

***Notes* - Höhere Mathematik III: Vektoranalysis, Funktionenfolgen, Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Vorlesung aus dem Wintersemester 2016 / 2017
von Prof. Christoph Melcher an der RWTH Aachen

Autor: Jannis Zeller

Letzte Änderung: 4. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorfelder und Differentialoperatoren	4
1.1	Vektorfelder	4
1.2	Differentialoperatoren	4
1.3	Kronecker-Delta und Epsilon-Tensor	6
1.4	Rechenregeln für Differentialoperatoren	7
2	Kurvenintegrale	7
2.1	Erster Hauptsatz für Kurvenintegrale - Koservative Felder	8
2.2	Poincaré Lemma	9
2.3	Eichfreiheit	10
3	Elementare Integration im \mathbb{R}^n	10
3.1	Eigentliche Parameterintegrale	10
3.2	Uneigentliche Parameterintegrale	10
3.3	Mehrfachintegrale	11
3.4	Integral über Mengen und Berechnung von Volumina	11
3.5	Integration über Normalbereiche	12
4	Integralsätze in der Ebene	12
4.1	Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegrale	13
5	Koordinatentransformation	14
5.1	Der Transformationssatz	14
5.2	Zu krummlinigen Koordinatensystemen	14
6	Integralsätze im Raum	15
6.1	Reguläre Flächen und Oberflächenintegral	15
6.2	Satz von Stokes im Raum	16
6.3	Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegrale im Raum	16

6.4	Satz von Gauß im Raum	17
6.5	Poisson-Gleichung	17
7	Konvergenz von Funktionenfolgen	18
7.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	18
7.2	Vertauschbarkeit von Grenzprozessen	18
7.3	Konvergenz von Funktionenreihen	19
7.4	Konvergenz im quadratischen Mittel	20
8	Fourier Reihen	20
8.1	Fourier Polynome	20
8.2	Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel	21
8.3	Dirac-Scharen und δ -Distribution	23
8.4	Punktw. & gleichm. Konvergenz von Fourier-Reihen	24
9	Wahrscheinlichkeitsrechnung	25
9.1	Wahrscheinlichkeitsräume	25
9.2	Stochastische Unabhängigkeit	27
9.3	Zufallsvariablen	28
9.4	Erwartungswert und Varianz	29
9.5	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	30
9.6	Gesetz der großen Zahlen	30
9.7	Zentraler Grenzwertsatz	31

Disclaimer

Diese Zusammenfassung ist nicht offiziell von der RWTH Aachen oder Dozierenden der betreffenden Lehrveranstaltungen bestätigt oder erprobt. Sie wurde nach bestem Wissen und Gewissen erstellt.

Vorbemerkung

Diese Zusammenfassung habe ich auf Basis der Vorlesungen und Übungen von Prof. Melcher und seinen Mitarbeitern im Wintersemester 2016/17 erstellt. Der Stoff von HM III hat sich seit dem, soweit mir bekannt ist nur marginal geändert. Ich habe diese Zusammenfassung nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, kann aber natürlich nicht für Vollständigkeit und Fehlerfreiheit garantieren.

Bekannt aus HM I und II sollten die Differential- und Integralrechnung in einer Dimension, sowie lineare Algebra sein.

Notation

In dieser Zusammenfassung werden Vektoren mit Fettgedruckten, nicht-kursiven Symbolen wie \mathbf{x} , sowie ihre Komponenten als x_k bezeichnet. Es wird zudem *nicht* die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Zudem werden (kartesische) Basisvektoren als $\hat{\mathbf{e}}_k$ bezeichnet. Der Multiplikationspunkt steht immer für ein Skalarprodukt.

1 Vektorfelder und Differentialoperatoren

1.1 Vektorfelder

Fast immer nimmt man Definitionen auf **offenen** Mengen über dem \mathbb{R}^n vor, damit man an seinen Variablen zwecks Differenzierung usw. „wackeln“ kann.

Definition 1.1. *Eine Abbildung*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

heißt **Vektorfeld** auf U . Es lässt sich schreiben als:

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)^T = \sum_{k=1}^n E_k \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (1.2)$$

\mathbf{E} heißt stetig differenzierbar genau dann wenn alle Komponenten E_k stetig differenzierbar sind.

Ein Vektorfeld mit nur einer Komponente wird Skalarfeld genannt. Für Differentialoperatoren, wie im nächsten Abschnitt 1.2 beschrieben spielt es eine wichtige Rolle, ob es sich um ein Vektorfeld oder ein Skalarfeld handelt.

1.2 Differentialoperatoren

Wir unterscheiden hier im Kern zwischen drei verschiedenen Operatoren, die hier nicht ausführlich als Definition eingeführt werden. Natürlich müssen die Felder, auf die die Operatoren angewandt werden stetig differenzierbar sein. Sie werden im Rahmen von HM III meist in 3 Dimensionen verwendet, lassen sich jedoch auch auf höhere Dimensionen übertragen:

- **Gradient** (angewandt auf ein Skalarfeld):

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^T = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (1.3)$$

- **Divergenz** (angewandt auf ein Vektorfeld):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \quad (1.4)$$

- **Rotation** (angewandt auf ein Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Im Folgenden werden nun noch einige andere Objekte und Verkettungen eingeführt.

Jacobi Matrix

Definition 1.2. Die Jacobi Matrix eines Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$D\mathbf{F}_{jk} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right)_{jk} = \begin{pmatrix} \nabla F_1^T \\ \vdots \\ \nabla F_n^T \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Somit ist die Jacobi Matrix eine Abbildung von dem \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n , also eine $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ -Matrix. Sie muss aus der Definition der linearen Approximierbarkeit auch in den Selben Raum abbilden wie \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + D\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + R_x(\mathbf{h}) \quad (1.7)$$

mit der Bedingung, dass $|R_x(\mathbf{h})|/|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Kettenregel

Die Kettenregel lässt sich mittels der Jacobi Matrix dann über das Matrixprodukt ausdrücken.

Satz 1.1. Seien \mathbf{F} und \mathbf{G} zwei Vektorfelder, wobei $\mathbb{W}_G \subset \mathbb{D}_F$ ist, dann ist:

$$D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) = D\mathbf{F}(\mathbf{G}) \cdot D\mathbf{G}. \quad (1.8)$$

Insbesondere ist für $f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}_f$:

$$\frac{d(f \circ \mathbf{G})}{dt} = \nabla f(\mathbf{G}) \cdot \dot{\mathbf{G}}. \quad (1.9)$$

Laplace Operator

Der Laplace Operator ist die Verkettung der Divergenz mit dem Gradient. Er wirkt auf Skalarfelder oder komponentenweise auf Vektorfelder.

Definition 1.3. Sei \mathbf{F} ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und φ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld. Dann wirkt der Laplace Operator auf sie wie folgt:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\nabla\varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}, \quad \text{und} \quad \Delta\mathbf{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n)^T.$$

Es gibt auch die Notation den Laplace Operator als ∇^2 zu bezeichnen, die ich aber nicht verwende.

Rotation

Die Rotation in 3 Dimensionen von oben bekannt. In 2 Dimensionen wird einfach eine Dritte 0-Komponente hinzugefügt, die Rotation hat dann nur eine Komponente. Man kann die Rotation auch als Determinante der Matrix

$$\nabla \times \mathbf{E} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \partial_1 & E_1 \\ \hat{e}_2 & \partial_2 & E_2 \\ \hat{e}_3 & \partial_3 & E_3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ausdrücken. Verallgemeinert auf mehrere Dimensionen und Abbildungen, die gleich viele Koordinaten aufnimmt, wie Komponenten ausgibt, also $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ist die Rotation:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_{jk} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k}. \quad (1.11)$$

Diese Form der Rotation ist also immer eine antisymmetrische Matrix, die durch $n(n-1)/2$ Parameter beschrieben wird. In Matrix Schreibweise lautet dies:

$$\nabla \times \mathbf{F} = D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F}. \quad (1.12)$$

1.3 Kronecker-Delta und Epsilon-Tensor

Im Kontext dieser Differentialoperatoren und ihrer Rechenregeln (siehe Abschnitt 1.4) treten häufig 2 Tensoren auf, die eine sehr wichtige Rolle spielen und die, wenn man sie beherrscht, die Rechnungen extrem vereinfachen.

Definition 1.4. Das **Kronecker-Delta** ist ein Tensor zweiter Stufe (2 Indices) mit der Eigenschaft:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}. \quad (1.13)$$

Dabei sind $k, l \in \mathbb{N}$.

Einige Eigenschaften, die man sich recht leicht klar machen kann, sind:

$$\delta_{kl} = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} = \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_l. \quad (1.14)$$

Definition 1.5. Der **Epsilon-Tensor** (auch Levi-Civita-Symbol) ist ein Tensor dritter Stufe mit der Eigenschaft:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \hat{=} \text{gerade Perm. von } (1, 2, 3) \\ -1, & (i, j, k) \in \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\} \hat{=} \text{ungerade Perm. von } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Dabei sind $i, k, l \in \{1, 2, 3\}$.

Man kann das jeweilige Vorzeichen über die sog. Permutation (Vertauschung) von $(1, 2, 3)$ ermitteln, d.h. z.B. um von $(1, 2, 3)$ nach $(1, 3, 2)$ zu gelangen, muss man eine Permutation $(2 \leftrightarrow 3)$ durchführen. Die Anzahl der Vertauschungen die nötig sind ist 1 und damit ungerade. Es ist nicht möglich dies durch eine gerade Anzahl zu realisieren. Über diese Definition mit Permutationen kann man den Epsilon-Tensor auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Die Regel lässt sich auch auf die Indizes anwenden:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{jki} = \text{usw.} \quad (1.16)$$

Eine sehr wichtige und nützliche Rechenregel lautet:

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.17)$$

1.4 Rechenregeln für Differentialoperatoren

Der Definitionsbereich der Felder und Funktionen wird hier auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 eingeschränkt. Weiterhin sind alle differenzierbar. Es gelten dann die Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{E}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{E} + \phi \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (1.18)$$

$$\operatorname{rot}(\phi \mathbf{E}) = \nabla \phi \times \mathbf{E} + \phi \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (1.19)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad (1.20)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

die durch Betrachtung der einzelnen Komponenten sowie des Spatproduktes und der Baccab-Regel bewiesen werden können. Dabei bedeutet die Schreibweise:

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 E_k \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_k}, \frac{\partial B_2}{\partial x_k}, \frac{\partial B_3}{\partial x_k} \right)^T. \quad (1.22)$$

Auch die folgenden Lemmas benötigen immer offene Definitionsmengen und entsprechend häufige stetige Differenzierbarkeit:

Lemma 1.1. Für alle entsprechenden $\phi \in C^2$ gilt:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0. \quad (1.23)$$

Dies ist eine notwendige (aber i.A. nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist. ($\mathbf{F} = \nabla \varphi \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$)

Lemma 1.2. Für alle entsprechenden $\mathbf{B} \in C^2$ gilt:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad (1.24)$$

Dies ist eine notwendige (aber i.A. wieder nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass ein Vektorfeld ein Rotationsfeld ist, also ein Vektorpotential $\mathbf{A} (\in C^1)$ existiert. ($\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$)

Zusätzlich gilt mit $\Delta \mathbf{E} := (\Delta E_1, \dots, \Delta E_n)^T$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (1.25)$$

2 Kurvenintegrale

Definition 2.1. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt regulär, wenn sie stetig und stückweise stetig differenzierbar ist mit $\dot{\gamma} \neq 0$. Es gibt geschlossene und doppel-punktfreie/einfache Kurven.

Achtung! γ bezeichnet hier die Parameterisierung einer Kurve. Eine allgemeine Kurve Γ , als die Spur, oder Form (ohne Durchlaufeigenschaften), heißt **nur dann regulär**, wenn **einfache, reguläre** Parameterisierungen von ihr existieren! Man kann dann entlang von Parameterisierungen integrieren (hier auch ohne Einfachheit):

Definition 2.2. Das Kurvenintegral eines stetigen Vektorfeldes \mathbf{F} entlang einer Kurve γ ist dann:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma} dt. \quad (2.1)$$

Genauer müsste man das Integral noch aufteilen, damit die Punkte an denen γ nicht differenzierbar ist raus fallen.

Das Kurvenintegral ist **linear** und hängt nicht von der „Geschwindigkeit“ ab mit der die Kurve durchlaufen wird, was man mit der Substitutionsregel zeigen kann. Man kann sogar Teile der Kurve hin und her laufen ohne dass sich etwas ändert. Vertauscht man den Durchlaufsinn allerdings komplett wird das Integral negativ. Das Bild einer regulären Kurve wird oft mit Γ bezeichnet, sodass man schreibt:

$$\int_{\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.2)$$

- Der **orientierte Einheitstangentenvektor** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t)$ ist definiert als:

$$\tau(\mathbf{x}(t)) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \quad (2.3)$$

- Die **Länge** der Linie einer Kurve Γ parametrisiert durch $\mathbf{x}(t)$ kann man berechnen durch:

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\mathbf{x} = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt \quad (2.4)$$

- **Abschätzung** für Kurvenintegrale:

$$\left| \int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{x \in \Gamma} |\mathbf{F}(\mathbf{x})| \mathcal{L}(\Gamma) \quad (2.5)$$

2.1 Erster Hauptsatz für Kurvenintegrale - Konservative Felder

Ein Gebiet \mathcal{G} ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , die (weg-)zusammenhängend ist, also jedes Punktepaar sich durch eine reguläre Kurve in \mathcal{G} verbinden lässt. Damit kann man **konservative** Felder definieren:

Definition 2.3. Ein stetiges Vektorfeld \mathbf{F} von einem Gebiet in den \mathbb{R}^n ist **konservativ**, wenn ein Kurvenintegral über \mathbf{F} **wegunabhängig** ist (Kurven mit gleichem Start- und Endpunkt ergeben gleiches Integral).

Man kann Konservativität leicht überprüfen, indem man prüft:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \text{ ist konservativ.} \quad (2.6)$$

Satz 2.1. Erster Hauptsatz: sei \mathcal{G} ein Gebiet:

(i) Sei h eine stetig differenzierbare Funktion auf \mathcal{G} und $\mathbf{F} = \nabla h$, dann gilt:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = h(\mathbf{x}_e) - h(\mathbf{x}_a) \quad (2.7)$$

für jede Kurve γ .

(ii) Wenn \mathbf{F} stetig ist, dann gilt:

$$\mathbf{F} \text{ ist konservativ.} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ ist ein Gradientenfeld.} \quad (\Rightarrow \neq \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0) \quad (2.8)$$

2.2 Poincaré Lemma

Ein **Sterngebiet** \mathcal{V} in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) ist ein Gebiet, in dem ein Punkt existiert, dessen Verbindungen zu allen anderen Punkten des Gebietes geradlinig sind:

$$\exists \mathbf{x}_0 : \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{V} : \quad \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in \mathcal{V} \quad \forall t \in [0, 1] \quad (2.9)$$

Satz 2.2. Poincaré: Für Vektorfelder $\mathbf{F} \in C^1$ auf Sterngebieten im \mathbb{R}^3 gilt:

- \mathbf{F} ist Gradientenfeld $\Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$,
- \mathbf{F} ist Rotationsfeld $\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$,
- $\forall f \in C^1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists \mathbf{E} \in C^1 : \quad f = \operatorname{div} \mathbf{E}.$

Auf Kugeln/Bällen um den Ursprung kann man dies erweitern:

Lemma 2.1. $\mathbf{F} \in C^1(B_r(0)) :$

- $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F}(x) = \nabla \left(\int_0^1 \mathbf{F}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt \right) \quad (2.10)$$

- $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F}(x) = \operatorname{rot} \left(\int_0^1 \mathbf{F}(t\mathbf{x}) \times t\mathbf{x} dt \right) \quad (2.11)$$

- $\mathbf{F} \in C^2$ mit $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ heißt \mathbf{F} **harmonisch**, d.h. es gilt $\Delta \mathbf{F} = 0$.

Man kann dies beweisen, indem man ausnutzt, dass die Differentialoperatoren und das Integral auf Sterngebieten für stetig integrierbare Integranden vertauschen.

Lemma 2.2. Für $\mathbf{F} \in C^1(B_r(\mathbf{x}_0))$ mit $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ ist ein Potential im \mathbb{R}^3 gegeben durch:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^x F_a(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_3(x, y, t) dt. \quad (2.12)$$

2.3 Eichfreiheit

Wie Lemma 1.2 und Lemma 1.1 zeigen sind Skalarpotentiale bis auf eine Konstante und Vektorpotentiale bis auf ein beliebiges Gradientenfeld $\nabla\phi \in C^1$ definiert. In der Physik ist eine sog. *Coulomb*-Eichung oft sinnvoll, die für ein Vektorpotential \mathbf{A} zusätzlich fordert:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{A}' + \nabla\phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\phi = -\operatorname{div} \mathbf{A}'. \quad (2.13)$$

Dies ist die Poissonsgleichung für ϕ bei gegebenem Potential \mathbf{A}' . Das Feld $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ wird durch die Wahl von ϕ nicht beeinflusst.

3 Elementare Integration im \mathbb{R}^n

3.1 Eigentliche Parameterintegrale

Satz 3.1. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{U} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.1)$$

ebenfalls stetig in \mathcal{U} . Ist $f(\mathbf{x}, t)$ auch noch in \mathbf{x} stetig partiell differenzierbar, dann ist auch F stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t) dt. \quad (3.2)$$

Satz 3.2. Leibnitzregel: Sei f stetig differenzierbar auf

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\} \quad (3.3)$$

wobei α und $\beta \in C^1([c, d])$ sind. Dann ist

$$F'(y) := \frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(\beta, y)\beta' - f(\alpha, y)\alpha' \quad (3.4)$$

stetig differenzierbar nach der Kettenregel.

3.2 Uneigentliche Parameterintegrale

Die obigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften gelten i.A. nicht für uneigentliche Parameterintegrale, also für solche, über Singularitäten o.Ä.

Satz 3.3. Majorantensatz Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{U} \times [a, b]$ mit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ und es existiert eine uneigentlich integrierbare Majorante zu f in dem Sinne, dass

$$|f(\mathbf{x}, t)| \leq g(t) \quad \text{in } \mathcal{U} \times [a, b] \quad \text{mit } \int_a^b g(t) dt < \infty \quad (3.5)$$

Dann ist das zu f gehörige Parameterintegral stetig in \mathcal{U} . Ist f stetig differenzierbar in \mathbf{x} und es existieren uneigentlich integrierbare Funktionen G_k , derart, dass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t) \right| \leq G_k(t) \quad \text{in } \mathcal{U} \times [a, b] \quad \text{mit } \int_a^b G_k(t) dt < \infty \quad (3.6)$$

dann ist das zu f gehörige Parameterintegral stetig differenzierbar in \mathcal{U} , und Differentiation und Integration können vertauscht werden.

Es gelten also dann die selben Eigenschaften, wie für eigentliche Parameterintegrale, wenn alles, was zuvor auf die Funktion f selbst zutraf, nun auf eine (noch zu findende) Majorante zutrifft.

Beispiele für Funktionen, die über Parameterintegrale definiert sind, sind die Gamma-Funktion, die Laplace-Transformierte und die Fourier-Transformierte einer Funktion.

3.3 Mehrfachintegrale

Man definiert Mehrfachintegrale über n -dimensionale Quader einfach als Integrale, die nacheinander über die verschiedenen Variablen ausgeführt werden. Dabei beweist man, dass für stetige Funktionen die Integrationsreihenfolge keine Rolle spielt, was sozusagen den Satz von Schwarz über zwei mal stetig differenzierbare Funktionen für Integrale darstellt (Satz von **Fubini**). Die Vertauschung von n Integrationen folgt dann induktiv. Man schreibt:

Lemma 3.1. *Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt für das Mehrfachintegral:*

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1 \dots x_n) dx_n \dots \right) dx_1 = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1 \dots x_n) dx_n \dots \right) dx_n \quad (3.7)$$

Das gewöhnliche Mehrfachintegral ist gewohnt linear und monoton. Es gilt zudem die bekannt Betragsabschätzung $|\int_Q f \, d\mathbf{x}| \leq \sup |f| |Q|$.

Definition 3.1. *Eine stetig Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat einen **kompakten Träger**, wenn ein Radius $R > 0$ existiert, für den gilt: $f(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \quad |\mathbf{x}| > R$.*

Für eine Funktion mit kompaktem Träger kann man das Integral über den gesamten Raum dann auf ein Integral über einen geeigneten Quader zusammenziehen.

3.4 Integral über Mengen und Berechnung von Volumina

Um über eine Menge überhaupt integrieren zu können, müssen ihre Ränder bestimmte, hier nicht weiter ausgeführte, Glattheitseigenschaften aufweisen. In der Tat gibt es Mengen, denen man keinen gutartigen Flächeninhalt bzw. Volumen zuordnen kann, als Beispiel hier genannt das [Banach-Tarski-Kugelparadoxon](#).

Cavalieri Prinzip

Gegeben sei ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Schnittflächen $D(z)$, also:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(z), 0 \leq z \leq H\} \quad (3.8)$$

Dann berechnet man sein Volumen, indem man alle Schnittflächen $\mathcal{A}(z) = |D(z)|$ (die man vorher in x und y schon bestimmt haben muss) aufintegriert:

$$\text{vol}(K) = \int_0^H \mathcal{A}(z) \, dz \quad (3.9)$$

3.5 Integration über Normalbereiche

Definition 3.2. Ein **regulärer Bereich** $Q \subset \mathbb{R}^2$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Menge, deren Inneres zusammenhängend und deren Rand aus endlich vielen einfachen, geschlossenen regulären Kurven besteht.

Definition 3.3. Ein **Normalbereich** im \mathbb{R}^2 ist eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\}, \quad (3.10)$$

wobei α und β stetig sind mit $\alpha < \beta$. Man kann natürlich auch x und y vertauschen. Analog ergibt sich im \mathbb{R}^3 die Definition

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \text{ wobei } (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}. \quad (3.11)$$

ϕ und ψ sind wieder stetig, mit $\phi < \psi$. Ein Normalbereich heißt **regulär**, wenn die Randfunktionen stetig differenzierbar sind. Man kann dies auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern.

Man kann einen regulären Bereich auch durch eine Überlagerung von regulären Normalbereichen darstellen, die sich nur an den Randkurven überlappen.

Die Integration sieht dann wie folgt aus:

$$\mathbb{R}^2 : \quad \int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \quad (3.12)$$

$$\mathbb{R}^3 : \quad \int_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_D \left(\int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \quad (3.13)$$

$$\mathbb{R}^n : \quad \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_c^d dx_n \int_{\alpha_1(x_n)}^{\beta_1(x_n)} dx_{n-1} \int_{\alpha_2(x_n, x_{n-1})}^{\beta_2(x_n, x_{n-1})} dx_{n-2} \dots \int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} dx_1 f(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

Wobei im \mathbb{R}^n von rechts nach links integriert wird und die Randfunktionen potentiell immer von allen Variablen abhängen können, nach denen danach noch integriert wird. Das Schwierige ist meist nicht die Integration an sich, sondern die Bereiche (möglichst einfach) zu parameterisieren.

4 Integralsätze in der Ebene

In diesem Kapitel werden nur Vektorfelder und Bereiche im \mathbb{R}^2 behandelt, sodass neben der Divergenz auch die Rotation in den \mathbb{R} abbildet.

Definition 4.1. Der Rand ∂D eines regulären Bereiches D (zusammenhängend, Ränder reguläre Kurven) heißt **positiv orientiert**, falls das Innere von D beim Durchlaufen der Randkurven auf der linken Seite liegt. (Rechte-Faust-Regel)

Satz 4.1. Stokesscher Integralsatz in der Ebene

Sei D ein regulärer Bereich mit positiv orientiertem Rand und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ in einer offenen Umgebung $U \supset D$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\partial D} (F_1 \, dx + F_2 \, dy) \quad (4.2)$$

Im Beweis des Satzes genügt es die Gleichung für einen Normalbereich zu zeigen, da sich alle positiv orientierten Randkurven einer Vereinigung von Normalbereichen, also einem regulären Bereich, die innerhalb liegen gegenseitig aufheben. Ein netter Trick ist, dass man auch wenn man kein Gebiet vorliegt auf dem ein Vektorfeld stetig ist, mit dem Satz von Stokes eine Aussage über das Vektorfeld bei der Integration über geschlossene Kurven treffen kann, wenn die Rotation verschwindet, indem man den unstetigen Punkt durch eine positiv orientierte Randkurve ausschließt:

$$\int_D \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{x} = 0 = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \quad (4.3)$$

Definition 4.2. Man definiert das **äußere Einheitsnormalfeld** eines positiv orientierten Randes eines regulären Bereiches D als den um 90° rotierten Einheitsnormalvektor, sodass:

$$\nu = \tau^\perp = (-\tau_2, \tau_1)^T \quad (4.4)$$

Satz 4.2. Gaußscher Satz in der Ebene

Sei D ein regulärer Bereich mit positiv orientiertem Rand und $\mathbf{F} \in C^1$, für eine Umgebung von D . Sei $\gamma(t)$ eine Parameterisierung der Randkurve ∂D . Dann gilt:

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \dot{\gamma}^\perp(t) dt \quad (4.5)$$

In zwei Dimensionen ist dies eine einfache Folgerung aus dem Stokesschen Satz, für ein um 90° rotiertes Vektorfeld. Mit diesen Definitionen kann man eine Koordinatenfreie Definition von Divergenz und Gradient angeben, man spricht auch von **Quellendichte** und **Wirbeldichte**. Aus der **Greenschen Formel** (zweite Formulierung des Stokesschen Satzes) folgt durch geschickte Wahl von \mathbf{F} eine Gleichung für die **Fläche** eines regulären Bereiches D , dessen Rand durch eine einzige geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ besteht:

$$|D| = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1 dt = \frac{1}{2} \int_a^b \det(\gamma(t) | \dot{\gamma}(t)) dt \quad (4.6)$$

4.1 Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegrale

Definition 4.3. Ein 2D-Gebiet heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene, reguläre Kurve „auf einen Punkt zusammenziehen lässt“, also Randkurve eines Teilgebiets des Gebiets selbst ist.

Anschaulich: Das Gebiet hat keine Löcher. Jedes Sterngebiet ist insbesondere einfach zusammenhängend.

Man stellt fest, dass dies bereits ausreicht, damit gilt:

Satz 4.3. zweiter Hauptsatz:

Sei $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\mathbf{F} \in C^1(\mathcal{G})$, dann gilt:

$$\mathbf{F} \text{ ist konservativ in } \mathcal{G} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{G} \quad (4.7)$$

Dies folgt direkt aus dem Stokesschen Integralsatz.

5 Koordinatentransformation

5.1 Der Transformationssatz

Satz 5.1. Transformationsatz in zwei Dimensionen Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ und $\Phi \in C^1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seien B und D reguläre Bereiche, sodass $B \subset \mathcal{G}$. Dann gilt wenn

$$\Phi : B \rightarrow D \text{ bijektiv und } \det(D\Phi(\mathbf{x})) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B \quad (5.1)$$

gegeben ist, für stetige Funktionen $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_D f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_B f(\Phi(\mathbf{x})) |\det(D\Phi(\mathbf{x}))| \, d\mathbf{x}. \quad (5.2)$$

Man kann jetzt z.B. bei Polar- und Kugelkoordinaten einwenden, dass für $r \rightarrow 0$ Probleme bezüglich der Invertierbarkeit auftreten. Da dies aber nur an endlich vielen Punkten Probleme macht, ist es im Integral nicht wichtig. Man kann durch eine Grenzwertbetrachtung sogar zeigen, dass der „fehlende“ Teil des Integrals gegen 0 konvergiert. Transformationen in Polar und Kugelkoordinaten sind auch hilfreich um die Konvergenz von uneigentlichen Integralen über Funktionen der Form $c/|\mathbf{x}|^\alpha$ zu zeigen. Hierbei gilt die Faustregel: für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert das Integral für $\alpha < n$.

Verallgemeinerte Zylinderkoordinaten

Man kann Zylinderkoordinaten in die Form:

$$\Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r f(z) \cos(\varphi) \\ r f(z) \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

verallgemeinern. Die Funktionaldeterminante ist hier:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r f^2(z) \quad (5.4)$$

Weitere **wichtige Koordinatensysteme** sind Kugelkoordinaten, Polarkoordinaten und gewöhnliche Zylinderkoordinaten. Außerdem werden häufig Schwerpunkts- und Differenzkoordinaten betrachtet.

5.2 Zu krummlinigen Koordinatensystemen

Definition 5.1. Gegeben ist eine stetig differenzierbare (injektive) Abbildung:

$$\Phi(u, v, w) = (x(v_1, v_2, v_3), y(v_1, v_2, v_3), z(v_1, v_2, v_3)) \quad (5.5)$$

Dann heißen die Vektorfelder:

$$\mathbf{a}_i := \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.6)$$

natürliche Koordinatenfelder. Die Vektorfelder

$$\hat{\mathbf{e}}_i := \frac{1}{h_i} \mathbf{a}_i \quad \text{mit} \quad h_i = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \right| \quad (5.7)$$

heißen normierte Koordinatenfelder. Sie sind **im Allgemeinen nicht orthonormiert**. Daraus folgen Transformationsregeln für die Differentialoperatoren. Der Nabla Operator hat dann die Form:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (5.8)$$

6 Integralsätze im Raum

6.1 Reguläre Flächen und Oberflächenintegral

Definition 6.1. Reguläre Flächenstücke: Sei $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und

$$\Phi : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T := \mathbf{x}(u, v). \quad (6.1)$$

Sei $B \subset \mathcal{G}$ ein regulärer Bereich, dessen Rand aus einer geschlossenen Kurve besteht, derart, dass

$$\Phi \text{ injektiv} \quad \text{und} \quad \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \neq 0 \quad (6.2)$$

. Dann ist

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \Phi(u, v) \quad \forall (u, v) \in B\} \quad (6.3)$$

ein reguläres Flächenstück und Φ eine reguläre Parameterisierung von \mathcal{F} .

Man kann die normierten partiellen Ableitungen von Φ , sowie deren normiertes Kreuzprodukt als normierte Basis der \mathbb{R}^3 auffassen. Wie schon bei Bereichen kann man **stückweise reguläre Flächen** aus regulären Flächenstücken zusammensetzen, die sich nur an ihren Rändern überlappen. Der Unterschied zur Integration über Normalbereiche mit Koordinatentransformation liegt hier darin, dass keine Komponente mehr einfach geradlinig ist. Der ganze Raum wird gekrümmt. Diese Krümmung wird durch die **metrischen Koeffizienten**

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \quad (6.4)$$

beschrieben. Sie bilden den Metriktensor \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = D\Phi^T D\Phi \quad (6.5)$$

Der Metriktensor ist ein Maß für die Größe und Krümmung eines Oberflächenelementes, daher nennt man

$$\sqrt{\det \mathbf{g}} = \sqrt{EG - F^2} = |\partial_v \mathbf{x} \times \partial_u \mathbf{x}| \quad (6.6)$$

das **Oberflächenelement**. Welchselt man das Koordinatensystem, so ergibt sich die Transformationsformel:

$$\mathbf{g}' = D\psi^T \mathbf{g}(\psi) D\psi \quad \Leftarrow \quad \sqrt{\det \mathbf{g}'} = \sqrt{\det \mathbf{g} \circ \psi} |\det D\psi| \quad (6.7)$$

Definition 6.2. Oberflächenintegral: Sei f eine stetige Funktion in einer offenen Umgebung \mathcal{U} eines regulären Flächenstückes $\mathcal{F} = \Phi(B)$ mit Parameterisierung $\Phi = \mathbf{x}(u, v)$. Dann ist das Oberflächenintegral:

$$\int_{\mathcal{F}} f \, d\sigma := \int_B f(\mathbf{x}(u, v)) \sqrt{\det \mathbf{g}(u, v)} \, du \, dv \quad (6.8)$$

Für $f = 1$ ist dieses Integral die **Oberfläche** von \mathcal{F} .

Anwendung - Rotationsflächen:

Wenn eine Fläche in der x - z -Ebene durch eine reguläre, geschlossene, einfache Kurve $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ umrandet wird und durch

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = x(t)\hat{\mathbf{e}}_r + z(t)\hat{\mathbf{e}}_z, \quad (t, \varphi) \in [a, b] \times [0, 2\pi] \quad (6.9)$$

ergibt sich ihr Flächeninhalt durch:

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = 2\pi \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} |x| dt \quad (6.10)$$

Die Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_z$ sind hier die der r und der z -Koordinate der Zylinderkoordinaten.

Anwendung - Graphendarstellung:

Wenn die Fläche durch eine Funktion der Form: $\phi = (x, y, H(x, y))^T$ beschrieben wird ergibt sich das Oberflächenelement zu:

$$\sqrt{\det \mathbf{g}} = \sqrt{1 + |\nabla H|^2} \quad (6.11)$$

6.2 Satz von Stokes im Raum

Das **Normalenfeld** eines regulären Flächenstücks \mathcal{F} ist

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{q_i} = \partial_{q_i} \mathbf{x} \quad (6.12)$$

Ein Flächenstück heißt **orientierbar** falls man ein solches Feld auf dem Flächenstück eindeutig definieren kann. Das geht z.B. nicht auf dem *Moebius Band*. Damit kann man ein Flussintegral definieren.

Definition 6.3. Das **Flussintegral** über ein reguläres, orientiertes Flächenstück \mathcal{F} mit Normalenfeld \mathbf{n} und $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig in einer Umgebung von \mathcal{F} ist

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint \mathbf{F}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) du dv \quad (6.13)$$

Satz 6.1. Satz von Stokes im Raum: Seien alle Voraussetzungen des Flussintegrals erfüllt und \mathbf{F} stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial \mathcal{F}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (6.14)$$

6.3 Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegrale im Raum

Der zweite Hauptsatz bleibt bestehen, wie in der Ebene. Da aber z.B. auch der $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist, darf in drei Dimensionen ein einfach zusammenhängendes Gebiet auch Löcher haben. Es gilt

Satz 6.2. Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegrale im Raum: Sei $\mathbf{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathcal{U} . Dann gilt:

$$\mathbf{F} \text{ konservativ in } \mathcal{U} \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{F} = 0 \text{ in } \mathcal{U} \quad (\Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = \nabla h) \quad (6.15)$$

Für die Existenz eines Vektorpotentials genügt *einfach zusammenhängend* nicht:

Satz 6.3. *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, derart, dass jede geschlossene reguläre Fläche, die ganz in \mathcal{U} liegt, der Rand eines $\mathcal{F} = \partial V$ eines regulären Bereichs $V \subset \mathcal{U}$ ist. Dann gilt für $\mathbf{F} \in C^1(\mathcal{U})$:*

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \quad \text{in } \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \text{ ist Rotationsfeld in } \mathcal{U} \quad (6.16)$$

6.4 Satz von Gauß im Raum

Die Folgerungen zur partiellen Integration in diesem Kapitel beruhen auf der Identität:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi) = \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{E} \quad (6.17)$$

Satz 6.4. Partielle Integration über kompakten Träger: *Sei \mathbf{E} ein Vektorfeld (C^1) und $\varphi \in C^1$. Wenn eine dieser Funktionen einen kompakten Träger (also eine Grenze, ab der sie identisch 0 ist) hat gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \quad (6.18)$$

Dies kann man beweisen, da man immer einen Quader um den kompakten Träger wählen kann, auf dem die Integrationsreihenfolge dann irrelevant ist. Der Satz gilt tatsächlich auch ohne kompakten Träger, wenn das Abklingen der Funktionen stark genug ist.

Satz 6.5. Satz von Gauß: *Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Bereich und $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung \mathcal{U} von V . Dann gilt:*

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (6.19)$$

wobei \mathbf{n} das **äußere Einheitsnormalenfeld** an ∂V ist. Also das Normalenfeld, welches aus dem Volumen hinaus zeigt.

Aus dem Satz von Gauß und der Gleichung von oben folgt die Regel zur **partiellen Integration im \mathbb{R}^n** :

Satz 6.6. *Erfüllen \mathbf{E} und φ die Anforderungen des Satzes von Gauß auf einem regulären Bereich V , dann gilt:*

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \varphi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \quad (6.20)$$

6.5 Poisson-Gleichung

Die Lösung der Poissongleichung in 3D kann man z.B. mittels einer Grenzwertbetrachtung und der Partiellen Integration beweisen ($\Delta(1/r) = -4\pi\delta(r)$). Somit kann man die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = f \quad (6.21)$$

(Poissongleichung) in einer Integralform angeben:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{wobei} \quad N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (6.22)$$

7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Wiederholung: Konvergenz

Eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert a genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N : \quad \|a_n - a\| < \varepsilon \quad (7.1)$$

Für Folgen im \mathbb{R}^n ist es egal, mit welcher Norm man dies definiert! Im Funktionenraum gilt das leider **nicht**.

Wir definieren die **Supremumsnorm** einer Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ als:

$$\|f(x)\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (7.2)$$

Diese Definition erfüllt alle **Axiome für Normen**: Linearität, Dreiecksungleichung und $\|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

7.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 7.1. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit beschränkten f_n .

- f_n konvergiert für $n \rightarrow \infty$ **punktweise** gegen f

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (7.3)$$

- f_n konvergiert für $n \rightarrow \infty$ **gleichmäßig** gegen f

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{\text{sup}} = 0 \quad (7.4)$$

Es ist klar, dass gleichmäßige Konvergenz punktweise einschließt aber nicht umgekehrt. Die Funktionenfolge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beispielsweise punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent. Gleichmäßige Konvergenz kann man auch mit dem **Cauchy-Kriterium** ausdrücken:

Lemma 7.1. Eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn¹

$$\|f_m(x) - f_n(x)\|_{\text{sup}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

7.2 Vertauschbarkeit von Grenzprozessen

Satz 7.1. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge **stetiger** Funktionen, die gleichmäßig auf einem **endlichen** Intervall $[a, b]$ gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert. Dann ist $f(x)$ **ebenfalls stetig**. Zudem ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (7.6)$$

Es kann aber keine Aussage über uneigentliche Integrale getroffen werden!

¹Man erinnere sich an Cauchy-Folgen.

Die **Negation dieses Satzes** ist sehr hilfreich, wenn man herausfinden will, ob eine Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Die **Stetigkeit der Grenzfunktion** und die **Vartauschbarkeit mit dem Integral** sind also **Notwendige Bedingungen** für die gleichmäßige Konvergenz. Man kann also mit Gegenbeispielen argumentieren.

Satz 7.2. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge **stetig differenzierbarer Funktionen**, sodass

- $f_n \rightarrow f$ *punktweise auf $[a, b]$*
- $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf $[a, b]$*

für $n \rightarrow \infty$ Dann ist f stetig differenzierbar auf $[a, b]$ mit $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Diese Sätze gelten ebenso für Funktionenreihen!

7.3 Konvergenz von Funktionenreihen

Eine Funktionenreihe hat die Form:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \quad (7.7)$$

Z.B. für Potenzreihen ist $g_k = a_k(x - x_0)^k$.

Satz 7.3. Weierstraßscher M-Test: Sei $g_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, sodass $|g_k| \leq M_k$. Wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty \quad (7.8)$$

dann konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$ gleichmäßig für $x \in [a, b]$.

Für eine **Potenzreihe** kann man mit den Sätzen aus diesem Kapitel zeigen, dass sie auf ihrem **Konvergenzradius** gleichmäßig konvergent, sowie beliebig oft stetig differenzierbar sind und die Ableitungen auch gleichmäßig konvergieren.

Erinnerung: Konvergenzkriterien:

- **Wurzelkriterium**

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 & \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergent} \end{cases} \quad (7.9)$$

- **Quotientenkriterium** ($a_n \neq 0$)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} < 1 & \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergent} \end{cases} \quad (7.10)$$

Hilfreich: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$. Der Kehrwert dieses Limes Superior ist bei Potenzreihen der **Konvergenzradius**.

Stetige Funktionen als normierter Vektorraum

Die stetigen Funktionen bilden aufgrund des Cauchy Kriteriums für Funktionenfolgen mit der Supremumsnorm einen vollständigen Vektorraum.

7.4 Konvergenz im quadratischen Mittel

Definition 7.2. Seien $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und f \mathcal{R} -integrierbar (also Riemann- oder Regin-integrierbar) auf $[a, b]$ mit Werten in \mathbb{C} . f_n konvergiert im **quadratischen Mittel** gegen f , genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0. \quad (7.11)$$

Es gilt, ähnlich wie oben, dass gleichmäßige Konvergenz auch Konvergenz im quadr. Mittel impliziert aber umgekehrt nicht. Für integrierbare komplexe Funktionen kann man auch ein (hermitesches) Skalarprodukt definieren (HMII):

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (7.12)$$

Somit definiert man auch eine sog. *L2-Norm*:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad (7.13)$$

Man erkennt, dass diese Norm mit den stetigen Funktionen keinen vollständigen Vektorraum bilden, da die Vollständigkeit nicht erfüllt ist. Es ist sogar so, dass die *L2* -Norm streng genommen **keine Norm** ist, dass sie auch dann 0 ist, wenn die Funktion nur an endlich vielen Stellen nicht 0 ist. Die Konvergenz im quadratischen Mittel wird auch **L2-Konvergenz** genannt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$

Lemma 7.2. Die *L2-Norm* erfüllt die **Dreiecksungleichung**

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad (7.14)$$

und die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \quad (7.15)$$

8 Fourier Reihen

8.1 Fourier Polynome

Das folgende Kapitel ist nur für periodische Funktionen gültig. Man erhält, dass die trigonometrische Basisfunktion

$$\hat{\mathbf{e}}_k(x) := e^{ikx} \quad (8.1)$$

eine **Orthonormalbasis** im Funktionenraum bezüglich des hermiteschen Skalarproduktes in der Form:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (8.2)$$

Dadurch ergibt sich das **komplexe Fourier Polynom** in der Form:

$$T_N f(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \langle f, \hat{\mathbf{e}}_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi+\delta} f(x) e^{-ikx} dx \quad (8.3)$$

wobei δ für 2π -periodische Funktionen beliebig ist (man kann jede Funktion durch geeignete Umskalierung 2π -periodisch machen).

Man kann diese Formel auch in eine „reelle“ Darstellung überführen. Mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (8.4)$$

ergibt sich das **reelle Fourierpolynom** (wobei es durchaus Komplexe Werte geben kann):

$$T_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (8.5)$$

Man erhält aus der **Eulerschen Formel** $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ auch einen Zusammenhang zwischen den c_k und a_k/b_k :

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad (8.6)$$

Es ergeben sich einige Bedingungen:

- Ist f **gerade** sind die $b_k = 0$.
- Ist f **ungerade** sind die $a_k = 0$ ($k \neq 0$).
- Ist f **differenzierbar** hat auch die Ableitung eine Fourierentwicklung mit den Koeffizienten ikc_k .

Entwickelt man die Polynome bis ins Unendliche nennt man sie **Fourier-Reihe**.

8.2 Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel

Betrachtet man den Vektorunterraum \mathcal{V}_N der komplextrigonometrischen Polynome vom Grad N stellt man fest, dass man nun dessen Elemente S_N als Linearkombinationen der trigonometrischen Basisfunktionen $\hat{\mathbf{e}}_k = e^{ikx}$ schreiben kann.

$$S_N = \sum_{|k| \leq N} \lambda_k \hat{\mathbf{e}}_k \quad (8.7)$$

Die Koeffizienten λ_k stellen S_N also eindeutig dar. Es fällt dabei auf, dass

$$\|S_N\|_2^2 = \sum_{|k| \leq N} |\lambda_k|^2 \leq N \max_{|k| \leq N} |\lambda_k|^2 \quad (8.8)$$

also der gewöhnlichen euklid'schen Norm ist. Die **Bestapproximation** eines Objektes \mathbf{v} auf \mathcal{V}_N ist also durch die Projektion bezüglich des hermiteschen Skalarproduktes gegeben:

$$\mathbf{v}' = \sum_{k=1}^m (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k) \hat{\mathbf{e}}_k \quad (8.9)$$

Überträgt man dies auf vollständig orthonormierte Funktionensysteme, wie die Fourierpolynome erhält man, dass die beste Approximierung auf den neuen Raum tatsächlich gegeben ist durch:

$$T_N : f \mapsto T_N f = \sum_{|k| \leq N} \langle f, \hat{\mathbf{e}}_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{V}_N \quad (8.10)$$

Lemma 8.1. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und über $[0, 2\pi]$ \mathcal{R} -integrierbar. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und für beliebiges $S_N \in \mathcal{V}_N$:*

- (i) $\|f - S_N\|_2^2 = \|f - T_N f\|_2^2 + \|T_N f - S_N\|_2^2$ (Satz von Pythagoras)
- (ii) $\|f - S_N\|_2^2 \geq \|f - T_N f\|_2^2$ (L^2 -Bestapproximation)
- (iii) $\|f - T_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|T_N f\|_2^2$
- (iv) $\|f - T_N f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$ (Besselsche Ungleichung)

Der Satz von Pythagoras kann geometrisch motiviert werden, folgt aber auch aus expliziter Berechnung der Auftretenden Terme:

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|_2^2 &= \|(f - T_N f) + (T_N f - S_N)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(f - T_N f) + (T_N f - S_N)|^2 dx \\ &= \|f - T_N f\|_2^2 + \|T_N f - S_N\|_2^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f - T_N f) \overline{(T_N f - S_N)} dx \end{aligned}$$

Es ist klar, dass man $T_N f - S_N$ wieder als Linearkombination in \mathcal{V}_N darstellen kann. Somit ist:

$$\begin{aligned} \langle f - T_N f, T_N f - S_N \rangle &= \left\langle f - T_N f, \sum_{|k| \leq N} \lambda_k \hat{\mathbf{e}}_k \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq N} \bar{\lambda}_k \int_0^{2\pi} (f - T_N f) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq N} \bar{\lambda}_k \left(c_k - \int_0^{2\pi} \sum_{|l| \leq N} c_l e^{ilx} e^{-ikx} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq N} \bar{\lambda}_k (c_k - c_k) = 0 \end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet dann, $f - T_N f$ ist Orthogonal zu $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_N$. (ii) sichert, dass die beste Approximation der Entwicklung der Funktion in \mathcal{V}_N auch tatsächlich von der Form wie oben ist. (ii) folgt direkt aus (i), (iii) und (iv) speziell mit $S_N = 0$.

Satz 8.1. Konvergenz der Fourierreihen im quadratischen Mittel: *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und über $[0, 2\pi]$ \mathcal{R} -integrierbar, dann konvergiert die Fourierreihe*

$$T_N f \rightarrow f \quad \text{im quadratischen Mittel} \quad (8.11)$$

für $N \rightarrow \infty$, und es gilt die **Parseval-Identität**:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad (8.12)$$

Der Beweis führt zunächst die L^2 -Konvergenz der Fourierreihe einer beliebigen regelintegrierbaren (also durch Treppenfunktion approximierbaren) Funktion auf die der Fourierreihe der Stufenfunktion zurück.

Satz 8.2. Parseval-Identität für das Skalarprodukt *Für f und g 2π periodisch und $\in \mathcal{R}([0, 2\pi])$ mit Fourier-Koeffizienten c_n und d_n gilt:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{|k| \leq N} c_k \bar{d}_k. \quad (8.13)$$

Auswertung von Summen

Bringt man die Parseval-Identität in eine Reell-trigonometrische Form, so erhält man:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (8.14)$$

Somit kann man, bei bekannter Fourier-Reihe der Funktion eine Reihe in ein Integral überführen. **Beispiel:** Es ist bekannt:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \quad (8.15)$$

Somit kann man die Reihe über die $a_k^2 = 1/k^2$ gemäß der Parseval Identität berechnet werden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (8.16)$$

8.3 Dirac-Scharen und δ -Distribution

Man nennt eine Funktion

$$\varphi \in C^\infty : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ mit } \varphi(x) = 0 \text{ für } |x| \geq 1 \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1 \quad (8.17)$$

häufig **Glättungskern**. Ein Beispiel ist z.B.

$$\varphi(x) = \frac{1}{c} \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (8.18)$$

mit normierendem c . Man kann diese Funktion umschreiben, sodass: $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon$, sodass alle Eigenschaften erhalten bleiben. Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ konzentriert sich die Funktion bei $x = 0$, wobei das Integral erhalten bleibt. Eine solche Funktion ist eine **Dirac Schar**.

Satz 8.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy. \quad (8.19)$$

Dann ist für $\varepsilon > 0$ die Funktion $f_\varepsilon \in C^\infty$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x), \quad (8.20)$$

d.h. f_ε konvergiert punktweise gegen f . Auf endlichen Intervallen ist diese Konvergenz **gleichmäßig**.

Definition 8.1. Für zwei stetige Funktionen f und g nennt man eine Integraloperation der Form:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \quad (8.21)$$

Faltung. Diese ist kommutativ und distributiv.

Die Faltung erfüllt fast alle Eigenschaften der Multiplikation. Man kann aber Beweisen, dass es **kein 1-Element** gibt, also keine *Funktion* h gibt, für die gilt $(f * h)(x) = f(x)$. Man kann ein solches Verhalten aber im Grenzwertübergang einer Dirac Schar erreichen. Man erzeugt dann das Konvergenzverhalten der **Delta-Distribution** (Konvergenz im Distributionssinn):

$$\int f(y) \delta_0(dy) = f(0). \quad (8.22)$$

8.4 Punktw. & gleichm. Konvergenz von Fourier-Reihen

Mithilfe des **Dirichlet-Kerns**

$$D_N(x) = \sum_{|k| \leq N} e^{ikx} = \begin{cases} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}, & x \in (0, 2\pi) \\ 2N+1, & x = 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

(stetig fortgesetzt) kann man sich leicht klar machen, dass man die Fourierreihe einer Funktion f auch durch eine *periodische* Faltung ausdrücken kann:

$$T_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-y) f(y) dy := (D_N * f)(x). \quad (8.24)$$

Der Dirichlet Kern erfüllt folgende Eigenschaften:

$$(i) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 1 \quad (8.25)$$

$$(ii) \quad T_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(y) f(x \pm y) dy \quad (8.26)$$

Beide folgen aus der Achsensymmetrie von D_N und ggf. der Substitutionsregel. Das absolute Integral konvergiert nicht!

Satz 8.4. Punktweise Konvergenz von Fourier Reihen: Sei f 2π -periodisch und stückweise stetig differenzierbar (nicht zwingend überall stetig!). Dann konvergieren die Fourier-Polynome punktweise gegen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N f(x) = T f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (8.27)$$

wobei $f(x^\pm) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x \pm h)$, .

Stückweise stetig differenzierbar fordert, dass der Grenzwert der Funktion und der Ableitung an den ggf. Sprungstellen existiert!

Satz 8.5. Gleichmäßige Konvergenz von Fourier Reihen: Für 2π -periodische Funktionen f , die stückweise stetig differenzierbar **und stetig** sind ist die Konvergenz der Fourier-Polynome gleichmäßig.

Mithilfe des Weierstraßschen M-Tests erhält man ein Kriterium für die Konvergenz von Fourierreihen:

Satz 8.6.

(i) Falls $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig, d.h.

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{ist stetig.} \quad (8.28)$$

(ii) Falls $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^m |c_k| < \infty$, so konvergieren die Ableitungen der Ordnung $l \leq m$ gleichmäßig und f ist m -mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{d^l}{dx^l} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^l c_k e^{ikx}. \quad (8.29)$$

9 Wahrscheinlichkeitsrechnung

9.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Um den Begriff der Wahrscheinlichkeit mathematisch fassbar zu machen benötigt man einige neue Begriffe:

Elementarereignis: ω	Mögliches Ergebnis eines Zufallsexperiments .	<i>Würfel-Augenzahl</i>
Stichprobenraum: Ω	Menge der Elementarereignisse.	
Ereignis: A	Teilmenge von Omega, die betrachtet wird.	Ja/Nein-Frage
Ereignisraum: \mathcal{E}	Menge aller möglichen Ereignisse.	

Alle diese Objekte sind **problemabhängig** (*Augensumme/Augentupel beim Würfel*). Der Ereignisraum erfüllt die Eigenschaft einer σ -**Algebra** über Ω :

Definition 9.1. Ein System \mathcal{E} von Teilmengen einer beliebigen Menge Ω heißt σ -**Algebra** über Ω , wenn gilt:

- (i) $\Omega \in \mathcal{E}$
- (ii) Sind $A, B \in \mathcal{E}$, so ist auch $A \setminus B \in \mathcal{E}$.
- (iii) Sind $A_i \in \mathcal{E}$, so ist auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$.

Die Größte σ -Algebra über Ω ist die *Potenzmenge*. Eine Funktion die Wahrscheinlichkeiten beschreibt muss aus Konsistenzgründen folgende Definition erfüllen:

Definition 9.2. Eine Funktion $\mathbb{P} : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf Ω (wie oben), wenn für alle paarweise disjunkten A_i gilt:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität}) \quad (9.1)$$

Allgemein nennt man ein Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ nennt man **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ist für einen Wahrscheinlichkeitsraum für jedes Elementarereignis eine positive Zahl p_i , mit Summe 1, gegeben, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \in \Omega$ als die Summe der entsprechenden p_i .

Der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist in einem Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse gleich ($= 1/n$, damit normiert), so ergibt sich (mit Mächtigkeit $|M|$):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (9.2)$$

Laplacesches Urnenmodell

Geht man von einer Grundmenge von n gleich-wahrscheinlichen „Kugeln“ und k Ziehungen aus ergeben sich 4 verschiedene Fälle. Ω enthält hier alle möglichen Ergebnisse als k -Tupel $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Die Anzahl der möglichen, sich unterscheidenden Tupel ist dann $|\omega|$.

(i) Ziehen **mit** Reihenfolge und **mit** Zurücklegen:

$$\Omega = \{\omega : 1 \leq \omega_i \leq n\} \Rightarrow |\Omega| = n^k \quad (9.3)$$

(ii) Ziehen **mit** Reihenfolge und **ohne** Zurücklegen:

$$\Omega = \{\omega : 1 \leq \omega_i \leq n, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\} \Rightarrow |\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} =: (n)_k \quad (9.4)$$

(iii) Ziehen **ohne** Reihenfolge und **ohne** Zurücklegen:

$$\Omega = \{\omega : 1 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \leq n\} \Rightarrow |\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k} \quad (9.5)$$

(iv) Ziehen **ohne** Reihenfolge und **mit** Zurücklegen:

$$\Omega = \{\omega : 1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k \leq n\} \Rightarrow |\Omega| = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n+k-1}{k} \quad (9.6)$$

Bernoulli-Experimente

Sind Zufallsexperimente mit nur zwei möglichen Elementarereignissen. Mit dem Produktmaß als Wahrscheinlichkeitsmaß ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit unter n unabhängigen Wiederholungen k mal ω_1 mit $\mathbb{P}(\omega_1) = p$ zu erhalten (Ereignis A_k) zu:

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (9.7)$$

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

Ist der Stichprobenraum $\Omega = \mathbb{R}$ benötigt man als Wahrscheinlichkeitsmaß eine (uneigentlich) integrierbare Funktion $\rho : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, sodass:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1. \quad (9.8)$$

Eine solche Funktion nennt man Wahrscheinlichkeitsdichte. Als sinnvollen Ereignisraum macht es hier keinen Sinn die Potenzmenge zu betrachten. Stattdessen bezeichnet man, auch aus Gründen der Konsistenz des Integralbegriffs, den Ereignisraum als *die Menge aller offenen Intervalle*, die auch **Borel-Algebra** \mathcal{B} genannt wird. Der Wahrscheinlichkeitsraum besteht dann aus $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, wobei

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \rho(x) dx \quad (9.9)$$

Man kann diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße auch hiermit durch Delta-Distributionen erzeugen.

9.2 Stochastische Unabhängigkeit

Definition 9.3. *Gegeben seien zwei Ereignisse A und B in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Ferner sei $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Dann heißt*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (9.10)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B .

Naheliegender ist, dass wenn A unabhängig von B ist gilt $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Damit dies Erhalten bleibt, die Definition aber symmetrisch ist erhält man:

Definition 9.4. *Zwei Ereignisse A und B heißen genau dann **unabhängig**, wenn*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad (9.11)$$

Satz 9.1. Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten: *Sei A_1, A_2, \dots höchstens abzählbar unendliche Familie von Ereignissen, derart, dass die A_i paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung Ω ergibt. Dann gilt für alle Ereignisse $A \in \mathcal{E}$*

$$(i) \quad \mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Bayes Theorem

Aus dem Gesetz der Totalen Wahrscheinlichkeit und der Formel von Bayes

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}, \quad (9.12)$$

welche einfach aus der symmetrischen Definition 9.4 folgt, kann man ableiten:

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)} \quad (9.13)$$

9.3 Zufallsvariablen

Definition 9.5. Eine *reelle Zufallsvariable* ist eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{E} \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.14)$$

Man nennt dies auch die **Messbarkeitseigenschaft**. Die **Verteilungsfunktion** F_X ist dann gegeben durch:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad (9.15)$$

Die Verteilungsfunktion ist *rechtsstetig* und es gelten die Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \quad (9.16)$$

Diskrete Zufallsvariablen

Zufallsvariablen mit höchstens abzählbar unendlichem Wertebereich heißen diskret. Man definiert dann eine **Wahrscheinlichkeitsfunktion**

$$p_X(x) := \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_k) & \text{für } x = x_k \text{ und } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.17)$$

Mit dieser Definition erhält man hier die Verteilungsfunktion durch Aufsummieren.
 $F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k)$

Binomialverteilung

$$p_X(x) = b_{n,p}(x) := \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{für } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.18)$$

Poissonverteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty}, \quad \lim_{p \rightarrow 0}, \quad np = \lambda = \text{const} \quad \Rightarrow \quad b_{n,p}(x) \rightarrow P_\lambda(x) \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{für } x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.19)$$

Absolut stetige Zufallsvariablen

Definition 9.6. Man spricht von einer stetigen Zufallszahl, wenn eine nicht negative integrierbare Funktion f existiert, mit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad (9.20)$$

Dann heißt $f_X(x)$ **Dichte der Zufallsvariablen** X .

Gleichverteilung

Normalverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (9.21)$$

Ist diese Form gegeben kann man $\mathbb{P}_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$ also umformen zu

$$\mathbb{P}_X((a, b]) = \int_a^b f_X(x) \, dx \quad (9.22)$$

Genauer müsste man diese *Verteilung* der Variable über eine beliebige Menge A mit dem Lebesgue Integral beschreiben.

9.4 Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Falls das Integral / die Summe konvergiert definiert man den Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X(dx)$:

$$\textbf{diskret:} \quad \mathbb{E}(X) = \sum_k x_k p_X(x_k) \quad \textbf{absolut stetig:} \quad \mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, dx \quad (9.23)$$

Dieser ist linear und monoton. Man kann ihn auf beliebige stetige Funktionen h ($h(x)$ statt x) erweitern.

Varianz

Man bezeichnet die Zahl:

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \quad (9.24)$$

als Varianz, wobei konkret gilt:

$$\textbf{diskret:} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_k x_k^2 p_X(x_k) \quad \textbf{absolut stetig:} \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) \, dx \quad (9.25)$$

Diese Definition macht es plausibel, dass die Varianz nicht einfach linear ist, sondern gilt:

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X) \quad \text{sowie} \quad \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \quad (9.26)$$

wobei $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Die Varianz erfüllt die **Tschebyschew-Ungleichung**, die sozusagen die Bedeutung der Varianz, als Streuungswert der Verteilung begründet:

Satz 9.2. *Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Dann gilt für alle $\lambda > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \quad (9.27)$$

9.5 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zwei Zufallsvariablen heißen unabhängig, wenn gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \quad (9.28)$$

Man kann dies durch die **gemeinsame Verteilungsfunktion beschreiben**:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (9.29)$$

Für den Erwartungswert gilt dann bei unabhängigen Zufallsvariablen

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad (9.30)$$

Das bedeutet, dass die **Covarianz verschwindet**. Allgemein gilt:

Satz 9.3. *Unabhängig impliziert unkorreliert. Die Umkehrung gilt nicht.*

Diskreter Fall

$$\mathbb{E} = \sum_{k,l} x_k y_l \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l) \quad (9.31)$$

Absolut stetiger Fall

Falls man einen Zufallsvektor durch eine gemeinsame Dichte $f_{XY}(x, y)$ beschreiben kann definiert man die Randdichten, bei denen die jeweils andere Variable bereits ausintegriert wurde:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dx \quad (9.32)$$

Stochastisch unabhängig sind sie genau dann, wenn:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (9.33)$$

Der Erwartungswert ergibt sich dann durch:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{XY}(x, y) dx dy \quad (9.34)$$

Diese Konzepte lassen sich auf beliebige Dimensionen erweitern.

9.6 Gesetz der großen Zahlen

Satz 9.4. *Sind X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte und Varianzen existieren, dann gilt:*

$$(i) \quad \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Aus der Tschebyschew-Ungleichung kann man mittels der Definitionen von Varianz und Erwartungswert folgende Aussage herleiten:

Satz 9.5. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallszahlen, die alle den selben Erwartungswert μ und die selbe Varianz σ^2 besitzen. Dann gilt für jeden $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \quad (9.35)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass der Mittelwert einer Stichprobe sich statistisch immer dem tatsächlichen Erwartungswert der X_i annähern wird.

Das starke Gesetz der großen Zahlen

Definition 9.7. Zufallsvariablen heißen **identisch verteilt**, wenn ihre Verteilungsfunktion gleich ist.

Gerne verwendet man die Abkürzung **i.i.d** (independent identically distributed).

Satz 9.6. Für eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ gilt:

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \mu \right\} \right) = 1 \quad (9.36)$$

9.7 Zentraler Grenzwertsatz

Man definiert die standardisierte Zufallsvariable und die standardisierte Summe von i.i.d. Zufallsvariablen als:

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad S_n = \sum X_i \quad S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (9.37)$$

Dadurch folgen leicht die Werte:

$$\mathbb{E}(X^*) = 0 \quad \text{Var}(X^*) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(S_n^*) = 0 \quad \text{Var}(S_n^*) = 1 \quad (9.38)$$

Hiermit kann man den zentralen Grenzwertsatz formulieren:

Satz 9.7. (Zentraler GWS:) Sei X_i eine i.i.d. Folge von Zufallszahlen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ mit endlicher Erwartung und Varianz. Dann ist die standardisierte Summe S_n^* asymptotisch für große n standard normalverteilt:

$$\mathbb{P}(S_n^* \leq x) \xrightarrow{p.w.} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (9.39)$$