Wirtschaftsinformatik II – Stuckenschmidt/Meilicke

Die Semantik von (= Bedeutung) von Termen und Formeln
Interpretationen und Modelle

PRÄDIKATENLOGIK
SEMANTIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Semantik

- Semantik eines Ausdrucks ≈ Bedeutung eines Ausdrucks

- Bedeutung als Wahrheitsbedingungen (= Tarskis semantische Definition der Wahrheit)
  - "Black Beauty ist ein Pferd" ist wahr, genau dann wenn Black Beauty ein Pferd ist
  - "Black Beauty is a horse" ist wahr, genau dann wenn Black Beauty ein Pferd ist
  - "Black Beauty ist ein Pferd" ist wahr, wenn das, worauf sich "Black Beauty" bezieht, ein Element der Menge ist, auf die sich "Pferd" bezieht

Semantik: Sprache vs. Logik

- Die Semantik der Prädikatenlogik folgt dieser einfachen Idee
  - Man muß zwischen den logischen Ausdrücken und dem worauf sie Bezug nehmen unterscheiden

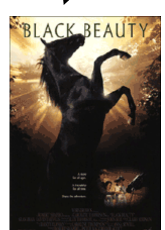
- In der natürlichen Sprache verwendet man Anführungszeichen, um über Wörter und Sätze zu reden

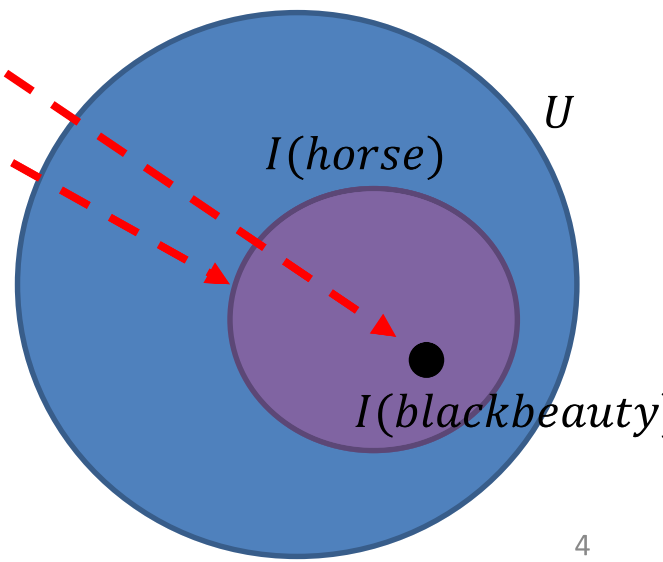
- In der künstlichen Logiksprache verwendet man das Werkzeug der Interpretation (bzw. Interpretationsfunktion) um über Terme und Formeln zu reden

Doppelte Bedeutung

- Wenn wir logische Formeln aufschreiben (um eine Domäne zu modellieren), dann wollen wir damit über die Welt sprechen
- Zugleich benötigen wir das abstrakte Universum um eine formale Semantik zu definieren

$$horse(blackbeauty)$$





UNIVERSITÄT MANNHEIM

Rückblick: Prädikatenlogik - Bausteine

- Logische Junktoren und Quantoren
  - $\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \neg \forall \exists$
- Individuenkonstanten
  - $a, b, c, paul, anna$
- Variablen
  - x, y, z
- Prädikate (Relationale Ausdrücke)
  - $F, G, H, married, human$
- Funktionssymbole
  - $f, g, age, father$

Signatur und Interpretation

- Eine Signatur Σ ist eine Menge von Individuenkonstanten, Variablen, Funktionen und Prädikaten
  - Erinnerung: Dies war in bezug auf AL eine Menge von aussagelogischen Variablen (= Propositionen)

- Gegeben eine nicht leere Menge U und eine Signatur Σ, dann ist eine Interpretation I eine Abbildung für die folgendes gilt:
  - Für jede Individuenkonstante $a \in \Sigma$ gilt $I(a) \in U$
  - Für jede Variable $x \in \Sigma$ gilt $I(x) \in U$
  - Für jedes Prädikat $F \in \Sigma$ mit Stelligkeit n gilt $I(F) \subseteq U^n$
  - Für jedes Funktionssymbol f $\in \Sigma$ mit Stelligkeit n ist $I(f)$ eine Funktion mit $I(f)\colon\ U^n \rightarrow\ U$

n-faches kartesisches Produkt der Menge U mit sich selbst

$$\text{Hinweis: } U^2 = U \; x \; U = \{(a,b)\,|\,a \in U, b \in U\}$$
$$U^1 = U$$

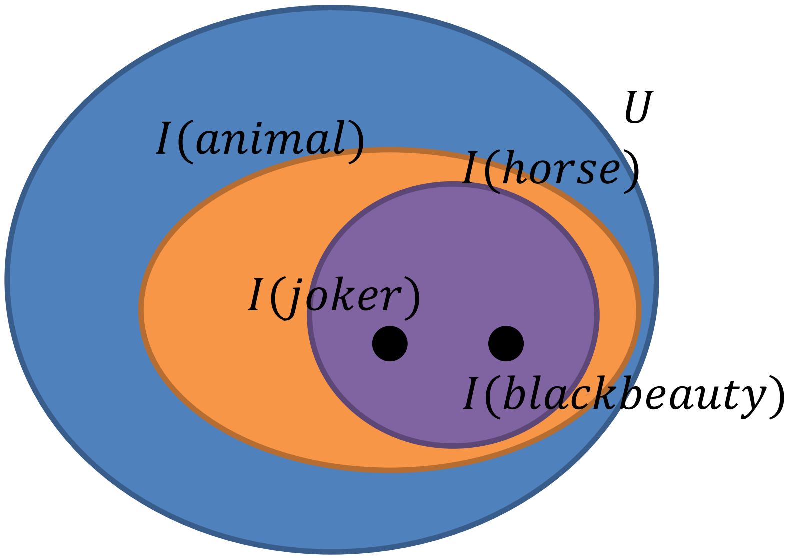
UNIVERSITÄT MANNHEIM

Einschub: Unendlichkeit

- Im Kontext der Aussagenlogik gibt es für eine gegebene Signatur Σ eine feste Anzahl an Interpretationen
  - Nämlich $2^{|\Sigma|}$ Interpretationen
- Im Kontext der Prädikatenlogik gibt es unendliche viele Interpretationen
  - Das Universum kann 1, 2, 3, ... oder unendliche viele Elemente haben
  - Demzufolge kann es auch unendlich viele Interpretationen und Modelle geben
  - Dies macht Inferenzverfahren (z.B. Folgerung beweisen) deutlich komplizierter, eine Wahrheitstabelle kann beispielsweise nicht erstellt werden

Interpretation, veranschaulicht I

- $horse(blackbeauty)$
- $horse(joker)$
- $horse(fatherOf(joker))$
- $faster(blackbeauty, joker)$
- $\forall x\ (horse(x) \rightarrow animal(x))$



- Signatur $\sum$ der Formelmenge:
  - Einstellige Prädikate: $horse, animal$
  - Zweistellige Prädikate: $faster$
  - Individuenkonstanten: $joker, blackbeauty$
  - Funktionen: $fatherOf$

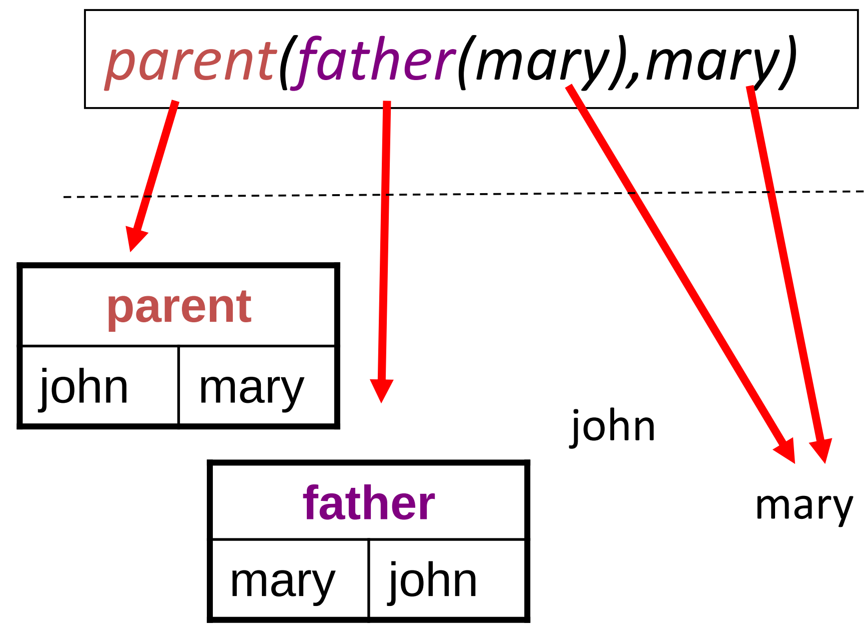
- Funktionen und mehrstellige Prädikate lassen sich in dieser Darstellung sich nur schwer veranschaulichen

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Interpretation, veranschaulicht II

- Wir machen es uns einfach und bilden Individuenkonstanten auf sich selbst ab
  - $I(mary) = mary$
  - $I(john) = john$
  - …
- Oft muss man weitere Individuen ins Universum aufnehmen

- Interpretation => Instanziierung einer Datenbank
- Prädikate und Funktionen werden zu Tabellen



$U = \{mary, john\}$

Model und Interpretation

- In den letzten Beispielen wurden Interpretationen gezeigt, bei denen es sich um Modelle handelt

- Interpretationen müssen keine Modelle sein!
  - Die Abbildung in das Universum kann so sein, dass das es „nicht zu der Formel passt“
  - Eine solche Abbildung ist dann kein Modell für die Formel
  - Es handelt sich dennoch um eine mögliche Interpretation

parent(father(mary),mary)

parent	
mary	mary

father	
mary	john

$U = \{mary, john\}$

Zurück zum Ernst des Lebens

- Veranschaulichungen erleichtern das Verständnis
  - Mengendiagramme oder
  - Datenbankrelationen

- Aber: Wir benötigen eine formale Definition
  - Funktioniert ähnlich wie die Definition der Syntax
  - Besteht eine logischer Ausdruck xy aus den Teilen x und y, dann muss sich $I(xy)$ ergeben aus $I(x)$ und $I(y)$
  - Dies müssen wir für alle Regeln, um aus einfachen Ausdrücken komplexe Ausdrücke zu machen, aufschreiben

Interpretation von Termen

- Gegeben ein Term $f(t_1, \dots, t_n)$ wobei f eine Funktion ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme, dann gilt $I(f(t_1, \dots, t_n)\ = I(f)(I(t_1), \dots, I(t_n))$
  - Zur Erinnerung
    - Für jede Individuenkonstante $a \in \sum$ gilt $I(a) \in U$
    - Für jede Variable $x \in \sum$ gilt $I(x) \in U$
    - Für jedes Funktionssymbol $F \in \sum$ mit Stelligkeit n ist $I(F)$ eine Funktion mit $I(F){:}\ U^n \rightarrow\ U$

father	
john	eddy
mary	john

- Beispiel:
  - $I\big(father(mary)\big) = I(father)(I(mary)) = john$

Interpretation von atomaren Formeln

- Wir führen die Wahrheitwerte w und f ein (wahr und falsch) und erweitern die Interpretation auf Formeln

- Gegeben ein Formel $F(t_1, \ldots, t_n)$ wobei F ein n-stelliges Prädikatsymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann gilt:
  - $I\big(F(t_1, \ldots, t_n)\big) = w$, g.d.w. $\langle I(t_1), \ldots, I(t_n)\rangle \in I(F)$
  - Ansonsten $I\big(F(t_1, \ldots, t_n)\big) = f$

- Beispiel:
  - $I(horse(joker)) \ = ?$
  - $I(horse) = \{lucky, joker, blackbeauty\}, \quad I(joker) = \ joker$
  - $I(joker) \in I(horse) \Rightarrow I\big(horse(joker)\big) = \ w$

horse
lucky
joker
blackbeauty

Redeweise und Vorausschau

- Man sagt auch
  - Die Interpretation I bildet die Formel α auf w (das Wahre) ab
  - α wird unter der Interpretation I wahr

- Für eine Formel α, die keine Tautologie oder Kontradiktion ist, kann man Interpretationen I und I' konstruieren für die gilt
  - α wird unter der Interpretation I wahr
  - α wird unter der Interpretation I' falsch

- **Bei der logischen Inferenz geht es immer darum Interpretationen zu konstruieren oder systematisch zu durchsuchen!**

Mehrstellige Prädikate vs Funktionen

loves	
alice	bob
bob	john
john	alice
alice	alice

father	
alice	bob
bob	john
john	alice
alice	alice

Nicht möglich!

- Das Prädikat $loves$ wird durch I auf eine Teilmenge aus $U\ x\ U$ abgebildet
- Die Funktion $father$ wird auf eine Funktion abgebildet, die ein Element aus U auf U abbildet

- $I(loves(\dots, \dots))$ ist wahr oder falsch
- $I(father(\dots))$ referenziert auf ein Individuum aus U

Wiederholung

- Sind α und β Formeln, so sind auch die folgenden Audrücke Formeln
  - $(\alpha \land \beta)$ (und, Konjunktion)
  - $(\alpha \lor \beta)$ (oder, Disjunktion)
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$ (wenn dann, Subjunktion)
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ (genau dann wenn, Bisubjunktion)
  - $\neg\alpha$ (nicht, Negation)

- Beispiele
  - $hungry(anna) \land hungry\big(father(anna)\big)$
  - $\neg hungry(anna) \rightarrow \neg(married(alice, bob) \lor \neg rich(bob))$

Interpretation logischer Junktoren

- Sind α und β Formeln, so gilt
  - $I(\alpha \wedge \beta) = w$ g.d.w. $I(\alpha) = w, \ I(\beta) = w$
  - $I(\alpha \vee \beta) = f$ g.d.w $I(\alpha) = f, \ I(\beta) = f$
  - $I(\alpha \rightarrow \beta) = f$ g.d.w $I(\alpha) = w, \ I(\beta) = f$
  - $I(\alpha \leftrightarrow \beta) = w$ g.d.w $I(\alpha) = I(\beta)$
  - $I(\neg\alpha) = w$ g.d.w $I(\alpha) = f$

- Kann man auch mittels Wahrheitstafeln (Wahrheitstabellen) veranschaulichen (nächste Folie)
  - Analog zur Aussagenlogik
  - Unterschied: Statt Aussagenvariablen betrachten wir atomare Formeln oder Formeln, die mittels obiger Regeln aus atomaren Formeln gebildet werden

Wahrheitstafeln

α	β	$\alpha \land \beta$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

α	β	$\alpha \lor \beta$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

α	$\neg\alpha$
f	w
w	f

Statt f und w wird auch oft 0 und 1 verwendet (oder f und t)

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Wiederholung

- Ist α eine Formel und ist x eine Variable, so sind auch die folgenden Audrücke Formeln
  - $\forall x\ \alpha$ (für alle, Allquantor)
  - $\exists x\ \alpha$ (es existiert, Existenzquantor)

- Beispiele
  - $\forall x\ (hungry(x) \rightarrow tired(x))$
  - $\exists x\ (philosopher(x) \wedge smart(x))$

- Als letzten Schritt müssen wir nun definieren wie die Interpretation für Formeln dieser Art definiert ist

Interpretation von Quantoren

- Ist α eine Formel, dann gilt
  - $I(\forall x\ \alpha) = w$ g.d.w. Für jedes $x_u \in U$ gilt $I_{|\mathrm{x},\mathrm{x_u}|}(\alpha) = w$
  - $I(\exists x\ \alpha) = w$ g.d.w. Es ein $x_u \in U$ gibt mit $I_{|\mathrm{x},\mathrm{x_u}|}(\alpha) = w$

- Dabei bezeichnet $I_{|\mathrm{x},\mathrm{x_u}|}$ eine Interpretation, die mit I übereinstimmt bis auf die Zuweisung eines Wertes an die Variable x, die unter I den Wert $I(x)$ unter $I_{|\mathrm{x},\mathrm{x_u}|}$ jedoch den Wert x_u erhält
  - Wir wollen $I_{|\mathrm{x},\mathrm{x_u}|}$ die $\mathrm{x}, \mathrm{x_u}$ Variante von I nennen

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Interpretation von Quantoren

Nochmal vereinfacht dargestellt:

- Obwohl x eine Variable ist, wird x wie eine Konstante behandelt, wenn x nicht durch einen Quantor gebunden ist
  - Erinnerung
    - Für jede Individuenkonstante $a \in \Sigma$ gilt $I(a) \in U$
    - Für jede Variable $x \in \Sigma$ gilt $I(x) \in U$

- Wenn x durch einen Quantor gebunden wird, dann gilt:
  - Der Ausdruck $\forall x\ \alpha$ ist genau dann wahr, wenn α für jede mögliche Zurordnung von x auf ein Element des Universums wahr wird
  - Der Ausdruck $\exists x\ \alpha$ ist genau dann wahr, wenn es eine Zuordnung gibt für die α wahr wird

Interpretation und Model

- Wird die Formel α unter einer Interpretation I wahr, so nennt man I ein Modell für α

- Gegeben eine Formelmenge M, eine Interpretation I ist ein Modell für M, wenn I ein Modell für jede Formel in M ist

- Modellbegriff in Bedeutung 1 und 2
  - Wir erstellen ein Modell$_1$ einer Domäne, indem wir eine Menge von Formeln erstellen
  - Wenn wir Inferenz auf die Formeln anwenden, dann beschäftigen wir uns mit Modellen$_2$ dieser Formeln

- Wir betrachten im folgenden einige Beispiele, bei denen wir versuchen, Modelle$_2$ zu konstruieren

Beispiel I

$$\exists x\ happy(x) \wedge \neg happy(egon)$$

$$U = \{mary, john, egon\}$$

$I =$

happy
mary
john

- $I(mary) = mary$
- $I(john) = john$
- $I(egon) = egon$
- $I(x) = egon$

Die Interpretation geben wir in Zukunft für Variablen und Individuenkonstanten nicht mehr an

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel II

$$\forall x\ (happy(x) \land \neg happy(egon))$$

$U = \{mary, john, egon\}$

$I =$

happy
mary
john

✗

$U = \{mary, john, egon\}$

$I =$

happy
mary
john
egon

✗

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel III

$$\forall x\ \exists y\ (loves(x,y) \land \neg equals(x,y))$$

$U = \{mary\}$

$I =$

loves	
mary	mary

equals

$U = \{mary, john\}$

$I =$

loves	
mary	mary
john	john

equals	
mary	john
john	mary

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel IV

$$\forall x\ (unicorn(x) \rightarrow \neg dragon(x))$$

$$\exists xy\ (unicorn(x) \wedge dragon(y) \wedge father(x, y))$$

$$\forall x \forall y\ (related(x, y) \rightarrow \big(dragon(x) \rightarrow \neg unicorn(y)\big))$$

$$\forall x \forall y\ (father(x, y) \rightarrow related(x, y))$$

$$\exists x\ dragon(x)$$

Gibt es ein Modell?
Wenn ja, wie sieht das Modell aus?

Beispiel IV - Modell

$\forall x\ (unicorn(x) \rightarrow \neg dragon(x))$ ✓

$\exists xy\ (unicorn(x) \wedge dragon(y) \wedge father(x, y))$

$\forall x \forall y\ (related(x, y) \rightarrow \big(dragon(x) \rightarrow \neg unicorn(y)\big))$

$\forall x \forall y\ (father(x, y) \rightarrow related(x, y))$

$\exists x\ dragon(x)$ ✓

$U\ =\ \{u1, d1\}$

unicorn
u1

dragon
d1

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel IV - Modell

$\forall x\ (unicorn(x) \rightarrow \neg dragon(x))$ ✓

$\exists x\ \exists y\ (unicorn(x) \wedge dragon(y) \wedge father(x,y))$ ✓

$\forall x \forall y\ (related(x,y) \rightarrow (dragon(x) \rightarrow \neg unicorn(y)))$ ✓

$\forall x \forall y\ (father(x,y) \rightarrow related(x,y))$ ✓

$\exists x\ dragon(x)$ ✓

$U\ =\ \{u1, d1\}$

unicorn
u1

dragon
d1

father	
u1	d1

related	
u1	d1

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel IV (Variante)

$\forall x\ (unicorn(x) \rightarrow \neg dragon(x))$ ✓

$\exists xy\ (unicorn(x) \wedge dragon(y) \wedge father(x,y))$ ✓

$\forall x \forall y\ (related(x,y) \rightarrow \big(dragon(x) \rightarrow \neg unicorn(y)\big))$ ✗

$\forall x \forall y\ (father(x,y) \rightarrow related(x,y))$ ✓

$\exists x\ dragon(x)$ ✓

$\forall x \forall y\ (related(x,y) \leftrightarrow related(y,x))$ ✓

$U = \{u1, d1\}$

unicorn
u1

dragon
d1

father	
u1	d1

related	
u1	d1
d1	u1

Wichtige Begriffe

Zum Teil in diesem Foliensatz eingeführt,

zum Teil bereits in dem Foliensatz über Aussagenlogik

Aber: Besser zweimal hören und einmal verstehen,

statt einmal hören, und keinmal verstehen

Interpretation und Model

- Wird die Formel α unter der Interpretation I wahr, so nennt man I ein Modell für α

- Ist eine Formelmenge $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ gegeben, so betrachtet man diese als Konjunktion $m_1 \land \ldots \land m_n$

- Dass eine Interpretation I ein Modell von M ist, ist somit gleichbedeutend damit, dass I ein Modell für $m_1 \land \ldots \land m_n$ ist
  – Wir sprechen im folgenden oft über einzelne Formeln und schließen damit Formelmengen mit ein

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Kontradiktion, Tautologie, Erfüllbarkeit

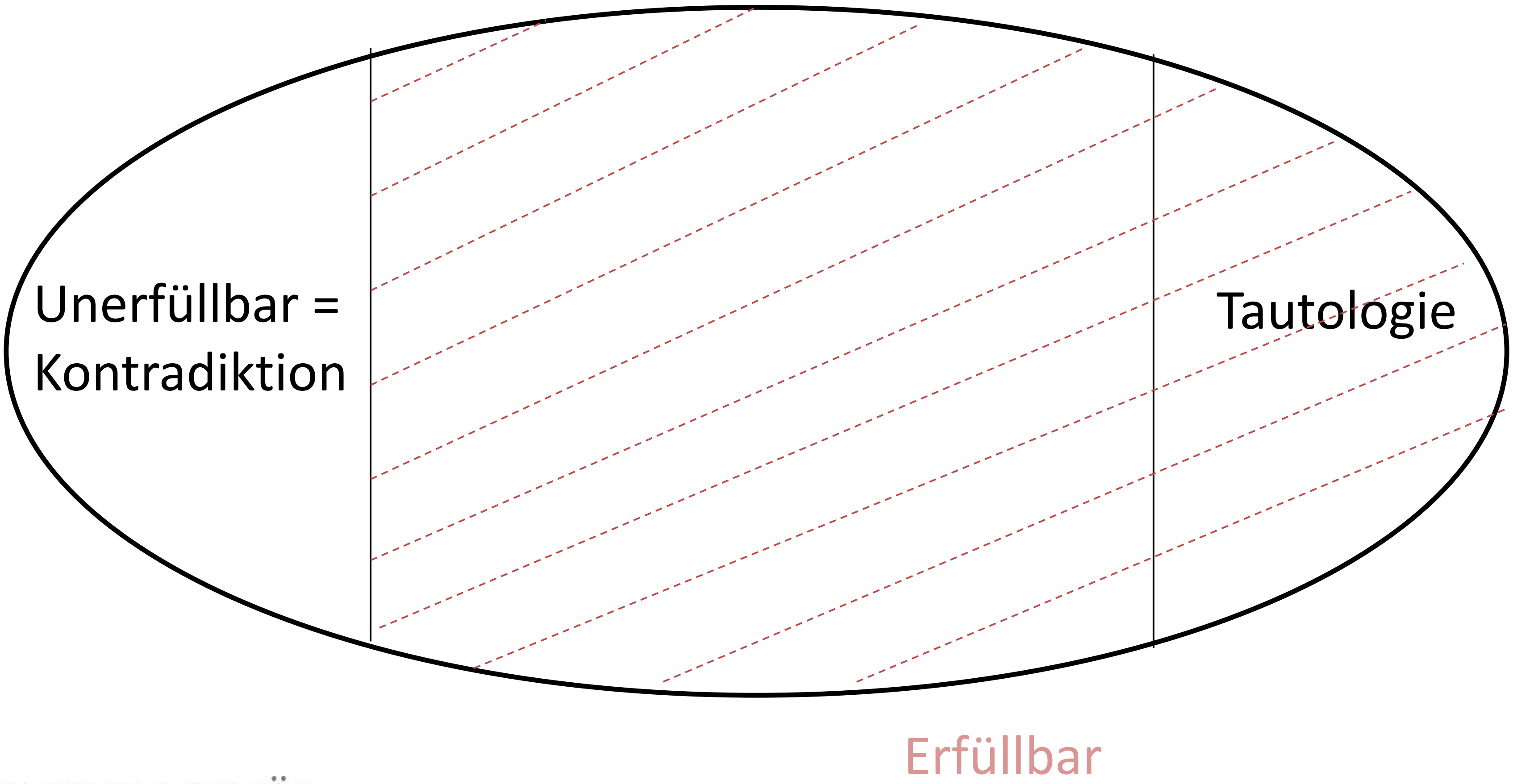
- Eine Formel α ist eine Kontradiktion genau dann, wenn es keine Interpretation I gibt, so dass I ein Modell für α ist
  – Man nennt eine solche Formel auch unerfüllbar

- Eine Formel α ist eine Tautologie genau dann, wenn jede Interpretation I ein Modell für α ist

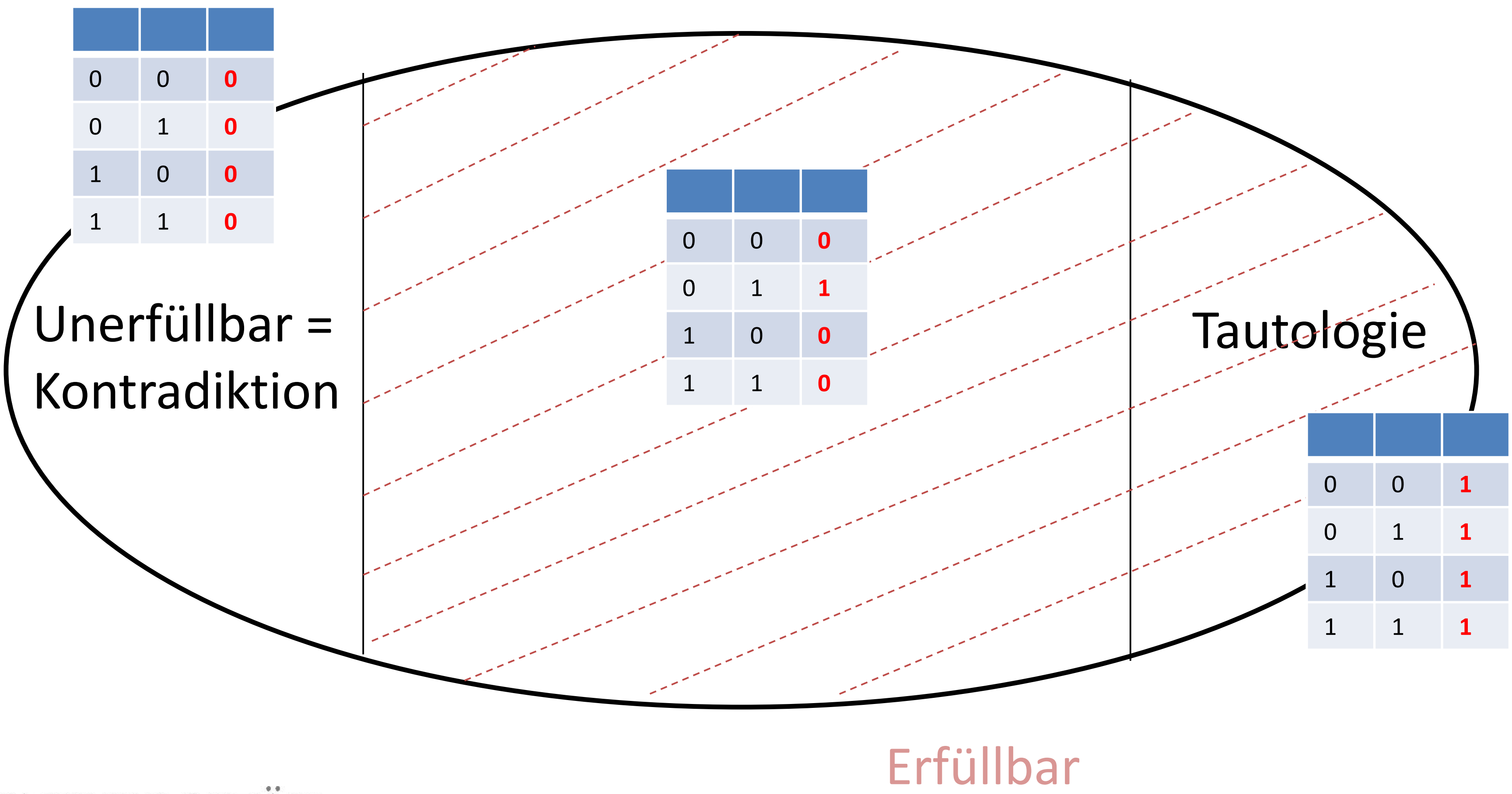
- Eine Formel α ist erfüllbar genau dann, wenn es eine Interpretation I gibt, die ein Modell für α ist

Kontradiktion, Tautologie, Erfüllbarkeit

Die Menge aller Formeln zerfällt in diese drei Gruppen:



Kontradiktion, Tautologie, Erfüllbarkeit



0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**0**

0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Äquivalenz

- Zwei Formeln α und β sind äquivalent, wenn jedes Modell für α auch ein Modell für β ist und umgekehrt

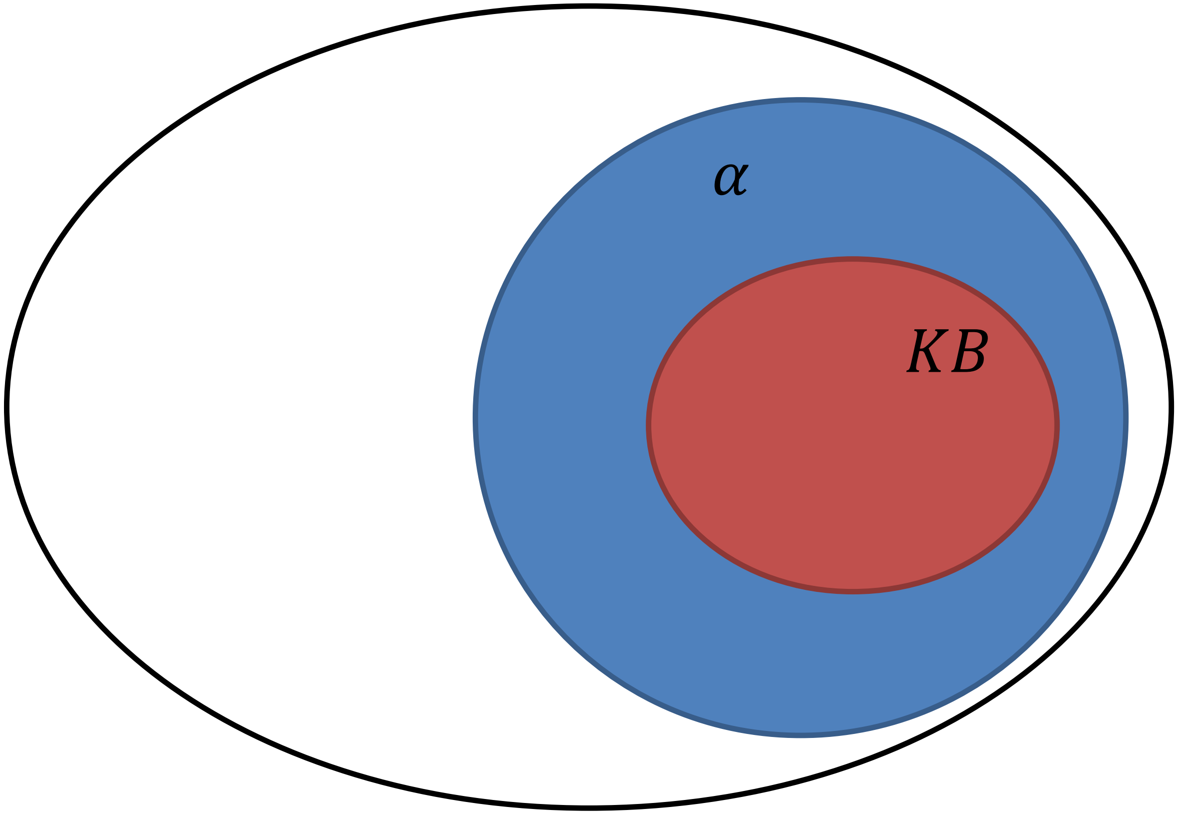
- Man kann eine Formel durch Anwendung syntaktischer Umformungsregeln in eine äquivalente Formel umformen
  - Man nennt eine solche Umformung Äquivalenzumformung
  - Es gibt eine ganze Reihe von Umformungsregeln
  - Aufgrund der Definition von I kann man von jeder Umformungsregeln ihre Korrektheit beweisen
  - Wir schreiben $\alpha \Leftrightarrow \beta$ genau dann, wenn α äquivalent zu β ist

Logisches Schließen

- Es sei KB eine Menge (= Konjunktion) von Formeln
  - KB steht für Knowledge Base
  - Eine Knowledge Base ist eine Sammlung von Formeln, die unser Wissen über einen bestimmten Bereich der Welt repräsentiert
    - Wissen über allgemeine Beziehungen
    - Beobachtungen konkreter Sachverhalte
- Man sagt α folgt aus KB, genau dann wenn jedes Modell für KB auch ein Modell für α ist
- Kurz-Schreibweise: $KB \models \alpha$

Mengendarstellung

- $KB \vDash \alpha$



Alle Interpretationen

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beweis durch Widerspruch

- Folgerung kann man zeigen, in dem man beweist, dass jedes Modell für KB auch ein Modell für α ist
  - Aufwendig, da man (eigentlich) alle Modelle für KB durchgehen muss
  - Es gibt in der Regel unendlich viele Modelle da U unendlich viele Elemente haben kann

- Oft ist eine indirekte Vorgehensweise einfacher:
  - Beweis durch Widerspruch

- Man zeigt, dass es kein Modell für KB und $\neg\alpha$ gibt
  - Man versucht ein Modell zu konstruieren, und wenn man dabei scheitert, dann weiß man das die Folgerungsbeziehung besteht

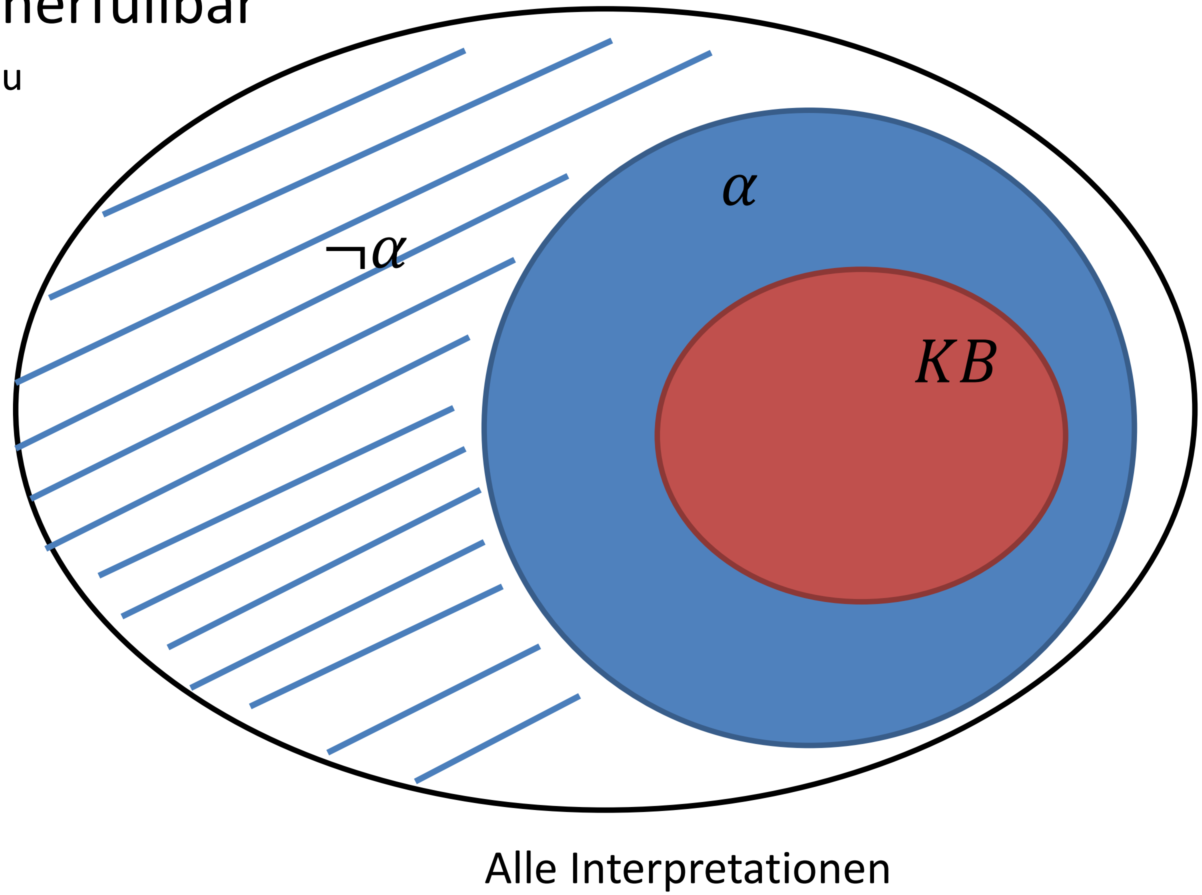
UNIVERSITÄT MANNHEIM

Mengendarstellung

- $KB \land \neg\alpha$ ist unerfüllbar

  ist äquivalent zu

- $KB \models \alpha$



Achtung: Unterschied beachten

- $KB \models \alpha$
  - α folgt aus KB

- $KB \models \neg\alpha$
  - $\neg\alpha$ folgt aus KB

- $KB \not\models \alpha$
  - Es ist nicht der Fall, dass α aus KB folgt

- $KB \not\models \neg\alpha$
  - Es ist nicht der Fall, dass $\neg\alpha$ aus KB folgt

Folgerung: Sonderfälle

- Aus einem Widerspruch folgt alles „*ex contradictione sequitur quodlibet*“
  - Es sei α eine beliebige Formel und KB sei eine Kontradiktion
  - Jedes Modell für KB ist auch ein Modell für α, bzw. es existiert kein Modell für $KB \land \neg\alpha$
  - $KB \vDash \alpha$
- Eine Tautologie folgt aus allem
  - Es sei α eine Tautologie und KB eine beliebige Formelmenge
  - Jedes Modell für KB ist auch ein Modell für α, denn jede Interpretation ist ein Modell für α
  - $KB \vDash \alpha$

Zusammenfassung

- Semantik = Wie die Bedeutung von komplexem von der Bedeutung seiner Teile abhängt
  - Formal: Die vollständige Definition von der Interpretationsabbildung
  - Interpretation von Termen
    - $I(ceo(ibm))$
  - Interpretation von atomaren Formeln
    - $I(worksFor(anna, ibm))$
  - Interpretation von logische Junktoren
    - $I(worksFor(anna, ibm) \land Manager(anna))$
  - Interpretation quantifizierte Formel
    - $I(\forall x\, worksFor(x, ibm) \rightarrow Manager(x))$

Darstellung von Interpretation

- Datenbankrelationen
- Mengen-Diagramme

- Interpretation, Modell, Folgerung, Äquivalenz und relevante Zusammenhänge

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Ausblick

- Modellieren und Übersetzen
  - Komplexeres Beispiel, in dem Inferenz angewendet wird
  - Viele Übersetzungsbeispiele
  - Typische Muster
  - Typische Fehler

- Danach geht es dann weiter mit Beschreibungslogik

- Fragen?