Komplementarität von Zeit und Frequenz

Vorlesung 9, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

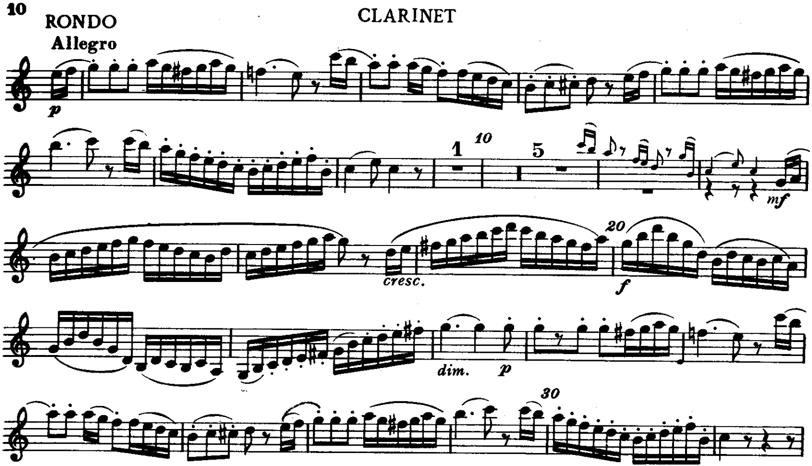
HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

1. Komplementarität von Zeit und Frequenz
2. Frequenzmessung
3. Fastperiodische Signale

Gleichzeitige Darstellung von Zeit- und Frequenzbereich durch Musiknoten



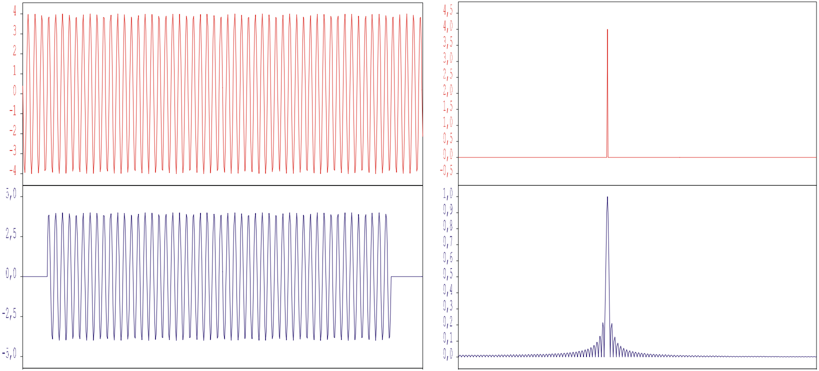
Quelle: Karrenberg, 2012

Funktioniert das auch für sehr kurze Töne? [Experiment]

Experiment: Burst-Signale abnehmender Dauer (1)

Zeitbereich

Frequenzbereich



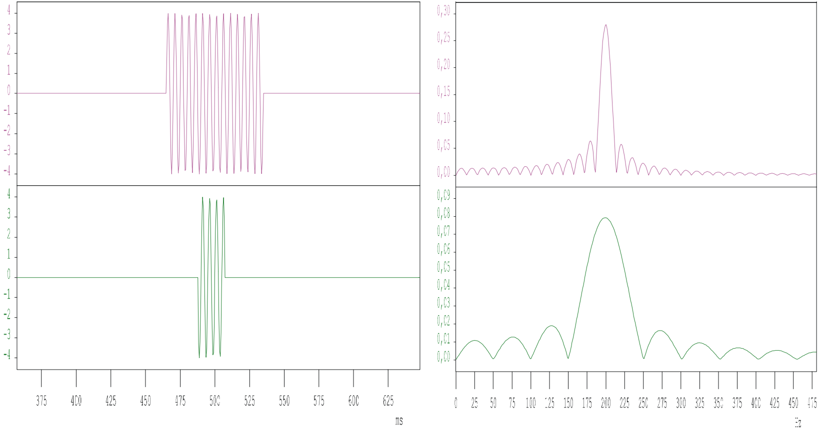
Quelle: Karrenberg, 2012

Burst: Zeitlicher Ausschnitt aus einem Sinussignal.

Experiment: Burst-Signale abnehmender Dauer (2)

Zeitbereich

Frequenzbereich



Quelle: Karrenberg, 2012

Komplementarität von Frequenz und Zeit

- Besteht der Sinuston nur noch aus wenigen Perioden, ist die Tonhöhe nicht mehr erkennbar.
- Bei einer zeitbegrenzten Sinusschwingung kann man nicht von *einer* Frequenz sprechen, sondern nur von einem **Frequenzband**.
- **Komplementarität von Frequenz und Zeit:** Eine zeitliche Eingrenzung der Signaldauer Δt bedeutet eine Ausweitung des Frequenzbandes Δf. Umgekehrt gilt: Je eingeschränkter das Frequenzband eines Signals ist, desto größer muss zwangsläufig die Zeitdauer des Signals sein.
- Konsequenz: Frequenzband und Zeitdauer eines Signals können nicht unabhängig voneinander gemessen werden. Eine genaue Messung des Frequenzbandes erfordert ein lange Zeitdauer, eine genaue Messung der Zeitdauer ein breites Spektrum.

Unschärferelation für Frequenz und Zeit

- Oft ist Beginn und Ende der Zeitdauer oder des Frequenzbandes eines Signals nicht scharf definiert. Man nimmt daher zur Schätzung von Δt und Δf oft die **Halbwertsbreite** (die Breite bei 50% des Maximalwertes) oder die Standardabweichungen σ_t und σ_ω.
- Im vorigen Experiment sind Δt und Δf *umgekehrt proportional*, d.h. eine Halbierung von Δt ergibt eine Verdoppelung von Δf:

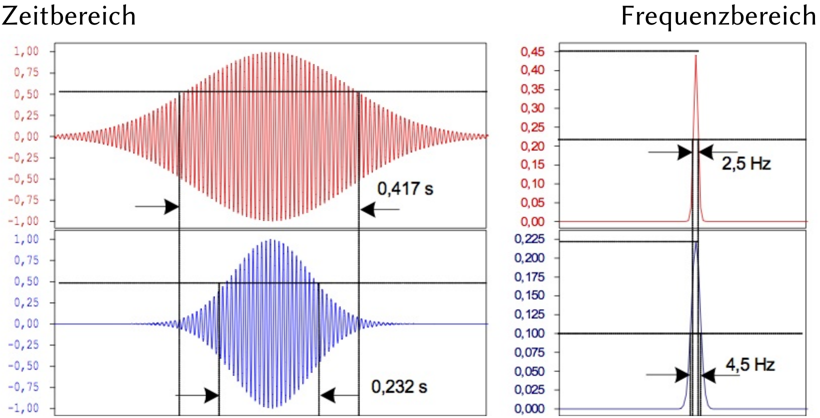
$$\Delta t \cdot \Delta f = \text{const.}$$

- Tatsächlich lässt sich zeigen, dass für beliebige Signale die **Frequenz-Zeit-Unschärferelation** gilt:

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad \Delta t \cdot \Delta f \geq 0.88.$$

- Man kann niemals gleichzeitig Zeitdauer und Frequenz genauer als $\sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1$ angeben. Dies ist eine fundamentale Grenze der Fourieranalysis und damit auch der Physik.

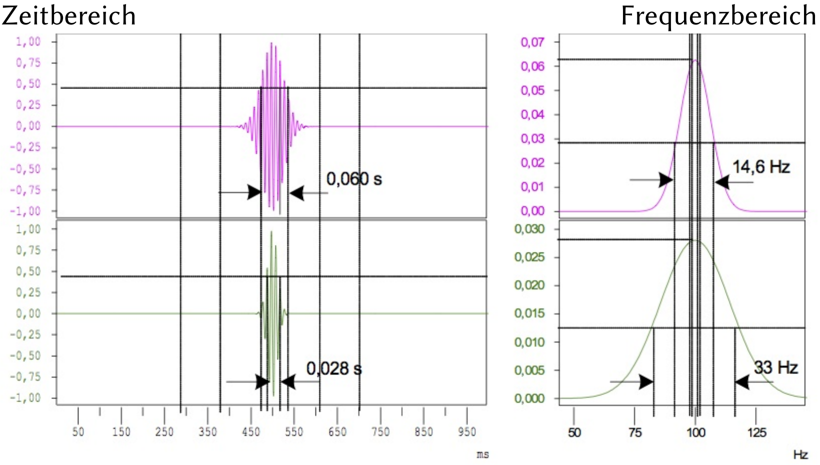
Beispiel eines Signals mit $\sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1$ (1)



Quelle: Karrenberg, 2012

$$\text{Gabor-Wavelet:} \quad \cos \omega_0 t \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(t-t_0)^2}{\sigma_t^2}\right)$$

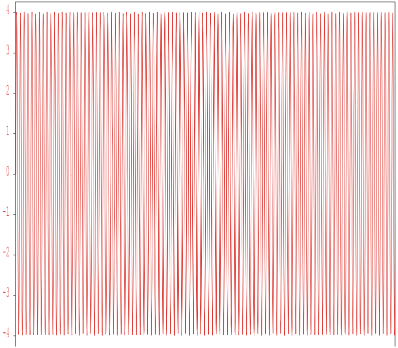
Beispiel eines Signals mit $\sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1$ (2)



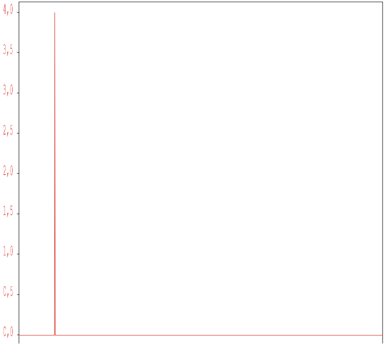
Quelle: Karrenberg, 2012

Extremfall 1: reines Sinussignal

Zeitbereich



Frequenzbereich

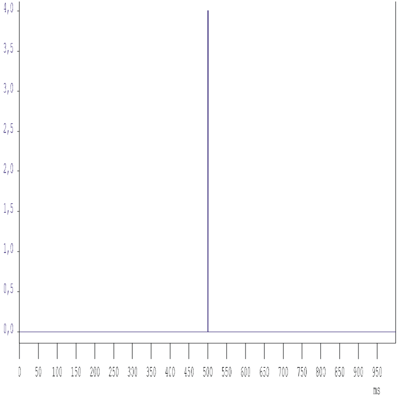


Quelle: Karrenberg, 2012

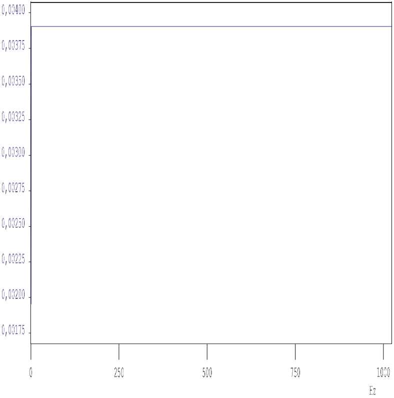
$$\Delta f = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \infty$$

Extremfall 2: Dirac-Impuls

Zeitbereich



Frequenzbereich



Quelle: Karrenberg, 2012

$$\Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \infty$$

Übersicht

1. Komplementarität von Zeit und Frequenz

2. Frequenzmessung

3. Fastperiodische Signale

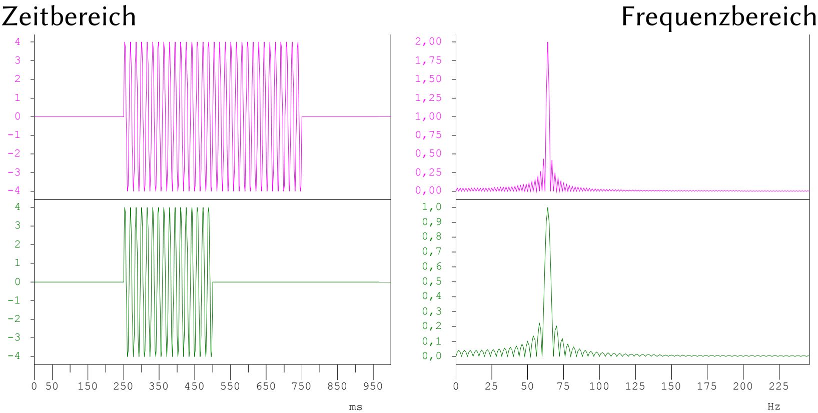
Frequenzmessung bei nichtperiodischen Signalen

Nichtperiodische Signale besitzen ein kontinuierliches Spektrum, d.h. zu jeder Frequenz gibt es auch in der winzigsten, unmittelbaren Nachbarschaft weitere Frequenzen. Sie liegen dicht an dicht. Nun bleibt vor allem die Frage, wie sich diese Frequenzen möglichst genau messtechnisch auflösen lassen.

Aus $\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq 1$ folgt: Je länger wir messen, desto genauer können wir die Frequenz ermitteln.

Achtung: übersteigt die Messdauer die Signaldauer, führt die längere Messdauer zu keiner Verbesserung der Auflösung! Hier bestimmt *ausschließlich die Signaldauer* die Frequenzauflösung. Dies ist eine Konsequenz der Unschärferelation: bei kurzzeitigen Signalen ist grundsätzlich keine hohe Frequenzauflösung möglich.

Auflösung in Abhängigkeit von Mess- und Signaldauer



Quelle: Karrenberg, 2012

Trotz gleicher Messdauer ist die Frequenzauflösung für das kürzere Signal schlechter.

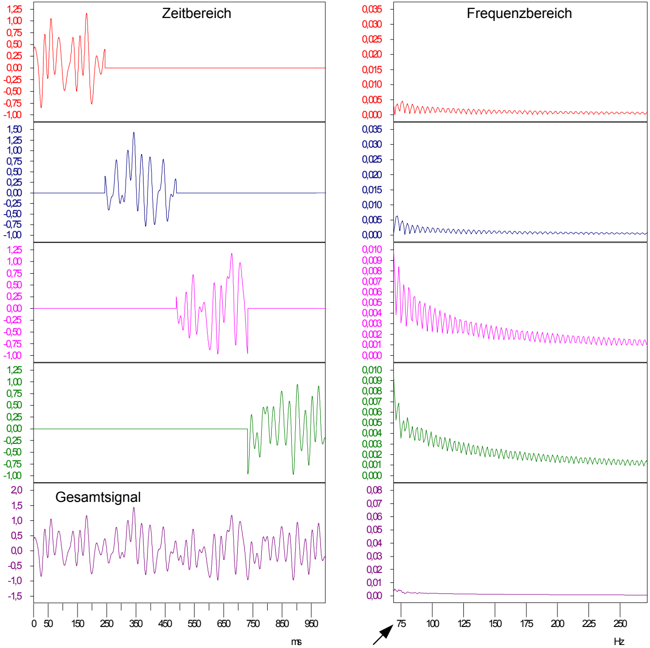
Lang andauernde Signale

Bei lang andauernden Signalen könnte man im Prinzip das Spektrum sehr genau messen. Oft ist dies aber nicht erwünscht:

- Der Rechenaufwand für die numerische Fouriertransformation steigt mit der Signallänge N mit $O(N \log N)$.
- Oft sind die momentanen Töne und Klänge von Interesse, nicht das Gesamtspektrum (z.B. bei Musik oder Sprache).

Windowing: das Signal wird in aufeinanderfolgende, oft überlappende *Fenster* zerlegt. In diesen Fenstern wird eine *lokale Fourieranalyse* durchgeführt. Damit lässt sich der zeitliche Verlauf des Spektrums verfolgen bzw. durch Mittelung das Gesamtspektrum ermitteln.

Naives Windowing



Quelle: Karrenberg, 2012

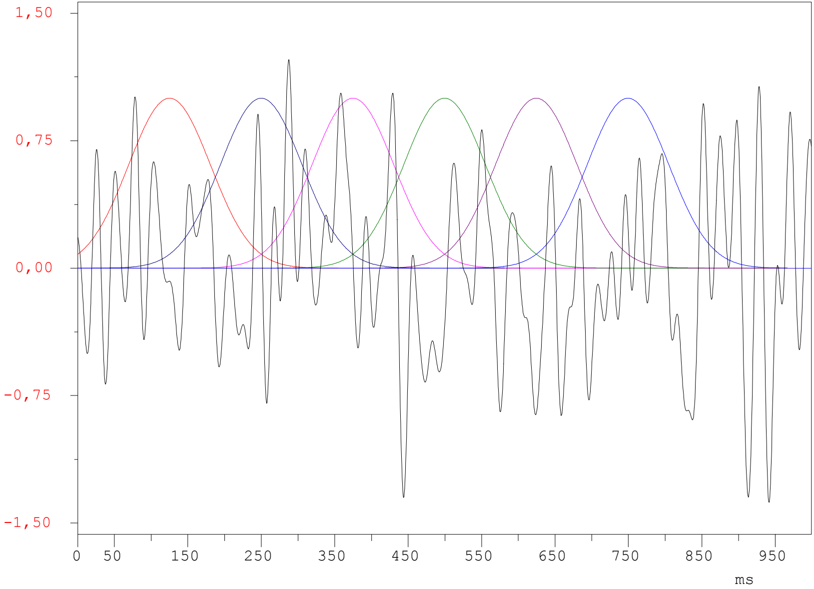
Windowing mit überlappenden Fensterfunktionen

Die 4 Abschnitte enthalten deutlich höhere Frequenzen als das Gesamtspektrum. Warum?

- Durch den senkrechten Ausschnitt sind steile Übergänge erzeugt worden, die im ursprünglichen Signal nicht vorhanden sind. Steile Übergänge erzeugen jedoch viele hohe Frequenzen im Spektrum.
- Durch die scharfe Trennung sind zusammengehörige Signalabschnitte willkürlich voneinander getrennt worden.

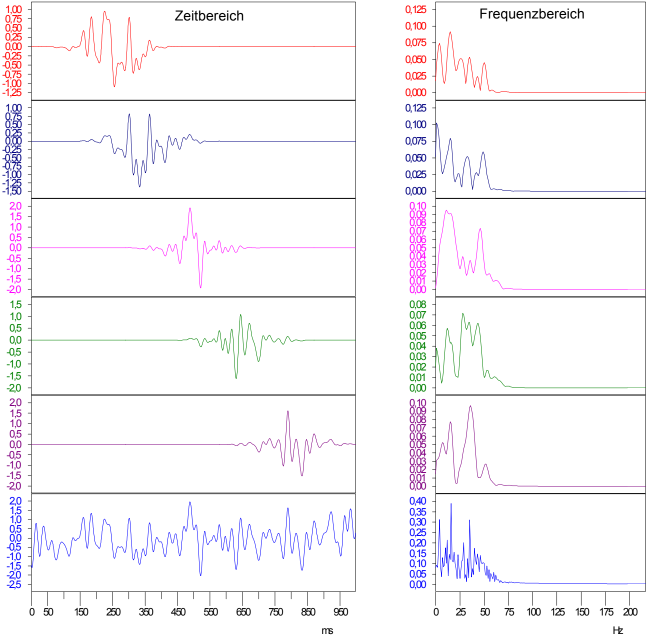
Ansatz: die Abschnitte werden überlappend gewählt (meist zu 50%). Innerhalb des Abschnitts wird das Signal mit einer langsam ansteigenden und abfallenden **Fensterfunktion** (z.B. Gaußfunktion) multipliziert, bevor die Fouriertransformation ausgeführt wird. Dadurch werden plötzliche Sprünge vermieden.

Prinzip: Windowing mit überlappenden Fensterfunktionen



Quelle: Karrenberg, 2012

Windowing mit Gaußscher Fensterfunktion

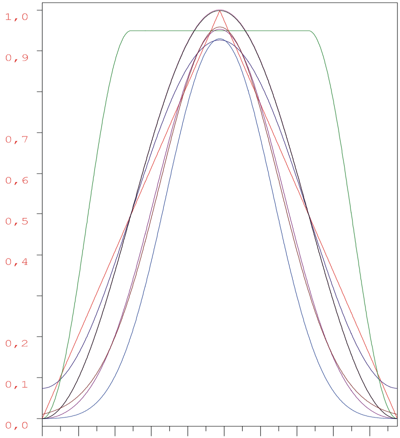


Quelle: Karrenberg, 2012

Fensterfunktionen

Durch Fensterfunktionen werden die Nachteile des naiven Windowing vermieden. Allerdings wird dadurch das originale Spektrum geglättet und damit die Auflösung verringert.

Hier kommt wieder die Unschärferelation ins Spiel: je breiter die Fensterfunktion, desto höher die Frequenzauflösung, aber desto geringer die zeitliche Auflösung.



Übersicht

Fastperiodische Signale

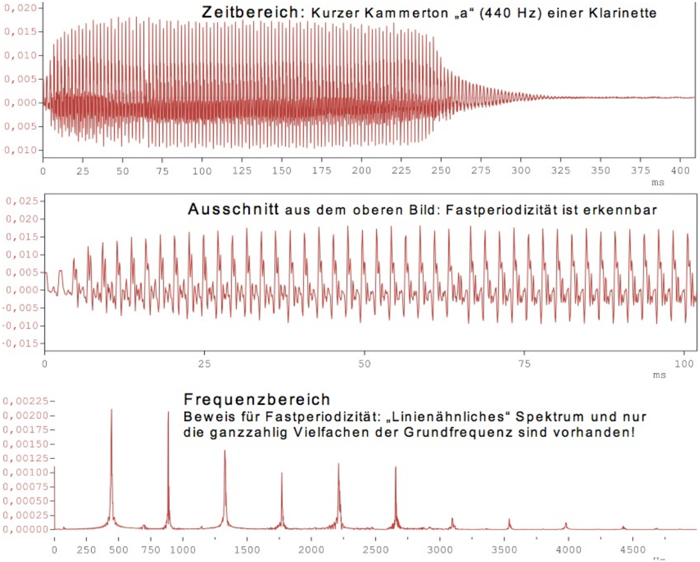
Fastperiodische Signale (z.B. Burst) bilden den Grenzbereich zwischen periodischen und aperiodischen Signalen. Sie wiederholen sich nur über einen begrenzten Zeitraum.

Fastperiodische Signale besitzen mehr oder weniger linienähnliche Spektren ("verschmierte" bzw. „unscharfe" Linien), die ausschließlich die ganzzahlig Vielfachen der Grundfrequenz umfassen. Je kürzer die Gesamtdauer, desto unschärfer die Linie. Nach der Unschärferelation gilt für die Linienbreite

$$\sigma_\omega \geq \frac{1}{\sigma_t}.$$

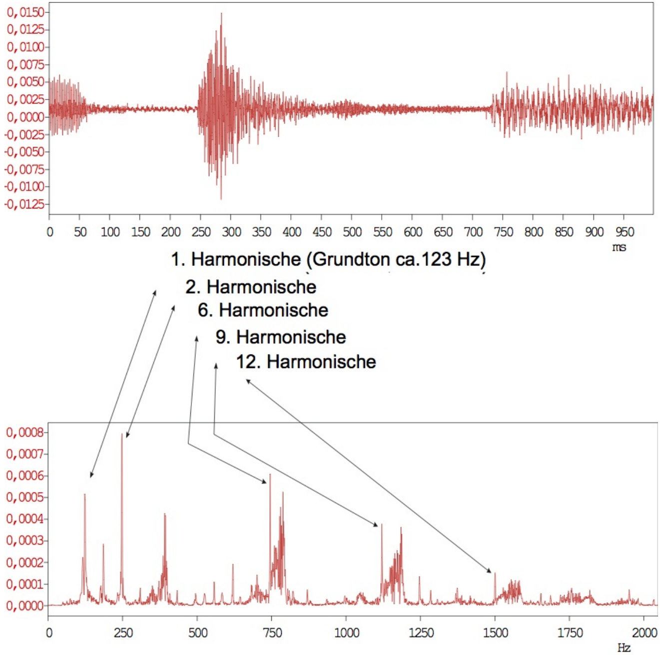
Reale fastperiodische Signale sind im Zeitbereich nicht immer direkt als fastperiodisch zu erkennen. Dies gelingt jedoch auf Anhieb im Frequenzbereich.

Beispiel: kurzer Klarinettenton (250 ms)



Quelle: Karrenberg, 2012

Beispiel aus einem Musikstück



Töne und Klänge

Die wichtigsten fastperiodischen Signale sind Sprache und Musik.

- **Reiner Ton:** lediglich eine Frequenz ist hörbar, d.h. eine sinusförmige Druckschwankung am Ohr.
- **Ton:** Tonhöhe ist eindeutig bestimmbar. Die Tonhöhe wird durch die Frequenz des *Grundtons* bestimmt, die anderen Harmonischen sind die *Obertöne*.
- **Klang:** besteht aus mehreren Tönen (z.B. ein Akkord).
- **Klangfarbe:** Obertonspektrum eines Instruments bzw. der Stimme u.ä.

Um eindeutig wahrnehmbar zu sein, muss der zugehörige periodische Abschnitt nach der Unschärferelation eine Mindestdauer haben (Faustregel: mindestens 1 s).

Quasiperiodische Signale

Manche Autoren unterscheiden zwischen fastperiodischen und **quasiperiodischen** Signalen: das Spektrum dieser Signale besteht ebenfalls aus Linien, aber die Frequenzen sind nicht ausschließlich ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

Aufgrund dieser Eigenschaft wiederholen sich quasiperiodische Signale nicht in jeder Periode exakt, man beobachtet eine leichte Veränderung des Signals von Periode zu Periode. Die Perioden bleiben aber zueinander ähnlich. Quasiperiodische Töne werden vom Ohr oft als unharmonisch empfunden, aber nicht immer (z.B. Glocke).

Sie entstehen oft durch stehende Wellen auf schwingungsfähigen Oberflächen und können in der Automatisierungstechnik zur Detektion von defekten Objekten (z.B. mit Rissen) verwendet werden.

Beispiel für ein quasiperiodisches Signal: Weinglas