Wirtschaftsinformatik II – Stuckenschmidt/Meilicke

Die Syntax (= Grammatik) der Prädikatenlogik

Bausteine aus denen sich Formeln zusammensetzen

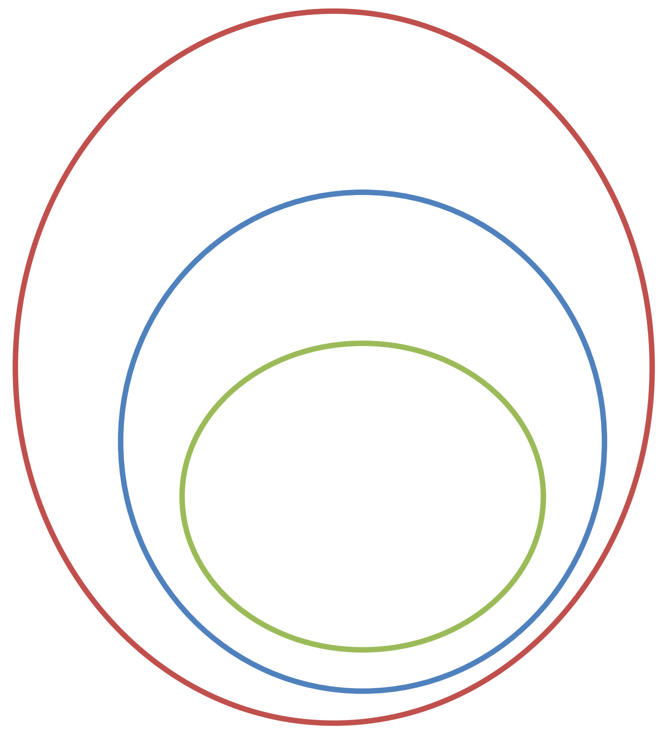
PRÄDIKATENLOGIK

SYNTAX

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Logische Sprachen

- Aussagenlogik
  - $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
  - Kräht der Hahn auf dem Mist ändert sich's Wetter - oder's bleibt wie es ist.
- Beschreibungslogik
  - $\mathrm{M} \sqsubseteq \mathrm{S}$
  - Alle Menschen sind sterblich
- Prädikatenlogik
  - $\forall x\ (M(x) \rightarrow S(x))$
  - Alle Menschen sind sterblich



Zur Erinnerung: Syntax und Semantik

- Die Syntax einer Logik bestimmt wie sich komplexe Ausdrücke aus einfachen und komplexen Ausdrücken zusammensetzen
  - Terme und Formeln (offen/geschlossen), Klammersetzung

- Die Syntax einer Logik entspricht der Grammatik einer Sprache

- Die Semantik einer Logik erklärt, wie sich die Bedeutung komplexer Ausdrücke aus der Bedeutung ihrer Bestandteile ergibt
  - Interpretation, Modell, Erfüllbarkeit, Folgerung, …

- In diesem Foliensatz geht es um die Syntax der Prädikatenlogik
  - Andere Bezeichnungen: Relationale Logik, First Order Logic, ...

Prädikatenlogik - Bausteine

- Logische Junktoren und Quantoren
  - $\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \neg \forall \exists$
- Individuenkonstanten
  - $a, b, c, paul, anna$
- Variablen
  - x, y, z
- Prädikate (Relationen)
  - $F, G, H, married, human$
- Funktionen
  - $f, g, age, father$

- Logische Junktoren AL
  - $\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \neg$
- Aussagevariablen
  - a, b, c

Variable in PL $\neq$ Aussagenvariable in AL

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Terme

- Wohlgeformte Ausdrücke: Terme und Formeln

- Terme stehen für bestimmte oder unbestimmte Individuen
  - Eine Individuenkonstante ist ein Term
  - Eine Variable ist ein Term
  - Ist f eine Funktion mit Stelligkeit n und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term

- Beispiele
  - $anna, x$
  - $father(x), father(anna), father\big(mother(anna)\big)$
  - $salary(stuckenschmidt, unima), 42, sum(39{,}3)$

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Frage

- Wie viele Terme kann man in dem folgenden Satz identifizieren:

Die Schönheit des höchsten Berges in Deutschland ist atemberaubend.

1, 2, 3, 4, 5?

Konkrete Beispiele

- Terme sind rot markiert
  - Die [Schönheit der [höchsten Berges in [Deutschland]]] ist atemberaubend
  - Anton ist verwandt mit Hans
  - Der [Vater von [Anne]] arbeitet bei IBM
  - Die [Zinsen des [Kontos 0815]] liegen bei unter 5%
- Ausdrücke in natürlicher Sprache entsprechen Termen, wenn sie etwas einzelnes benennen
  - Eigenname, bestimmter Artikel, ...

Formeln I

- Ist P ein Prädikat mit Stelligkeit n und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel

- Beispiele:
  - $hungry(anna), equals(anna, bob), hungry\big(father(anna)\big)$
  - $hungry(x), hungry(father(x))$

- $hungry$ ist ein einstelliges Prädikat, $equals$ ist ein zweistelliges Prädikat, $livedFromTo$ wäre ein dreistelliges Prädikat (meist kommt man mit zwei Stellen aus)

Konkrete Beispiele

- Prädikate (Relationen) sind blau markiert
- Terme sind rot markiert

  - Black Beauty ist ein Pferd
  - Hans ist verwandt mit Dieter
  - Die Mutter von Hans trägt eine Brille
  - 24 ist kleiner als 42
  - Die Summe von 2 und 4 ist weniger als 42

Zwei Bedeutungen von “ist”

- Vorsicht ist geboten bei dem Wörtchen „ist“:

  (1) Black Beauty ist ein Pferd vs.

  (2) Black Beauty ist der Gewinner des Großen Preises von Deutschland

- In (1) wird das Wort „ist“ verwendet, um damit anzuzeigen, dass ein Individuum unter ein Prädikat fällt
  - $horse(blackbeauty)$

- In (2) wird das Wort „ist“ verwendet, um Identität (=) zwischen zwei Individuen auszudrücken
  - $equals(blackbeauty, winner(gpg))$
  - Oder: $blackbeauty = winner(gpg)$

Formeln II

- Sind α und β Formeln, so sind auch die folgenden Audrücke Formeln
  - $(\alpha \wedge \beta)$ (und, Konjunktion)
  - $(\alpha \vee \beta)$ (oder, Disjunktion)
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$ (wenn dann, Subjunktion)
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ (genau dann wenn, Bisubjunktion)
  - $\neg\alpha$ (nicht, Negation)

Wie Aussagenlogik

- Beispiele
  - $hungry(anna) \wedge hungry\big(father(anna)\big)$
  - $\neg hungry(anna) \rightarrow \neg(married(alice, bob) \vee \neg rich(bob))$

- Es gelten die Klammerregeln aus dem Foliensatz zu Aussagenlogik!

Konkrete Beispiele

- Prädikatensymbole sind blau markiert
- Terme sind rot markiert
- Logische Junktoren sind grün markiert

  - Black Beauty ist ein Pferd und Lassie ist ein Hund
  - Wenn der Aktienkurs von Google steigt, dann steigt auch der Aktienkurs von Apple
  - Jan geht ins Kino oder er geht ins Theater
  - Achtung: Google und Microsoft sind Konkurrenten

- Im allgemeinen ist keine 1:1 Zuordnung möglich, weil die natürliche Sprache eben nicht so exakt und eindeutig ist wie eine künstliche Sprache

Formeln

- Ist α eine Formel und ist x eine Variable, so sind auch die folgenden Audrücke Formeln
  - $\forall x\ \alpha$ (für alle, Allquantor)
  - $\exists x\ \alpha$ (es existiert, Existenzquantor)

- Beispiele
  - $\forall x\ (hungry(x) \rightarrow tired(x))$
  - $\exists x\ (philosopher(x) \wedge smart(x))$
  - $\forall x\ (human(x) \rightarrow \exists y\ fatherOf(y, x))$
  - $\forall x\ (\forall y\ tired(anna))$

Formeln, ja oder nein?

$$\forall x\ (loves(anna, bob) \rightarrow loves(bob, anna))$$
$$loves(x, anna) \rightarrow\ loves(bob, x)$$
$$\forall x\ loves(x, x)\ \wedge hates(x, x)$$
$$\exists x\ (human(x) \wedge \forall y\ loves(x, y))$$

- Ja!
  - Bei der ersten Formel könnte man den Allquantor auch weglassen
- Ja!
  - Die zweite Formel ist keine behauptenden Aussage, sie ist aber syntaktisch korrekt
- Ja!
  - Allerdings sind die x in dem $hates$ Prädikat nicht gebunden
- Ja!
  - Verschachtelung ist erlaubt (rekursive Definition)

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Geschlossene und offene Formeln

- Man nennt eine Formel geschlossen, wenn alle in ihr vorkommenden Variablen durch Quantoren gebunden sind, andernfalls nennt man die Formel offen

- Geschlossene Formel
  - $\forall x\ (human(x) \rightarrow \exists y\ fatherOf(y, x))$

- Offene Formeln
  - $human(x) \vee \exists y\ tired(y)$
  - $\forall x\ (human(x) \vee\ hungry(y))$

- Geschlossene Formeln entsprechen behauptenden Aussagen der natürlichen Sprache, die wahr oder falsch sein können
- Offene Formeln haben kein (sinnvolles) Gegenstück in der natürlichen Sprache

Geltungsbereich von Quantoren

- $\boxed{\forall x\ (sad(x) \rightarrow \boxed{\neg\exists y\ loves(x,y))}}$ ✓
- $\boxed{\forall x\ sad(x)} \rightarrow \neg\boxed{\exists y\ loves(x,y)}$ ✓
  - Achtung: hier ist x im rot markierten Kasten nicht gebunden
- $\boxed{\forall x\ sad(x)} \rightarrow \boxed{\exists x\ wise(x)}$ ✓
- $\boxed{\forall x\ (sad(x) \rightarrow \boxed{\exists x\ wise(x))}}$ ✗
  - Nicht erlaubt, da die Variable x nicht gleichzeitig zweimal gebunden sein kann
  - Dieser Zusatz soll nun als Ergänzung der Syntaxregeln gelten!

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Konkrete Beispiele

- Prädikatensymbole sind blau markiert
- Terme sind rot markiert
- Logische Junktoren sind grün markiert
- Quantoren sind orange markiert

  – Alle Menschen sind sterblich
  – Es gibt eine Stadt, die schöner ist als die Hauptstadt von Deutschland
  – Jeder wird von jemandem geliebt
  – Es gibt mindesten zwei Primzahlen
  – Entweder sind alle Menschen sterblich oder es gibt unsterbliche Menschen

Ein komplexes Beispiel: Bücherei

Jedes Buch wurde von mindestens einer Person geschrieben. Personen, die Bücher schreiben, nennt man Autoren. Ein Buch ist entweder vom Typ Fiktion oder vom Typ Sachbuch. ...

- $\forall x \left(book(x) \rightarrow \exists y \left(person(y) \land writes(y, x) \right) \right)$
- $\forall x \left(\left(person(x) \land \exists y \left(\mathrm{writes}(x, y) \land book(y) \right) \right) \rightarrow author(x) \right)$
- $\forall x \left(book(x) \rightarrow \left(fictionalBook(x) \leftrightarrow \neg nonfictionalBook(x) \right) \right)$
- ...

Zusammenfassung

- Syntax = Grammatik einer Sprache
  - Die Bausteine und wie darf ich diese zusammensetzen
- Terme
  - Individuenkonstanten, Variablen, Funktionen in die man Terme einsetzt
- Formeln
  - Prädikate, in die man Terme einsetzt
  - Formeln, die durch Junktoren verbunden werden
  - Quantifizierte Formeln
    - Geschlossene und offene Formeln
- Einige Beispiele

Ausblick

- Semantik
  - Was ist die Bedeutung einer Formel
  - Interpretation und Modell
  - Inferenz und Konsistenz

- Übersetzen und Definieren
  - Beispiele, Beispiele, Beispiele, …
  - Typische Muster
  - Probleme beim Übersetzen