# Paradigmas de Programación

## Sistemas deductivos
## Deducción natural para lógica proposicional

**2do cuatrimestre de 2024**

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

# Sistemas deductivos

**Sistema deductivo (informalmente)**

Brinda herramientas y principios para **razonar de manera rigurosa**.

# Sistemas deductivos

**Sistema deductivo**

Dado por un conjunto de **axiomas** y **reglas de inferencia**, que tienen la siguiente estructura:

$$\frac{}{\langle\text{axioma}\rangle}\langle\text{nombre del axioma}\rangle$$

$$\frac{\langle\text{premisa}_0\rangle \quad \langle\text{premisa}_1\rangle \quad \ldots \quad \langle\text{premisa}_n\rangle}{\langle\text{conclusión}\rangle}\langle\text{nombre de la regla}\rangle$$

- **Axioma**: Afirmaciones básicas que se asumen como verdaderas (no se deducen de otras afirmaciones).
- **Reglas de inferencia**: Permiten derivar afirmaciones (teoremas) a partir de axiomas y otras afirmaciones.

**Nota**: Un axioma es una regla de inferencia sin premisas.

# Reglas de inferencia

**Regla de inferencia**

$$\frac{\langle \text{premisa}_0 \rangle \qquad \langle \text{premisa}_1 \rangle \qquad \dots \qquad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle} \langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

# Reglas de inferencia

**Regla de inferencia**

$$\frac{\langle \text{premisa}_0 \rangle \qquad \langle \text{premisa}_1 \rangle \qquad \ldots \qquad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle}\langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

- Lectura de arriba hacia abajo:
  si tenemos evidencia de que valen las premisas,
  podemos deducir que vale la conclusión.

# Reglas de inferencia

**Regla de inferencia**

$$\frac{\langle\text{premisa}_0\rangle \quad \langle\text{premisa}_1\rangle \quad \ldots \quad \langle\text{premisa}_n\rangle}{\langle\text{conclusión}\rangle}\langle\text{nombre de la regla}\rangle$$

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

- Lectura de arriba hacia abajo:
  si tenemos evidencia de que valen las premisas,
  podemos deducir que vale la conclusión.
- Lectura de abajo hacia arriba:
  si queremos demostrar que vale la conclusión,
  alcanza con demostrar que valen las premisas.

# Sistemas deductivos

**Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$**

# Sistemas deductivos

**Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$**

- Axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\,\mathsf{ax1}$$

# Sistemas deductivos

## Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$

- Axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\,\text{ax1} \qquad \frac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\text{ax2}$$

# Sistemas deductivos

**Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$**

- Axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\text{ax1} \qquad \frac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\text{ax2} \qquad \frac{}{\blacktriangle > \bullet}\text{ax3}$$

# Sistemas deductivos

## Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$

- Axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\text{ax1} \qquad \frac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\text{ax2} \qquad \frac{}{\blacktriangle > \bullet}\text{ax3}$$

- Regla de inferencia: definida por el *esquema*

$$\frac{X > Y \quad Y > Z}{X > Y}\text{trans}$$

$X$, $Y$ y $Z$ son variables esquemáticas / *metavariables*: se pueden instanciar de manera arbitraria

# Sistemas deductivos

**Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$**

- Axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\text{ax1} \qquad \frac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\text{ax2} \qquad \frac{}{\blacktriangle > \bullet}\text{ax3}$$

- Regla de inferencia: definida por el *esquema*

$$\frac{X > Y \quad Y > Z}{X > Y}\text{trans}$$

$X$, $Y$ y $Z$ son variables esquemáticas / *metavariables*: se pueden instanciar de manera arbitraria

# Derivación / Deducción / Prueba

**Derivación**

Un método sistemático para construir una demostración que muestra cómo una afirmación se deduce a partir de un conjunto de axiomas y reglas de inferencia.

# Árbol de Derivación

**Árbol de Derivación: Representación gráfica de una derivación**

Un árbol **finito** donde

- Los nodos representan afirmaciones
- La raíz es la afirmación que se quiere probar (**conclusión**)
- Las ramas representan las reglas de inferencias que conectan a las afirmaciones.

Parte de ciertas premisas (hojas) y llega a una conclusión (raíz).

# Árbol de Derivación

**Ejemplo 1**

$$\dfrac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\text{ax2}$$

Se puede concluir $\blacksquare > \blacktriangle$ sin premisas.

**Ejemplo 2**

$$\dfrac{\bigstar > \blacksquare \qquad \blacksquare > \blacktriangle}{\bigstar > \blacktriangle}\,\text{trans}$$

Se puede concluir $\blacksquare > \blacktriangle$ a partir de las premisas $\bigstar > \blacksquare$ y $\blacksquare > \blacktriangle$.

**Ejemplo 3**

$$\dfrac{\dfrac{}{\bigstar > \blacksquare}\,\text{ax1} \qquad \dfrac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\text{ax2}}{\bigstar > \blacktriangle}\,\text{trans}$$

Se puede concluir $\bigstar > \blacktriangle$ sin premisas.

# Afirmación derivable (teorema)

**Afirmación derivable**

Una afirmación es **derivable** si existe alguna derivación **sin premisas** que la tiene como conclusión.

**Son las siguientes afirmaciones derivables?**

- $\bigstar > \blacktriangle$
- $\blacktriangle > \bigstar$

# Lógica proposicional: Sintaxis

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

# Lógica proposicional: Sintaxis

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

**Fórmulas**

Las fórmulas de la lógica proposicional se construyen con las siguientes reglas

- Una variable proposicional es una fórmula.
- $\perp$ es una fórmula (representa una contradicción).
- Si $\tau$ es una fórmula, entonces $\neg\tau$ es una fórmula.
- Si $\tau$ y $\sigma$ son fórmulas, entonces $(\tau \wedge \sigma)$, $(\tau \Rightarrow \sigma)$, y $(\tau \vee \sigma)$ son fórmulas.

Nota: Omitimos $\iff$ por economía

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

**Sistema deductivo**

La afirmación "$X$ $\textsc{form}$" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ $\textsc{form}$.

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

**Sistema deductivo**

La afirmación "$X$ $\textsc{form}$" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P\ \textsc{form}}\mathsf{FP}$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ $\textsc{form}$.

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

## Sistema deductivo

La afirmación "$X$ $\textsc{form}$" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \ \textsc{form}}\mathsf{FP} \qquad \frac{}{\bot \ \textsc{form}}\mathsf{F}\bot$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ $\textsc{form}$.

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

## Sistema deductivo

La afirmación "$X$ FORM" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \ \textsc{form}}\mathsf{FP} \qquad \frac{}{\bot \ \textsc{form}}\mathsf{F}\bot \qquad \frac{\tau \ \textsc{form} \qquad \sigma \ \textsc{form}}{(\tau \wedge \sigma) \ \textsc{form}}\mathsf{F}\wedge$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ FORM.

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

**Sistema deductivo**

La afirmación "$X$ $\textsc{form}$" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \ \textsc{form}}\mathsf{FP} \qquad \frac{}{\bot \ \textsc{form}}\mathsf{F}\bot \qquad \frac{\tau \ \textsc{form} \qquad \sigma \ \textsc{form}}{(\tau \wedge \sigma) \ \textsc{form}}\mathsf{F}\wedge$$

$$\frac{\tau \ \textsc{form} \qquad \sigma \ \textsc{form}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \ \textsc{form}}\mathsf{F}\Rightarrow$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ $\textsc{form}$.

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

**Sistema deductivo**

La afirmación "$X$ FORM" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \text{ FORM}}\text{FP} \qquad \frac{}{\bot \text{ FORM}}\text{F}\bot \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \qquad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \wedge \sigma) \text{ FORM}}\text{F}\wedge$$

$$\frac{\tau \text{ FORM} \qquad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \text{ FORM}}\text{F}\Rightarrow \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \qquad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \vee \sigma) \text{ FORM}}\text{F}\vee$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ FORM.

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

**Sistema deductivo**

La afirmación "$X$ FORM" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \text{ FORM}}\text{FP} \qquad \frac{}{\bot \text{ FORM}}\text{F}\bot \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \wedge \sigma) \text{ FORM}}\text{F}\wedge$$

$$\frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \text{ FORM}}\text{F}\Rightarrow \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \vee \sigma) \text{ FORM}}\text{F}\vee \qquad \frac{\tau \text{ FORM}}{\neg\tau \text{ FORM}}\text{F}\neg$$

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

**Sistema deductivo**

La afirmación "$X$ FORM" denota que $X$ es una fórmula de la lógica proposicional

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \text{ FORM}}\mathsf{FP} \qquad \frac{}{\bot \text{ FORM}}\mathsf{F}\bot \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \wedge \sigma) \text{ FORM}}\mathsf{F}\wedge$$

$$\frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \text{ FORM}}\mathsf{F}\Rightarrow \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \vee \sigma) \text{ FORM}}\mathsf{F}\vee \qquad \frac{\tau \text{ FORM}}{\neg\tau \text{ FORM}}\mathsf{F}\neg$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ FORM.

# Lógica proposicional: Sintaxis (gramáticas)

- Usualmente vamos a definir la sintaxis de lenguajes a través de sistemas deductivos.
- Vamos a escribirlos de maneras abreviadas, usando gramáticas (la definición de lo que es una gramática la verán en Teoría de Lenguajes)

**Gramática de la lógica proposicional**

Las **fórmulas** son las expresiones que se pueden generar a partir de la siguiente gramática:

$$\tau, \sigma, \rho, \ldots ::= \ P \ \mid \ \perp \ \mid \ (\tau \wedge \sigma) \ \mid \ (\tau \Rightarrow \sigma) \ \mid \ (\tau \vee \sigma) \ \mid \ \neg\tau$$

# Lógica proposicional: Sintaxis (gramáticas)

- Usualmente vamos a definir la sintaxis de lenguajes a través de sistemas deductivos.
- Vamos a escribirlos de maneras abreviadas, usando gramáticas (la definición de lo que es una gramática la verán en Teoría de Lenguajes)

**Gramática de la lógica proposicional**

Las **fórmulas** son las expresiones que se pueden generar a partir de la siguiente gramática:

$$\tau, \sigma, \rho, \ldots ::= \; P \mid \bot \mid (\tau \wedge \sigma) \mid (\tau \Rightarrow \sigma) \mid (\tau \vee \sigma) \mid \neg\tau$$

# Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

$$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) \;=\; (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

# Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

   $$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) \;=\; (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

2. La implicación es asociativa a derecha.

   $$\tau \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho \;=\; (\tau \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho))$$

# Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

   $$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) \;=\; (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

2. La implicación es asociativa a derecha.

   $$\tau \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho \;=\; (\tau \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho))$$

3. Ojo: los conectivos $(\wedge, \vee)$ **no** son conmutativos ni asociativos.

# Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

   $$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) \;=\; (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

2. La implicación es asociativa a derecha.

   $$\tau \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho \;=\; (\tau \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho))$$

3. Ojo: los conectivos $(\wedge, \vee)$ **no** son conmutativos ni asociativos.

   $$\tau \vee (\sigma \vee \rho) \;\neq\; (\tau \vee \sigma) \vee \rho \qquad\qquad \tau \wedge \sigma \;\neq\; \sigma \wedge \tau$$

# Lógica Proposicional : Semántica

**Valuación**

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

# Lógica Proposicional : Semántica

### Valuación

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

### $v \models \tau$

Una valuación $v$ **satisface** una fórmula $\tau$ si $v \models \tau$, donde:

$$v \models P \quad \text{si y sólo si} \quad v(P) = \mathtt{V}$$

**Nota: $v \models \bot$ nunca vale**

# Lógica Proposicional : Semántica

**Valuación**

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

**$v \models \tau$**

Una valuación $v$ **satisface** una fórmula $\tau$ si $v \models \tau$, donde:

$$\begin{array}{rcl} v \models P & \text{si y sólo si} & v(P) = \mathtt{V} \\ v \models \tau \wedge \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \end{array}$$

**Nota: $v \models \bot$ nunca vale**

# Lógica Proposicional : Semántica

**Valuación**

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

**$v \models \tau$**

Una valuación $v$ **satisface** una fórmula $\tau$ si $v \models \tau$, donde:

$$\begin{array}{rcl} v \models P & \text{si y sólo si} & v(P) = \mathtt{V} \\ v \models \tau \wedge \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\ v \models \tau \Rightarrow \sigma & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \end{array}$$

**Nota: $v \models \bot$ nunca vale**

# Lógica Proposicional : Semántica

### Valuación

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

### $v \models \tau$

Una valuación $v$ **satisface** una fórmula $\tau$ si $v \models \tau$, donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models P & \text{si y sólo si} & v(P) = \mathtt{V} \\
v \models \tau \wedge \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\
v \models \tau \Rightarrow \sigma & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \vee \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ o } v \models \sigma
\end{array}
$$

**Nota:** $v \models \bot$ **nunca vale**

# Lógica Proposicional : Semántica

## Valuación

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \rightarrow \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

## $v \models \tau$

Una valuación $v$ **satisface** una fórmula $\tau$ si $v \models \tau$, donde:

$$\begin{array}{rcl} v \models P & \text{si y sólo si} & v(P) = \mathtt{V} \\ v \models \tau \wedge \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\ v \models \tau \Rightarrow \sigma & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \\ v \models \tau \vee \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ o } v \models \sigma \\ v \models \neg\tau & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau \end{array}$$

**Nota:** $v \models \bot$ **nunca vale**

# Contextos y juicios

**Contexto**

Un **contexto** es un conjunto finito de fórmulas.

# Contextos y juicios

**Contexto**

Un **contexto** es un conjunto finito de fórmulas.

Los notamos con letras griegas mayúsculas $(\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots)$.
Por ejemplo:

$$\Gamma = \{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$$

# Contextos y juicios

**Contexto**

Un **contexto** es un conjunto finito de fórmulas.

Los notamos con letras griegas mayúsculas $(\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots)$.
Por ejemplo:

$$\Gamma = \{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$$

Generalmente omitimos las llaves; p. ej.: $P \Rightarrow Q, \neg Q$.

**$v \models \Gamma$**

Una valuación $v$ satisface un contexto $\Gamma$ (notación: $v \models \Gamma$) si y sólo si $v$ satisface a todas las fórmulas de $\Gamma$.

**Nota: Toda valuación $v$ satisface al contexto vacío**

# Consecuencia lógica

## Consecuencia lógica

Una fórmula $\tau$ es consecuencia lógica de un conjunto $\Gamma$ (notación: $\Gamma \models \tau$) si y sólo si cualquier valuación $v$ que satisface a $\Gamma$ también satisface a $\tau$.

**Notar:**

- $A$ es verdadera para todas las valuaciones que sastisfacen todas la fórmulas en $\Gamma$
- Asumiendo que todas las fórmulas en $\Gamma$ son verdaderas (hipótesis), $A$ (tesis) es verdadera.

# Consecuencia lógica

### Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \vDash P$.

# Consecuencia lógica

### Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \vDash P$.
2. Probar que $P \vee Q, \neg Q \vDash P$.

# Consecuencia lógica

### Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \vDash P$.
2. Probar que $P \vee Q, \neg Q \vDash P$.
3. Probar que no vale $P \vee Q \vDash Q$.

# Consecuencia lógica

### Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \vDash P$.
2. Probar que $P \vee Q, \neg Q \vDash P$.
3. Probar que no vale $P \vee Q \vDash Q$.
4. Probar que $P \vDash Q \vee \neg Q$.

# Consecuencia lógica

### Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \vDash P$.
2. Probar que $P \vee Q, \neg Q \vDash P$.
3. Probar que no vale $P \vee Q \vDash Q$.
4. Probar que $P \vDash Q \vee \neg Q$.
5. Probar que $\vDash P \Rightarrow P$.

# Limitaciones del método semántico

Hay varios problemas con un enfoque puramente semántico:

- Muy pocas lógicas tienen procedimientos de decisión como la lógica proposicional.
- El conjunto de hipótesis (axiomas) puede ser infinito.
- No evidencia la relación de la fórmula con hipótesis (Por ejemplo, dónde es necesaria una hipótesis).
- Difícil reconocer resultados intermedios (lemas).

# Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.

# Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.
- Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):

# Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.
- Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):
  - Trabaja con afirmaciones de la forma:

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{hipótesis}} \vdash \underbrace{\tau}_{\text{tesis}}$$

# Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.
- Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):
  - Trabaja con afirmaciones de la forma:

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{hipótesis}} \vdash \underbrace{\tau}_{\text{tesis}}$$

  - Denominamos a estas afirmaciones **Juicios**

# Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.
- Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):
  - Trabaja con afirmaciones de la forma:

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{hipótesis}} \vdash \underbrace{\tau}_{\text{tesis}}$$

  - Denominamos a estas afirmaciones **Juicios**
  - Informalmente, un juicio afirma que a partir de las hipótesis en el contexto $\Gamma$ es posible deducir la fórmula de la tesis.

# Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.
- Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):
  - Trabaja con afirmaciones de la forma:

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{hipótesis}} \vdash \underbrace{\tau}_{\text{tesis}}$$

  - Denominamos a estas afirmaciones **Juicios**
  - Informalmente, un juicio afirma que a partir de las hipótesis en el contexto $\Gamma$ es posible deducir la fórmula de la tesis.

**Ejemplo**

Los siguientes van a ser juicios derivables:

$$P \vee Q, \neg Q \vdash P \qquad \vdash P \Rightarrow P$$

# Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

# Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

## Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax}$$

# Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

## Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\mathsf{ax}$$

## Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}\,\mathsf{ax}$$

# Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

## Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\text{ax}$$

## Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}\,\text{ax} \qquad \frac{}{P \Rightarrow Q, R \vdash P \Rightarrow Q}\,\text{ax}$$

# Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

## Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax}$$

## Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}\text{ax} \qquad \frac{}{P \Rightarrow Q, R \vdash P \Rightarrow Q}\text{ax} \qquad \frac{}{P, Q \wedge R, S \vdash Q \wedge R}\text{ax}$$

# Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

## Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\mathsf{ax}$$

## Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}\,\mathsf{ax} \qquad \frac{}{P \Rightarrow Q, R \vdash P \Rightarrow Q}\,\mathsf{ax} \qquad \frac{}{P, Q \wedge R, S \vdash Q \wedge R}\,\mathsf{ax}$$

Los siguientes juicios **no** se deducen de la regla ax:

$$P, Q \vdash R \qquad \vdash P \Rightarrow P \qquad P \wedge Q \vdash Q \wedge P \qquad \neg\neg P \vdash P$$

# Reglas de inferencia — conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

# Reglas de inferencia — conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e_2}$$

# Reglas de inferencia — conjunción

## Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

## Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e_2}$$

1. Dar una derivación de $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

# Reglas de inferencia — conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e_2}$$

1. Dar una derivación de $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.
2. Dar una derivación de $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$.

# Reglas de inferencia — implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

# Reglas de inferencia — implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Eliminación de la implicación (*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

# Reglas de inferencia — implicación

## Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

## Eliminación de la implicación

(*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow P$

# Reglas de inferencia — implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Eliminación de la implicación (*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow P$
2. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow (Q \wedge P)$

# Reglas de inferencia — implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Eliminación de la implicación (*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow P$
2. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow (Q \wedge P)$
3. Dar una derivación de $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R$.

# Reglas de inferencia — disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

# Reglas de inferencia — disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

# Reglas de inferencia — disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$.

# Reglas de inferencia — disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$.
2. Dar una derivación de $\vdash (P \vee P) \Rightarrow P$.

# Reglas de inferencia — disyunción

## Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

## Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$.
2. Dar una derivación de $\vdash (P \vee P) \Rightarrow P$.
3. Dar una derivación de $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\perp$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\perp$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\perp$ **no** tiene reglas de introducción.

# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\perp$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\perp$ **no** tiene reglas de introducción.

## Eliminación del falso

(principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau}\perp_e$$

# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\bot$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\bot$ **no** tiene reglas de introducción.

## Eliminación del falso

(principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\,\bot_e$$

1. Dar una derivación de $(P \vee Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q$

# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\perp$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\perp$ **no** tiene reglas de introducción.

## Eliminación del falso

(principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau}\perp_e$$

1. Dar una derivación de $(P \vee Q) \Rightarrow \perp \vdash P \Rightarrow Q$
2. Dar una derivación de $(P \wedge Q) \Rightarrow \perp \vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow R$

# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\bot$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\bot$ **no** tiene reglas de introducción.

## Eliminación del falso

(principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\,\bot_e$$

1. Dar una derivación de $(P \vee Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q$
2. Dar una derivación de $(P \wedge Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow R$
3. Mostrar que hay infinitas derivaciones de $\bot \vdash \bot$.

# Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación (reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

# Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación (reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

# Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación (reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$.

# Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación (reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$.
2. Dar una derivación de $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$.

# Reglas de inferencia — negación

## Introducción de la negación

(reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

## Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$.
2. Dar una derivación de $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$.
3. Dar una derivación de $P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

# Deducción natural **intuicionista** (**NJ**) — todas la reglas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax}$$

| | Introducción | Eliminación |
|---|---|---|
| $\wedge$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2}$ |
| $\Rightarrow$ | $\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\Rightarrow_e$ |
| $\vee$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_2}$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\vee_e$ |
| $\bot$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\bot_e$ | |
| $\neg$ | $\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$ |

# Propiedades del sistema

## Teorema (Debilitamiento) (*weakening*)

Si $\Gamma \vdash \tau$ es derivable, entonces $\Gamma, \sigma \vdash \tau$ es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau}\mathsf{W}$$

# Propiedades del sistema

## Teorema (Debilitamiento) (*weakening*)

Si $\Gamma \vdash \tau$ es derivable, entonces $\Gamma, \sigma \vdash \tau$ es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau}\mathsf{W}$$

Se puede demostrar por inducción estructural en la derivación.
(Se hará como ejercicio en la práctica).

# Propiedades del sistema

## Teorema (Debilitamiento) (*weakening*)

Si $\Gamma \vdash \tau$ es derivable, entonces $\Gamma, \sigma \vdash \tau$ es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau}\mathsf{W}$$

Se puede demostrar por inducción estructural en la derivación.
(Se hará como ejercicio en la práctica).

## Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \quad \vdash P \wedge Q}\mathsf{ax}}{P \wedge Q \quad \vdash Q}\wedge_{e_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \quad \vdash P \wedge Q}\mathsf{ax}}{P \wedge Q \quad \vdash P}\wedge_{e_1}}{\dfrac{P \wedge Q \quad \vdash Q \wedge P}{\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)}\Rightarrow_i}\wedge_i$$

# Propiedades del sistema

## Teorema (Debilitamiento) (*weakening*)

Si $\Gamma \vdash \tau$ es derivable, entonces $\Gamma, \sigma \vdash \tau$ es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau}\mathsf{W}$$

Se puede demostrar por inducción estructural en la derivación.
(Se hará como ejercicio en la práctica).

## Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\mathsf{ax}}{P \wedge Q, R \vdash Q}\wedge_{e_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\mathsf{ax}}{P \wedge Q, R \vdash P}\wedge_{e_1}}{\dfrac{P \wedge Q, R \vdash Q \wedge P}{R \vdash (P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)}\Rightarrow_i}\wedge_i$$

# Reglas derivadas

Veamos que las siguientes reglas se deducen de las anteriores.
(No es necesario agregarlas al sistema deductivo).

# Reglas derivadas

Veamos que las siguientes reglas se deducen de las anteriores. (No es necesario agregarlas al sistema deductivo).

*Modus tollens*

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\,\mathsf{MT}$$

# Reglas derivadas

Veamos que las siguientes reglas se deducen de las anteriores. (No es necesario agregarlas al sistema deductivo).

*Modus tollens*

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\mathsf{MT}$$

Introducción de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\neg\neg_i$$

# Principios de razonamiento clásicos

## Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

# Principios de razonamiento clásicos

## Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

## Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\mathsf{LEM}$$

# Principios de razonamiento clásicos

## Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

## Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\text{LEM}$$

**No es posible deducir estas reglas de las anteriores**.

# Principios de razonamiento clásicos

## Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

## Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\text{LEM}$$

**No es posible deducir estas reglas de las anteriores**.

Sin embargo, se pueden deducir la una de la otra. Veamos que:

1. Usando la regla LEM se puede deducir la regla $\neg\neg_e$.

# Principios de razonamiento clásicos

## Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

## Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\text{LEM}$$

**No es posible deducir estas reglas de las anteriores**.

Sin embargo, se pueden deducir la una de la otra. Veamos que:

1. Usando la regla LEM se puede deducir la regla $\neg\neg_e$.
2. Usando la regla $\neg\neg_e$ se puede deducir la regla LEM.

# Principios de razonamiento clásicos

Las reglas $\neg\neg_e$ y LEM son principios de razonamiento **clásicos**.

# Principios de razonamiento clásicos

Las reglas $\neg\neg_e$ y LEM son principios de razonamiento **clásicos**.
Otro principio de razonamiento clásico, equivalente a $\neg\neg_e$ y LEM:

Reducción al absurdo clásico (*Proof by Contradiction*)

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\text{PBC}$$

# Principios de razonamiento clásicos

Las reglas $\neg\neg_e$ y LEM son principios de razonamiento **clásicos**.
Otro principio de razonamiento clásico, equivalente a $\neg\neg_e$ y LEM:

Reducción al absurdo clásico (*Proof by Contradiction*)

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\text{PBC}$$

Ejercicio

Ver que usando PBC se puede deducir LEM y viceversa.

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- **NJ** es más restrictiva. No permite usar $\neg\neg_e$, LEM, PBC, etc.

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- **NJ** es más restrictiva. No permite usar $\neg\neg_e$, LEM, PBC, etc.
- Para hacer matemática, comúnmente usamos lógica clásica.

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- **NJ** es más restrictiva. No permite usar $\neg\neg_e$, LEM, PBC, etc.
- Para hacer matemática, comúnmente usamos lógica clásica.

## Interés de la lógica intuicionista en computación

- Permite razonar acerca de **información**.
  ¿Qué significa (hay vida en Marte $\vee$ $\neg$hay vida en Marte)?

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

| | |
|---|---|
| **NJ** | sistema de deducción natural intuicionista. |
| **NK** | sistema de deducción natural clásica. |

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- **NJ** es más restrictiva. No permite usar $\neg\neg_e$, LEM, PBC, etc.
- Para hacer matemática, comúnmente usamos lógica clásica.

## Interés de la lógica intuicionista en computación

- Permite razonar acerca de **información**.
  ¿Qué significa (hay vida en Marte $\vee$ $\neg$hay vida en Marte)?
- Las derivaciones en **NJ** se pueden entender como programas.
  **NJ** es la base de un lenguaje de programación funcional.

# Deducción natural **clásica** (**NK**) — reglas completas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

| | Introducción | Eliminación |
|---|---|---|
| $\wedge$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2}$ |
| $\Rightarrow$ | $\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\Rightarrow_e$ |
| $\vee$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_2}$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\vee_e$ |
| $\bot$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\bot_e$ | |
| $\neg$ | $\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$ |

# Corrección y completitud

**Teorema (Corrección y completitud)**

Son equivalentes:

1. $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. $\Gamma \vDash \tau$

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \models \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \models \tau$ por inducción estructural en la derivación.

## Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

## Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \vDash \sigma$.

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \vDash \sigma$.
Sea $v$ tal que $v \vDash \Gamma$ y veamos que $v \vDash \sigma$.

## Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \vDash \sigma$.
Sea $v$ tal que $v \vDash \Gamma$ y veamos que $v \vDash \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \vDash \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \vDash \tau$.

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \models \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \models \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \models \sigma$.
Sea $v$ tal que $v \models \Gamma$ y veamos que $v \models \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \models \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \models \tau$.
Como $v \models \Gamma$ tenemos que $v \models \tau \Rightarrow \sigma$ y $v \models \tau$.

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \vDash \sigma$.
Sea $v$ tal que $v \vDash \Gamma$ y veamos que $v \vDash \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \vDash \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \vDash \tau$.
Como $v \vDash \Gamma$ tenemos que $v \vDash \tau \Rightarrow \sigma$ y $v \vDash \tau$.
Por definición de $v \vDash \tau \Rightarrow \sigma$, tenemos entonces que $v \nvDash \tau$ o $v \vDash \sigma$.

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \models \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \models \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \models \sigma$.
Sea $v$ tal que $v \models \Gamma$ y veamos que $v \models \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \models \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \models \tau$.
Como $v \models \Gamma$ tenemos que $v \models \tau \Rightarrow \sigma$ y $v \models \tau$.
Por definición de $v \models \tau \Rightarrow \sigma$, tenemos entonces que $v \not\models \tau$ o $v \models \sigma$.
Pero teníamos $v \models \tau$, con lo cual concluímos $v \models \sigma$.

# Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \vDash \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \vDash \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \vDash \sigma$.
Sea $v$ tal que $v \vDash \Gamma$ y veamos que $v \vDash \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \vDash \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \vDash \tau$.
Como $v \vDash \Gamma$ tenemos que $v \vDash \tau \Rightarrow \sigma$ y $v \vDash \tau$.
Por definición de $v \vDash \tau \Rightarrow \sigma$, tenemos entonces que $v \nvDash \tau$ o $v \vDash \sigma$.
Pero teníamos $v \vDash \tau$, con lo cual concluímos $v \vDash \sigma$.

- Intentar probar los 12 casos restantes.

# Demostración de completitud $\quad (\Gamma \vDash \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathsf{NK}} \tau)$

Definición

1. Un contexto $\Gamma$ **determina** una variable $P \in \mathcal{P}$ si vale que $P \in \Gamma$ o que $\neg P \in \Gamma$.

# Demostración de completitud $(\Gamma \vDash \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Definición

1. Un contexto $\Gamma$ **determina** una variable $P \in \mathcal{P}$ si vale que $P \in \Gamma$ o que $\neg P \in \Gamma$.
2. Un contexto $\Gamma$ **determina** un conjunto de variables $X \subseteq \mathcal{P}$ si determina a todas las variables de $X$.

# Demostración de completitud $(\Gamma \vDash \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Definición

1. Un contexto $\Gamma$ **determina** una variable $P \in \mathcal{P}$ si vale que $P \in \Gamma$ o que $\neg P \in \Gamma$.
2. Un contexto $\Gamma$ **determina** un conjunto de variables $X \subseteq \mathcal{P}$ si determina a todas las variables de $X$.

Para probar el teorema de completitud, necesitamos:

Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

# Demostración de completitud ($\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$)

### Definición

1. Un contexto $\Gamma$ **determina** una variable $P \in \mathcal{P}$ si vale que $P \in \Gamma$ o que $\neg P \in \Gamma$.
2. Un contexto $\Gamma$ **determina** un conjunto de variables $X \subseteq \mathcal{P}$ si determina a todas las variables de $X$.

Para probar el teorema de completitud, necesitamos:

### Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Asumamos que el lema vale, lo demostraremos después.

# Demostración de completitud $(\Gamma \vDash \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vDash \tau$.

Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

# Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$.

## Demostración de completitud $(\Gamma \vDash \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vDash \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\vDash \rho$. ¿Por qué?

# Demostración de completitud ($\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$)

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \land \ldots \land \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

## Demostración de completitud $\quad (\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.

## Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\vee_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.

## Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\vee_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).

## Demostración de completitud $\quad (\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\vee_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.

## Demostración de completitud $\quad (\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \land \ldots \land \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\lor_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.
   Por corrección vale $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \models \neg\rho$.

## Demostración de completitud $\quad (\Gamma \models \tau \text{ implica } \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \land \ldots \land \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\lor_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.
   Por corrección vale $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \models \neg\rho$.
   Sea $v$ una valuación tal que $v(P_i) = \mathtt{V}$ si y sólo si $\tilde{P}_i = P_i$.

# Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\vee_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.
   Por corrección vale $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \models \neg\rho$.
   Sea $v$ una valuación tal que $v(P_i) = \mathtt{V}$ si y sólo si $\tilde{P}_i = P_i$.
   Luego $v \models \neg\rho$.

# Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \land \ldots \land \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en $\rho$.
Usando LEM y $\lor_e$ podemos considerar $2^n$ casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien $P_i$ o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.
   Por corrección vale $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \models \neg\rho$.
   Sea $v$ una valuación tal que $v(P_i) = \mathtt{V}$ si y sólo si $\tilde{P}_i = P_i$.
   Luego $v \models \neg\rho$. Absurdo pues sabíamos $\models \rho$.

# Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

## Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

# Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

## Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en $\tau$.

# Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

## Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en $\tau$.
Hay 6 casos ($P$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\bot$, $\neg$).

Por ejemplo, supongamos que $\tau = (\sigma \wedge \rho)$.

# Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

## Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en $\tau$.
Hay 6 casos ($P$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\bot$, $\neg$).

Por ejemplo, supongamos que $\tau = (\sigma \wedge \rho)$.
Por hipótesis inductiva sobre $\sigma$, sabemos que:

1. O bien $\Gamma \vdash \sigma$ es derivable en **NK**.
   Por hipótesis inductiva sobre $\rho$, sabemos que:
   1.1 O bien $\Gamma \vdash \rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$.
   1.2 O bien $\Gamma \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\sigma$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.

# Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

## Lema principal

Si $\Gamma$ determina a todas las variables que aparecen en $\tau$, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en $\tau$.
Hay 6 casos ($P$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\bot$, $\neg$).

Por ejemplo, supongamos que $\tau = (\sigma \wedge \rho)$.
Por hipótesis inductiva sobre $\sigma$, sabemos que:

1. O bien $\Gamma \vdash \sigma$ es derivable en **NK**.
   Por hipótesis inductiva sobre $\rho$, sabemos que:
   1.1 O bien $\Gamma \vdash \rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$.
   1.2 O bien $\Gamma \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\sigma$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.

- Intentar probar los 5 casos restantes.

# Lectura recomendada

Logic in computer science: Modelling and reasoning about systems. Michael Huth y Mark Ryan. Cambridge University Press, 2004. Capítulo 1.

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ? ? ? ? ? ? ? ? ?