Wirtschaftsinformatik II – Stuckenschmidt/Meilicke

Inferenz Aussagenlogik

Direkter und indirekter Beweis mittels Tableauverfahren

AUSSAGENLOGIK

INFERENZ

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Interpretationen und Modell

- Jede Zeile in einer Wahrheitstabelle entspricht einer Interpretation
- Eine Interpretation I ist ein Modell für eine Formel α, genau dann wenn $I(\alpha) = 1$.
  - Modelle für $\alpha = (b \lor c) \rightarrow (a \land \neg c)$ entsprechen den roten Zeilen

a	b	c	$(b \lor c) \rightarrow (a \land \neg c)$
0	**0**	**0**	**1**
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	**0**	**0**	**1**
1	0	1	0
1	**1**	**0**	**1**
1	1	1	0

Erfüllbarkeit

- Eine Formel ist erfüllbar, wenn es ein Modell für diese Formel gibt, d.h., wenn eine Interpretation die Formel auf 1 abbildet

- Eine Formel ist unerfüllbar, wenn es kein Modell für die Formel gibt
  - Man nennt so eine Formel dann auch Kontradiktion

- Einfaches Verfahren, um Erfüllbarkeit zu überprüfen:
  - Stelle Wahrheitstabelle auf, wenn 1er-Zeile existiert, dann erfüllbar
  - Problem: Wahrheitstabelle hat 2^n Zeilen, wenn die Formel n verschiedene Propositionen verwendet
    - Ergibt bei einer Formel mit 20 verschiedenen Variablen bereits knapp über eine Million Zeilen
    - Ergibt bei einer Formel mit 100 verschiedenen Variablen über 10^{30} Zeilen

Tableauverfahren

- Das Tableauverfahren ist ein effizienteres Verfahren, bei dem systematisch versucht wird, ein Modell zu konstruieren
  - Wir betrachten das Tableauverfahren beispielhaft als einen Algorithmus um Erfüllbarkeit zu überprüfen

- Tableauverfahren benötigt Negationsnormalform (NNF)
  - Negation ist nur vor aussagenlogischen Variablen erlaubt
  - Es sind nur die Junktoren ∧ („und“) und ∨ („oder“) erlaubt und die Negation
  - Beispiel: $(a \wedge \neg b) \vee \neg c$
  - Gegenbeispiel (aus zwei Gründen): $c \rightarrow \neg(a \vee b)$

- Es gibt Regeln, deren Anwendung den Übergang von einer Formel zu einer anderen äquivalenten Formel zur Folge haben
  - Anwendung der Regeln nennt Äquivalenzumformungen
  - Anwendbar um NNF zu bekommen

Äquivalenzumformungen

NNF kann mittels (wiederholter) Anwendung der folgenden Regeln erreicht werden:

(1) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ (de Morgan)

(2) $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (de Morgan)

(3) $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$

(4) $\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

(5) $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$

Das Symbol $\Leftrightarrow$ besagt, dass die rechte und linke Seite äquivalent sind

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel (Umformung)

Zeige mit dem Tableauverfahren, ob die Formel $\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$ erfüllbar ist. Gib hierzu zunächst eine äquivalente NNF an!

1.	$\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$	
2.	$\neg((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)) \wedge c$	(wegen 4)
3.	$\neg((\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)) \wedge c$	(wegen 3)
4.	$(\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(\neg b \vee a)) \wedge c$	(wegen 1)
5.	$((\neg\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg\neg b \wedge \neg a)) \wedge c$	(wegen 2)
6.	$((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)) \wedge c$	(wegen 5)

Damit haben wir eine äquivalente NNF
und können das Tableauverfahren anwenden!

(1) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
(2) $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$
(3) $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$
(4) $\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
(5) $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$

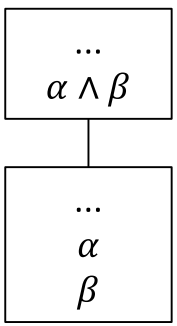
UNIVERSITÄT MANNHEIM

Regeln des Tableauverfahrens I

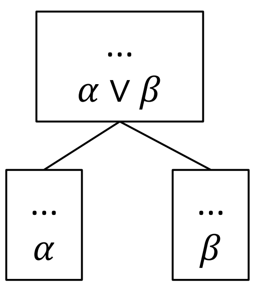
- Das Verfahren baut einen Baum auf, an dessen Knoten Formelmengen stehen

- Schreibe die Ausgangsformel(menge) als NNF an die Wurzel

- Fall 1: Eine der Formeln an einem noch nicht expandierten Knoten hat die Form $\alpha \wedge \beta$
  - Füge einen neuen Kind-Knoten hinzu und schreibe dort statt $\alpha \wedge \beta$ sowohl α als auch β sowie alle anderen Formeln



- Fall 2: Eine der Formeln an einem noch nicht expandierten Knoten hat die Form $\alpha \vee \beta$
  - Füge zwei neue Kind-Knoten hinzu und schreibe an den ersten Kind-Knoten statt $\alpha \vee \beta$ die Formel α sowie alle anderen Formeln. Analog für β im zweiten Kind-Knoten



Regeln des Tableauverfahrens II

- Expandiere den Baum bis keine der Regeln mehr angewendet werden kann
  - Dann stehen an dem Baum nur noch aussagenlogische Variablen oder negierte aussagelogischen Variablen
  - Diese einfachen Formeln nennt man auch Literale

- Betrachte die Blattknoten des Baums:
  - An <u>jedem</u> der Blattknoten sind zwei Formeln α und $\neg\alpha$ notiert. Dies bedeutet, dass es kein Modell für die Ausgangsformel gibt, die Formel ist unerfüllbar
  - An <u>einem (oder mehreren)</u> der Blattknoten gibt es solch einen Widerspruch nicht. Es läßt sich ein Modell konstruieren, die Formel ist erfüllbar
    - Das Modell kann direkt an einem solchen Knoten abgelesen werden!

Beispiel (Tableau)

$$((a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)) \land c$$

$$(a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)$$
$$c$$

$$(a \land \neg b)$$
$$c$$

$$a$$
$$\neg b$$
$$c$$

$$(b \land \neg a)$$
$$c$$

$$\neg a$$
$$b$$
$$c$$

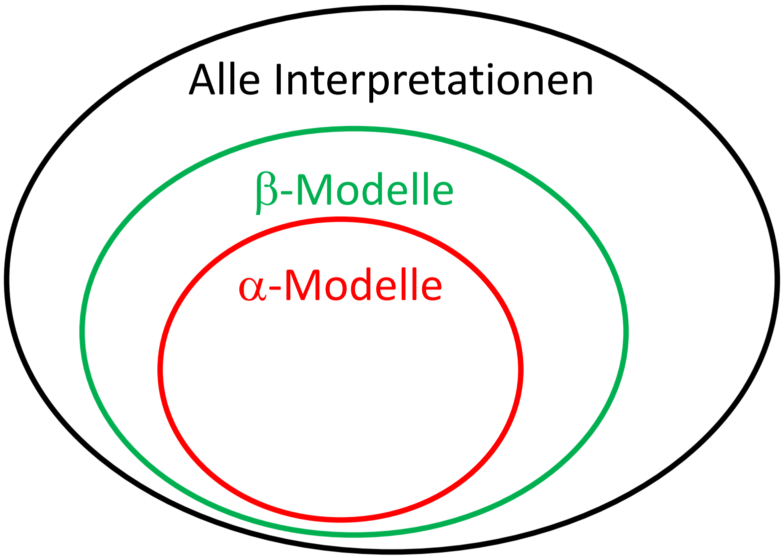
Die Formel hat zwei Modelle,
also ist die Formel erfüllbar!

Hinweis: Man kann, wenn man Erfüllbarkeit prüft, aufhören, wenn man das erste Modell gefunden hat

Logische Folgerung: Erinnerung

- Eine Formel β folgt aus einer Formel α, genau dann wenn jedes Modell für α auch ein Modell für β ist
- „Wenn α wahr ist, muss auch β wahr sein“
- Man schreibt dann $\alpha \models \beta$ („aus α folgt β “)

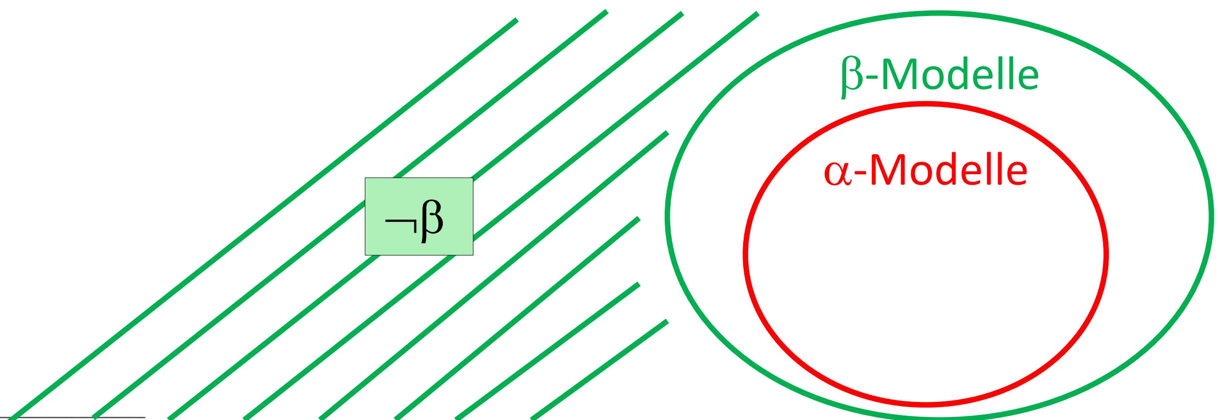
			α	β
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0



Beweis durch Widerspruch

- Folgerung $\alpha \models \beta$ kann man direkt zeigen:
  - Zeige, dass alle Modelle für α auch Modelle für β sind
  - Direkter Beweis (z.B. mittels Wahrheitstabelle, sehr aufwändig)

- Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)
  - Zeige, dass α und $\neg\beta$ unerfüllbar ist (z.B. mit Tableauverfahren)
  - Hierzu muss man zeigen, dass es keine Interpretation gibt, die zugleich ein Modell für α und für $\neg\beta$ ist



UNIVERSITÄT MANNHEIM

Beispiel

Folgt aus $(a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)$ die Formel $a \vee c$?

Indirekter Beweis: Überprüfe ob $((a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)) \wedge \neg(a \vee c)$ erfüllbar ist:

- Wenn nein, dann gilt die Folgerungsbeziehung
- Wenn ja, dann gilt die Folgerungsbeziehung nicht

Forme $((a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)) \wedge \neg(a \vee c)$ zu einer NNF um! Nach einem (bzw zwei) Umformungsschritt(en) erhalten wir:

$$((a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)) \wedge (\neg a \wedge \neg c)$$

Nun wende das Tableauverfahren an!

Beispiel

$((a \land b) \lor (\neg b \land c)) \land (\neg a \land \neg c)$

$(a \land b) \lor (\neg b \land c)$
$\neg a \land \neg c$

$(a \land b) \lor (\neg b \land c)$
$\neg a$
$\neg c$

$a \land b$
$\neg a$
$\neg c$

a
b
$\neg a$
$\neg c$

$\neg b \land c$
$\neg a$
$\neg c$

$\neg b$
c
$\neg a$
$\neg c$

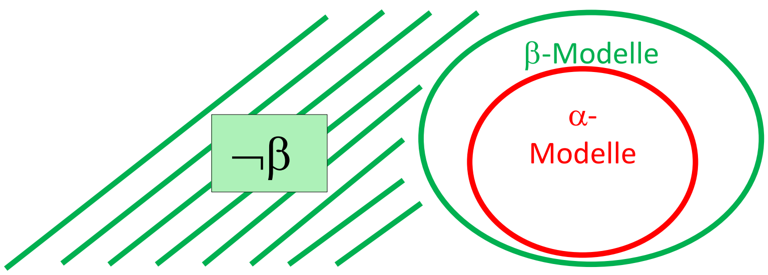
Also gibt es kein Modell für die Formel an der Wurzel des Baums

Also folgt $a \lor c$ aus $(a \land b) \lor (\neg b \land c)$!

UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Nochmal eine Erläuterung

- Mit dem Tableauverfahren versucht man ein Model zu konstruieren
  - Bei jeder Verzweigung gilt: Wenn es ein Modell gibt, dann muss es so wie im linken oder so wie im rechten Zweig aussehen
  - Wenn ein Blatt eine Proposition und deren Negation enthält, dann kann es in diesem Zweig kein Modell geben
- Benutzt man das Tableauverfahren um Folgerung zu zeigen, dann versucht man ein Modell zu erzeugen was in $\neg\beta$ und in α liegt
  - Scheitert dies, dann gilt die Folgerungsbeziehung



Reasoning Verfahren

- Verfahren zur Überprüfung von Erfüllbarkeit
  - Tableauverfahren – Wie vorgestellt
    - Wichtig: Es existiert ein analoges Verfahren für Beschreibungslogik
  - Resolution – Wiederholte Anwendung einer Regel
  - WalkSat – Lokales Suchverfahren
  - DPLL – Backtrackingbasiertes Verfahren mit speziellen Zusatzregeln
  - ...

- Eingabeformat meist KNF (konjunktive Normalform)
- Reasoning Verfahren sind nicht zentral für die Vorlesung, da Modellierung im Vordergrund steht!
  - Aber man sollte verstehen was ein solches Verfahren macht
  - Und wozu man es benutzen kann

Zusammenfassung

- Syntax und Semantik einer einfachen Logik
  - Wichtig: Wie definiert man eine formale Sprache

- Zentrale Begriffe:
  - Grundbegriffe: Interpretation und Modell
  - Abgeleitet: Tautologie, Erfüllbarkeit, Äquivalenz, Folgerung

- Achtung: Diese Begriffe sind wichtig (nicht nur für Aussagenlogik!) und man sollte diese sehr sicher beherschen
  - Nicht auswendig lernen, sondern aus dem Verständis heraus definieren
  - Die Begriff sind auch für die folgenden Vorlesung relevant

- Direkter und Indirekter Beweis (mittels Tableauverfahren)

Ausblick

- Prädikatenlogik
  - Syntax und Semantik von Prädikatenlogik
  - Genauere/erneute Einführung der zentralen Begriffe
  - **Zusammenhang zu natürlicher Sprache / Übersetzung**
  - **Modellierungsbeispiele**
  - **Was hat Prädikatenlogik mit UML-Diagrammen zu tun?**

- Beschreibungslogik und Ontologien