A1

a) $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$

siehe Matlab skript $\boxed{1}$

+5

b) F_n wächst exponentiell (Matlab Plot skript $\boxed{1}$)

daher wächst auch g_n monoton

g_n ist durch 2 nach oben beschränkt, da

sich F_{n+1} gegen $2 \cdot F_n$ annähert ~~, aber~~

somit ist $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sim 2}{1} \approx 2$

noch

+5

c) Matlab:

syms x, $f = 1 + \frac{1}{x}$

$y = x$

~~solve(f == y, x) ergibt: $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$~~ ~~$\frac{1}{2} - 5^{\frac{1}{2}:2}$~~

~~$f = y$~~

~~$1 + \frac{1}{x} = x \quad | \cdot x$~~

~~$x = x^2$~~

~~$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$~~

~~Da die g_n nur für $n \geq 0$ gegeben ist,~~

~~ist $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ der~~

solve(f == y, x) ergibt: $x_1 = \frac{1}{2} - 5^{\frac{1}{4}}$ ← negativ

$x_2 = \frac{1}{2} + 5^{\frac{1}{4}}$

Schnittpunkt == Grenzwert $g == \frac{1}{2} + 5^{\frac{1}{4}}$?

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

noch

+9

$\frac{19}{20}$

A2

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{\underbrace{x^4-1}_{\text{darf nicht 0 sein}}}$

Def:

$x^4-1=0$

$x^4=1$ $\quad x_1=1$

$\quad x_2=-1$ ✓

$\rightarrow x \in \mathbb{R}/\{1,-1\}$ ✓

+2

Wertebereich: $y \in \mathbb{R}/\{0\}$ f.

da x^4-1 nie "0" und x^2-3x+2 nur für $x=1$ Null wäre

b) fplot(f) mit syms x und $f=(x^2-3x+2)/(x^4-1)$

Zeigt: → Polstelle bei $x=-1$, ✓

hebbar bei $x=1$, ✓

$\cancel{\lim_{x\to 1} f(x)} =$

$f(0{,}9) = \text{subs}(f,x,0{,}9) = \cancel{\frac{4}{5}} - 0{,}3149$

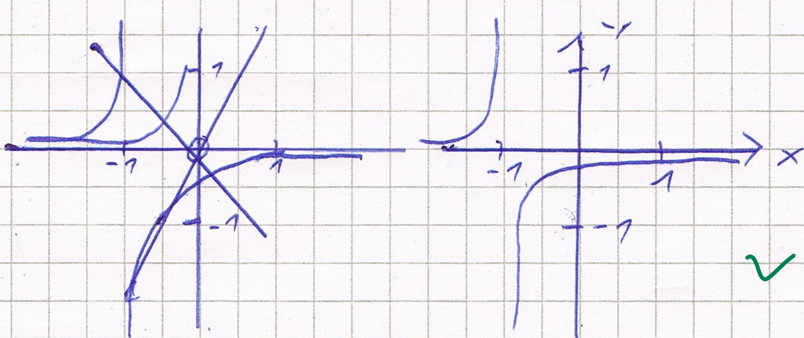
$f(1{,}1) = \text{subs}(f,x,1{,}1) = \cancel{4} - 0{,}1939$

?

$f(-0{,}9) = -16{,}022 \rightarrow -\infty$ ✓
$x \to -1^+$

$f(-1{,}1) = 14{,}027 \rightarrow +\infty$ ✓
$x \to -1^-$

Skizze (MatLab



✓

Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ fehlen

9/15

+7

A3

a) $y(x) = -\frac{b}{a}x$ ✓

$y'(x) = -\frac{b}{a}$ ✓

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{1+(-\frac{b}{a})^2}{-(-\frac{b}{a}x)}}\, dx \qquad = -\frac{b}{a}\cdot(-\frac{b}{a}) = \frac{b^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b}{a}x}}\, dx$$ ✓

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a$$

+5

Rest ?

b) $y(x) = cx^2 + dx + e \qquad y'(x) = 2cx + d \qquad y''(x) = 2c$

$y(0) = 0$ ✓ : $P(0|0)$

$y(a) = -b$ ✓ : $P(a|-b)$

$y'(a) = 0$ ✓ : min bei a

$y''(a) = \text{positiv}$: ✓ " "

$y'(a) = 2ca + d = 0$ ✓

~~$y'(a) = 2ca + d = 0$~~

keine quadrat. Gleichung

$$= \frac{-d \pm \sqrt{d^2}}{2\cdot(2c)} = \frac{-d \pm d}{4c} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{-d}{4c}$$

? .

darf nicht Null sein

$y(x) = cx^2 + 0x + e$

$\rightarrow \underline{\underline{d=0}}$

f.

A3

b) $y(a) = ca^2 + da + e$

$= ca^2 + e$

$ca^2 + e = -b$

$y(1) = -1$

$= c \cdot 1^2 + e = -1$

$= c + e = -1$

$c = -1 - e$

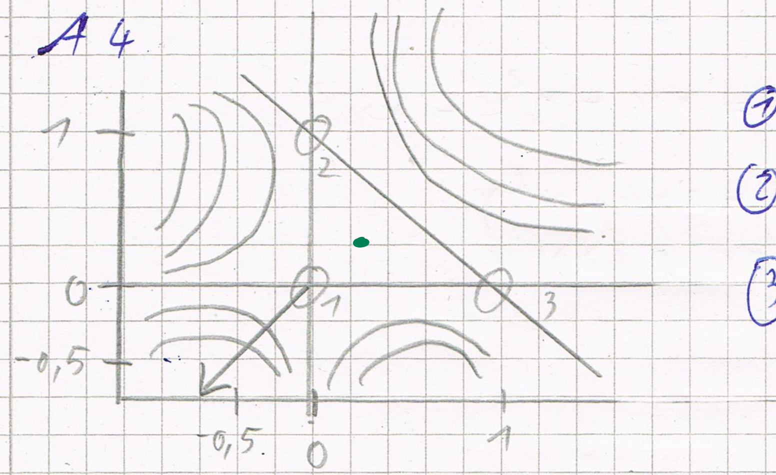
+3

c) Die Kugel auf der ~~gekrümten~~ Parabelförmigen Bahn ist schneller, da sie durch die ~~st~~ größere negative Steigung schneller beschleunigt wird. ✓

mit Integral argumentieren! +3

11/30

A 4



① $(0|0)$

② $(0|1)$

③ $(1|0)$

+3

b) $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f' \text{ nach } x \\ f' \text{ nach } y \end{pmatrix}$$

+4

$$= \begin{pmatrix} y - 2yx - y^2 \\ x - x^2 - 2xy \end{pmatrix}$$ ✓

+4

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot 1\cdot 1 - 1^2 \\ 1 - 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ ✓

c) v ist orthogonal zu $\nabla f(1|1)$ $\quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\nabla f(1|1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v \cdot \nabla f(1|1) = 0$$

$$x \cdot (-2) + y \cdot (-2) = 0 \qquad \underline{x = 1}$$

$$-2 + y \cdot (-2) = 0$$

$$-2y = 2$$

$$\underline{y = -1} \qquad v = \cancel{(1} \ \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$ ✓

Das Skalar Produkt 2er orthogonaler Vektoren ist Null, v muss orthogonal zu $\nabla f(1|1)$ sein, da an den Höhenlinien entlang keine Steigung besteht ✓

+4

A4

d) $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$

$\nabla f = \begin{pmatrix} y - 2xy - y^2 \\ x - x^2 - 2xy \end{pmatrix}$

$\nabla f = 0$

$\mathrm{I} \quad y - 2xy - y^2 = 0$

$\mathrm{II} \quad x - x^2 - 2xy = 0 \quad | : x$ $\neq 0$?

$1 - x - 2y = 0 \quad | + x$

$1 - 2y = x$ ✓ für $x \neq 0$

in I einsetzen

$y - 2\cdot(1-2y)\cdot y - (1-2y)^2 = 0$

$y - (2-4y)\cdot y - 1 \cancel{+} 2y \cancel{+} 2y \cancel{+} 4y^2 = 0$

$y - 2y \cancel{+} 4y^2 - 1 - 2y - 2y + 4y^2 = 0$ VZ-Fehler

$1 \quad -2 \quad \cancel{-4} \quad -2 \quad -2 = -5 \quad \cancel{+4}$

$-4 \quad +4 = 0$

-1

$-5y - 1 = 0$

$-1 = 5y$

$-\frac{1}{5} = y$ $y = \frac{1}{3}$

in I einsetzen

$-\frac{1}{5} - 2\cdot x\cdot(-\frac{1}{5}) - (-\frac{1}{5})^2$

$-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{1}{25} = 0$

$\frac{2}{5}x - \frac{6}{25} = 0$ noch

$\frac{2}{5}x = \frac{6}{25} \quad |\cdot 5$ +3

$2x = \frac{30}{25}$

$x = \frac{15}{25}$

(~~soll~~ Es sollten eigentlich 3 Punkte rauskommen)

A 4

d) (0|1) und (1|0) → Maximum, da funktion in alle Richtungen fällt f.

(0|0) Sattelpunkt, da funktion fällt und steigt ✓

$\frac{18}{20}$

A 5

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y)^2}$$

a)

$$F_i = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-1} & e^{-2} \\ e^{-1} & e^{0}=1 & e^{-1} \\ e^{-2} & e^{-1} & e^{-2} \end{pmatrix}_i$$ ✓

+4

b)

$$\nabla f^{v}(0|0) = \begin{pmatrix} e^{-1}-1 \\ e^{-1}-1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\cancel{P_{i,i}}\ P_{i\,i+1} - P_{ii}) \ (\approx -0{,}632) \\ (P_{i+1\,i} - P_{ii}) \end{matrix}$$

+4

$$\nabla f^{m}(0|0) = \begin{pmatrix} P_{i\,i+1} + P_{i\,i-1} - 2P_{ii} \\ P_{i+1\,i} + P_{i-1\,i} - 2P_{ii} \end{pmatrix}$$ f.

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-1}-2 \\ 2e^{-1}-2 \end{pmatrix} \quad (\approx -1{,}264)$$

c) Da f(0,0) ein Hochpunkt ist ✓
gibt die gemittelte Ableitung
das Verhalten besser wieder ~~stärken~~
(stärkere negative Steigung)

+3

$\frac{11}{15}$