Wirtschaftsinformatik II – Stuckenschmidt/Meilicke

Syntax und Semantik: Aussagenlogik

Zentrale Konzepte und Einschränkungen

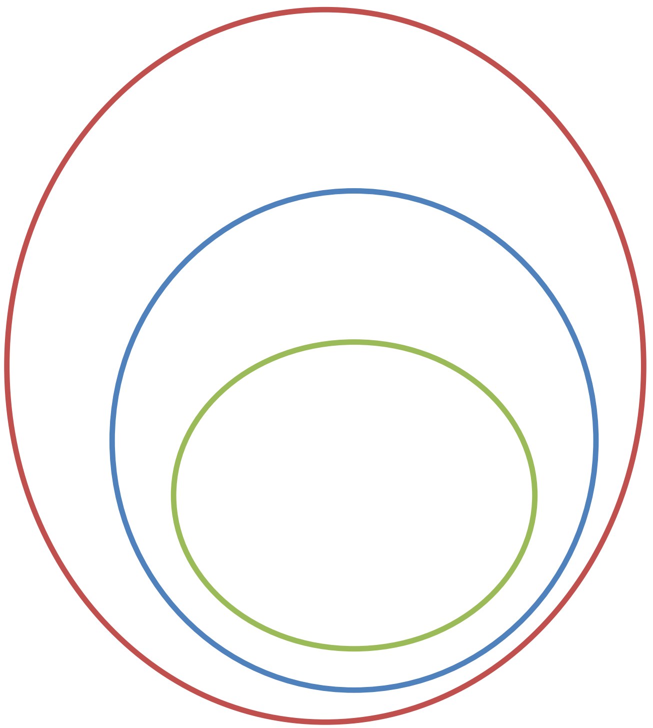
AUSSAGENLOGIK

GRUNDLAGEN

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Logische Sprachen

- Aussagenlogik
  - $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
  - Kräht der Hahn auf dem Mist ändert sich's Wetter - oder's bleibt wie es ist
- Beschreibungslogik
  - $\mathrm{M} \sqsubseteq \mathrm{S}$
  - Alle Menschen sind sterblich
- Prädikatenlogik
  - $\forall x\, M(x) \rightarrow S(x)$
  - Alle Menschen sind sterblich



Syntax und Semantik

- Die Syntax einer Logik bestimmt, wie sich komplexe Ausdrücke aus einfachen und komplexen Ausdrücken zusammensetzen
  - Terme und Formeln, Klammersetzung
  - Die Syntax einer Logik entspricht der Grammatik einer Sprache

- Die Semantik einer Logik erklärt, wie sich die Bedeutung komplexer Ausdrücke aus der Bedeutung ihrer Bestandteile ergibt
  - Interpretation, Modell, Erfüllbarkeit, Folgerung, …

- Syntax und Semantik müssen für jede Logik spezifiziert werden
  - Im folgenden für Aussagenlogik

Aussagenlogik Prinzip

- Aussagenlogik (propositional logic) befasst sich mit damit wie komplexe Aussagen von einfachen Aussagen (Propositionen) abhängen

- Einfache Aussagen werden dabei nicht weiter zerlegt
  - Ein Satz wie „IBM ist ein IT Unternehmen" wird als eine ausagenlogische Variable, z.B. als die Proposition a aufgefasst
  - Die Proposition a hat den Wert wahr (1) oder falsch (0)
    - Deshalb nennt man eine Proposition auch Variable!

- Komplexe Zusammenhänge durch logische Junktoren
  - $\neg(a \land b) \lor (c \leftrightarrow d)$

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Aussagenlogik Bausteine

- Aussagelogische Variablen (Propositionen)
  - $a, b, c, \ldots$
- Junktoren
  - $\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \neg$
- Klammern
  - (,)

Syntax

- Eine aussagenlogische Variable ist eine aussagenlogische Formel

- Wenn α und β Formeln sind, dann sind auch

$\neg\alpha$	(Negation, „nicht“)
$(\alpha \wedge \beta)$	(Konjunktion, „und“)
$(\alpha \vee \beta)$	(Disjunktion, „oder“)
$(\alpha \rightarrow \beta)$	(Subjunktion, auch Implikation, „wenn dann“)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	(Bisubjunktion, auch Äquivalenz, „g.d.w“)

  Formeln.

- Eine Proposition oder deren Negation nennt man Literal
  – Ein Literal ohne Negation nennt man positiv (z.B. a)
  – Ein Literal mit Negation nennt man negativ (z.B. $\neg a$)

Klammerersparnisregeln

- Die äußeren Klammern einer Formel können weggelassen werden
  - D.h. statt $\left((a \wedge b) \leftrightarrow \neg c\right)$ kann man auch schreiben $(a \wedge b) \leftrightarrow \neg c$
- Konjunktion und Disjunktion bindet stärker als Subjunktion und Bisubjunktion
  - D.h. statt $(\mathrm{a} \wedge b) \leftrightarrow \neg c$ kann man auch schreiben $\mathrm{a} \wedge \mathrm{b} \leftrightarrow \neg c$
- Negation bindet nur die Formel, die direkt neben ihr steht
  - $\neg a \vee b$ ist <u>nicht</u> dasselbe wie $\neg(a \vee b)$
  - $\neg a \vee b$ ist dasselbe wie $(\neg a) \vee b$

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Klammerersparnisregeln

- Auch wenn wir noch nicht definiert haben, was Äquivalenz bedeutet, gilt ...
- Da $(\alpha \land \beta) \land \gamma$ äquivalent ist zu $\alpha \land (\beta \land \gamma)$, können die Klammern wegelassen werden
  - Gilt im allgemeinen für eine Konjunktion von beliebig vielen Formeln (Rekursion)
  - Für bestimmte Algorithmen (z.B. im Tableauverfahren) wird in solchen Fällen eine Klammerung vorausgesetzt, die dann beliebig gewählt werden kann
- Dasselbe gilt für die Disjunktion (oben $\land$ ersetzen durch $\lor$)

Kleine Übung

Welche Klammern kann man weglassen?

1. $\Big(\big((a \wedge b) \vee c\big) \rightarrow (a \vee b)\Big)$
2. $\Big(\Big(\big((a \wedge b) \vee c\big) \rightarrow a\Big) \vee b\Big)$
3. $\Big(\big((a \wedge b) \wedge d\big) \wedge a\Big)$

- Achtung: Wir haben keine Regeln definiert, die aussagen, ob ∧ oder ∨ stärker bindet, diesbezüglich können wir also keine Klammern weglassen

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Syntax

- Alles, was nach diesen Regeln gebildet wird, ist eine aussagenlogische Formel
  - D.h. die letzten Folien spezifizieren die Syntax der Aussagenlogik vollständig (= 2 Folien ohne Klammerersparnisregeln)

- Achtung: Die Syntax anderer Logiken ist deutlich komplizierter
  - Insbesondere kommen dann Regeln dazu, bei denen es darum geht, wie Formeln aus Bestandteilen zusammengesetzt sind, die selbst keine Formeln sind

Nochmal: Syntax und Semantik

- Die Syntax einer Logik bestimmt wie sich komplexe Ausdrücke aus einfachen und komplexen Ausdrücken zusammensetzen
  - Terme und Formeln, Klammersetzung
  - Die Syntax einer Logik entspricht der Grammatik einer Sprache

√

- Die Semantik einer Logik erklärt, wie sich die Bedeutung komplexer Ausdrücke aus der Bedeutung ihrer Bestandteile ergibt
  - Interpretation, Modell, Erfüllbarkeit, Folgerung, …

?

Semantik

- Es sei Σ eine Menge von aussagenlogischen Variablen
- Eine Interpretation I für Σ ist eine Abbildung, die jedes $x \in \Sigma$ auf falsch (= f) oder wahr (= w) abbildet
  - Alternativ kann man die Wahrheitswerte auch mittels 0 (falsch) und 1 (wahr) benennen
  - Beispiel: $\Sigma = \{a, b\}$, dann ist durch $I(a) = f$ und $I(b) = w$ eine Interpretation für Σ definiert
- Die Semantik legt fest, worauf eine Interpretation I für $\sum$ eine aussagenlogische Formel abbildet, die aus den Elementen in $\sum$ gebildet ist

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Semantik

- Sind α und β Formeln, so gilt
  - $I(\alpha \wedge \beta) = w$ g.d.w. $I(\alpha) = w,\ I(\beta) = w$
  - $I(\alpha \vee \beta) = f$ g.d.w $I(\alpha) = f,\ I(\beta) = f$
  - $I(\alpha \rightarrow \beta) = f$ g.d.w $I(\alpha) = w,\ I(\beta) = f$
  - $I(\alpha \leftrightarrow \beta) = w$ g.d.w $I(\alpha) = I(\beta)$
  - $I(\neg\alpha) = w$ g.d.w $I(\alpha) = f$
- Dies kann man auch mittels Wahrheitstafeln/tabellen veranschaulichen

Semantik

α	β	$\alpha \wedge \beta$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

α	β	$\alpha \vee \beta$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

α	$\neg\alpha$
f	w
w	f

Semantik

- Wenn für eine Formel α und eine Interpretation I gilt $I(\alpha) = w$, dann sagt man auch dass I ein Modell für α ist

- Wenn α ein Modell hat (d.h., wenn es eine Interpretation gibt, die ein Modell ist), dann sagt man auch, dass α erfüllbar ist

- Wenn jede Interpretation für α ein Modell ist, dann ist α eine Tautologie (man sagt auch dass α gültig ist)

- Wenn α kein Modell hat, dann nennt man α unerfüllbar oder eine Kontradiktion

Semantik

- Zwei Formeln α und β sind äquivalent, wenn jedes Modell für α auch ein Modell für β ist, und umgekehrt

- Eine Formel β folgt aus einer Formel α genau dann, wenn jedes Modell für α auch ein Modell für β ist

- Wenn β aus α folgt, dann schreibt man auch $\alpha \vDash \beta$

Hahn auf dem Mist

- Ein Beispiel für eine Tautologie haben wir bereits kennengelernt
  - Kräht der Hahn auf dem Mist ändert sich's Wetter - oder's bleibt wie es ist.
  - Übersetzung: $p \rightarrow (q \vee \neg q)$

p	q	$p \rightarrow (q \vee \neg q)$
f	f	**w** w
f	w	**w** w
w	f	**w** w
w	w	**w** w

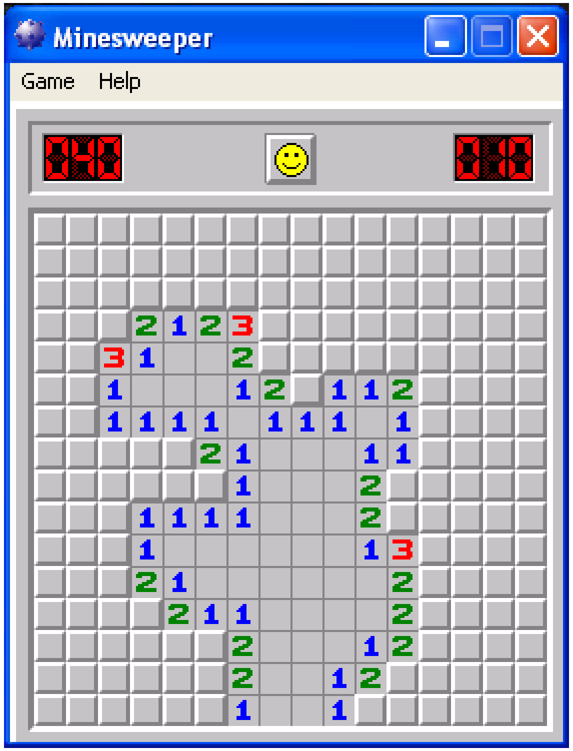
Hahn auf dem Mist

- Ein Beispiel für eine Tautologie haben wir bereits kennengelernt
  - Kräht der Hahn auf dem Mist ändert sich's Wetter - oder's bleibt wie es ist.
  - Übersetzung: $p \rightarrow (q \vee \neg q)$

- Man kann Erfüllbarkeit und ähnliche Begriffe mit SAT Solvern überprüfen (allgemein: Reasoner)
  - http://fmv.jku.at/limboole/ (einfach zu verwenden)
  - Kleine Demo („valid = gültig = Tautologie“)!

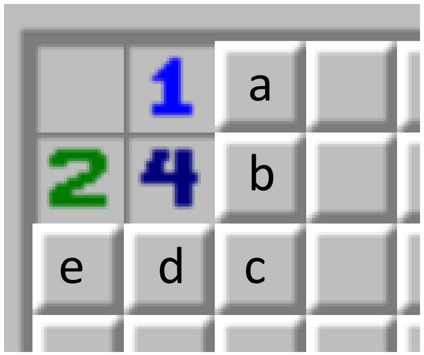
Minesweeper

- Auch komplexe Sachverhalte können mit Aussagenlogik ausgedrückt werden
  - Solange eine feste Anzahl an endlich vielen Objekten beschrieben wird



- Minesweeper als Beispiel
  - Programmierprojekt in der Vorlesung „Künstliche Intelligenz“
  - Die Zahl auf einem Feld kann man ausdrücken als Disjunktion von Konjunktionen (DNF)

Beispiel



Mit Aussagenlogik kann man nicht nur Schaltungen designen!

Positives Literal bedeutet, dass auf dem entsprechenden Feld eine Mine ist

- Aufgedeckte „1“
  - $(a \ \land \neg b) \lor (\neg a \ \land b)$
- Aufgedeckte „4“
  - $(a \ \land b \land c \land d \land \neg e) \ \lor (a \ \land b \land c \land \neg d \land e) \lor$ …
- Aufgedeckte „2“
  - $(d \land e)$

- Alles zusammen in eine Wissensbasis KB stecken, dann gilt z.B. $KB \ \vDash c$

Wissensbasis

- Der Folgerungsbegriff ist ein Begriff, der bei (fast) jeder Logik im Zentrum steht

- Oft stellt sich die Frage, ob eine Aussage aus einer Menge gegebener Aussagen (Beobachtungen + allgemeines Wissen) folgt
  – Zum Beispiel, ob im Rahmen eines Arguments die Konlusion aus den Prämissen folgt (siehe nächste Folie)
  – Oder ob aus einer umfangreichen Wissenbasis KB = $\{a_1, \dots, a_n\}$ folgt, dass *H.Schmidt ein Experte im Gebiet XML Datenbanken* ist

- In dem Fall ist mit $KB \vDash \alpha$ gemeint, dass α aus der Konjunktion $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ folgt

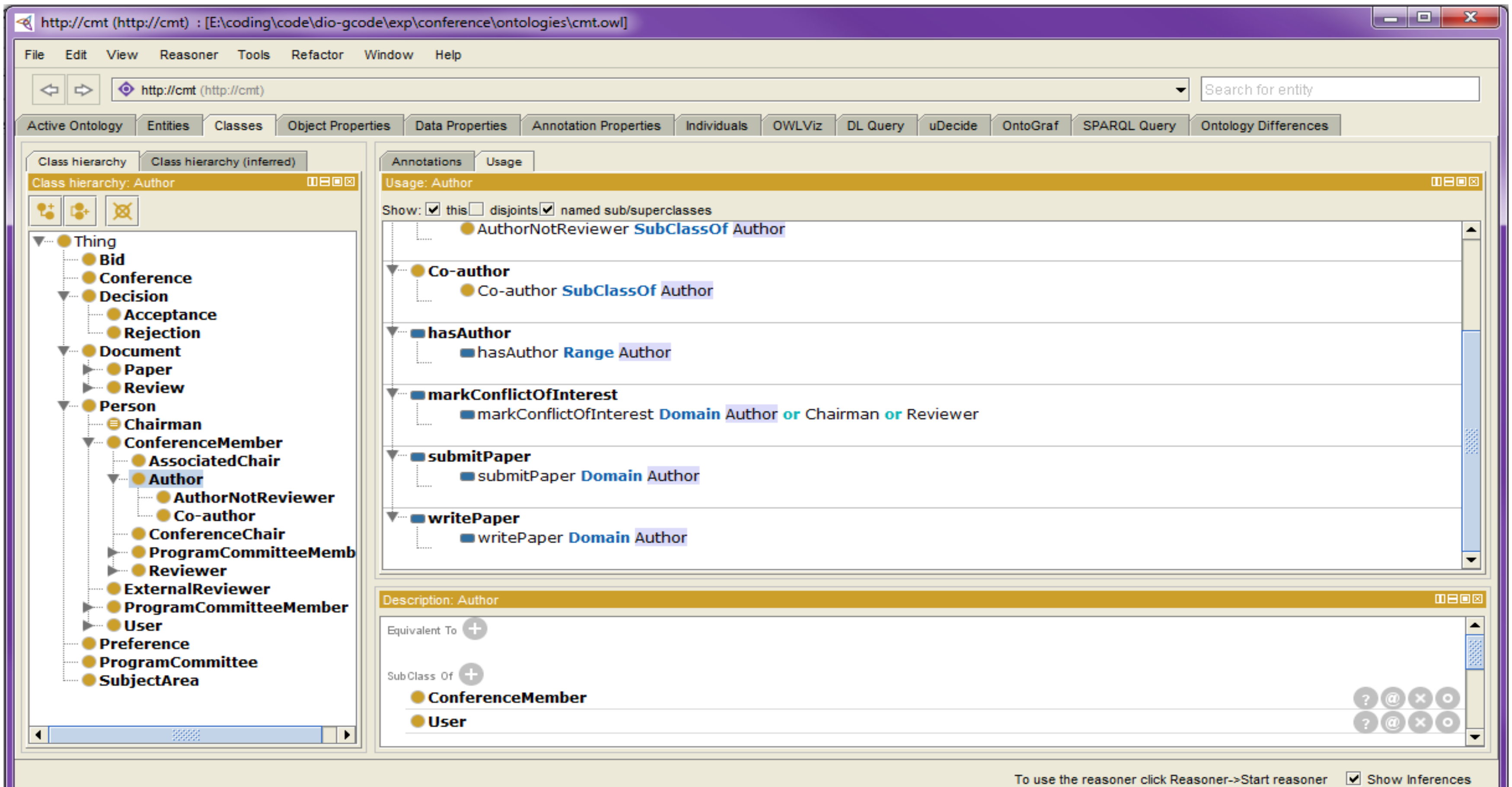
Syllogismus

Alle Menschen sind sterblich	a
Sokrates ist ein Mensch	b
Sokrates ist sterblich	c

- Einfache Aussagen werden nicht weiter zerlegt
  - Damit werden viele eigentlich einfache logische Zusammenhänge unbegründbar
  - Idee: Logik muss auch in der Lage sein „innere Zusammenhänge“ von Sätzen abzubilden
  - Beschreibungslogik und Prädikatenlogik sind dazu in der Lage!

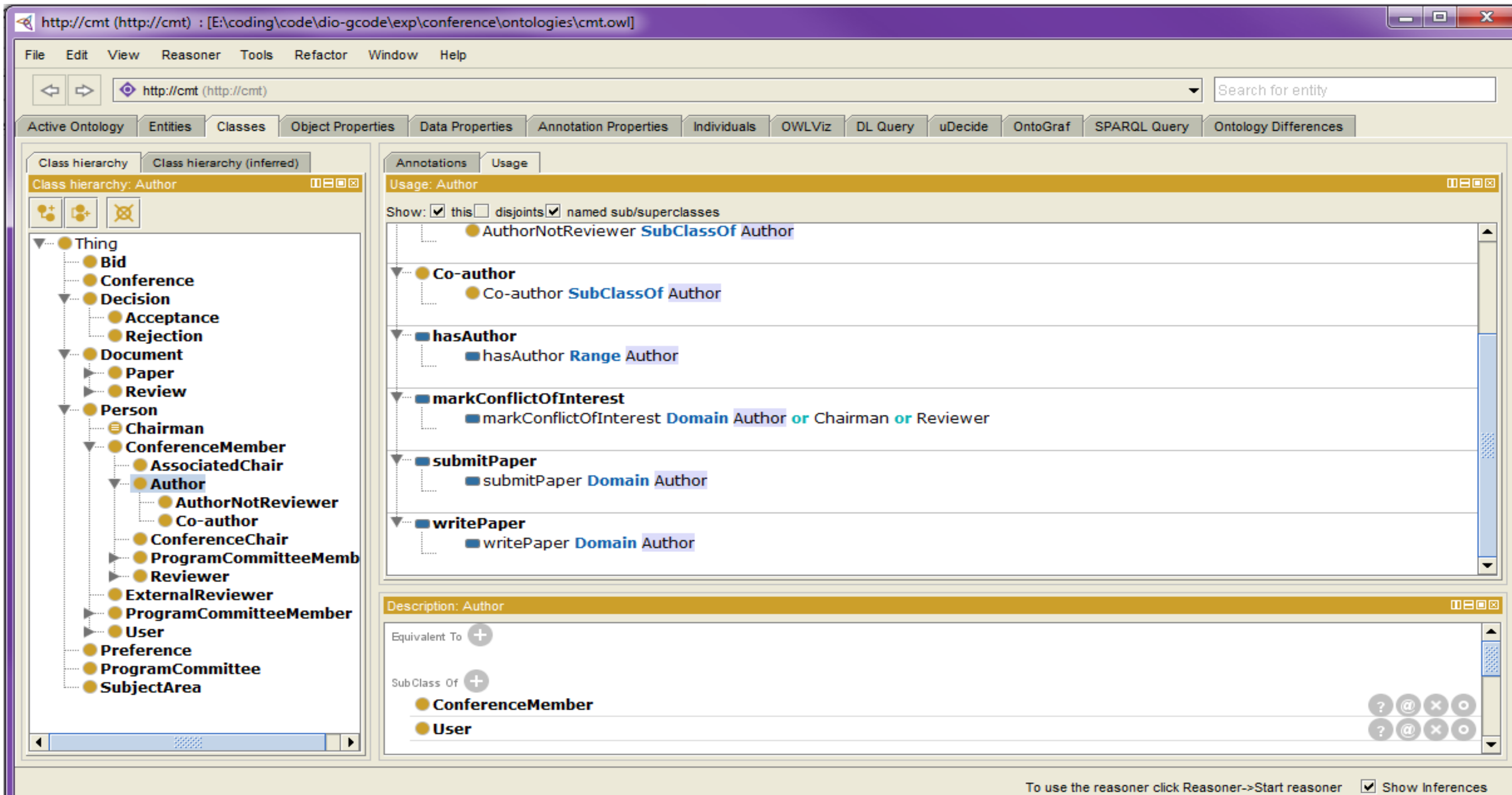
Konzepthierarchie / komplexe Strukturen

- Viele Modellierungsaufgaben können daher nur ungenügend mit Aussagenlogik gelöst werden



Konzepthierarchie / komplexe Strukturen

- ENDE von Teil 1:
  - Modellieren einer Domänen-Ontologie mit dem Tool Protege



Zusammenfassung

- Jede Logik benötigt Syntax und Semantik
  - Für Aussagenlogik ist beides sehr einfach und überschaubar
  - Zentrale Begriffe sind Interpretation und Modell
- Komplexe Modellierungsaufgaben benötigen andere Logiken
  - Insbesondere ist es notwendig, die Bestandteile von Sätzen explizit darstellen zu können
    - Inferenzmechanismen werden mächtiger, aber auch komplexer und teurer (Laufzeit)
    - Bergiffshierarchien können erstellt werden (schließt auch große Teile von UML ein)

Ausblick

- Inferenz für Aussagenlogik
  - Direktes und indirektes Verfahren
  - Im Kontext des indirekten Verfahrens: Tableauverfahren um Erfüllbarkeit zu überprüfen

- Danach geht es weiter mit einer ausdruckstärkeren Logik