# Diskrete Fouriertransformation

## Signale, Systeme und Sensoren: Vorlesung 16

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

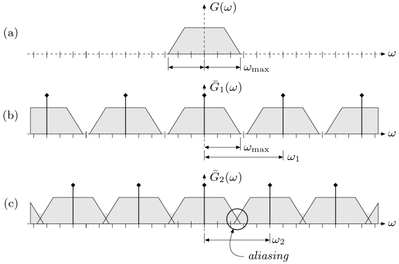
# Übersicht


1. Diskrete Sinusschwingungen
2. Diskrete Fourierreihe
3. Diskrete Fouriertransformation

# Übersicht

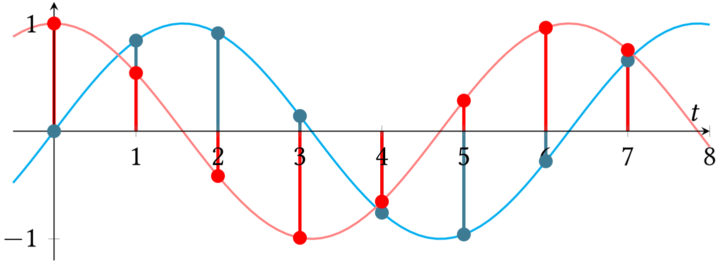
1. Diskrete Sinusschwingungen
2. Diskrete Fourierreihe
3. Diskrete Fouriertransformation

# Wiederholung: Abtastung




- Abgetastete Signale haben ein **periodisches Spektrum**.
- Die Perioden des Spektrums sind Kopien des Spektrums des kontinuierlichen Originalsignales.
- Überlappen sich die Kopien nicht, so kann das kontinuierliche Originalsignal **verlustfrei** aus einer der Kopien durch die inverse Fouriertransformation wiederhergestellt werden.
- Überlappen sich die Kopien, kommt es zu *Aliasing*„ d.h. Artefakten und Informationsverlust.

# Abgetastete Sinusschwingung

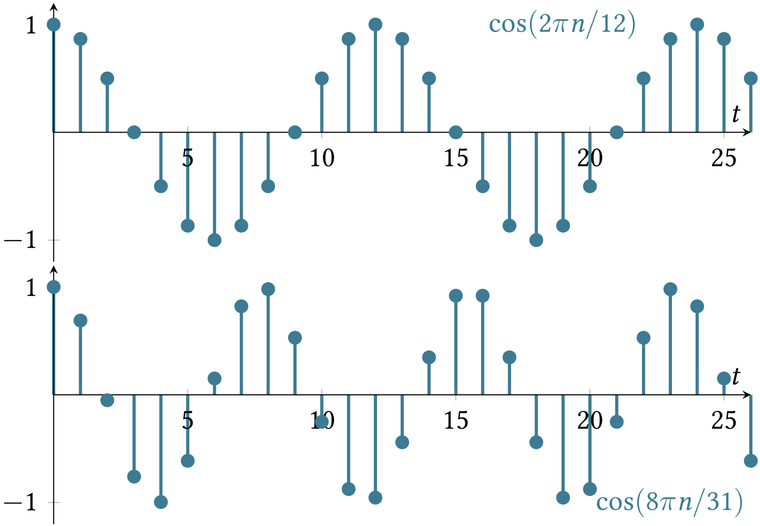



Abgetastete Sinusschwingungen sind i.A. nicht periodisch!
Periodizität gibt es nur, wenn die Periode ein **ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit** ist. Es muss also für $\Delta t = 1, N, k \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$T = \frac{N}{k} \in \mathbb{Z} \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = 2\pi \frac{k}{N}$$

mit $N$: Gesamtzahl der Abtastpunkte; $k$: Anzahl der Schwingungen in $N$ (**Wellenzahl**).

# Periodische und aperiodische diskrete Sinussignale



# Periodische diskrete Sinussignale

- Als Grundsignale, aus denen periodische Digitalsignale aufgebaut werden können, kommen also nur Sinusschwingungen in Betracht, die eine ganzzahlige Periodenlänge $N$ haben, oder die eine ganzzahlige Anzahl von Schwingungen $k$ innerhalb der Periodenlänge $N$ haben.
- Schreibweise:

$$C_k^N[n] = \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) \qquad S_k^N[n] = \sin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)$$

  Der Ausdruck $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ist wie bisher die Grundfrequenz der diskreten Schwingung, die Wellenzahl $k$ ist die $k$-te Harmonische. Der diskrete Index $n$ übernimmt dabei die Rolle der Zeit $t$ mit $\Delta t = 1$:

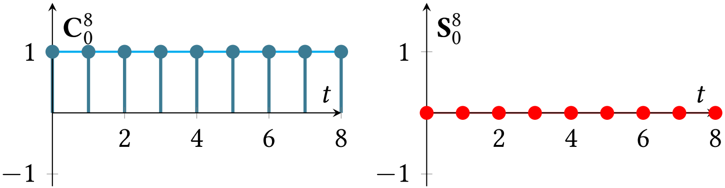
$$t = n \cdot \Delta t.$$

- Komplexe Schreibweise:

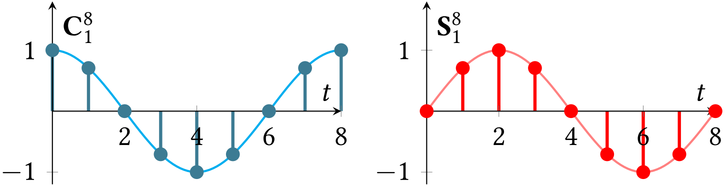
$$W_k^N[n] = e^{ik\frac{2\pi}{N}n} = C_k^N[n] + iS_k^N[n]$$

# Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (1)

Länge $N = 8$, Wellenzahl $k = 0$:

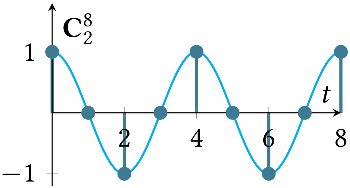


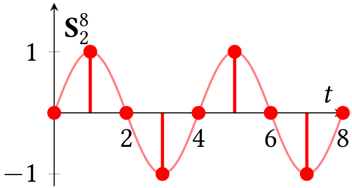

Wellenzahl $k = 1$:



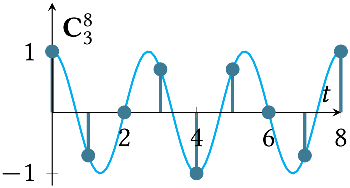
# Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (2)

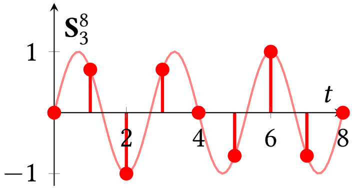
Wellenzahl $k = 2$:



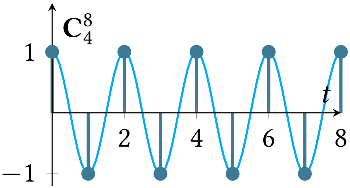

Wellenzahl $k = 3$:

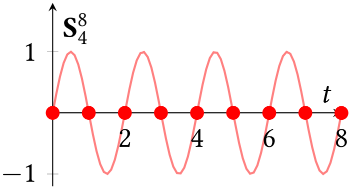


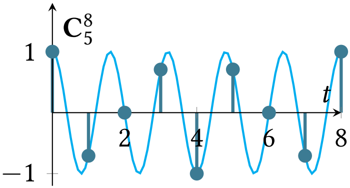
# Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (3)

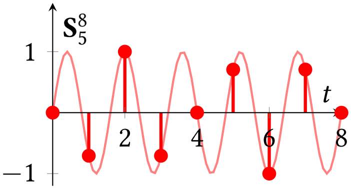
Wellenzahl $k = 4$:



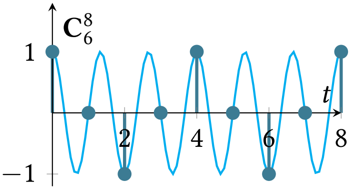

Wellenzahl $k = 5$:

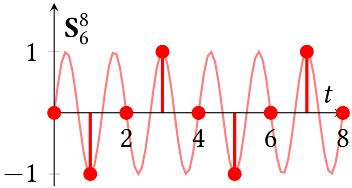


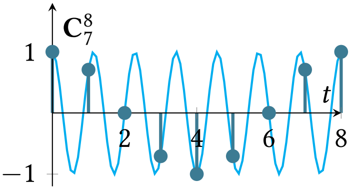
# Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (4)

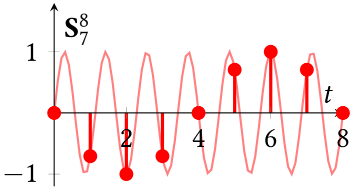
Wellenzahl $k = 6$:



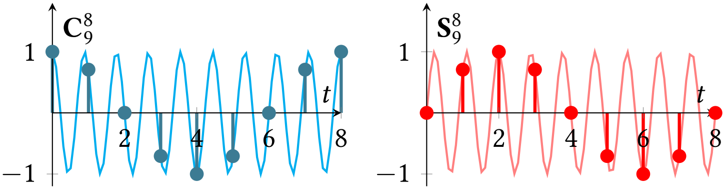

Wellenzahl $k = 7$:



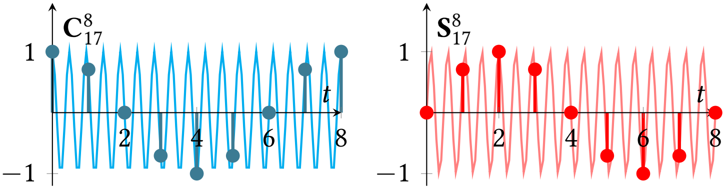



# Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (5)

Wellenzahl $k = 9$:




Wellenzahl $k = 17$:



# Identische diskrete periodische Grundsignale

- Für Wellenzahlen oberhalb der Nyquistfrequenz (hier $k = 4$) wiederholen sich die abgetasteten Sinusschwingungen, obwohl die kontinuierlichen Originalsignale unterschiedlich sind!
- Insbesondere gilt, dass diskrete Cosinus- und Sinusschwingungen identisch sind, deren Wellenzahlen sich um ganzzahlige Vielfache von $N$ (**Oktaven**) unterscheiden:

$$S_k^N[n] = S_{k+m\cdot N}^N[n] \quad \text{und} \quad C_k^N[n] = C_{k+m\cdot N}^N[n], \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Innerhalb einer Oktave gibt es weitere Identitäten:

$$S_k^N[n] = -S_{m\cdot N-k}^N[n] \quad \text{und} \quad C_k^N[n] = C_{m\cdot N-k}^N[n], \quad m \in \mathbb{Z}$$

- **Es gibt also bei einer Grundperiode von $N$ nur $N$ unterschiedliche diskrete, periodische Sinusschwingungen**.

# Übersicht


1. Diskrete Sinusschwingungen
2. Diskrete Fourierreihe
3. Diskrete Fouriertransformation

# Zeitdiskrete Fourierreihe

- Für ein diskretes, periodisches Signal mit der Periode $N$ gibt es nur $N$ verschiedene periodische Grundsignale

$$S_k^N[n] \quad \text{und} \quad C_k^N[n], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N/2.$$

- In komplexer Schreibweise gibt es ebenfalls $N$ verschiedene periodische Grundsignale

$$W_k^N[n] = e^{ik\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

- Die Fourierreihe dieser Signale besteht daher nur aus $N$ Termen (mit $F[k] = c_k$):

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, W_k^N[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{ik\frac{2\pi}{N}n},$$

d.h. **die Fourierreihe eines zeitdiskreten periodischen Signals ist immer endlich**.

# Fouriertransformation eines diskreten periodischen Signals

Abgetastetes periodisches Signal über eine Periode:

$$f(t) = f[0] \cdot \delta(t) + f[1] \cdot \delta(t-1) + \cdots + f[N-1] \cdot \delta(t-(N-1))$$

Eingesetzt in Analysegleichung der komplexen Fourierreihe ($T = N$)

$$F[k] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt = f[0] e^{-ik\frac{2\pi}{N}0} + f[1] e^{-ik\frac{2\pi}{N}1} + \cdots$$

ergibt sich die **Analysegleichung für diskrete periodische Signale**:

$$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

gilt für beliebige $k$, aber $F[k] = F[k+N]$ (d.h. $F[k]$ hat die Periode $N$).

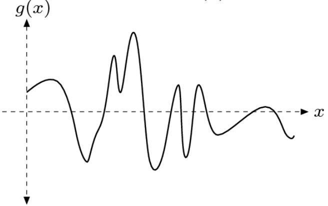
# Vergleich kontinuierliche und diskrete Fourierreihe

| | Diskret | Kontinuierlich |
|---|---|---|
| Synthese-gleichung | $f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{ik\frac{2\pi}{N}n}$ | $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$ |
| Analyse-gleichung | $F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}$ | $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt$ |
| Reihe | endlich (Teilmenge der Größe $N$) | unendlich |
| Fourier-koeffi-zienten | periodisch mit Periode $N$ | aperiodisch |

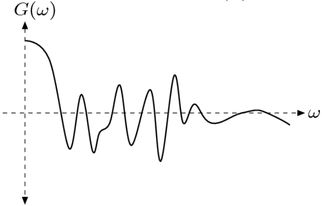
# Übersicht (1)

**Signal** $g(x)$

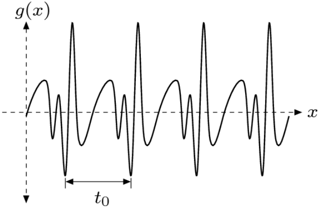
**Spektrum** $G(\omega)$



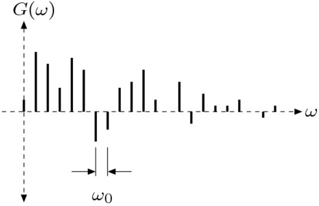

(a) Kontinuierliches, nicht periodisches Signal.




(b) Kontinuierliches, nicht periodisches Spektrum.

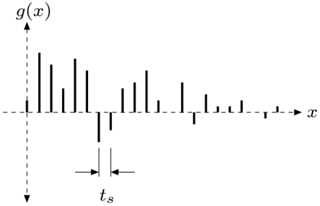



(c) Kontinuierliches, periodisches Signal mit Periodenlänge $t_0$.

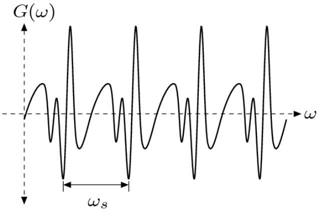



(d) Diskretes, nicht periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi/t_0$.

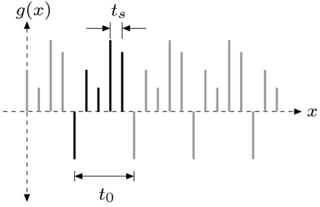
# Übersicht (2)



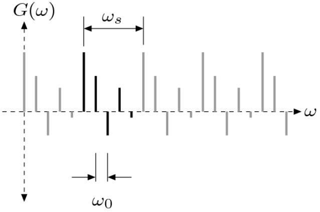

(e) Diskretes, nicht periodisches Signal mit Abtastwerten im Abstand $t_s$.




(f) Kontinuierliches, periodisches Spektrum mit der Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s$.




(g) Diskretes, periodisches Signal, abgetastet im Abstand $t_s$ mit der Periodenlänge $t_0 = t_s M$.




(h) Diskretes, periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi/t_0$ und Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s = \omega_0 M$.

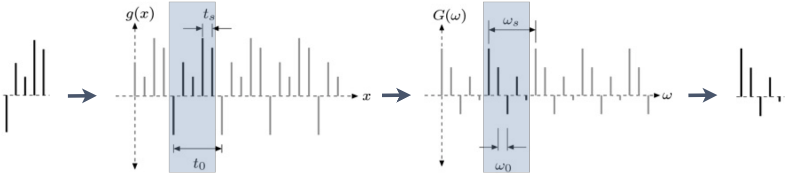
# Übersicht


1. Diskrete Sinusschwingungen
2. Diskrete Fourierreihe
3. Diskrete Fouriertransformation

# Periodische Fortsetzung

Im Rechner lassen sich nur diskrete endliche Signale und Spektren darstellen. Problem: endliche Digitalsignale haben trotzdem eine kontinuierliche Fouriertransformierte.

Ansatz: das Eingangssignal wird periodisch fortgesetzt, um so die diskrete Fourierreihe berechnen zu können. Dadurch wird das Spektrum diskret und periodisch, aber unendlich. Repräsentiert wird das Signal und das Spektrum im Rechner jeweils nur durch eine Periode.




Quelle: Burger & Burge, 2005

# Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Geg.: diskretes Signal $f[n]$ der Länge $N$.

**Vorwärtstransformation (DFT):**

$$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-ik\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{für} \quad 0 \leq k < N$$

**Inverse Transformation (DFT$^{-1}$):**

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{für} \quad 0 \leq n < N$$

- Die $N \times N$ komplexen Koeffizienten $e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}$ können im voraus berechnet und die DFT als Matrix-Vektor-Multiplikation in $O(N^2)$ implementiert werden (vgl. FFT: $O(N \log N)$).
- In vielen Implementierungen ist der Faktor $1/N$ in der inversen DFT oder als $1/\sqrt{N}$ in beiden Gleichungen.

# DFT - Beispiel

| $u$ | $g(u)$ Re | $g(u)$ Im | | $G(m)$ Re | $G(m)$ Im | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 0.0000 | | 14.2302 | 0.0000 | 0 |
| 1 | 3.0000 | 0.0000 | DFT | −5.6745 | −2.9198 | 1 |
| 2 | 5.0000 | 0.0000 | $\longrightarrow$ | *0.0000 | *0.0000 | 2 |
| 3 | 7.0000 | 0.0000 | | −0.0176 | −0.6893 | 3 |
| 4 | 9.0000 | 0.0000 | | *0.0000 | *0.0000 | 4 |
| 5 | 8.0000 | 0.0000 | | 0.3162 | 0.0000 | 5 |
| 6 | 6.0000 | 0.0000 | | *0.0000 | *0.0000 | 6 |
| 7 | 4.0000 | 0.0000 | DFT$^{-1}$ | −0.0176 | 0.6893 | 7 |
| 8 | 2.0000 | 0.0000 | $\longleftarrow$ | *0.0000 | *0.0000 | 8 |
| 9 | 0.0000 | 0.0000 | | −5.6745 | 2.9198 | 9 |

Quelle: Burger & Burge, 2005

# Umrechnung des DFT-Spektrums in physikalische Einheiten

- Die Wellenzahl $k = 1$ entspricht der Grundfrequenz des Signals, d.h. einer Schwingung während $N$ Abtastpunkten. Wird das Signal im Zeitabstand $\Delta t$ abgetastet, entspricht das einer Periode von $T = N \cdot \Delta t$. Die Grundfrequenz ist also

$$f_1 = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t}.$$

- Die Wellenzahl $k$ entspricht der Frequenz

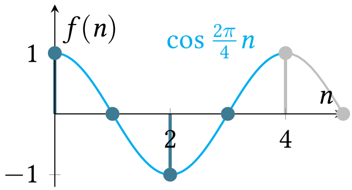
$$f_k = k \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t} = k \cdot f_1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_k = 2\pi f_k = k \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} = k \cdot \omega_1.$$

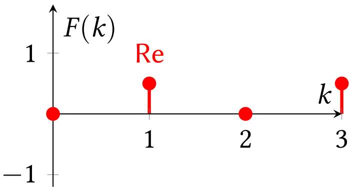
- Die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t = N f_1$ entspricht der Wellenzahl $k_s = N$, die Nyquistfrequenz

$$k_\nu = \frac{N}{2} = \frac{k_s}{2}$$

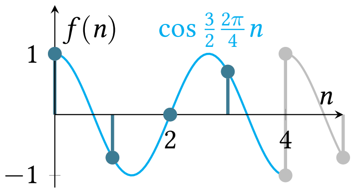
# Abschneidefehler aufgrund der periodischen Fortsetzung

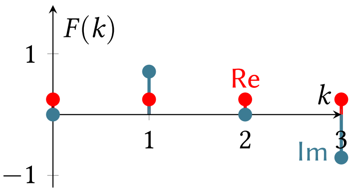
Ohne Abschneidefehler ($N = 4$):



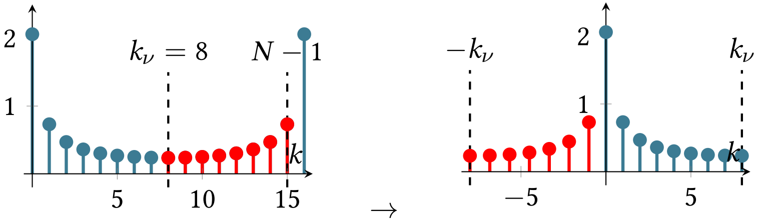

Mit maximalem Abschneidefehler:



# Zentriertes Spektrum

Beispiel $N = 16$ :




Die DFT liefert ein Spektrum für die Wellenzahlen 0 bis $N - 1$, wobei die Nyquistfrequenz bei $k_\nu = N/2$ liegt. Das normalerweise dargestellte, **zentrierte Spektrum** von $k = -N/2..N/2$ erhält man durch Kopieren der oberen Hälfte in die negativen Wellenzahlen, was aufgrund der Periodizität kein Problem darstellt.

# Praktische Tips

- Die Auflösung des Spektrums wird durch die Grundfrequenz $f_1$ bestimmt: Je länger die Messdauer, desto höher aufgelöst ist das Spektrum.
- Durch die periodische Fortsetzung kann es an den Signalgrenzen zu Sprüngen kommen, die zu Artefakten im Spektrum führen. Daher verwendet man für die DFT ebenfalls Windowing mit einer geeigneten Fensterfunktion, ähnlich wie bei der Kurzzeit-Fouriertransformation.
- Der FFT-(Fast Fourier Transform)-Algorithmus funktioniert besonders schnell, wenn das Signal die Größe einer Zweierpotenz hat. Hier kann es sich lohnen, das Signal nach dem Windowing mit Nullen soweit aufzufüllen, dass sich eine Zweierpotenz als Größe ergibt (**Zero-Padding**). Zero-Padding ist außerdem nützlich zur weiteren Reduktion der durch die periodische Fortsetzung verursachten Artefakte.

# Aufgaben

1. Ein Tonsignal besteht aus $M = 500$ Abtastwerten im Intervall $\Delta t = 1$ ms. Was ist die Abtastfrequenz? Was ist die Grundperiode des Signals? Was ist seine Grundfrequenz? Welcher realen Frequenz entspricht die Wellenzahl $k = 2$? Was ist hier die Nyquistfrequenz?
2. Ein eindimensionales Druckraster mit einer Auflösung (Abtastfrequenz) von 120 Punkten pro cm hat die Länge $N = 1800$ Punkte. Was ist die Grundfrequenz in Zyklen pro cm? Was ist hier die feinste Struktur (Frequenz), die aufgelöst werden kann?