu jedem WürfelWert anzugeben, wie häufig er aufgetreten ist. Dazu verwenden wir nicht Folgen, sondern Funktionen, wie in Abschnitt 2.7 gezeigt wird.

Selbstverständlich können die Elemente der Folgen auch aus zusammengesetzten Wertebereichen stammen, z.B. Paare im KartenSpiel*, womit man Folgen aus einem Kartenspiel gezogener Karten modellieren würde.

Man beachte, dass in der Mathematik mit Folgen häufig ein anderer Begriff verbunden ist: In einer Folge von Werten wird der nächste Wert mit einer Funktion aus dem vorigen erzeugt: $a_k = f(a_{k-1})$.

2.6 Relationen

Relationen setzen Werte aus im Allgemeinen unterschiedlichen Wertebereichen zueinander in Beziehung. Eine n-stellige Relation wird durch eine Menge von n-Tupeln angegeben. So soll z.B. die dreistellige Relation GültigeDaten alle Tripel von Werten enthalten, die gültige Kalenderdaten angeben, wie (21, Dezember, 2003) oder (29, Februar, 2000), nicht aber (31, Juni 1980). Eine Relation R ist also erfüllt für genau die Tupel a mit $a \in R$. Jede Relation R kann auch als Prädikat aufgefasst werden: es ist für genau die Werte a wahr, für die gilt $a \in R$.

In der Modellierung werden Zusammenhänge innerhalb des Modells durch Relationen beschrieben. Häufig wollen wir den Wertebereich einer Relation festlegen, die konkrete Ausprägung aber offen oder variabel lassen. Zu unserem Beispiel 2.1 können zweistellige Relationen benutzt werden, von denen jede angibt, ob ein Delegierter eine bestimmte Sprache spricht.

Definition 2.9: Wertebereich von Relationen

*Eine **n-stellige Relation R** ist eine Menge von n-Tupeln, wobei jedes davon aus einem Wertebereich $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ mit $n > 1$ stammt, d.h. $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Solch eine Relation stammt aus dem Wertebereich $Pow\,(M_1 \times M_2 \times .. \times M_n)$, der i.a. weitere Relationen gleicher Struktur enthält. Eine **einstellige Relation** über einer Menge M ist eine Teilmenge von M. Sie stammt aus dem Wertebereich Pow (M).* ■

Die Kardinalität des Wertebereiches ist

$$|Pow\,(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)| = 2^k \text{ mit } k = \prod_{i=1}^{n} |M_i| \quad \text{falls alle } M_i \text{ endlich sind.}$$

Betrachten wir als Beispiel den Wertebereich von Relationen über Delegierte und Sprachen. Zur Vereinfachung betrachten wir nur die Delegierten einer Nation und charakterisieren sie durch ihren Index

DelegiertenIndex := { 1, 2, 3}
Sprachen := { Deutsch, Französisch, Spanisch}
Sprachkompetenzen := Pow (DelegiertenIndex × Sprachen)
Spricht1990 := { (1, Deutsch), (2, Spanisch), (2, Deutsch), (3, Deutsch),
(3, Französisch)}
Spricht2000 := Spricht1990 ∪ { (1, Französisch), (2, Spanisch)}

Die Potenzmenge Sprachkompetenzen enthält alle Teilmengen von (DelegiertenIndex × Sprachen) als Elemente. Die beiden Relationen Spricht1990 und Spricht2000 sind zwei Elemente aus SprachKompetenzen. Die Kardinalität von SprachKompetenzen ist 2^9. Das ist die Anzahl unterschiedlicher Relationen, die man mit dieser Struktur angeben kann.

Für die Aussage, dass ein Tupel a Element einer Relation R ist, verwendet man außer $a \in R$ auch die Notation $R\ a$, z.B. gültigeDaten(21, Dezember, 2003). Bei zweistelligen Relationen verwendet man für $(x, y) \in R$ auch die Notation $x\ R\ y$, besonders, wenn R durch ein Operatorzeichen angegeben wird, z.B. $x \leq y$, $a = b$, $p \rightarrow q$.

Eine besondere Rolle spielen 2-stellige Relationen, bei denen beide Komponenten aus demselben Wertebereich sind: $R \in Pow\,(M \times M)$. Es sind eine Reihe von Eigenschaften definiert, die solche Relationen charakterisieren können:

Definition 2.10: Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Für 2-stellige Relationen $R \in Pow\,(M \times M)$, mit $M \neq \emptyset$, sind folgende Begriffe definiert:

reflexiv,	*wenn für alle $x \in M$ gilt: $x\,R\,x$;*
irreflexiv,	*wenn für alle $x \in M$ gilt: $x\,R\,x$ gilt nicht;*
symmetrisch,	*wenn für alle $x, y \in M$ gilt:* *aus $x\,R\,y$ folgt $y\,R\,x$;*
antisymmetrisch,	*wenn für alle $x, y \in M$ gilt:* *aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,x$ folgt $x = y$;*
asymmetrisch,	*wenn für alle $x, y \in M$ gilt:* *aus $x\,R\,y$ folgt, $y\,R\,x$ gilt nicht;*
transitiv,	*wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:* *aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ folgt $x\,R\,z$;*
total,	*wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x\,R\,y$ oder $y\,R\,x$.* ■

Die Definition 2.10 verwendet einige Begriffe aus logischen Kalkülen zur Charakterisierung der Eigenschaften. Wir erläutern die Begriffe hier zunächst informell; präzise werden sie in den Kapiteln 5 und 6 eingeführt:

- „für alle $x \in M$ gilt eine Aussage über x“ bedeutet: Die Aussage muss für jedes Element aus M geprüft werden und erfüllt sein.
- „für alle $x, y \in M$ gilt eine Aussage über x und y“ bedeutet: Die Aussage muss für alle Paare von Elementen aus M geprüft werden, auch für solche mit $x = y$. Deshalb ist z.B. nach obiger Definition eine totale Relation auch immer reflexiv.
- „A oder B“ ist wahr, wenn mindestens eins von beiden wahr ist.
- „aus A folgt B“ ist gleichwertig zu „A ist falsch oder B ist wahr“.

Im Folgenden sind Beispiele für Relationen $R \in Pow\,(M \times M)$ über einer kleinen Menge $M = \{a, b, c\}$ angegeben, die dazu dienen, das Verständnis für die in Definition 2.10 formulierten Eigenschaften zu prüfen.

	erfüllt	**nicht erfüllt**
reflexiv	{(a, a), (b, b), (c, c)}	{(a, a)}
irreflexiv	{(a, b)}	{(a, a)}
symmetrisch	{(a, b), (b, a)}	{(a, b)}
antisymmetrisch	{(a, b), (c, c)}	{(a, b), (b,a)}

	erfüllt	**nicht erfüllt**
asymmetrisch	{(a, b), (c, a)}	{(a, b), (b,a)}
transitiv	{(a, b), (b, c), (a, c)}	{(a, b), (b, c)}
total	{(a, b), (b, c), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c)}	{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c)}

Natürlich sind die Eigenschaften auch auf Relationen über nicht-endlichen Mengen anwendbar: zum Beispiel ist die Relation ≤ über den ganzen Zahlen Z reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv und total.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften werden Äquivalenzrelationen und verschiedene Arten von Ordnungsrelationen charakterisiert:

Definition 2.11: Äquivalenzrelation

Eine zweistellige Relation $R \in$ Pow $(M \times M)$ ist eine ***Äquivalenzrelation****, wenn sie* ***reflexiv, symmetrisch und transitiv*** *ist.* ■

Beispiel für eine Äquivalenzrelation über der Menge $M = \{ a, b, c\}$ *ist*

{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)}

Definition 2.12: Ordnungsrelationen

Eine zweistellige Relation $R \in$ Pow $(M \times M)$ ist eine ***partielle Ordnung*** *oder* ***Halbordnung****, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;*
eine ***strenge Ordnung*** *oder* ***strenge Halbordnung,*** *wenn R irreflexiv und transitiv ist;*
eine ***Quasiordnung****, wenn R reflexiv und transitiv ist;*

eine ***totale*** *oder* ***lineare Ordnung****, wenn R eine totale Halbordnung, also total, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.* ■

So ist z.B. $\leq \in$ *Pow* $(Z \times Z)$ eine totale Ordnung und $< \in$ *Pow* $(Z \times Z)$ eine strenge Ordnung.

Man beachte, dass Definition 2.12 folgende Konsequenzen hat:

1. Alle Ordnungsrelationen sind transitiv.
2. Enthält R einen Zyklus über verschiedene Elemente, also etwa die Paare (a, b), (b, a), mit $a \neq b$, dann ist R weder eine Halbordnung, noch eine stenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung.
3. Nur für totale Ordnungen wird gefordert, dass alle Paare von Elementen „vergleichbar" sind, d.h. zu allen $a, b \in M$ *ist* (a, b) oder (b, a) in R; R ist total.
4. Ist R eine totale Ordnung, dann ist es auch eine Halbordnung und eine Quasiordnung.

2.7 Funktionen

Eine Funktion bildet Werte aus ihrem Definitionsbereich auf Werte ihres Bildbereiches ab, z.B. die Funktion, die jede ganze Zahl auf ihr Quadrat abbildet. Funktionen sind Relationen mit speziellen Eigenschaften, da sie Werte des Defnitions- und des Bildbereiches zueinander in Beziehung setzen.

Definition 2.13: Funktion

*Eine **Funktion** f ist eine 2-stellige Relation $f \in Pow(D \times B)$, für die gilt: Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y = z$. Einem Wert aus D ist also höchstens ein Wert aus B zugeordnet. Die Menge D heißt **Definitionsbereich** und die Menge B **Bildbereich** der Funktion f.* ■

Wir können für unser Beispiel 2.2 eine Funktion angeben, die die Nationen auf ihre Einwohnerzahl in Millionen abbildet:

EinwohnerMio := {(Deutschland, 82), (Frankreich, 58), (Österreich, 8), (Spanien, 39)}

Für Paare (x, y) aus einer Funktion f gibt es mehrere gleichbedeutende Schreibweisen:

$(x, y) \in f$ $\quad$ $y = f(x)$ $\quad$ $f(x) = y$

also z.B. (Deutschland, 82) ∈ EinwohnerMio oder 82 = EinwohnerMio (Deutschland) oder EinwohnerMio (Deutschland) = 82

Die Menge aller Paare von f heißt auch *Graph von f*. Er wird als Menge notiert (wie oben EinwohnerMio) oder als 2-spaltige Tabelle angegeben.

Da Funktionen spezielle Relationen sind, stammen sie aus Wertebereichen, die Teilmengen der Wertebereiche entsprechend strukturierter Relationen sind.

Definition 2.14: Wertebereich, aus dem Funktionen stammen

*Der **Wertebereich** $D \to B$ ist die **Menge aller Funktionen**, die von D nach B abbilden. Es gilt $D \to B \subseteq Pow(D \times B)$.*
*$D \to B$ enthält als Elemente alle Mengen von Paaren über $D \times B$, die Funktionen sind. Für eine Funktion $f \in D \to B$ gilt $f \subseteq D \times B$. Statt $f \in D \to B$ sagt man auch: f hat die **Signatur** $D \to B$ oder kurz $f : D \to B$.* ■

Für die Kardinalität gilt, falls D und B endlich sind, $|D \to B| = (|B| + 1)^{|D|}$, das ist die Anzahl unterschiedlicher Funktionen in $D \to B$.

Man beachte, dass mit Wertebereich im Zusammenhang von Funktionen unterschiedliche Begriffe bezeichnet werden: Wir haben $D \to B$ als Wertebereich definiert, aus dem Funktionen mit derselben Signatur stammen. In der Mathematik wird der Bildbereich einer Funktion f auch ihr Wertebereich genannt.

Die Kardinalität von $D \to B$ ist folgendermaßen begründet: Um eine Funktion aus dem Wertebereich $D \to B$ zu bilden, entscheidet man für jeden Wert $d \in D$ unabhängig, ob man für ihn ein Paar in die Funktion aufnimmt, und falls ja, mit welchem Wert $b \in B$.

Das ergibt $(|B|+1)^{|D|}$ Möglichkeiten für unterschiedliche Funktionen.

Seien die Wertebereiche Bool := { w,f } für Wahrheitswerte, Z für ganze Zahlen und $\mathbb{N}$ für natürliche Zahlen gegeben. Dann stammen folgende Funktionen aus den angegebenen Wertebereichen

Funktion	**Wertebereich**
Quadrat := $\{ (a,b) \mid a,b \in$ Z und $a^2 = b\}$	Z → Z
ggt := $\{ ((a,b), c) \mid a,b,c \in$ N und c ist größter gemeinsamer Teiler von a und $b\}$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
not := $\{ (w,f), (f,w)\}$	Bool → Bool

Im Abschnitt 2.6 haben wir zu unserem Beispiel 2.1 eine Relation Spricht1990 angegeben. Sie stammt aus dem Wertebereich SprachKompetenzen := Pow (DelegiertenIndex × Sprachen). Diese Relation erfüllt nicht die Bedingung für eine Funktion, da einige Delegierte erfreulicherweise mehr als eine Sprache sprechen. Wollen wir denselben Sachverhalt als Funktion modellieren, dann müssen wir als Bildbereich

SprachMengen := Pow (Sprachen)

statt Sprachen wählen. Die Funktion wäre dann

Spricht1990F := { (1,{ Deutsch, Spanisch }), (2,{ Deutsch }), (3,{ Deutsch, Französisch })} ∈ DelegiertenIndex → Sprachmengen.

Die Kardinalität |DelegiertenIndex → Sprachmengen| errechnet sich zu $(2^3 + 1)^3$ bei drei Delegierten und einer Potenzmenge über drei Sprachen. Es ist zunächst verwunderlich, dass dieser Wertebereich größer ist, als derjenige der Relationen, von dem wir ausgegangen sind:

|Pow (DelegiertenIndex × Sprachen)|= $2^{3 \cdot 3}$.

Der Grund dafür ist folgender: In manchen der Relationen wird die Aussage gemacht, dass ein Delegierter i keine der Sprachen spricht, indem es kein Tupel (i, s) in der Relation gibt. Solche Relationen können wir jedoch auf zweifache Weise in unsere Funktionen übertragen: Entweder nehmen wir $(i, \emptyset)$ in die Funktion auf oder wir nehmen kein Tupel für i auf. (Im letzten Fall nennen wir die Funktion partiell und nicht total.) Schließen wir den Fall aus und beschränken uns auf totale Funktionen, dann ist die Kardinalität allgemein $|B|^{|D|}$ und hier $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3}$.

Auch für Funktionen definieren wir einige wichtige Eigenschaften:

Definition 2.15: Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f \in D \rightarrow B$ ist

***total**, wenn es für jedes $x \in D$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;*

***surjektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;*

***injektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;*

***bijektiv**, wenn f zugleich surjektiv und injektiv ist.* ■

Man sagt auch, eine Funktion ist *partiell*, wenn man ausdrücken will, dass es gleichgültig ist, ob sie total ist oder nicht.

Beispiele für partielle und totale Funktionen haben wir oben mit den Abbildungen auf SprachMengen diskutiert. Die oben gezeigte Funktion not erfüllt die Bedingungen für alle vier Eigenschaften in Definition 2.15. Die Funktion Quadrat ist total, nicht surjektiv, da es Zahlen gibt, die nicht Quadratzahlen sind, nicht injektiv, da Quadrat(x) = Quadrat (-x). Falls wir den Definitionsbereich auf $\mathbb{N}$ einschränken würden, wäre sie auch injektiv.

Der Begriff der *Stelligkeit*, den wir schon von Relationen kennen, wird auch auf Funktionen angewandt. Hier bezieht er sich allerdings auf den Definitionsbereich:

Definition 2.16: Stelligkeit von Funktionen

*Funktionen aus dem Wertebereich $D \to B$ sind **n-stellig**, wenn der Definitionsbereich D eine Menge von n-Tupeln ist. Ist D nicht als kartesisches Produkt strukturiert, so sind die Funktionen aus $D \to B$ **1-stellig**, wenn D nicht leer ist, und **0-stellig**, wenn D leer ist. **0-stellige** Funktionen sind **konstante Funktionen**, kurz **Konstante**, für jeweils einen Wert aus B. 0-stellige Funktionen kann man jedoch nicht als Menge von Paaren angeben.* ■

Aus den bisher betrachteten Beispielen ist die Funktion ggt $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 2-stellig, alle übrigen sind 1-stellig. Auch arithmetische Operationen wie +, -, $*$, / mit der Signatur $Z \times Z \to Z$ sind 2-stellig.

Wir wollen nun einige wichtige Modellierungstechniken vorstellen, die auf Funktionen basieren.

In jedem Wertebereich der Form $M \to M$ gibt es eine *Identitätsfunktion* mit

$$\mathrm{id}_M := \{(x, x) \mid x \in M\} \in M \to M$$

Sie ist z.B. dann nützlich, wenn man Transformationen über M als Funktionen modelliert und den Fall, dass sich nichts ändert, nicht als Sonderfall, sondern als spezielle Funktion beschreibt. So könnte beispielsweise die Weitergabe von Aufgaben unter den Mitgliedern eines Vereins durch Anwendung einer Funktion aus $M \to M$ beschrieben werden. Wenn dann einmal alle ihre Aufgaben behalten sollen, braucht man nicht das Modell zu ändern, sondern nur die id_M als Weitergabefunktion einzusetzen.

Die folgende Klasse von Funktionen charakterisiert Mengen über einer Trägermenge U.

Sei $M \in Pow\ (U)$, dann gibt die *charakteristische Funktion* χ_M an, welche Elemente aus U in M enthalten sind:

$$\chi_M \in U \to Bool \text{ mit } \chi_M := \{(x, b) \mid x \in U \text{ und } b = (x \in M)\}$$

χ_M ist eine totale Funktion.

So ist z.B. zu der Menge

DS := { Deutsch, Spanisch } $\in$ Pow(Sprachen)

die charakteristische Funktion

χ_{DS} := { (Deutsch,w), (Spanisch, w), (Französisch, f) }

Charakteristische Funktionen werden benutzt, wenn man den Informationsgehalt einer Menge in einer Funktion binden will, die zusammen mit anderen Prädikaten verwendet wird.

Funktionen mit dem Bildbereich Bool heißen auch *Prädikate*, z.B. $\leq \in Z \times Z \rightarrow$ Bool.

Im Abschnitt 2.1 haben wir bei der Definition von Mengen hervorgehoben, dass eine Menge Elemente nicht mehrfach enthalten kann. Wollen wir jedoch mehrfaches Vorkommen von Elementen einer Trägermenge *U* modellieren, so wenden wir dafür das gleiche Prinzip an, das den charakteristischen Funktionen zugrunde liegt: Eine Funktion $b \in U \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus *U* an, wie oft er vorkommt.

Sei z.B. EuroMünzen := {1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200}, dann kann man mit Funktionen aus dem Wertebereich EuroMünzen $\rightarrow \mathbb{N}_0$ die Inhalte von Geldbeuteln modellieren, z.B.

meinGeldBeutel := { (1, 3), (2, 0), (5, 0), (10,2), (20,1), (50,1), (100,4), (200,2) }

In diesem Geldbeutel sind dann unter anderen drei 1-Euro-Stücke.

Um trotz des mehrfachen Auftretens von Elementen einen Mengenbegriff verwenden zu können, nennt man solche Strukturen auch *Multimengen* (engl. *bags*) und schreibt sie wie Mengen, z.B.

{ 1, 1, 1, 10, 10, 20, 50, 100, 100, 100, 100, 200, 200 }

Natürlich haben Multimengen andere Eigenschaften und Rechenregeln als Mengen.

Schließlich wollen wir einige typische Beispiele für das Modellieren mit Funktionen auf Indexmengen zeigen. Indexmengen haben wir im Abschnitt 2.1 eingeführt, um Objekte eines Modellbereiches zu unterscheiden und aufzuzählen, z.B.

Ind := { 1, ... , n }
Kartensymbole := { 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass }

Wir können z.B. den Informationsgehalt einer Folge auch durch eine Funktion über einer Indexmenge beschreiben.

Sei F := (w, e, l, l, e) eine Folge aus Buchstaben*. Dann gibt die Indexmenge FPositionen = {1, ..., 5} die Positionen in der Folge an.

Die Funktion

FAuftreten := { (1, w), (2, e), (3, l), (4, l), (5, e) } beschreibt, welcher Buchstabe an jeder Position der Folge auftritt. FAuftreten ist entweder eine partielle Funktion aus $\mathbb{N}_0 \rightarrow$ Buchstaben oder eine totale aus FPositionen $\rightarrow$ Buchstaben.

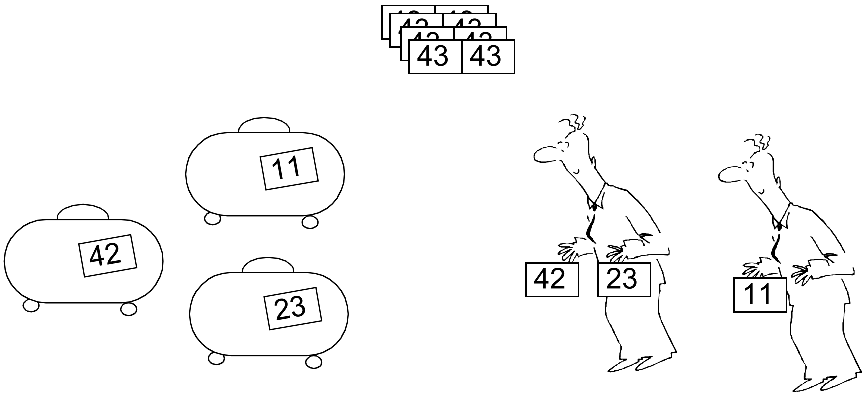

Abbildung 2.1: Indexfunktionen modellieren Gepäckaufbewahrung

Als letztes Beispiel benutzen wir Paare von Indexfunktionen, um Zuordnungen zwischen den Elementen zweier Mengen zu beschreiben. Wir erläutern das Prinzip am Beispiel einer Gepäckaufbewahrung (Abb. 2.1): Personen geben dort jeweils einige Gepäckstücke zur Aufbewahrung ab. Es werden fortlaufend nummerierte Gepäckscheine benutzt. Sie sind 2-teilig; beide Teile tragen die gleiche Nummer. Der eine Abschnitt wird auf das Gepäckstück geklebt, den anderen bekommt der Eigentümer. Damit sind die Gepäckstücke eindeutig ihren Eigentümern zugeordnet. Sei Ind der Wertebereich der Nummern auf den Gepäckscheinen, dann wird das Aufkleben durch eine Funktion Aufkleben $\in$ Ind $\rightarrow$ Gepäckstücke modelliert. Sie ist injektiv, denn auf jedem Gepäckstück klebt genau ein Aufkleber. Die Zuordnungen der ausgegebenen Abholscheine bilden eine zweite Funktion.

Abholscheine $\in$ Ind $\rightarrow$ Eigentümer

Beim Abholen werden beide Funktionen auf einen Index angewandt, um das Gepäckstück seinem Eigentümer zuzuordnen.

2.8 Beispiel im Zusammenhang

In diesem Abschnitt stellen wir die Modellierung unseres Beispiels 2.1, der Bildung von EU-Arbeitskreisen, im Zusammenhang vor. Dabei wenden wir viele Konstrukte und Techniken auf, die wir in diesem Kapitel eingeführt haben. Wir greifen die Beispiele aus den vorangegangenen Abschnitten auf, zeigen Alternativen dazu und kommentieren sie.

Im Zentrum der Aufgabe stehen Arbeitskreise, die mit Delegierten der beteiligten Nationen besetzt werden. Es sollen dann Aussagen darüber gemacht werden, welche Sprachen die Delegierten in den Arbeitskreisen beherrschen.

Die Mengen der beteiligten Nationen und der infrage kommenden Sprachen bilden grundlegende Wertebereiche:

Nationen := { Deutschland, Frankreich, Österreich, Spanien }
Sprachen := { Deutsch, Französisch, Spanisch }

In Abschnitt 2.2 haben wir die Delegierten als Paare aus einer Nation und einem Index modelliert:

Delegierte := Nationen × DelegiertenIndex
DelegiertenIndex := { 1, 2, 3 }

Diese Entscheidung hebt die Zugehörigkeit zu Nationen als strukturelle Eigenschaft hervor. Sie legt auch fest, dass jede Nation die gleiche Anzahl Delegierte (hier 3) hat. Ein Delegierter wird allgemein durch ein Paar, wie (Spanien, 2), identifiziert. Wenn klar ist, welche Nation gemeint ist, kann man auch den Index allein verwenden.

Wir könnten stattdessen auch alle Delegierte gemeinsam durch eine Indexmenge modellieren und ihre Nationalität durch eine Funktion angeben:

Delegierte := { 1, ... , n }, zurzeit ist $n = 12$
Nationalität ∈ Nationalitäten := Delegierte → Nationen

Dieses Modell ist flexibel hinsichtlich der Verteilung der Nationalitäten unter den Delegierten. Sie ist als Funktion frei wählbar. Delegierte können immer durch eine Zahl identifiziert werden, ohne dass man ihre Zugehörigkeit zu einer Nation beachten müsste.

Auch die Arbeitskreise können wir ganz unterschiedlich modellieren. Dabei wird ihre Zusammensetzung durch das Modell unterschiedlich streng eingeschränkt:

Arbeitskreise := { (Deutschland, i) | i ∈ DelegiertenIndex } ×
{(Frankreich, i) | i ∈ DelegiertenIndex } × {(Österreich, i) | i ∈ DelegiertenIndex } ×
{(Spanien,i) | i ∈ DelegiertenIndex }

Hier erzwingt der Wertebereich, dass jedem Arbeitskreis genau ein Delegierter aus jeder Nation angehört. Keinerlei Einschränkungen machen wir, wenn wir als Arbeitskreis jede Teilmenge der Delegierten zulassen:

Arbeitskreise := Pow (Delegierte)

Keine der beiden Alternativen legt eine bestimmte Zahl von Arbeitskreisen fest. Wenn wir die Arbeitskreise durch eine Indexmenge identifizieren, können wir ihre Besetzung auch durch Relationen und Funktionen modellieren:

ArbeitskreisIndex := { 1, 2, 3 }
ArbeitskreisRelationen := Pow(Delegierte × ArbeitskreisIndex)

Eine Relation aus diesem Wertebereich gibt dann die Zuordnung von Delegierten zu Arbeitskreisen an. Den gleichen Informationsgehalt könnten wir durch Funktionen ausdrükken, entweder aus der Sicht der Delegierten oder der Arbeitskreise:

AkBesetzungen := ArbeitskreisIndex → Pow (Delegierte)
AkTeilnahme := Delegierte → Pow (ArbeitskreisIndex)

Wenn wir Delegierte in höchstens einem Arbeitskreis mitarbeiten lassen wollen, wären auch Funktionen aus folgendem Wertebereich möglich:

AkTeilnahme := Delegierte → ArbeitskreisIndex

Die Sprachkenntnisse der Delegierten können wir wie die Teilnahme an Arbeitskreisen durch Funktionen modellieren, wie schon in den Abschnitten 2.6 und 2.7 gezeigt:

SprachMengen := Pow (Sprachen)
DelegiertenSprachFkt := Delegierte → SprachMengen

oder

DelegiertenSprachRel := Pow (Delegierte × Sprachen)

Wenn wir schließlich beschreiben wollen, welche Sprachen in Arbeitskreisen gesprochen werden, benötigen wir dafür Funktionen der Signatur

AkSprachFkt := ArbeitskreisIndex → SprachMengen

Eine Funktion GemeinsameSprachen aus diesem Wertebereich können wir unter Anwendung des übrigen Modells so definieren, dass sie zu einem Arbeitskreis Ak2003 ∈ ArbeitskreisRelationen mit den Sprachkenntnissen SprachenAk2003 ∈ DelegiertenSprachFkt die Menge der Sprachen liefert, die jeder seiner Delegierten spricht:

GemeinsameSprachen :=
{ (a, sm) | $a \in$ ArbeitskreisIndex, $sm \in$ SprachMengen und
$gs \in sm$ gilt genau dann,
wenn für alle $(a, d) \in$ Ak2003 folgt $gs \in$ SprachenAk2003(d)}

Diese Definition beschreibt die Funktion als Menge von Paaren (a, sm). Sie gibt eine Bedingung an, die dann und nur dann gilt, wenn eine Sprache gs in der Ergebnismenge sm liegt. Es ist eine Aussage, die für jeden Delegierten d geprüft werden muss: Falls er Mitglied im Arbeitskreis a ist, muss er die Sprache gs sprechen. (Im Kapitel 4 werden wir uns genauer mit der Formulierung und Bedeutung solcher Bedingungen befassen.)

Dann müssen wir für jeden Arbeitskreis a fordern GemeinsameSprachen (a) ≠ ∅ und können eine Sprache s ∈ GemeinsameSprachen (a) zur Geschäftssprache erklären, wie in der Aufgabe verlangt wurde.

2.9 Fallstudie: Getränkeautomat

In diesem Abschnitt modellieren wir Aspekte des Getränkeautomaten aus der Fallstudie, deren Aufgabenbeschreibung wir in Kapitel 1 dargestellt haben. Wir wollen damit einerseits eine weitere zusammenhängende Modellierung mit Wertebereichen zeigen und andererseits Material bereitstellen zum Vergleich mit Modellierungen in anderen Kalkülen.

Wir gliedern die Modellierung des Getränkeautomaten in die drei Themenbereiche

1. Produkte und Vorrat
2. Kassieren
3. Bedienung und Zustand

2.9.1 Produkte und Vorrat

Als Produkte soll der Automat Kaffee, Tee oder Kakao liefern und auf Wunsch Milch oder Zucker beigeben. Da die Beigaben im Prinzip mit jeder der Getränkearten kombiniert werden können, modellieren wir die Getränke als Paar.

$$\text{Getränke} := \text{GetränkeArten} \times \text{Beigaben}$$
$$\text{GetränkeArten} := \{\text{Kaffee, Tee, Kakao}\}$$

Als Beigaben kommt jede Teilmenge aus Milch und Zucker infrage, deshalb modellieren wir sie mit einer Potenzmenge:

$$\text{Beigaben} := \text{Pow(BeigabenArten)}$$
$$\text{BeigabenArten} := \{\text{Milch, Zucker}\}$$

Wir nehmen an, dass der Automat die Zutaten zur Herstellung der Getränke in vorbereiteten Portionen bereithält. Dann können wir den Vorrat des Automaten als Funktion von den Zutaten auf die Anzahl von Portionen modellieren:

$$\text{Zutaten} := \text{GetränkeArten} \cup \text{BeigabenArten} \cup \{\text{Becher}\}$$
$$\text{VorratsFunktionen} := \text{Zutaten} \to \mathbb{N}_0$$

Der augenblickliche Vorrat wird dann durch ein Element aus dem Wertebereich VorratsFunktionen beschrieben, z.B.

$$\text{Vorratx} := \{(\text{Kaffee}, 20), (\text{Tee}, 10), (\text{Kakao}, 15), (\text{Milch}, 17), (\text{Zucker}, 23), (\text{Becher}, 50)\}$$

Nach Herstellen eines Getränkes beschreibt eine andere Funktion den Vorrat, den man aus Vorratx durch Abzug der verbrauchten Zutaten herleiten kann. Diesen Vorgang können wir wiederum durch eine Funktion beschreiben; sie hat die Signatur

$$\text{VorratsÄnderung} \in (\text{VorratsFunktionen} \times \text{Getränke}) \to \text{VorratsFunktionen}$$

Man kann sie folgendermaßen definieren

$$\text{VorratsÄnderung (vorher, Getränk)} := \text{nachher}$$

mit

$$(z, i) \in \text{vorher, Getränk} = (ga, b) \text{ und}$$
$$(z, i\text{-}1) \in \text{nachher falls } (z = ga \text{ oder } z \in b \text{ oder } z = \text{Becher}) \text{ und}$$
$$(z, i) \in \text{nachher falls } z \neq ga \text{ und } z \notin b \text{ und } z \neq \text{Becher}$$

Ganz ähnlich können wir eine Funktion definieren, die prüft, ob ein Vorrat ausreicht, um ein bestimmtes Getränk herzustellen.

2.9.2 Kassieren

Der Automat nimmt Folgen von Münzen einer Währung an. Der Wert der eingegebenen Folge soll mindestens so hoch sein wie der Preis des gewählten Getränkes. Bei Überzahlung wird die Differenz als Wechselgeld zurückgegeben.

Wir definieren die Währung so, dass die Elemente der Menge die Münzen identifizieren und zugleich ihren Wert angeben.

$$\text{Münzen} := \{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200\}$$

Wollten wir auch Währungen berücksichtigen, die verschiedene Münzen mit gleichem Wert enthalten, müssten wir eine weitere Funktion einführen, die die Münzsymbole auf ihre Werte abbildet.

Den Wert einer Folge von Münzen bestimmen wir durch eine Funktion, die wir rekursiv definieren:

$$\begin{aligned}
&\text{MünzFolge} := \text{Münzen}^* \\
&\text{FolgenWert} \in \text{MünzFolge} \rightarrow \mathbb{N}_0 \\
&\text{FolgenWert} := \{(f, w) \mid w = 0 \text{ falls } f = (); \\
&\qquad\qquad \text{falls } f = (f_1,\ldots,f_n),\ n>0,\ w = (f_1 + \text{FolgenWert}\,(f_{2,\ldots,}f_n))\}
\end{aligned}$$

Der Inhalt des Geldspeichers des Automaten und das zurückgegebene Wechselgeld werden als Multimengen von Münzen modelliert, also durch Funktionen, wie in Abschnitt 2.7 gezeigt:

$$\text{GeldStücke} := \text{Münzen} \rightarrow \mathbb{N}_0$$

Ihren Wert definieren wir wieder durch eine Funktion:

$$\begin{aligned}
&\text{GeldStückeWert} \in \text{GeldStücke} \rightarrow \mathbb{N}_0 \\
&\text{GeldStückeWert} := \{(f, w) \mid f \in \text{GeldStücke},\ w \in \mathbb{N}_0,\ w = \sum_{(x,n) \in f} x * n\}
\end{aligned}$$

Die augenblickliche Preisliste der Getränke wird durch eine Funktion mit folgender Signatur definiert:

$$\text{Preis} \in \text{Getränke} \rightarrow \mathbb{N}_0$$

Schließlich benötigen wir noch zwei Funktionen: eine, die das Wechselgeld im Wertebereich GeldStücke berechnet, und eine, die prüft, ob der benötigte Differenzbetrag als Wechselgeld mit den verfügbaren Münzen ausgezahlt werden kann.

2.9.3 Bedienung und Zustand

Das Bedienfeld unseres Automaten haben wir schematisch in Abb. 2.2 dargestellt. Es enthält Tasten zur Auswahl des Getränks, einen Münzeinwurf, ein Ausgabefach für Wechselgeld und einen Geldrückgabeknopf sowie eine Fertig-Taste, Getränkeausgabe und eine Anzeige für Informationen an den Bediener.

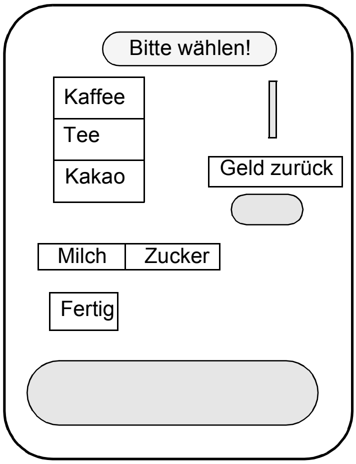

Abbildung 2.2: Bedienfeld eines Getränkeautomaten

Die Wahltasten

$\mathsf{WahlTasten} := \{\mathsf{Kaffee, Tee, Kakao, Milch, Zucker}\}$

sollen beliebig oft in beliebiger Reihenfolge betätigt werden können. Erst das Drücken der Fertig-Taste beendet die Auswahl. Dann liegt eine Folge von Tastendrücken vor:

$\mathsf{GetränkeWahlen} := \mathsf{WahlTasten}^{+}$

deren Bedeutung wir genauer beschreiben müssen:

a) Eine der Tasten für Getränkearten muss mindestens einmal gedrückt worden sein.

b) Die zuletzt gedrückte Taste für Getränkearten bestimmt die Auswahl.

c) Die Tasten für Milch und Zucker schalten beim Betätigen abwechselnd an und aus.

Zu jeder dieser drei Beschreibungen formulieren wir eine Funktion. Ihre Signaturen sind:

$\mathsf{VollständigeWahl} \in \mathsf{GetränkeWahlen} \to \mathsf{Bool}$
$\mathsf{GetränkeArtenWahl} \in \mathsf{GetränkeWahlen} \to \mathsf{GetränkeArten}$
$\mathsf{BeigabenWahl} \in \mathsf{GetränkeWahlen} \to \mathsf{Beigaben}$

Aus den Ergebnissen können wir das gewählte Getränk zusammensetzen. Die Funktionen können als Analyse der WahlTasten-Folgen rekursiv definiert werden. Wir ersparen uns hier die Ausformulierung. Sie ist einerseits recht implementierungsnah, andererseits werden wir Kalküle kennen lernen, mit denen solche Eigenschaften von Folgen besser beschrieben werden können: Algebren, Sprachen kontextfreier Grammatiken, regulärer Ausdrücke und endlicher Automaten.

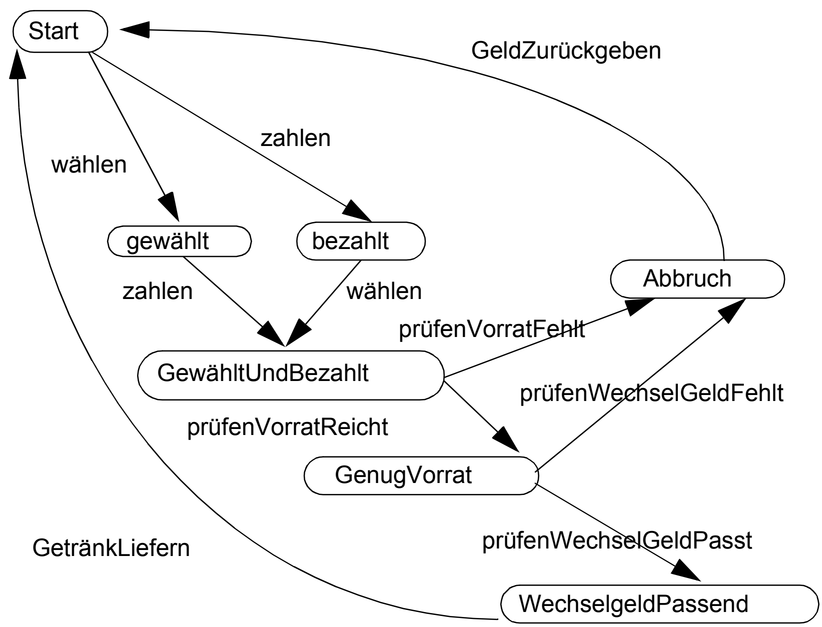

Abbildung 2.3: Zustände und Aktionen eines Getränkeautomaten

Die Zustände des Automaten beschreiben, ob die Auswahl, das Bezahlen und die notwendigen Prüfungen erfolgreich erledigt wurden:

Zustände := { Start, gewählt, bezahlt, GewähltUndBezahlt, GenugVorrat, WechselgeldGeldPassend, Abbruch}

Das Durchführen folgender Aktionen bewirkt jeweils einen Übergang in einen anderen Zustand, wie in Abb. 2.3 dargestellt:

Aktionen := { wählen, zahlen, prüfenVorratReicht, prüfenVorratFehlt, prüfenWechselGeldPasst, prüfenWechselGeldFehlt, GetränkLiefern, GeldZurückgeben}

Mit dieser Beschreibung von Zustandsübergängen haben wir jedoch die Grenzen des Modellierens mit Wertebereichen überschritten und informell einen endlichen Automaten angegeben. Diesen Kalkül zur Spezifikation sequentieller Abläufe werden wir in Kapitel 7 kennen lernen.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sind wir von der informellen und unvollständigen Beschreibung des Getränkeautomaten ausgegangen und haben einige Aspekte mit Wertebereichen modelliert. Folgende Beobachtungen halten wir für wichtig und allgemeingültig:

a) Das Modellieren hat uns gezwungen, Anforderungen und Entwurfsentscheidungen präzise und vollständig zu machen.

b) Wir konnten den Kalkül der Wertebereiche für alle Aspekte anwenden.

c) Beschreibungen von Strukturen, Eigenschaften und Zusammenhängen waren einfach und direkt im Kalkül formulierbar.

d) Dynamische Abläufe und Reaktionen konnten zwar durch Funktionen beschrieben werden. Diese sind dann aber recht implementierungsnah und wenig anschaulich. Für solche Aspekte gibt es besser geeignete Kalküle.

Übungen

2.1 Definition von Wertebereichen

Es sei $M := \{3,4,5\}$ und $N := \{a,b\}$. Schreiben Sie die folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an.

a) $A = \{ x \mid x \in M \text{ und } x > 3 \}$

b) $B = M \times N$

c) $C = M \times \{1\}$

d) $D = \{M\} \times \{1\}$

e) $E = \mathrm{Pow}(M)$

f) $F = \mathrm{Pow}(\emptyset)$

g) $G = \mathrm{Pow}(\mathrm{Pow}(\emptyset))$

2.2 Definition von Wertebereichen

Geben Sie die Kardinalität und ein Element der folgenden Wertebereiche an, wobei M und N endliche nicht leere Mengen sind.

a) $H = \mathrm{Pow}(M \times N)$

b) $I = M \to N$

c) $J = M \times (N \times N)$

2.3 Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sei der Graph $\{(1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16), (5, 32), (6, 64)\}$ einer Funktion mit der Signatur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 64\}$.

a) Geben Sie die Funktion in intensionaler Schreibweise an.

b) Welche Eigenschaften erfüllt die Funktion?

2.4 Wertemengen verstehen

a) Beschreiben Sie präzise in Worten den folgenden formalen Ausdruck:
$M := \{ (i, j) \mid i \in Z \text{ und } j \in Z \text{ und } j = i^2 \text{ und } j < 10 \}$
Wie lautet die extensionale Definition von M?

b) Geben Sie die intensionale Definition der folgenden Menge an: Die Menge G geordneter Paare natürlicher Zahlen, deren Produkt kleiner als 7 ist.

c) Seien $Holzart := \{ Eiche, Kiefer \}$ und $Möbelobjekt := \{ Tisch, Schrank, Stuhl, Bett \}$ gegeben. Geben Sie alle Elemente des kartesischen Produkts $Möbelstücke := Holzart \times Möbelobjekt$ an. Bestimmen Sie auch die Kardinalität von Möbelstücke.

d) Seien $X := \{ Hund, Pferd \}$, $Y := \{ Katze \}$, $Z := \{ Maus \}$. Geben Sie alle Elemente sowie die Kardinalitäten der Mengen $M_1 := Pow(X \cup Y)$ und $M_2 := Pow(X \times Y) \times Z$ an.

2.5 Wertemengen und deren Elemente

Füllen Sie die gepunkteten Stellen der folgenden Tabelle aus, so dass das Element zu dem entsprechenden Wertebereich passt.

Es sei: $M := \{ 0, 1, 2, ..., 9 \}$, $N := \{ a, b \}$ und $A := \{ Krause, Mueller \}$.

Element	**Wertebereich**
....	$M \times N \times A$
....	$(M \times N) \times A$
$(Mueller, (6, 0, 1, 6, 7, 9, 1))$	....
$\{ (Mueller, \{ 2, 4 \}), (Krause, \{ 2, 6 \}) \}$	A → ....
....	$Pow(M \times N)$
....	$(A \cup \emptyset)^*$

2.6 Mit Wertebereichen modellieren

Modellieren Sie die nachfolgend beschriebenen Objektarten durch Wertemengen und geben Sie je ein Element dieser Wertemenge an.

a) Eine **Telefonnummer** ist eine beliebig lange Sequenz von Ziffern.
Telefonnummer = Ziffer^+ Ziffer = $\{ 0, 1, 2, ..., 9 \}$

b) Eine **Postleitzahl** ist eine 5-stellige Ziffernfolge.
Postleitzahl = Ziffer^5

c) Ein **Lottoergebnis** besteht aus sechs verschiedenen Zahlen im Bereich zwischen 1 und 49, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt.
Lottoergebnis = $\{ x \mid x \in Pow(\{1, 2, ..49\}), |x| = 6 \}$

d) Ein **Auto** hat eine Marke, eine Farbe und einen Kilometerstand.
Auto = Marke × Farbe × Kilometerstand
Marke = { Opel, VW, ...} Farbe = { rot, grün, ... Kilometerstand = $\mathbb{N}$}

e) Eine **Zeitungsanzeige** bietet verschiedene gebrauchte Autos an. Die Reihenfolge spielt keine Rolle.
Zeitungsanzeige = Pow(Auto)

2.7 Mit Funktionen und Relationen modellieren

Anja, Horst und Dieter wollen sich Pizza bestellen. Der Pizzadienst bietet vier Pizzen an: Napoli, Thunfisch, Schinken und Salami.

a) Geben Sie den Wertebereich von Funktionen an, die jeder Person genau eine Pizza zuordnen.

b) Welche Funktion beschreibt, dass Anja und Dieter eine Thunfischpizza und Horst eine Pizza Salami bestellt?

c) Wie müsste man das Modell anpassen, wenn nicht alle Personen etwas essen wollen?

d) Ändern Sie das Modell so, dass Personen auch mehrere Pizzen bestellen können.

2.8 Mit Funktionen und Relationen modellieren

Eine Pizzeria hat als Angebote vier Pizzen: Napoli, Thunfisch Schinken und Salami.

a) Geben Sie den Wertebereich für die Angebote an.

b) Der Besitzer der Pizzeria möchte gerne wissen, wie viele von jeder Sorte an einem Tag verkauft werden. Geben Sie den Wertebeeich von Funktionen an, die die Verkaufsbilanz beschreiben.

c) Thomas, Carsten und Jochen wollen Pizzen dieses Ladens bestellen. Geben Sie Wertebereich von Funktionen an, die jeder Person genau eine Pizza zuordnen.

d) Ändern Sie das Modell so, dass Personen auch mehrere Pizzen bestellen können.

2.9 Disjunkte Vereinigung

Im Südring-Zentrum haben unter anderem drei Lebensmittelgeschäfte Minipreis, Aldi und Real folgende Gemüseprodukte im Sortiment:

Minipreis: Gurke, Kopfsalat, Tomaten.
Aldi: Gurke, Möhren, Kohlrabi.
Real: Kohlrabi, Tomaten, Möhren.

a) Geben Sie die Menge der angebotenen Gemüseprodukte an.

b) Am Ende jeden Monats möchten die drei Läden bestimmen, wie viele von ihren Gemüse-Produkten bei ihnen gekauft wurden. Geben Sie eine gute Modellierung an.

2.10 Disjunkte Vereinigung

Unser Getränkeautomat besitzt einen digitalen Anzeiger. Alle benötigten Anzeigetexte sind darin gespeichert. Dabei werden Texte für Fehler- und Normalsituationen unterschieden. Geben Sie den Wertebereich für die während des Betriebs benutzten Anzeigetexte an.

2.11 Disjunkte Vereinigung

Ernie und Bert geben eine Party. Dafür bringt jeder der beiden alle seine CDs mit, die er natürlich nach der Feier wieder mit nach Hause nehmen will. Geben Sie den Wertebereich für die auf dem Fest benutzten CDs an.

2.12 Relationen und Funktionen

a) $R := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ und } y = x^2 \text{ und } x <= 6\} \in \text{Pow}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$
Geben Sie die Relation R in extensionaler Schreibweise an. Geben Sie an, ob die Relation reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv oder total ist.

b) Anja, Horst und Dieter müssen an einigen Wochentagen zur Uni, an anderen haben sie frei. Geben Sie den Wertebereich von Relationen an, die so eine Zuordnung modellieren. Geben Sie ein Element des Wertebereichs an.

c) $f: \mathbb{N} \to Z; f(x) = x - 5$ für alle $x \in \mathbb{N}$
Geben Sie an, ob diese Funktion total, surjektiv, injektiv oder bijektiv ist.

d) Anja und Claudia haben dieses Jahr an einem Dienstag Geburtstag, Horst an einem Mittwoch, Dieter an einem Montag und Meike an einem Samstag. Geben Sie den Graphen der Funktion GEBURTSTAG an, die jeder Person einen Wochentag zuordnet. Aus welchem Wertebereich stammt diese Funktion? Wie lautet der Definitions- und Bildbereich?

2.13 Spezielle Funktionen

a) Beim Verkehrsamt wird jeder Kunde von einem Mitarbeiter an einem Schalter bedient. Jeder Kunde muss zuerst eine Nummer ziehen und dann warten, bis er bedient werden kann. Wenn seine Nummer auf der Anzeige erscheint, d.h. ein Schalter frei ist, kann er zu einem freien Schalter gehen und dort bedient werden. Geben Sie Wertebereiche für die Zuordnung zwischen den Nummern und den Kunden und für die Zuordnung zwischen den Nummern und den Schaltern an. Benutzen Sie dazu die vorgegebenen Wertebereiche *Personen* für Kunden und *Schalter* für die Schalter.

b) Bei unserem Getränkeautomaten kann durch eine Funktion beschrieben werden, wie das Rückzahlen geschehen soll. Geben Sie den Wertebereich an, aus dem die Funktion *rückzahlen* stammt. Diese Funktion beschreibt, welche Stückelung zurückgezahlt wird. Benutzen Sie dafür die Menge
Münzart := { 10_Ct, 50_Ct, 1_EUR, 2_EUR, 5_EUR}
und geben Sie eine Beispielfunktion an.

2.14 Getränkeautomat

Es sollen Wertebereiche für Produke, Preise und Geldspeicher von Kaffeeautomaten modelliert werden.

a) Geben Sie den Wertebereich der wählbaren PRODUKTE an. Die Stärke des Kaffees kann man in zwei verschiedene Stufen wählen: stark und mild. Der Kaffee kann auf Wunsch Milch und/oder Zucker enthalten.
Geben Sie das Element aus PRODUKTE an, das einen starken Kaffee mit Milch und Zucker beschreibt.

b) Geben Sie den Wertebereich (Menge von Funktionen) für PREISLISTEN an. Jedem Produkt des Automaten soll ein individueller Preis zugeordnet werden können. Welche Eigenschaften sollten die Funktionen besitzen: Total? Injektiv? Surjektiv?
Geben Sie den Graphen einer Funktion aus PREISLISTEN an, sodass milder Kaffee 1 Euro kostet und starker Kaffee 1,20 Euro. Wenn man zusätzlich Milch oder Zucker oder beides zusätzlich wählt, kostet das 10 Cent extra.

c) Der Automat enthält Münzen, für die Wechselgeldrückgabe im Wert von 5 Cent, 10 Cent und 50 Cent. In den Münzspeicher passen maximal 100 Stück von jeder Münzsorte. Geben Sie den Wertebereich des FÜLLSTANDES der Wechselgeldmünzen an.
Geben Sie das Element aus FÜLLSTAND an, das beschreibt, dass der Automat noch zehn 5 Cent-Stücke, zwanzig 10 Cent-Stücke und ein 50 Cent-Stück zum Wechseln enthält.

2.15 Wertebereiche

In dieser Aufgabe sollen Sie ein Brettspiel mit Wertebereichen modellieren. Verwenden Sie ausschließlich die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ als vordefinierten Wertebereich.

a) Auf dem Spielbrett gibt es insgesamt 40 *Felder*, davon sind 22 *Straßen* und 18 *Plätze*. Modellieren Sie Wertebereiche für *Straßen, Plätze* und *Felder*.
Straßen =
Plätze =
Felder =

b) Auf Straßen dürfen beliebig viele Häuser und Hotels gebaut werden, wobei die Anordnung ohne Bedeutung ist. Geben Sie einen Wertebereich für den Bebauungszustand einer einzelnen Straße an.
Bebauungszustände =

Welches Element dieses Wertebereichs beschreibt, dass 3 Häuser und 4 Hotels gebaut wurden?
.... $\in$ Bebauungszustände

c) Ein Spieler besitzt zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Geldbetrag und eine Menge von Straßen. Außerdem steht er immer auf genau einem der Felder. Modellieren Sie den Zustand eines Spielers, indem Sie einen entsprechenden Wertebereich angeben.
Spielerzustände =

Welches Element dieses Wertebereichs beschreibt, dass ein Spieler 1000 Euro sowie die Straßen 4, 6 und 7 besitzt und auf Platz 17 steht?
.... $\in$ Spielerzustände

d) Wenn ein Spieler eine Straße betritt, die ihm nicht gehört, muss er Miete dafür bezahlen. Wie hoch diese Miete ist, hängt von der jeweiligen Straße und deren Bebauungszustand ab. Geben Sie den Wertebereich von Funktionen an, die diesen Zusammenhang beschreiben.

2.16 Wertebereiche

Nachfolgend sollen Wertebereiche von Dingen einer Imbissbude modelliert werden. Geben Sie eine Definition für alle benutzten Wertebereiche (außer $\mathbb{N}_0$, Z, usw.) an.

a) Als Getränk werden *Cola, Fanta* und *Wasser* angeboten. Alle Getränke gibt es in drei verschiedenen Bechergrößen, nämlich *klein, mittel* und *groß*. Man kann wählen, ob man sein Getränk mit oder ohne Eis möchte. Geben Sie den Wertebereich der erhältlichen Getränke an.
Getränke =

Welches Element repräsentiert eine kleine Cola ohne Eis?
.... $\in$ Getränke

b) In einem *Burger* befinden sich übereinandergestapelte Lagen aus *Fleisch, Gurke* und *Käse*. Die Reihenfolge ist wichtig, und es dürfen Zutaten mehrfach vorkommen. Geben Sie den Wertebereich des Inhalts von Burgern an.
Burger =

Welches Element repräsentiert ein Burger, bestehend aus Fleisch, zwei Lagen Käse und einer Lage Gurke?
.... $\in$ Burger

c) Neben den in a) und b) beschriebenen Lebensmitteln werden *Pommes* angeboten. Geben Sie einen Wertebereich an, der alle erhältlichen Lebensmittelvarianten enthält.
Lebensmittel =

d) Der Laden führt eine Strichliste, welche Lebensmittel wie oft verkauft wurden. Geben Sie den Wertebereich von Funktionen an, die solche Verkaufsergebnisse modellieren.
Verkaufsergebnisse =

Welche partielle Funktion repräsentiert das Ergebnis, dass genau eine kleine Cola ohne Eis und zwei Portionen Pommes verkauft wurden?
.... $\in$ Verkaufsergebnisse

2.17 Wertebereich

a) Es sei $M := \{x, y\}$. Schreiben Sie die folgenden Mengen in extensionaler Form durch Angabe aller Elemente. (Hinweis: Pow bezeichnet die Potenzmenge.)

$M \times \text{Pow}(\{a\}) = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$\{M\} \times \text{Pow}(\{a\}) = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

b) Wir benutzen folgende grundlegende Wertemengen zur Modellierung:

Personen = { Anton, Berta, Charlie}
Telefonnummern = $\{0, 1, 2, ..., 9\}^4$

Das folgende Beispiel stellt ein kleines Telefonbuch dar:

Anton 5213
Berta .... 8472 oder 2771
Charlie 1101

Den Wertebereich solcher Telefonbücher kann man auf verschiedene Arten modellieren:

Telefonbücher1 = Personen $\rightarrow$ Pow(Telefonnummern)
Telefonbücher2 = Telefonnummern $\rightarrow$ Personen

c) Geben Sie die zum oben abgebildeten Beispiel passenden Elemente beider Wertebereiche an:
.... $\in$ Telefonbücher1
.... $\in$ Telefonbücher2