Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

4 Multivariate Differentiation

4.2 zweiter Ordnung
4.3 diskrete Ableitungen

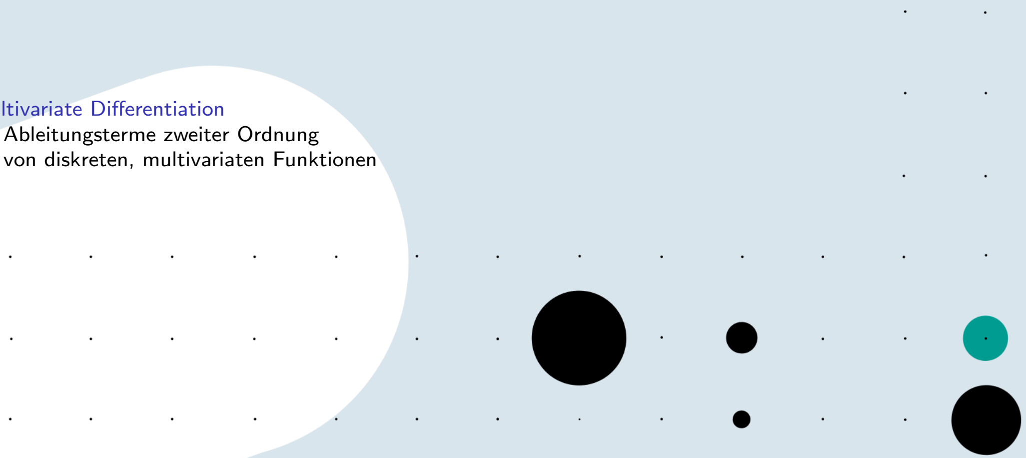
Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Multivariate Differentiation

Ableitungsterme zweiter Ordnung
von diskreten, multivariaten Funktionen



Ludwig-Otto Hesse
1811-1874

$$J\nabla f = \operatorname{grad} \nabla f$$

$$J\nabla f = \mathrm{grad}\,\nabla f = \mathrm{grad}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Ludwig-Otto Hesse
1811-1874

Ludwig-Otto Hesse
1811-1874

$$J\nabla f = \operatorname{grad} \nabla f = \operatorname{grad} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_x \\ \operatorname{grad} f_y \end{pmatrix}$$

$$J\nabla f = \operatorname{grad} \nabla f = \operatorname{grad}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_x \\ \operatorname{grad} f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Ludwig-Otto Hesse
1811-1874

Ludwig-Otto Hesse
1811-1874

$$J\nabla f = \mathrm{grad}\,\nabla f = \mathrm{grad}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_x \\ \mathrm{grad}\, f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Definition: Hesse-Matrix

Sei $f \in C^2(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, also auf D zwei mal partiell differenzierbar. Dann heißt die Matrix

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix der Funktion f.
Dabei meint

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

erste partielle Ableitung in Richtung x_i und zweite partielle Ableitung in Richtung x_j.

Beispiel:
Für $f(x) = 2\,x_1^2\,x_2 + x_2^3$

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 4\,x_1\,x_2\,, & f_{x_2} &= 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2\,, \\ f_{x_1 x_1} &= 4\,x_2\,, & f_{x_1 x_2} &= 4\,x_1\,, \\ f_{x_2 x_1} &= 4\,x_1\,, & f_{x_2 x_2} &= 6\,x_2\,. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix lautet dann

$$Hf = \begin{pmatrix} 4\,x_2 & 4\,x_1 \\ 4\,x_1 & 6\,x_2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel:
Für $f(x) = 2\,x_1^2\,x_2 + x_2^3$

$$
\begin{aligned}
f_{x_1} &= 4\,x_1\,x_2\,, & f_{x_2} &= 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2\,,\\
f_{x_1 x_1} &= 4\,x_2\,, & f_{x_1 x_2} &= 4\,x_1\,,\\
f_{x_2 x_1} &= 4\,x_1\,, & f_{x_2 x_2} &= 6\,x_2\,.
\end{aligned}
$$

Die Hesse-Matrix lautet dann

$$
Hf = \begin{pmatrix} 4\,x_2 & 4\,x_1 \\ 4\,x_1 & 6\,x_2 \end{pmatrix}.
$$

Definition & Satz: Extrema

Stellen $x \in \mathbb{D}_u$ heißen kritische Punkte von u, wenn

$$\|\nabla u(x)\| = 0$$

gilt.

u hat bei x ein lokales Minimum, wenn $Hu(x)$ positiv definit ist, d.h., dass die Matrix nur positive Eigenwerte besitzt.

u hat bei x ein lokales Maximum, wenn $Hu(x)$ negativ definit ist, d.h., dass die Matrix nur negative Eigenwerte besitzt.

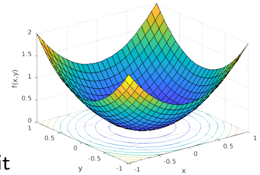
Maximum oder Minimum

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$P_K = (0,0)$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad$ positiv definit



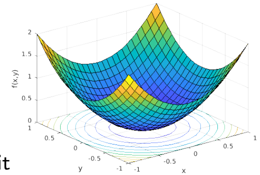
Maximum oder Minimum

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$P_K = (0,0)$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

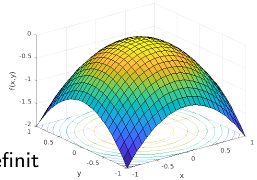
$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad$ positiv definit



$$u(x) = -x_1^2 - x_2^2$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad$ negativ definit



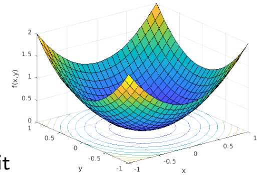
Maximum oder Minimum

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$P_K = (0,0)$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

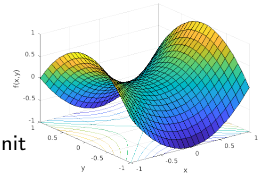
$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad$ positiv definit



$$u(x) = x_1^2 - x_2^2$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

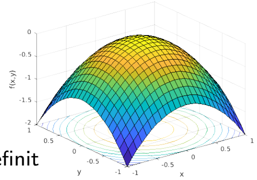
$\lambda \in \{-2, 2\} \quad \Rightarrow \quad$ indefinit



$$u(x) = -x_1^2 - x_2^2$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad$ negativ definit



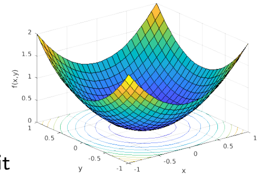
Maximum oder Minimum

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$P_K = (0,0)$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

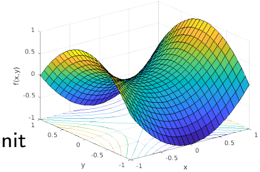
$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad$ positiv definit



$$u(x) = x_1^2 - x_2^2$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

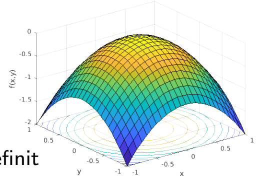
$\lambda \in \{-2, 2\} \quad \Rightarrow \quad$ indefinit



$$u(x) = -x_1^2 - x_2^2$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad$ negativ definit

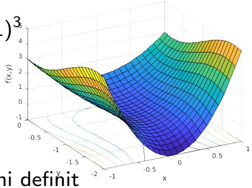


$$u(x) = 2\,x_1^2\,(1 - x_2) + (x_2 + 1)^3$$

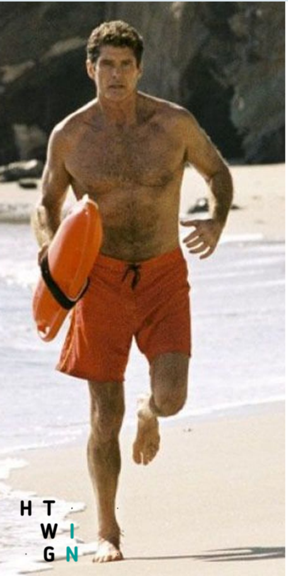
$$P_k = (-1, 0)$$

$$Hu(P_k) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

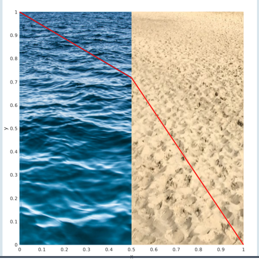
$\lambda \in \{8, 0\} \quad \Rightarrow \quad$ pos. semi definit

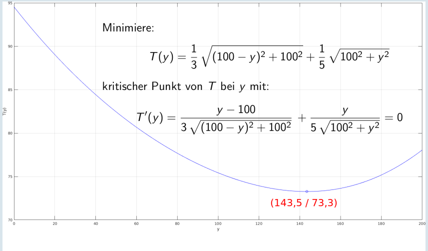


Baywatch: Optimierungsproblem

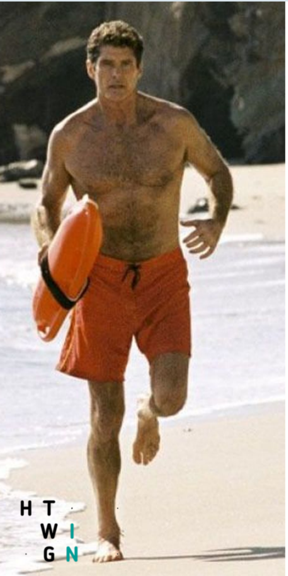


Memo: Schnellster Weg zur Ertrinkenden:

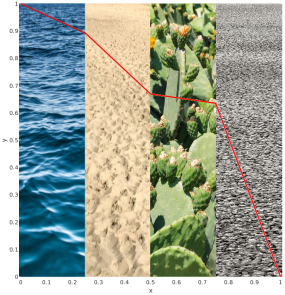




Baywatch: Optimierungsproblem



allgemein:

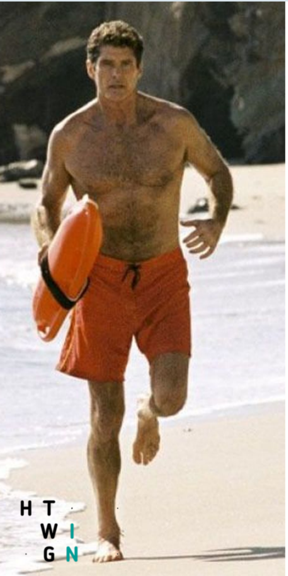


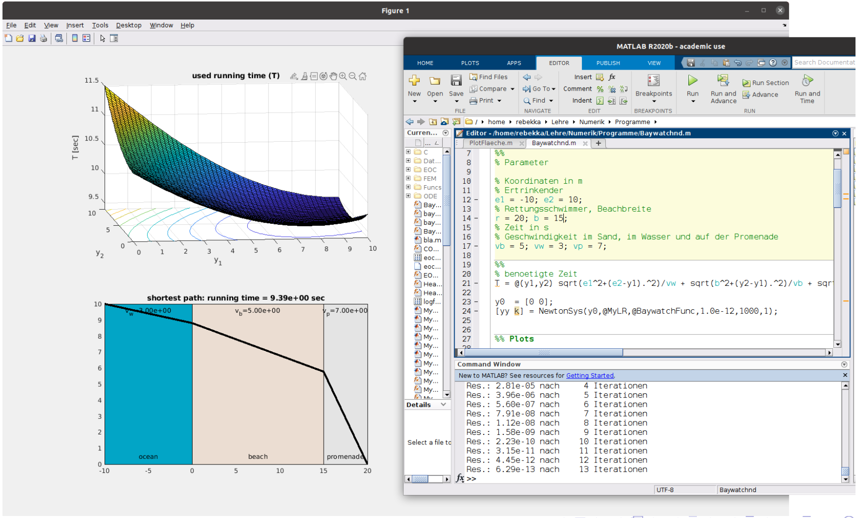
benötigte Zeit $T(y)$ und partielle Ableitungen $T_{,y_j}$

$$T(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{v_i} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$\left(T_{,y_j}\right)_j (y) = \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{v_{j-1} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{v_j \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right)_j$$

Baywatch: Optimierungsproblem





Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(D)$, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n\,.$$

(ohne Beweis)

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(D)$, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n\,.$$

(ohne Beweis)

Definition: Laplace-Operator

Zu einer skalaren Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt die Abbildung

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_1 x_1}$$

Laplace von u. Der Operator Δ heißt *Laplace Operator*.

Memo:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_1 x_1}$$

Memo:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_1 x_1}$$

Beispiel:

$$\Delta x_1^2 + \cos x_2 = (x_1^2 + \cos x_2)_{x_1 x_1} + (x_1^2 + \cos x_2)_{x_2 x_2} = (2\,x_1)_{x_1} - (\sin x_2)_{x_x} = 2 - \cos x_2$$

Memo:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_1 x_1}$$

Beispiel:

$$\Delta x_1^2 + \cos x_2 = (x_1^2 + \cos x_2)_{x_1 x_1} + (x_1^2 + \cos x_2)_{x_2 x_2} = (2\,x_1)_{x_1} - (\sin x_2)_{x_x} = 2 - \cos x_2$$

Der Laplace von u ist gleich der Spur der Hesse-Matrix.

Memo:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_1 x_1}$$

Beispiel:

$$\Delta x_1^2 + \cos x_2 = (x_1^2 + \cos x_2)_{x_1 x_1} + (x_1^2 + \cos x_2)_{x_2 x_2} = (2\, x_1)_{x_1} - (\sin x_2)_{x_x} = 2 - \cos x_2$$

Der Laplace von u ist gleich der Spur der Hesse-Matrix.

Beispiel:

$$\Delta u = \mathrm{Spur} Hu = \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix} = 2 - \cos x_2$$

Die Hesse-Matrix von u ist auch die Jacobi-Matrix von ∇u. Daher ist der Laplace-Operator von u auch die Divergenz des Gradienten von u:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$$

Die Hesse-Matrix von u ist auch die Jacobi-Matrix von ∇u. Daher ist der Laplace-Operator von u auch die Divergenz des Gradienten von u:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$$

konkret:

$$\nabla \cdot \nabla u$$

Die Hesse-Matrix von u ist auch die Jacobi-Matrix von ∇u. Daher ist der Laplace-Operator von u auch die Divergenz des Gradienten von u:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$$

konkret:

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix von u ist auch die Jacobi-Matrix von ∇u. Daher ist der Laplace-Operator von u auch die Divergenz des Gradienten von u:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$$

konkret:

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} u_{x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{x_n}$$

Die Hesse-Matrix von u ist auch die Jacobi-Matrix von ∇u. Daher ist der Laplace-Operator von u auch die Divergenz des Gradienten von u:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$$

konkret:

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} u_{x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{x_n} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$$

Die Hesse-Matrix von u ist auch die Jacobi-Matrix von ∇u. Daher ist der Laplace-Operator von u auch die Divergenz des Gradienten von u:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$$

konkret:

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} u_{x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{x_n} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \Delta u$$

Übersicht

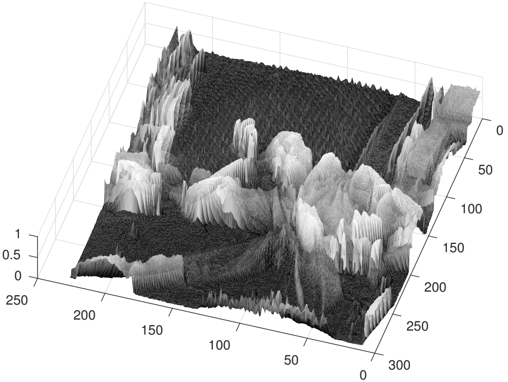
Abbildung	1. Ableitung	2. Ableitung
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$	Gradient $\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$	Hessematrix $Hf = \operatorname{grad} \nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$
		Laplace $\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}$
Bemerkung: Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs Der Laplace ist die Divergenz des Gradienten: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ und die Spur der Hessematrix: $\Delta f = \operatorname{Spur} Hf$		
	Richtungsableitungen	
$v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = \|v\| = 1$	$f_v = \nabla f \cdot v$	$f_{vw} = v^T \, Hf \, w$
$u, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\|u(x)\| = \|g(x)\| = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$	$f_{u(x)}(x) = \nabla f(x) \cdot u(x)$	$f_{u(x)g(x)} =$ $u(x)^T \, Hf(x) \, g(x)$ $+\nabla f(x)^T Du \, g(x)$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $t \mapsto \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{pmatrix}$	$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_m'(t) \end{pmatrix}$	$g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ \vdots \\ g_m''(t) \end{pmatrix}$
Bemerkung: Alle Ableitungen werden kptw durchgeführt		
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$	Jacobi-Matrix $Df =$ $\begin{pmatrix} f_{1,x_1} & \cdots f_{1,x_n} \\ \vdots & \cdots \vdots \\ f_{m,x_1} & \cdots f_{m,x_n} \end{pmatrix}$	
Bemerkung: Die Jacobi-Matrix des Gradienten ist die Hessematrix: $D\nabla f = Hf$		
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	Divergenz $\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^n f_{i, x_i}$	
Bemerkung: Die Divergenz ist die Spur der Jacobi-Matrix		
Kettenregel:	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \sum_{i=1}^n f_{g_i}(g) \, g_i'(t) = \nabla f(g) \cdot g'(t)$	

Lernziele

- Sie können zweite partielle Ableitungen einer multivariaten Funktion berechnen.
- Sie können die Hesse-Matrix und den Lapalce einer multivariaten Funktion berechnen.
- Sie können kritische Punkte von multivariaten Funktionen berechnen und Sie wissen wie Sie auch Maxima und Minima prüfen.
- Sie können Querverbindungen zwischen Hesse-Matrix, Divergenz, Gradient, etc. aufzeigen und erklären.

digitale bilder als diskrete Funktionen

Pixelmatrix eines Bildes ...



... als Graph einer diskreten Funktion

Definition: digitale Bilder als diskrete Funktionen

Auf den Indexmengen $I_N = [1, N] \cap \mathbb{N}$ und $I_M = [1, M] \cap \mathbb{N}$ werden folgende Abbildungen definiert:
8-bit, RGB:

$$\begin{aligned} P \ : \ I_M \times I_N \subset \mathbb{N}^2 &\to [0, 255]^3 \\ (i, j) &\mapsto (P_{ij}^R, P_{ij}^G, P_{ij}^B) \end{aligned}$$

skaliert, grauwertig:

$$\begin{aligned} P \ : \ I_M \times I_N \subset \mathbb{N}^2 &\to [0, 1] \\ (i, j) &\mapsto P_{ij} \end{aligned}$$

Definition: Differenzenquotient für partielle Ableitungen

in x- und y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
u_x^+ &\approx \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}\\
u_x^- &\approx \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} && \text{Rückwärtsdifferenzenquotient}\\
u_x^\pm &\approx \frac{1}{2}\left(u_x^+ + u_x^-\right) && \text{gemittelter Differenzenquotient}\\
u_y^+ &\approx \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}\\
u_y^- &\approx \frac{u(x,y)-u(x,y-h)}{h} && \text{Rückwwärtsdifferenzenquotient}\\
u_y^\pm &\approx \frac{1}{2}\left(u_y^+ + u_y^-\right) && \text{gemittelter Differenzenquotient}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i-1,j+1} \\ \hline P_{i,j-1} & P_{i,j} & P_{i,j+1} \\ \hline P_{i+1,j-1} & P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} \end{array}\right)$$

P_{11} $\mathcal{P}_{11}$

$$A = \begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 128 & 100 & 20 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 128 & 100 & 20 & 20 \\
0 & 0 & 128 & 254 & 200 & 100 & 100 \\
128 & 128 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \\
0 & 0 & 10 & 254 & 200 & 100 & 100 \\
10 & 10 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \\
10 & 10 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \\
10 & 10 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200
\end{array}$$

$\mathcal{P}_{33}$

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i-1,j+1} \\ \hline P_{i,j-1} & P_{i,j} & P_{i,j+1} \\ \hline P_{i+1,j-1} & P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} u(x-1,y-1) & u(x,y-1) & u(x+1,y-1) \\ \hline u(x-1,y) & u(x,y) & u(x+1,y) \\ \hline u(x-1,y+1) & u(x,y+1) & u(x+1,y+1) \end{array}\right)$$

$$h = 1$$

P_{11}

$\mathcal{P}_{11}$

$$A = \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 128 & 100 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 128 & 100 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 128 & 254 & 200 & 100 & 100 \\ 128 & 128 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \\ 0 & 0 & 10 & 254 & 200 & 100 & 100 \\ 10 & 10 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \\ 10 & 10 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \\ 10 & 10 & 254 & 254 & 254 & 200 & 200 \end{array}$$

$\mathcal{P}_{33}$

Definition: partielle Ableitungen eines digitalen Bildes

$$P^{+}_{ij,x} \approx P_{i,j+1} - P_{i,j} \qquad \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}$$

$$P^{-}_{ij,x} \approx P_{i,j} - P_{i,j-1} \qquad \text{Rückwärtsdifferenzenquotient}$$

$$P^{\pm}_{x} \approx \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) \qquad \text{gemittelter Differenzenquotient}$$

$$P^{+}_{ij,y} \approx P_{i+1,j} - P_{i,j} \qquad \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}$$

$$P^{-}_{ij,y} \approx P_{i,j} - P_{i-1,j} \qquad \text{Rückwärtsdifferenzenquotient}$$

$$P^{\pm}_{y} \approx \frac{1}{2}\left(P_{i+1,j} - P_{i-1,j}\right) \qquad \text{gemittelter Differenzenquotient}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_h P_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{i,j+1} - P_{i,j-1} \\ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} \end{pmatrix} \qquad \text{Gradient über gemittelte Diff.-quot.}$$

Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

Für das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

Für das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

erhalten wir den diskreten Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla_h P_{ij} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{i,j+1} - P_{i,j-1} \\ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

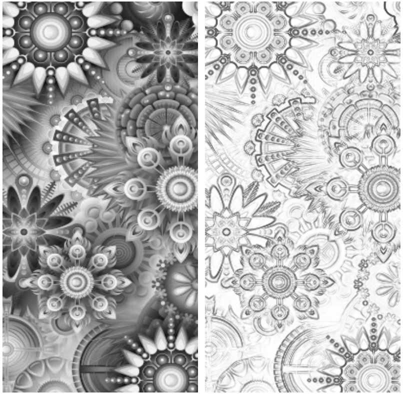
Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

Für das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

erhalten wir den diskreten Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla_h P_{ij} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{i,j+1} - P_{i,j-1} \\ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

Für das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

erhalten wir den diskreten Gradienten

$$\nabla_h P_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_{i,j+1} - P_{i,j-1} \\ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Kennlinie

$$C(\|\nabla P\|) = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \|\nabla P\|^2}}$$

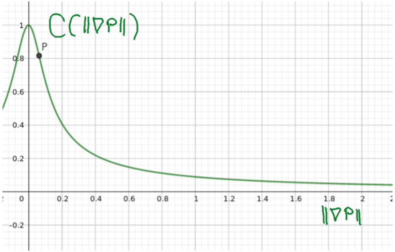
https://www.geogebra.org/m/dsvjj4b4

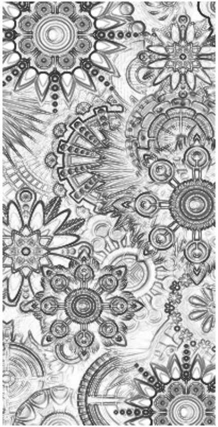
Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

$$\square \overset{\beta\,=\,0.1}{\longleftrightarrow} \square$$

$$\square \overset{\beta\,=\,0.3}{\longleftrightarrow} \square$$

$$C(\|\nabla P\|) = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \|\nabla P\|^2}}$$



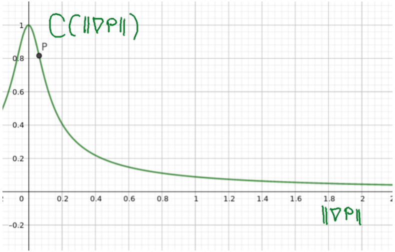


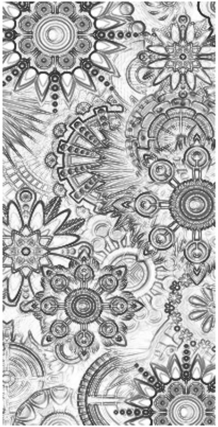
Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

$$\square \overset{\beta\,=\,0.1}{\longleftrightarrow} \boxtimes$$

$$\boxtimes \overset{\beta\,=\,0.3}{\longleftrightarrow} \square$$

$$C(\|\nabla P\|) = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \|\nabla P\|^2}}$$





Beispiel: Gradient und Richtungsableitung

Patch:

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Gradient:

$$\nabla_h P_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \|\nabla_h P_{ij}\| \approx 2.55$$

Richtungsableitung:

$P_{ij,v}$ in Richtung $v = \binom{1}{1}$

$$\begin{aligned} P_{ij,v} &= \nabla_h P_{ij} \cdot v \frac{1}{\|v\|} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\sqrt{2} \approx -1.41 \end{aligned}$$

Definition: Laplace-Operator für diskrete Funktionen

$$\begin{aligned} u_{h,xx} &= \frac{u(x+h,y) - 2\,u(x,y) - u(x-h,y)}{h^2} \\ u_{h,yy} &= \frac{u(x,y+h) - 2\,u(x,y) - u(x,y-h)}{h^2} \\ \Rightarrow \quad \Delta_h u &= \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y) + u(x,y+h) - u(x,y-h) - 4\,u(x,y)}{h^2} \end{aligned}$$

Definition: Laplace-Operator für diskrete Funktionen

$$
\begin{aligned}
u_{h,xx} &= \frac{u(x+h,y) - 2\,u(x,y) - u(x-h,y)}{h^2} \\
u_{h,yy} &= \frac{u(x,y+h) - 2\,u(x,y) - u(x,y-h)}{h^2} \\
\Rightarrow \qquad \Delta_h u &= \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y) + u(x,y+h) - u(x,y-h) - 4\,u(x,y)}{h^2}
\end{aligned}
$$

Definition: Laplace-Operator für digitale Bilder

$$
\begin{aligned}
P_{ij,xx} &= P_{i,j+1} - 2\,P_{ij} + P_{i,y-1} \\
P_{ij,yy} &= P_{i+1,j} - 2\,P_{ij} + P_{i-1,y}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \Delta_h P_{ij} = P_{i+1,j} + P_{i-1,y} + P_{i,j+1} + P_{i,y-1} - 4\,P_{ij}
$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Beispiel

Für das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i-1,j+1} \\ \hline P_{i,j-1} & P_{i,j} & P_{i,j+1} \\ \hline P_{i+1,j-1} & P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

erhalten wir die diskreten zweiten Ableitungen

$$P_{ij,xx} = 2 - 2 \cdot 6 + 4 = -6$$
$$P_{ij,yy} = 5 - 2 \cdot 6 + 2 = -5$$

und damit den Laplace

$$\Delta_h P_{ij} = -6 - 5 = -11$$

Definition: Hadamar-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Definition: Hadamar-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Beispiel: Das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

multiplizieren wir mit dem Filter $\mathcal{F}_\Delta$

$$\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Definition: Hadamar-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Beispiel: Das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

multiplizieren wir mit dem Filter $\mathcal{F}_\Delta$

$$\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -24 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Definition: Hadamar-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Beispiel: Das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

multiplizieren wir mit dem Filter $\mathcal{F}_\Delta$

$$\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -24 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

und summieren auf:

$$\Delta_h \mathcal{P}_{ij} = \sum_{l,k} \left(\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta\right)_{lk}$$

Definition: Hadamar-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Beispiel: Das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

multiplizieren wir mit dem Filter $\mathcal{F}_\Delta$

$$\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -24 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

und summieren auf:

$$\Delta_h \mathcal{P}_{ij} = \sum_{l,k} \left(\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta\right)_{lk}$$

$$= \sum_{l,k} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -24 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right)_{lk}$$

Definition: Hadamar-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a & \beta\, b \\ \gamma\, c & \delta\, d \end{pmatrix}$$

Beispiel: Das Patch

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

multiplizieren wir mit dem Filter $\mathcal{F}_\Delta$

$$\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 9 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -24 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

und summieren auf:

$$\begin{aligned} \Delta_h \mathcal{P}_{ij} &= \sum_{l,k} \left(\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_\Delta\right)_{lk} \\ &= \sum_{l,k} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 0 \\ \hline 4 & -24 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 \end{array}\right)_{lk} \\ &= 2 + 4 - 24 + 2 + 5 = -11 \end{aligned}$$

Saalaufgabe

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in x-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_x = \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \end{array}\right) ?$$

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in x-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.5 & 0 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Saalaufgabe

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in x-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.5 & 0 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in y-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{y} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \end{array}\right) ?$$

Saalaufgabe

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in x-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.5 & 0 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in y-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 0 \end{array}\right)$$

Saalaufgabe

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in x-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.5 & 0 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in y-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 0 \end{array}\right)$$

Wie lautet der Filter zur ersten Ableitung (Vorwärtsdiff-quot) in x-Richtung:

$$P^{+}_{ij,x} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{y} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \end{array}\right) ?$$

Saalaufgabe

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in x-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.5 & 0 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wie lautet der Filter zur ersten, gemittelten Ableitung in y-Richtung:

$$P_{ij,x} = \frac{1}{2}\left(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}\right) = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 0 \end{array}\right)$$

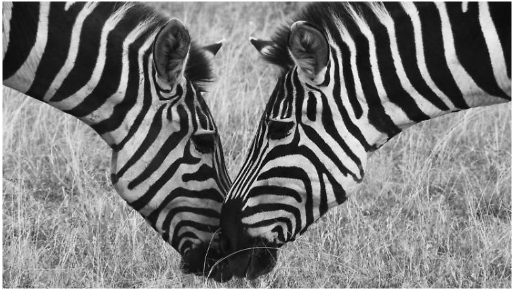
Wie lautet der Filter zur ersten Ableitung (Vorwärtsdiff-quot) in x-Richtung:

$$P^{+}_{ij,x} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \mathcal{F}_{ij} = \sum_{l,k} \mathcal{P}_{ij} : \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Diffusionsgleichung (isotrop):

$$P_t - \Delta P = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{neu} = P^{alt} + \delta\, \Delta P^{alt}$$

```
for l=1:LOOPmax
       P = P + delta⋆𝒫:ℱ_Δ
end
```



Diffusionsgleichung (isotrop):

$$P_t - \Delta P = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{neu} = P^{alt} + \delta\, \Delta P^{alt}$$

```
for l=1:LOOPmax
       P = P + delta⋆𝒫:ℱ_Δ
end
```

Diffusionsgleichung (anisotrop):

$$P_t - P_{vv} = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{neu} = P^{alt} + \delta\, P_{vv}^{alt}$$

$$P_{vv} = \frac{v_1^2}{\|v\|^2}\, P_{xx} + \frac{2\, v_1\, v_2}{\|v\|^2}\, P_{xy} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2}\, P_{yy}$$

$$P_{xx} = \mathcal{P} : \mathcal{F}_{xx}\ , \ldots$$

```
for l=1:LOOPmax
        P = P + delta⋆Pvv
end
```

$$v = \binom{1}{1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Diffusionsgleichung (anisotrop):

$$P_t - P_{vv} = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{neu} = P^{alt} + \delta\, P^{alt}_{vv}$$

$$P_{vv} = \frac{v_1^2}{\|v\|^2}\, P_{xx} + \frac{2\, v_1\, v_2}{\|v\|^2}\, P_{xy} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2}\, P_{yy}$$

$$P_{xx} = \mathcal{P} : \mathcal{F}_{xx}\ , \ldots$$

```
for l=1:LOOPmax
        P = P + delta⋆Pvv
end
```

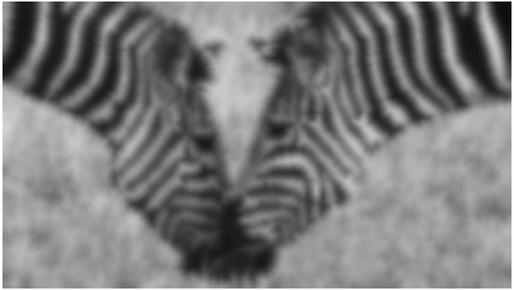
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Diffusionsgleichung (anisotrop/bildabhängig):

$$P^{neu} = P^{alt} + \delta\, P^{alt}_{\nabla P \nabla P}$$

$P_{\nabla P \nabla P}$ lässt sich nicht mehr als Linearkombination von Filtern reiner partieller Ableitungen darstellen.

```
for l=1:LOOPmax
        P = P + delta⋆P_{∇P∇P}
end
```



Diffusionsgleichung (anisotrop/bildabhängig):

$$P^{neu} = P^{alt} + \delta\, P^{alt}_{\nabla P^\perp \nabla P^\perp}$$

$P_{\nabla P^\perp \nabla P^\perp}$ lässt sich nicht mehr als Linearkombination von Filtern reiner partieller Ableitungen darstellen.

```
for l=1:LOOPmax
        P = P + delta⋆P_{∇P⊥∇P⊥}
end
```

Ausblick

BiLeSA-App auf Google Play

Lernziele

- Sie können den Gradienten und eine beliebige Richtungsableitung einer diskreten, multivariaten Funktion berechnen.
- Sie können die Hessematrix und den Laplace-Operator einer diskreten, multivariaten Funktion berechnen.
- Sie können die Ableitungsterme in Filterschreibweise darstellen.
- Sie sind in der Lage einen Filter für die dritten Ableitungen aufzustellen. Es ist Ihnen klar, dass man sich nicht an das 3x3-Format halten muss.
- Die Grundidee wie man Optimierungsprobleme mit mehreren Freiheitsgraden (Unbekannte) löst ist Ihnen klar. Dabei ist selbstverständlich die Nullstellensuche ein separates Problem (Numerik).