第2章 插值方法与曲线拟合

计算机学院　　孙伟平

回　顾

- 基本概念：
  - 误差，误差限
  - 相对误差，相对误差限
  - 绝对误差，绝对误差限
  - 有效数字
- 有效数字位数的判定方法
- 算术运算中误差限的估计
- 近似计算中应注意的一些原则

第2章

2.1 插值多项式的存在性与唯一性

2.2 拉格朗日（Lagrange）插值

2.3 牛顿（Newton）插值

2.4 赫密特（Hermite）插值

2.5 分段插值

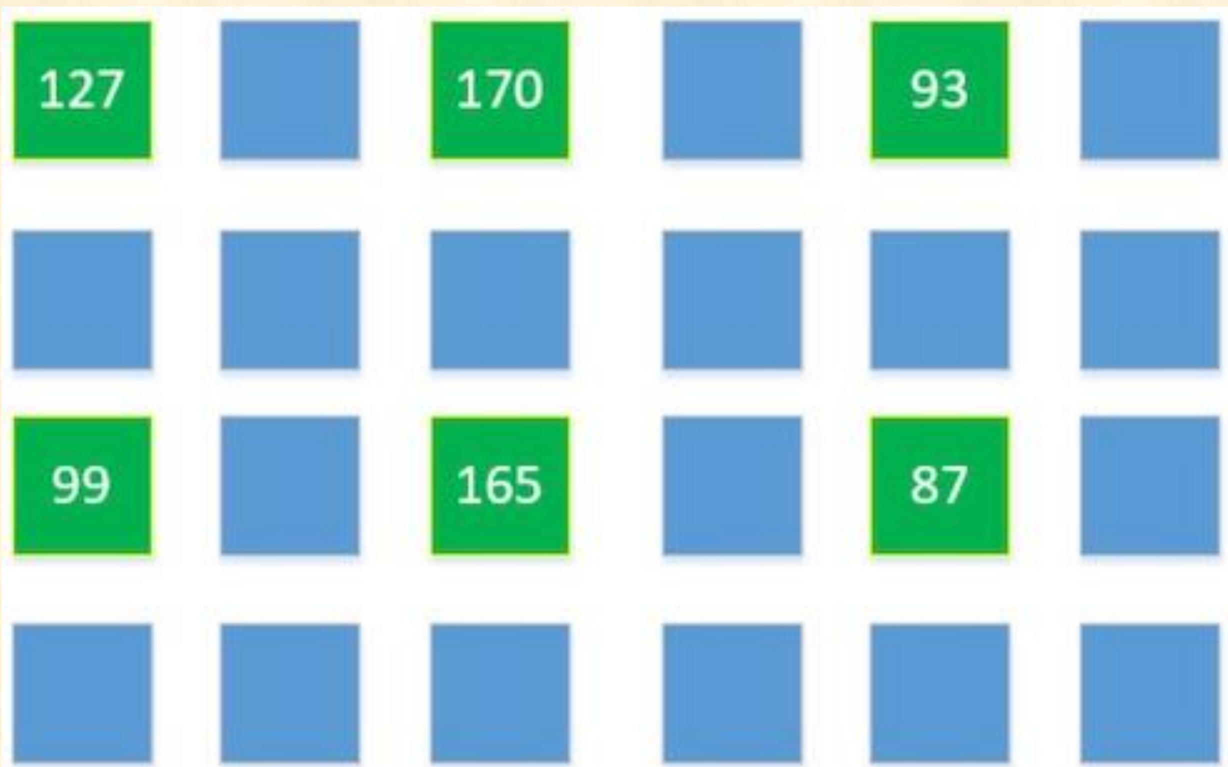
2.7 曲线拟合的最小二乘法


我的心里只有一件事
就是 学习


我的心里只有一件事
就是 学习

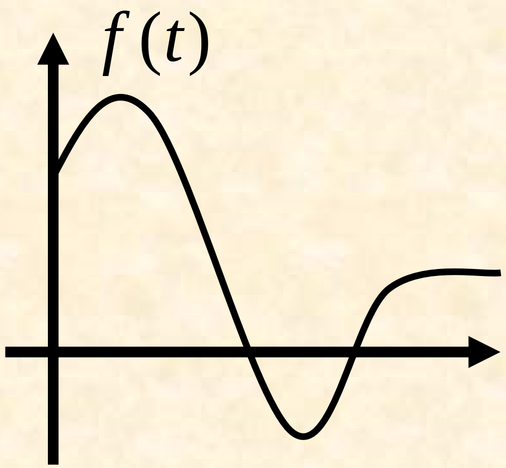

我的心里只有一件事
就是 学习

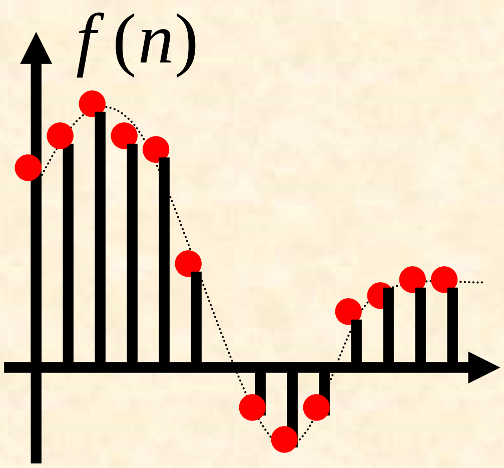
通过某个点周围若干个已知点的值，以及周围点和此点的位置关系，根据一定的公式，算出此点的值，就是插值。



计算未知点的时候，需要周围多少个点参与，公式如何。不同的方案选择，就是不同的插值算法。

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{抽样}} \longrightarrow f(n)$$





$f(n) \rightarrow f(t)$?　　　**时域内插公式**

$$f(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)Sa[\omega_c(t-n)]$$

概 述

在实际生产和科学实验中，插值法是函数逼近的重要方法之一，有着广泛的应用 。

- 函数 $y = f(x)$ 的显式表达式未知，x 与 y 的取值是通过实验或观测得到的一组离散数据。
- 函数 $y = f(x)$ 的表达式非常复杂，不便于进行计算和研究。

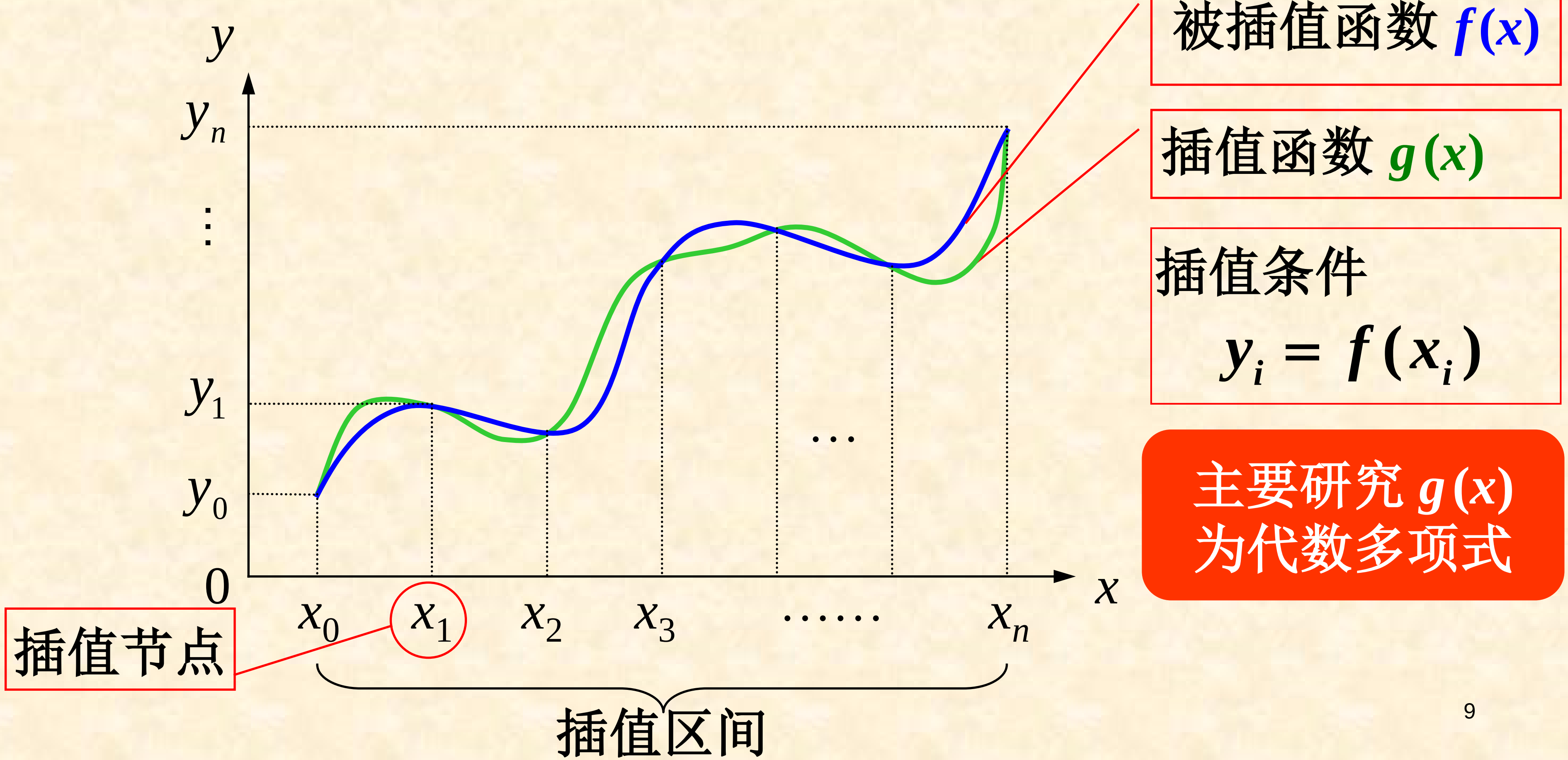
例如：

i	0	1	2	3	……	10
x_i	0.46	0.47	0.48	0.49	……	0.56
$y_i=f(x_i)$	0.48465	0.49374	0.50298	0.52012	……	0.61478

求当 $x_i = 0.4773$ 时 $y = f(x)$ 的函数值？

求 $$f(x)=\frac{\sqrt{\ln(x+\tan x)+e^{x^2\sin x}}}{3\arctan^2 x}\int_2^{5x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

◆ 于是人们希望建立一个简单的而便于计算的函数 $g(x)$ 使其近似的代替 $f(x)$。



2.1 插值多项式的存在唯一性

- 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i)$，$i=0,1,\cdots,n$；确定一个次数不高于 n 的代数多项式：

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

满足：

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = y_i, \quad i=0,1,\cdots,n$$

即共有 $n+1$ 个限定条件：$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = y_n \end{cases}$

由 $p_n(x_0)=y_0$得： $a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0$

由 $p_n(x_1)=y_1$得： $a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

由 $p_n(x_n)=y_n$得： $a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n$

这是关于 $a_0, a_1,\ldots,a_n$ 的（**n+1** 元一次）线性方程组，可以由克莱姆法则进行求解。

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

如果其系数行列式不等于零，则方程组的解存在且唯一。

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}$$

范德蒙行列式

$$V = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

由于 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $n+1$ 个互异的节点，即：

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j$$

- 因此范德蒙行列式 $V \neq 0$，上述方程组有唯一解。
- 结论：**插值多项式存在且唯一。**

- 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i),\ \ i = 0,1,\cdots,n$；确定一个次数不高于 n 的代数多项式：$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

满足：$p_n(x_i) = y_i, i = 0,1,\cdots,n$

这样的插值多项式存在且唯一。

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & y_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}$$

- 尽管采用直接求解线性方程组的方法可以确定插值多项式 $p_n(x)$，但是当 n 较大时，这种方法的计算量非常大。

插值问题的目标

被插值函数 $f(x)$

插值节点 $x_i, \quad i = 0,1,\cdots,n$

插值条件 $y_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n$

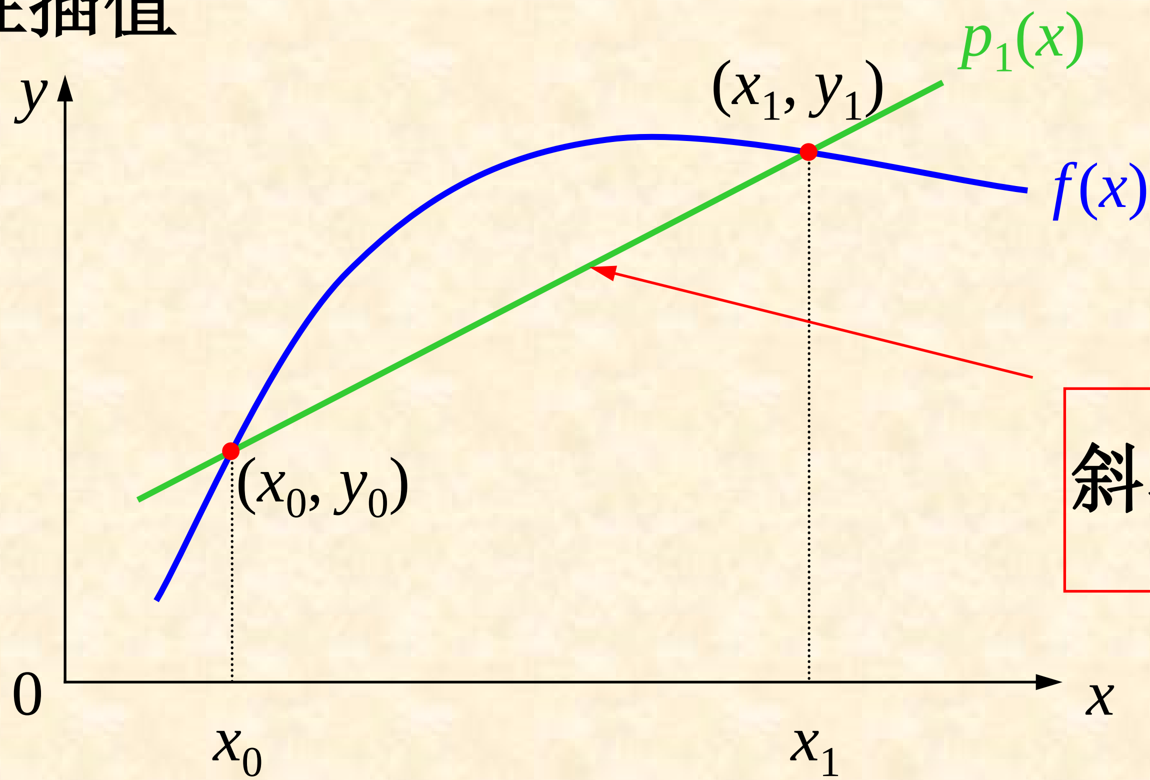
插值函数 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

- 由简入繁 $n=1$ 2 ⇨ n
  - 线性插值
  - 抛物线插值
  - Lagrange插值
- 分析已有方法的优缺点
  - Newton插值
- 针对新的需求
  - Hermite插值
- 站得更高
  - 分段插值

科学研究之路

2.2 拉格朗日（Lagrange）插值

◆ 线性插值



斜率 $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

点斜式：$y = y_0 + k(x - x_0)$

$\boxed{p_1(x)}$

$$y = y_0 + k(x - x_0) \qquad k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= \frac{x_1 - x_0 - (x - x_0)}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} y_0 + \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}} y_1$$

线性插值基函数

$$l_0(x) \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$l_1(x) \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

$p_1(x)$ 可表示为插值基函数的线性组合

$l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 均为一次代数多项式

$$p_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

- 例1 已知 ln2.00 = 0.6931，ln3.00 = 1.0986，试用线性插值法求 ln2.718

$$\begin{cases}x_0=2.00\\ y_0=0.6931\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=3.00\\ y_1=1.0986\end{cases}\quad x=2.718$$

$$p_1(x)=\frac{x-3.00}{2.00-3.00}\times 0.6931+\frac{x-2.00}{3.00-2.00}\times 1.0986$$

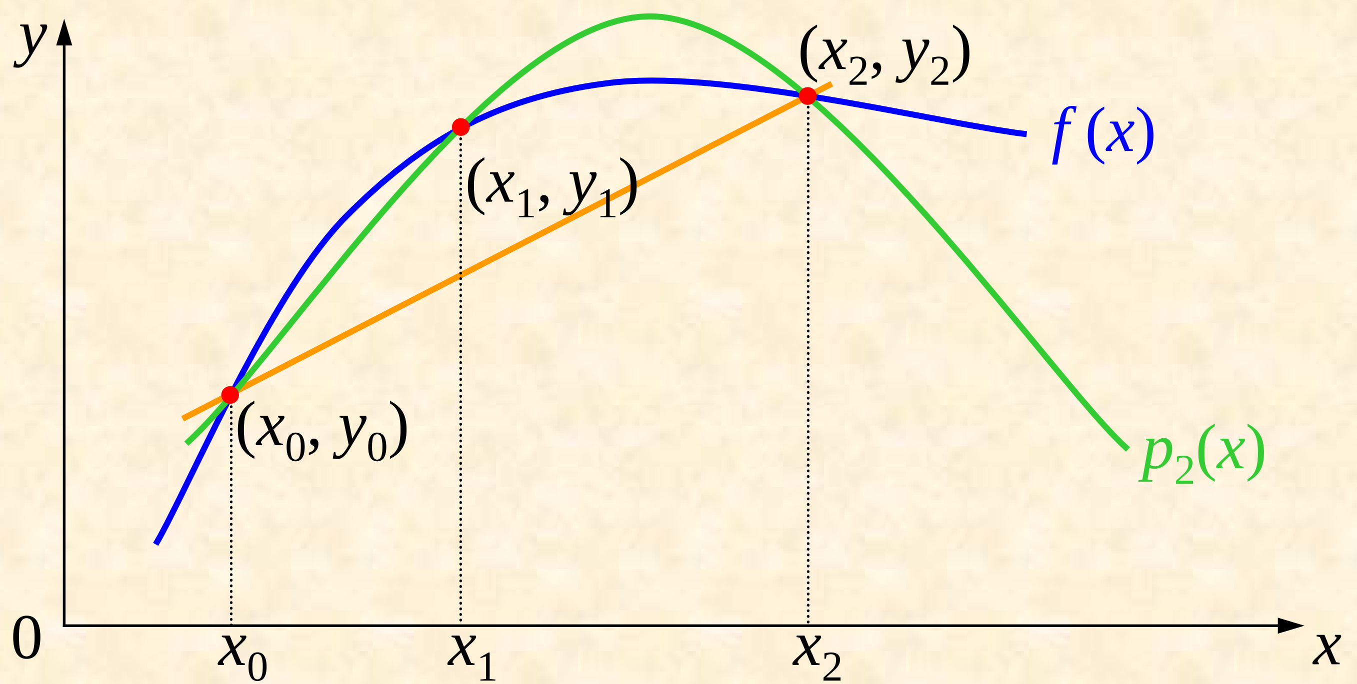
$$=0.4055x-0.1179$$

$$\ln 2.718\approx p_1(2.718)=0.4055\times 2.718-0.1179$$

$$\approx 0.9842$$

抛物线插值

- 线性插值只有在小的插值区间且在该区间上 ***f* (*x*)** 变化较平稳时才较精确。
- 抛物线插值采用二次曲线替代复杂的未知曲线，可在一定程度上克服线性插值的上述缺陷。



思考：可否由线性插值自行推导出抛物线插值的公式？

$(x_0, y_0) \qquad (x_1, y_1)$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

线性插值基函数

$l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 均为一次代数多项式

$$l_0(x) \quad \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$l_1(x) \quad \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} \qquad \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

抛物线插值基函数

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$ 均为二次代数多项式

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \\ l_0(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \\ l_1(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_2(x_0) = 0 \\ l_2(x_1) = 0 \\ l_2(x_2) = 1 \end{cases}$$

$$l_1(x_0)=0 \qquad l_1(x_1)=1 \qquad l_1(x_2)=0$$

因为 $l_1(x)$ 为二次代数多项式，且 x_0, x_2 为它的两个零点，故可设：

$$l_1(x)=k(x-x_0)(x-x_2)$$

其中 k 为待定系数。

又因为 $l_1(x_1)=1$ 所以：

$$k(x_1-x_0)(x_1-x_2)=1 \longrightarrow k=\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

从而：$l_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

- 例2 已知 ln2.00 = 0.6931 ，ln2.50 = 0.9163，ln3.00 = 1.0986，用抛物线插值法求 ln2.718

$$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2.50 \\ y_1 = 0.9136 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3.00 \\ y_2 = 1.0986 \end{cases} \quad x = 2.718$$

$$p_2(x) = \frac{(x-2.50)(x-3.00)}{(2.00-2.50)(2.00-3.00)} \times 0.6931$$

$$+ \frac{(x-2.00)(x-3.00)}{(2.50-2.00)(2.50-3.00)} \times 0.9136$$

$$+ \frac{(x-2.00)(x-2.50)}{(3.00-2.00)(3.00-2.50)} \times 1.0986$$

$$= -0.071x^2 + 0.7605x - 0.5439$$

$$\ln 2.718 \approx p_2(2.718)$$
$$\approx -0.071 \times 2.718^2 + 0.7605 \times 2.718 - 0.5439$$
$$\approx 0.9986$$

比较：

$\ln 2.718 = 0.999896 \cdots\cdots$

线性插值： $\ln 2.718 \approx 0.9842 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 1.57\%$

抛物线插值： $\ln 2.718 \approx 0.9986 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

Lagrange 插值

- 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i),\ i=0,1,\cdots,n$；求作一个次数不高于 n 的代数多项式：

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

满足：

$$L_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = y_i$$

$$i = 0,1,\cdots,n$$

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$\boxed{l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}}$$

Lagrange
插值基函数

- $l_i(x)$ 的最高次数与 $L_n(x)$ 相同
- $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ 是 $l_i(x)$ 的零点（共有 n 个）
- $l_i(x)$ 在 x_i 处取值为 1

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

因为 $l_i(x)$ 为 n 次代数多项式，且 $x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$ $l_i(x)$ 的 n 个零点，故可设：

$$l_i(x)=k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

$$=k\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)$$

k 为待定系数。

又因为 $l_i(x_i)=1$ 所以：

$$1=k\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j) \longrightarrow k=1\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)$$

$$\boxed{l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

$$= y_0 \prod_{j=0, j\neq 0}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + y_1 \prod_{j=0, j\neq 1}^{n} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} + y_2 \boxed{\prod_{j=0, j\neq 2}^{n} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j}}$$

$$+ \cdots + y_n \prod_{j=0, j\neq n}^{n} \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$\boxed{\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)}}$$

Lagrange 插值 分析

- Lagrange插值多项式结构对称、简单、优雅。
- 只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式。
- 易于计算机实现。

- 问题：Lagrange插值的误差是多少？

Lagrange 插值误差分析
插值余项

- 在插值节点处：

$$L_n(x) = f(x), \quad x = x_0, x_1, \cdots, x_n$$

- 在非插值节点处，一般有：

$$L_n(x) \neq f(x), \quad x \neq x_0, x_1, \ldots, x_n$$

- 插值余项（截断误差）：

$\xi \in (a, b)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \boxed{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

$\omega_{n+1}(x)$

$\omega(x)$

$f(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 内有 $n+1$ 阶导数

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\omega(x)}$$

证：设 x 为插值区间 $[a,b]$ 中的任意一点，若 x 为插值节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，显然：左边 = 右边 = 0

若 x 为非插值节点，则构造如下辅助函数　自变量为 t

$$F(t)=f(t)-L_n(t)-\frac{\omega(t)}{\omega(x)}[f(x)-L_n(x)]$$

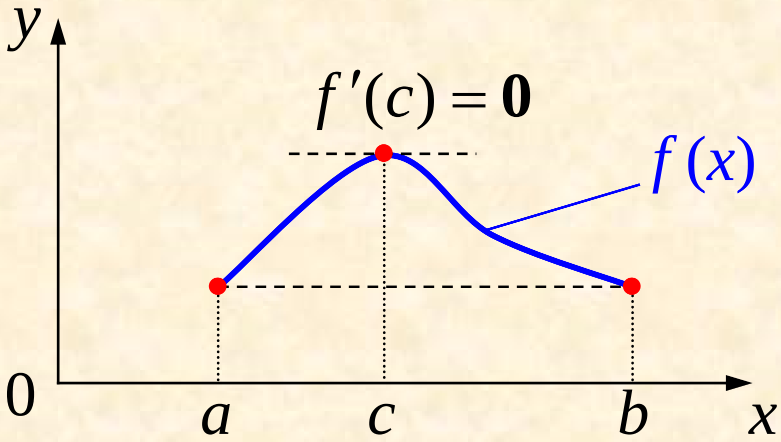
$t=x_0,x_1,\cdots,x_n$ 时 $f(t)=L_n(t),\ \omega(t)=0 \longrightarrow F(t)=0$

$t=x$ 时　$F(x)=\left[1-\frac{\omega(x)}{\omega(x)}\right][f(x)-L_n(x)]=0$

所以 $F(t)$ 至少有 $n+2$ 个零点：$x,x_0,x_1,\cdots,x_n$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}_{\omega(x)}$$

罗尔定理 $f(x)$ 为在区间 $[a, b]$ 上连续，并且 $f(a) = f(b)$，则**至少**存在一点



$c \in (a, b)$ 满足：$f'(c) = 0$

$F'(t)$ 在 $F(t)$ 的任意两个相邻零点之间至少存在一点

$\tilde{\xi}$ 满足：$F'(\tilde{\xi}) = 0$，$F'(t)$ 有 $n+1$ 个零点

反复运用罗尔定理

$F''(t)$ 有 n 个零点

……

$F^{(n+1)}(t)$ 有 1 个零点 $\boxed{F^{(n+1)}(\xi) = 0}$

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)}[f(x) - L_n(x)]$$

$L_n(t)$ 为 n 次代数多项式 $\longrightarrow$ $L_n^{(n+1)} = 0$

$$\omega(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i) = (t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)$$

$$= t^{n+1} + k_n t^n + \cdots + k_1 t + k_0$$

$$\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$$

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)}[f(x) - L_n(x)] = 0$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}_{\omega(x)}$$

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\omega(x)}$$

- 应当指出，余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用。
- ξ 在 (a, b) 内的具体位置通常不可能给出。
- 如果我们可以估算出：

$$\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$$

则用 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差的绝对值：

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

例3

已知 $\ln 2.00 = 0.6931$，$\ln 2.50 = 0.9163$，$\ln 3.00 = 1.0986$，用抛物线插值法求得 $\ln 2.718 \approx 0.9986$，试估算其相对误差

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\ln x)''' = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{2.00<x<3.00} |(\ln x)'''| = \frac{2}{(2.00)^3} = \frac{1}{4} = 0.25 \longrightarrow M_3$$

$$|R_2(2.718)| \le \frac{0.25}{3!} \times$$

$$\left|(2.718-2.00)(2.718-2.50)(2.718-3.00)\right| \approx 0.001839$$

$$|\varepsilon_r(\ln 2.718)| \approx 0.001839/0.9986 \approx 0.00184 = 0.184\%$$

对比前例：$|\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

例4.1 已知 ln$x$的函数表如下 （ln11.25=2.420368）

x	10	11	12	13
ln$x$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用抛物线插值法计算ln11.25的近似值，并估计误差。

（1）取节点 x_0=10, x_1=11, x_2=12, 计算 ln11.25 的近似值。

得 ln11.25=2.420426　　$|R_2(11.25)|\le 0.000078$

实际上，根据准确值计算得　$|R_2(11.25)|= 0.000058$

（2）取节点 x_1=11, x_2=12, x_3=13, 计算 ln11.25 的近似值。

得 ln11.25=2.420301　　$|R_2(11.25)|\le 0.000082$

实际上，根据准确值计算得　$|R_2(11.25)|= 0.000067$

例4.2 已知 ln$x$的函数表如下 （ln11.25=2.420368）

x	10	11	12	13
ln$x$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用三次多项式插值法计算**ln11.25**的近似值，并估计误差。

节点 $x_0=10,\ x_1=11,\ x_2=12\ ,\ x_3=13$

得 **ln11.25=2.420374** $|R_2(11.25)|\le 0.000010$

对比例**4.1**抛物线插值的结果：

ln11.25=2.420426 $|R_2(11.25)|\le 0.000078$

ln11.25=2.420301 $|R_2(11.25)|\le 0.000082$

Lagrange 插值误差分析（续）

由于 $f(x)$ 的高阶导数一般无法确定，实用的截断误差估计可以采用以下的事后误差分析方法：

$n+1$ 个插值节点：
$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

增加一个节点 x_{n+1}，用 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 这 $n+1$个插值节点进行插值，其截断误差为：

$$f(x)-\tilde{L}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\tilde{\xi})}{(n+1)!}\prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i)$$

如果 $f(x)$ 在插值区间变化不剧烈，则 $f^{(n+1)}(\xi)\approx f^{(n+1)}(\tilde{\xi})$

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\frac{f(x)-L_n(x)}{f(x)-\tilde{L}_n(x)}\approx\frac{x-x_0}{x-x_{n+1}}$$

$$f(x)\approx\frac{x-x_{n+1}}{x_0-x_{n+1}}L_n(x)+\frac{x-x_0}{x_{n+1}-x_0}\tilde{L}_n(x)\qquad(*)$$

—— 新的近似式

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)\approx\frac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}}[L_n(x)-\tilde{L}_n(x)]\qquad(**)$$

—— 新的误差估计式

例4.3 已知 ln*x*的函数表如下

x	10	11	12	13
$\ln x$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用抛物线插值法计算ln11.25的近似值，并估计误差。

（1）取节点 x_0=10, x_1=11, x_2=12, 得 ln11.25=2.420426

（2）取节点 x_1=11, x_2=12, x_3=13, 得 ln11.25=2.420301

（3）用公式（*）再计算 ln11.25 的近似值，得

ln11.25=2.420374 —结果同例4.2！

用公式（**）再计算误差，得

$$R_2(11.25) \approx 0.000052 \qquad (|R_2(11.25)| \le 0.000010)$$

回顾拉格朗日插值：

$(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots(x_n,y_n)$　　$y_i=f(x_i)$

简单　复杂

$$L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$$

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

n次多项式
与所有节点有关

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\omega(x)}$$

2.3 牛顿（Newton）插值

Lagrange 插值：

- 优点：公式对称简单，规律性强，便于记忆和编程
- 缺点：每增加一个节点，原有的插值基函数 $l_i(x)$ 必须重新计算，从而不具有承袭性

Newton 插值：

- 优点：具有承袭性，能够利用以前计算的结果
- 不足：公式结构不对称，不便于记忆

n次牛顿插值多项式

- 求作 n 次代数多项式：

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = c_0 \times & \boxed{1} \longrightarrow \varphi_0(x) \\
+ c_1 & \boxed{(x-x_0)} \longrightarrow \varphi_1(x) \\
+ c_2 & \boxed{(x-x_0)(x-x_1)} \longrightarrow \varphi_2(x) \\
+ c_3 & \boxed{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} \longrightarrow \varphi_3(x) \\
\vdots & \\
+ c_n & \boxed{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})} \longrightarrow \varphi_n(x)
\end{aligned}
\quad \left.\right\} \text{牛顿插值基函数}
$$

满足：$N_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x) = 1 \\
\varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) \qquad i = 1, 2, \cdots, n
\end{cases}
$$

承袭性

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_1(x)=(x-x_0),\quad \varphi_2(x)=(x-x_0)(x-x_1),\cdots$$

$$N_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)$$

将 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 分别代入 $N_n(x)$

利用 $N_n(x_i)=f(x_i)$ 即可确定系数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$

$x=x_0$ $\quad N_n(x_0)=c_0=f(x_0)$

$x=x_1$ $\quad N_n(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0)=f(x_1)$

$$c_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$x=x_2$ $\quad N_n(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$

$$=f(x_2)$$

$$c_1 = f(x_0)$$

方法复杂
不便编程

$$c_1 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$c_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

差 商

- 给定区间 $[a, b]$ 中两两互不相同的点 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 及在这些点处相应的函数值 $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots$

记：

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0,1,2,\cdots$$

$f(x)$ 在 x_i 处的零阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

一阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

二阶差商

$$\vdots$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

k 阶差商

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n阶差商
x_0	$f(x_0)$				…	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			…	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		…	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	…	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	…	$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

差商表

◆ 例：

x_i	5	7	11	13	21
$f(x_i)$	150	392	1452	2366	9702

◆ 差商表为：

x_i	零阶差商	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
5	150				
7	392	121			
11	1452	265	24		
13	2366	457	32	1	
21	9702	917	46	1	0

差商的性质

- 差商与函数值的关系为

k 阶差商是其各节点处函数值的线性组合

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

证明： $k=1$ 时：

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k] = \sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

假设 $k=n-1$ 时也成立，即：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{n-1})}$$

考查 $k=n$ 时：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

$$=\frac{1}{x_n-x_0}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{n-1})}\right]$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{1}{x_n-x_0}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{n-1})}\right]$$

$$=\frac{1}{x_n-x_0}\left[\frac{f(x_n)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{n-1})(x_j-x_n)}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{n-1})}-\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\right]$$

$$=\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+\frac{1}{x_n-x_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)\left[(x_j-x_0)-(x_j-x_n)\right]}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$+\frac{1}{x_n-x_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)\left[(x_j-x_0)-(x_j-x_n)\right]}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

可见 $k=n$ 时也成立。由数学归纳法可知：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

- 差商的值与节点的排列顺序无关

$$f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]=f[x_0,\cdots,x_j\cdots,x_i,\cdots,x_n]$$

- 若 $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 是 x 的 n 次多项式，则

$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]=\frac{\boxed{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]-f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]}}{x_{k+1}-x}$$

$x=x_{k+1}$ 时 $\quad f[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]-f[x_{k+1},x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$

n 次代数多项式含有因子 $x-x_{k+1}$

所以： $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式。

◈ 若 $f(x)$ 是 x 的 m 次代数多项式，且 $n \geq m$，则：

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = 0$$

$f[x] = f(x)$ 是 x 的 m 次代数多项式

$f[x, x_0]$ 是 x 的 $m-1$ 次代数多项式

$f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 $m-2$ 次代数多项式

$\vdots$

$f[x, x_0, \cdots, x_{m-1}]$ 是 x 的 0 次代数多项式

$f[x, x_0, \cdots, x_{m-1}] = c \longrightarrow f[x_m, x_0, \cdots, x_{m-1}] = f[x_0, \cdots, x_{m-1}, x_m] = c$

$$f[x, x_0, \cdots, x_m] = \frac{f[x_0, x_1 \cdots, x_m] - f[x, x_0, \cdots, x_{m-1}]}{x_m - x} = 0$$

从 $f[x, x_0, \cdots, x_m]$ 起所有的高阶差商均为0，故：$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = 0$

$$f[x,x_0]=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x,x_0]}{x_1-x} \qquad f[x,x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x,x_0,x_1]}{x_2-x}$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$f[x,x_0]=\boxed{f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)}$$

$$\begin{aligned} f(x)=f(x_0)&+f[x_0,x_1](x-x_0)\\ &+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)\end{aligned}$$

$$f[x,x_0,x_1]=\boxed{f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)}$$

$$\begin{aligned} f(x)=f(x_0)&+f[x_0,x_1](x-x_0)\\ &+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\ &+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

牛顿插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & \boxed{f(x_0)} \\
& + \boxed{f[x_0,x_1]}(x-x_0) \\
& + \boxed{f[x_0,x_1,x_2]}(x-x_0)(x-x_1) \\
& + \boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& \vdots \\
& + \boxed{f[x_0,x_1,\cdots,x_n]}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\
& + \boxed{f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}
\end{aligned}
$$

c_0 c_1 c_2 c_3 c_n

$N_n(x)$

$R_n(x)$

一般的： $c_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad i = 0,1,\cdots,n$

- 由插值多项式的唯一性可知：$N_n(x) = L_n(x)$，因此二者的余项也应相等。

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]\underline{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}\underline{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] = \frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}$$

$$f[x_n, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

例1 给定数据表 $f(x)=\ln x$

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.7884574	0.8754687	0.9555114	1.0296194	1.0986123

- 构造差商表
- 用二次 Newton 插值多项式，近似计算 $f(2.718)$ 的值
- 写出四次 Newton 插值多项式 $N_4(x)$

解： 由已知可构造如下差商表

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	–0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	–0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	–0.0639388	0.0170750	–0.0055806

2.718

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.7884574	0.8754687	0.9555114	1.0296194	1.0986123

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	–0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	–0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	–0.0639388	0.0170750	–0.0055806

$N_2(x)$有多种形式，如果取x_0=2.4，x_1=2.6， x_2=2.8：

$$N_2(x) = 0.8754687 + 0.4002135(x-2.40) - 0.0741838(x-2.40)(x-2.60)$$

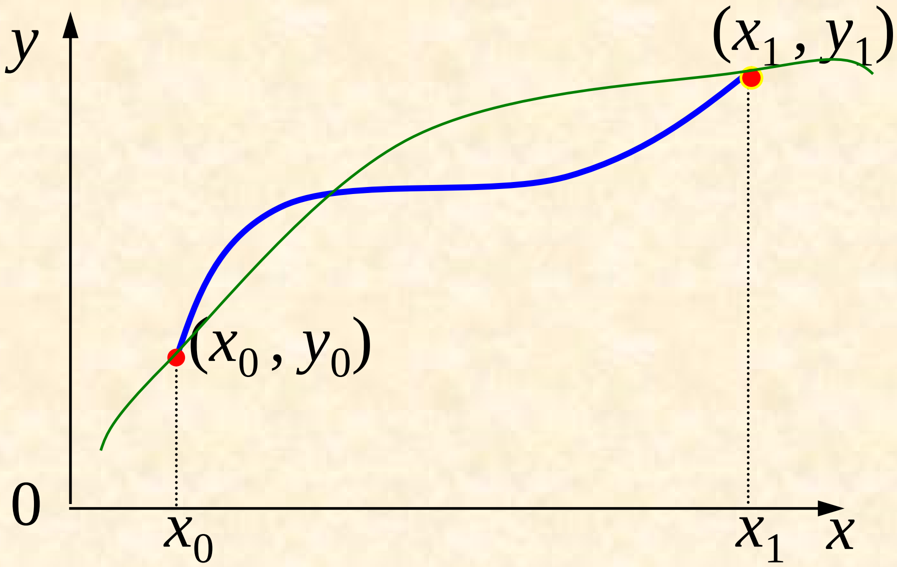
$$f(2.718) \approx N_2(2.718) \approx 0.9999529$$

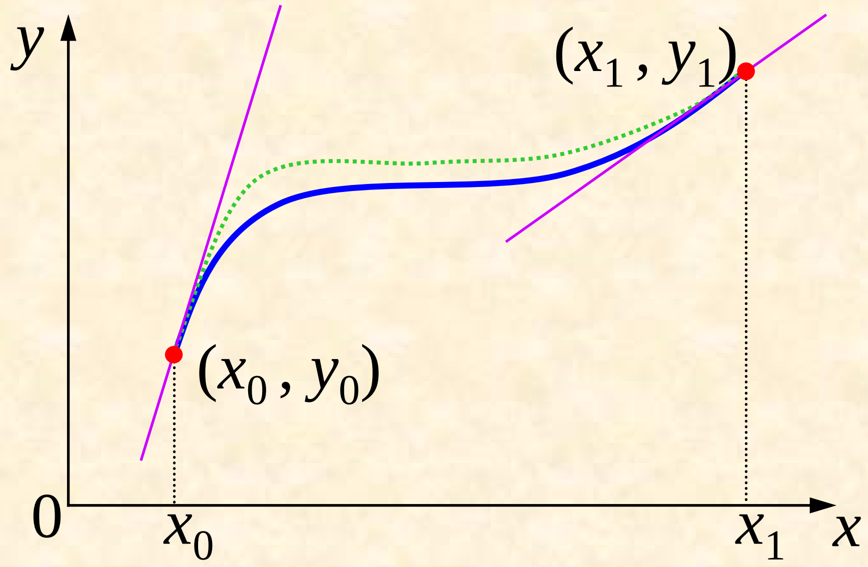
$$\ln 2.718 = 0.9998963\cdots$$

$$\varepsilon_r \approx 0.037\%$$

$$N_4(x) = 0.7884574 + 0.4350565(x-2.20) - 0.0871075(x-2.20)(x-2.40) + 0.0215395(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60) - 0.0055806(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)(x-2.80)$$

插值条件





Lagrange插值

Newton插值

Hermite插值

2.4 赫密特（Hermite）插值

- 已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $a \le x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$ 上的函数值及一阶导数值：

$$f(x_i) = y_i \quad f'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

求作一个次数不高于 $2n+1$ 次的插值多项式 $H(x)$，满足以下 $2n+2$ 条件：

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

- 称 $H(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式，因其最高次数不超过 $2n+1$，常记为 $H_{2n+1}(x)$
- $H_{2n+1}(x)$ 不仅在节点处与 $f(x)$ 有相同的函数值，且在这些节点处与 $f(x)$ 相切。

基函数

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i\alpha_i(x)+y_i'\beta_i(x)\right]$$

$$\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

$$\alpha_i'(x_j)=0$$

$$\beta_i(x_j)=0$$

$$\beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

赫密特插值基函数

$\alpha_i(x),\beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次代数多项式

$\alpha_i(x),\beta_i(x)$ 均含因子 $(x-x_j)^2$

$$j=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$$

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

设 $\begin{cases}\alpha_i(x)=\boxed{(a_1x+b_1)l_i^2(x)}\\ \beta_i(x)=\boxed{(a_2x+b_2)l_i^2(x)}\end{cases}$ $i=0,1,\cdots,n$

待定系数法

$$\alpha_i(x_i)=1,\quad \alpha_i'(x_i)=0$$

$$\beta_i(x_i)=0,\quad \beta_i'(x_i)=1$$

$$\begin{cases}\alpha_i(x_i)=(a_1x_i+b_1)l_i^2(x_i)=1\\ \alpha_i'(x_i)=a_1l_i^2(x_i)+(a_1x_i+b_1)\cdot 2l_i(x_i)\cdot l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1x_i+b_1=1\\ a_1+2l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$l_i(x_i)=1$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$\ln l_i(x)=$$

$$\ln(x-x_0)+\cdots+\ln(x-x_{i-1})+\ln(x-x_{i+1})+\cdots+\ln(x-x_n)$$

$$-\ln(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$$

$$\frac{l_i'(x)}{l_i(x)}=\frac{1}{x-x_0}+\cdots+\frac{1}{x-x_{i-1}}+\frac{1}{x-x_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}$$

$$l_i'(x)=l_i(x)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x-x_j}$$

$$l_i'(x_i)=l_i(x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}=\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$$

$$\begin{cases} a_1 x_i + b_1 = 1 \\ a_1 + 2l_i'(x_i) = 0 \end{cases} \qquad l_i'(x_i) = \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 = -2\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 x_i + b_1 + a_1 x = 1 + a_1 x$$

$$a_1 x + b_1 = 1 + a_1(x - x_i) = 1 - 2(x - x_i)\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$\alpha_i(x) = (a_1 x + b_1) l_i^2(x)$$

$$= \left[1 - 2(x - x_i)\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}\right] l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x_i)=0,\quad \beta_i'(x_i)=1$$

$$\beta_i(x)=(a_2x+b_2)l_i^2(x)\qquad i=0,1,\cdots,n$$

$$\begin{cases}\beta_i(x_i)=(a_2x_i+b_2)l_i^2(x_i)=0\\ \beta_i'(x_i)=a_2l_i^2(x_i)+(a_2x_i+b_2)\cdot 2l_i(x_i)\cdot l_i'(x_i)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2x_i+b_2=0\\ a_2+0\times 2l_i'(x_i)=1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}a_2=1\\ b_2=-x_i\end{cases}$$

所以：$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}\left\{ y_i \underbrace{\boxed{\left[1-2(x-x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right] l_i^2(x)}}_{\alpha_i(x)} + y_i' \underbrace{\boxed{(x-x_i) l_i^2(x)}}_{\beta_i(x)} \right\}$$

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]^2$$

$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \qquad \xi \in (a,b)$$

——定理 2.4

例 题

设 $f(x) \in C^4[0,2]$，满足

x	0	1	2
f	1	0	3
f'		0	

求$\boldsymbol{f(x)}$ 的三次插值多项式$\mathbf{H_3(x)}$，并给出余项。

记 $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 0$

x	0	1	2
f	1	0	3
f'		0	

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

- 方法一（基函数法）

设 $H_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + y_3\varphi_3(x)$

$$= \varphi_0(x) + 3\varphi_2(x)$$

$$\varphi_0(x) = c(x-1)^2(x-2) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)$$

$$\varphi_2(x) = dx(x-1)^2 = \frac{1}{2}x(x-1)^2$$

故 $H_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1)^2$

$$= (x-1)^2(x+1)$$

x	0	1	2
f	1	0	3
f'		0	

◆ 方法二（待定系数法）

设 $H_3(x)=(x-1)^2(ax+b)$

$$\begin{matrix} H_3(0)=1 \\ H_3(2)=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

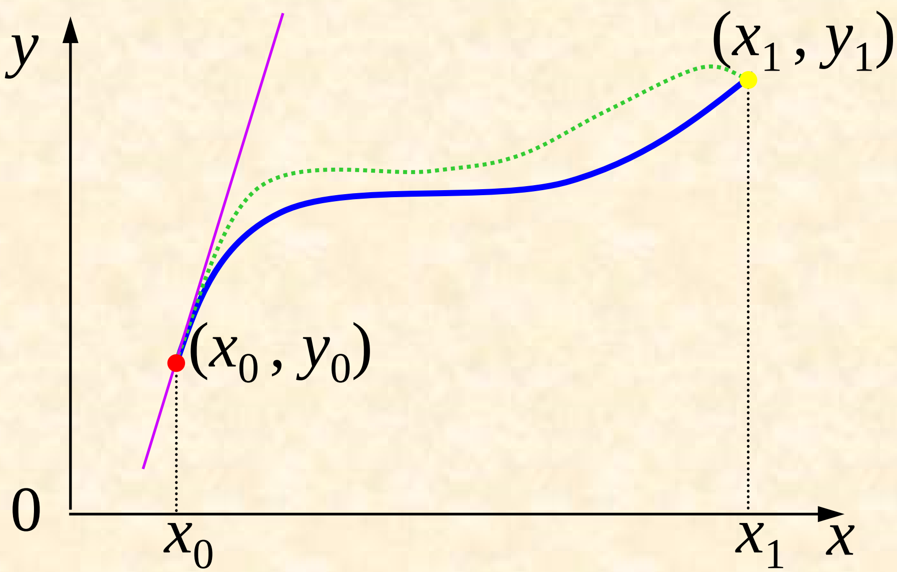
故 $H_3(x)=(x-1)^2(x+1)$

余项

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-2)$$

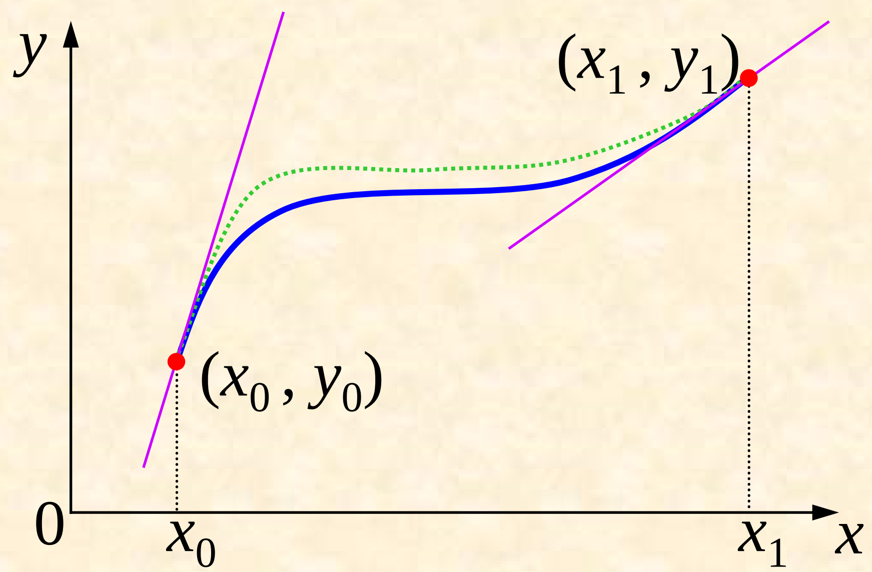
求作 Hermite 插值多项式 $H_2(x)$ 满足：

$$\begin{cases} H_2(x_0)=y_0 \\ H_2(x_1)=y_1 \\ H_2'(x_0)=y_0' \end{cases}$$



求作 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足：

$$\begin{cases} H_3(x_0)=y_0 \\ H_3(x_1)=y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_3'(x_0)=y_0' \\ H_3'(x_1)=y_1' \end{cases}$$



1. 首先讨论 $x_0=0,\ x_1=1$ 这种特殊情况。设

$$H_2(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)$$

$\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x)$ 为基函数，它们均为二次代数多项式，满足：

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\end{cases}$$

显然它们满足：

$$H_2(0)=y_0,\quad H_2(1)=y_1,\quad H_2'(0)=y_0'$$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{设}\,\alpha_0(x)=(x-1)(ax+b)\\ &\alpha_0(0)=-b=1\longrightarrow b=-1\\ &\alpha_0'(x)=(ax+b)+a(x-1)\\ &\alpha_0'(0)=b-a=0\longrightarrow a=b=-1\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}\alpha_0(x)&=(x-1)(-x-1)\\ &=1-x^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{设}\,\alpha_1(x)=x(ax+b)\\ &\alpha_1(1)=a+b=1\\ &\alpha_1'(x)=(ax+b)+ax\\ &\alpha_1'(0)=b=0\longrightarrow a=1\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}\alpha_1(x)&=x(x+0)\\ &=x^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{设}\,\beta_0(x)=ax(x-1)\\ &\beta_0'(x)=a[(x-1)+x]=a(2x-1)\\ &\beta_0'(0)=-a=1\longrightarrow a=-1\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}\beta_0(x)&=-x(x-1)\\ &=x(1-x)\end{aligned}$$

$$\alpha_0(x)=1-x^2,\quad \alpha_1(x)=x^2,\quad \beta_0(x)=x(1-x)$$

$$H_2(x)=y_0(1-x^2)+y_1x^2+y_0'x(1-x)\qquad 0\le x\le 1$$

◆ 若 x_0, x_1 为任意两个插值节点

$$x_0\le x\le x_1 \longrightarrow 0\le x-x_0\le x_1-x_0 \longrightarrow 0\le \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\le 1$$

记：$h=x_1-x_0$，$X=\dfrac{x-x_0}{h}$ 则：$x=x_0+hX$，$\mathrm{d}x=h\mathrm{d}X$

显然：$x=x_0$ 时 $X=0$，$x=x_1$ 时，$X=1$

$$f(x)=f(x_0+hX)\triangleq F(X)\qquad F'(X)=\frac{\mathrm{d}F(X)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X}=hf'(x)$$

$x=x_0$：$F(0)=f(x_0)=y_0$ $F'(0)=hf'(x_0)=hy_0'$

$x=x_1$：$F(1)=f(x_1)=y_1$

$$\alpha_0(x) = 1 - x^2$$
$$\alpha_1(x) = x^2$$
$$\beta_0(x) = x(1 - x)$$

$$X = \frac{x - x_0}{h}$$

$$p_2(X) = y_0(1 - X^2) + y_1 X^2 + h y_0' X(1 - X), \quad 0 \le X \le 1$$

$$\boxed{p_2\left(\frac{x - x_0}{h}\right)} = y_0\left[1 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2\right] + y_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2$$

$H_2(x)$

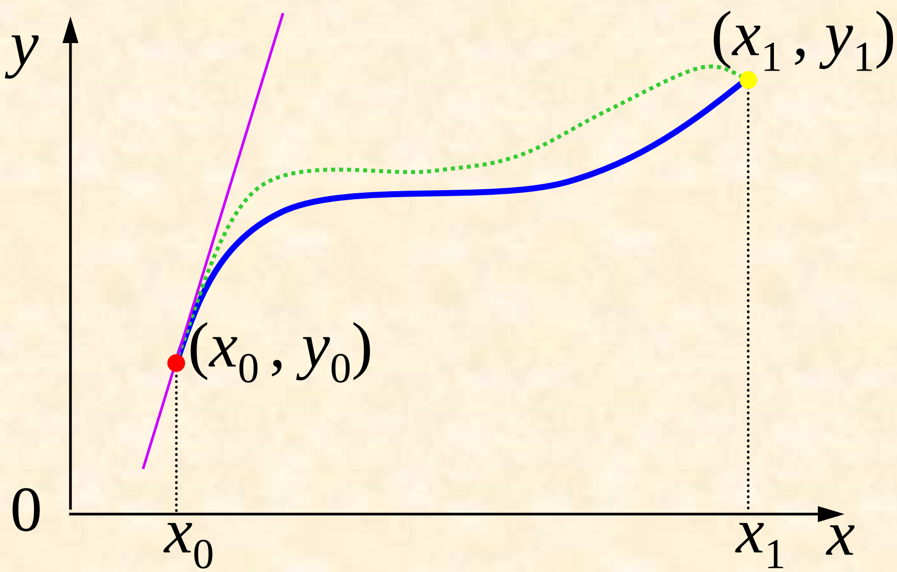
$$+ h y_0'\left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left[1 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\right]$$

$$\boxed{H_2(x) = y_0\alpha_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + y_1\alpha_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + h y_0'\beta_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right)}$$

$$x_0 \le x \le x_1$$

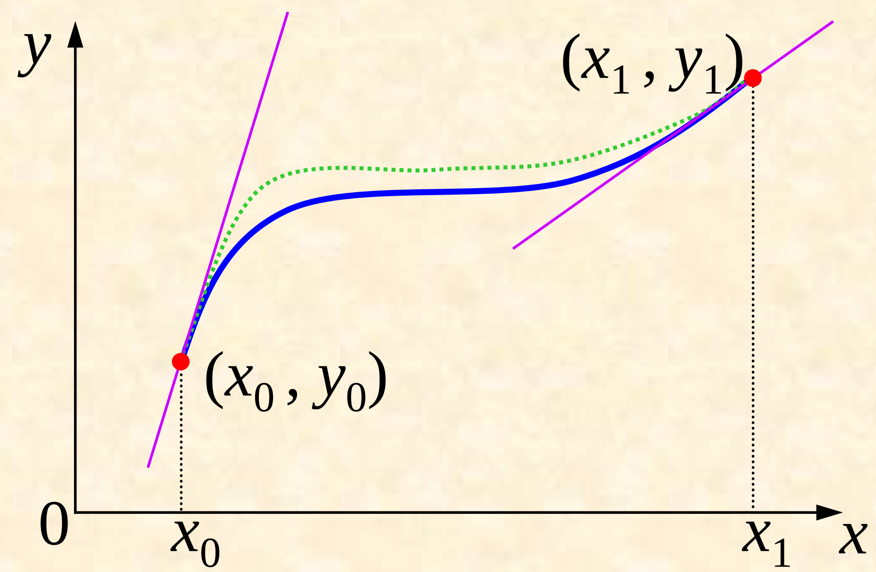
求作 **Hermite** 插值多项式 $H_2(x)$ 满足：

$$\begin{cases} H_2(x_0) = y_0 \\ H_2(x_1) = y_1 \\ H_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$



求作 **Hermite** 插值多项式 $H_3(x)$ 满足：

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0 \\ H_3(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H_3'(x_0) = y_0' \\ H_3'(x_1) = y_1' \end{cases}$$



2. 先讨论 $x_0=0, x_1=1$ 这种特殊情况。设：

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

$\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 为基函数，它们均为三次代数多项式，满足：

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\\ \alpha_0'(1)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\\ \alpha_1'(1)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\\ \beta_0'(1)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_1(0)=0\\ \beta_1(1)=0\\ \beta_1'(0)=0\\ \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

显然它们满足：

$$H_3(0)=y_0, H_3(1)=y_1, H_3'(0)=y_0', H_3'(1)=y_1'$$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\\ \alpha_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\\ \alpha_1'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\\ \beta_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_1(0)=0\\ \beta_1(1)=0\\ \beta_1'(0)=0\\ \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

设 $\alpha_0(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

$\alpha_0(0)=-c=1 \longrightarrow c=-1$

$\alpha_0'(x)=(ax^2+bx+c)+(x-1)(2ax+b)$

$\alpha_0'(0)=c-b=0 \longrightarrow b=c=-1$

$\alpha_0'(1)=a+b+c=0 \longrightarrow a=-(b+c)=2$

$\alpha_0(x)=(x-1)(2x^2-x-1)=(x-1)^2(2x+1)$

设 $\alpha_1(x)=x(ax^2+bx+c)$

$\alpha_1(1)=a+b+c=1 \longrightarrow a+b=1 \longrightarrow b=3$

$\alpha_1'(x)=(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)$

$\alpha_1'(0)=c=0 \longrightarrow c=0$

$\alpha_1'(1)=(a+b+c)+(2a+b)=0 \longrightarrow a=-(a+b)-1=-2$

$\alpha_1(x)=x(-2x^2+3x)=x^2(-2x+3)$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\\ \alpha_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\\ \alpha_1'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\\ \beta_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_1(0)=0\\ \beta_1(1)=0\\ \beta_1'(0)=0\\ \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

设 $\beta_0(x)=x(x-1)(ax+b)$

$$\beta_0'(x)=(2x-1)(ax+b)+(x^2-x)a$$

$$\beta_0'(0)=-b=1 \longrightarrow b=-1$$

$$\beta_0'(1)=a+b=0 \longrightarrow a=-b=1$$

$$\beta_0(x)=x(x-1)(x-1)=x(x-1)^2$$

设 $\beta_1(x)=x(x-1)(ax+b)$

$$\beta_1'(x)=(2x-1)(ax+b)+(x^2-x)a$$

$$\beta_1'(0)=-b=0 \longrightarrow b=0$$

$$\beta_1'(1)=a+b=1 \longrightarrow a=1$$

$$\beta_1(x)=x(x-1)x=x^2(x-1)$$

$$\begin{cases}\alpha_0(x)=(x-1)^2(2x+1)\\ \alpha_1(x)=x^2(-2x+3)\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_0(x)=x(x-1)^2\\ \beta_1(x)=x^2(x-1)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}H_3(x)=&\ y_0(x-1)^2(2x+1)+y_1x^2(-2x+3)\\ &+y_0'x(x-1)^2+y_1'x^2(x-1)\end{aligned}\qquad 0\le x\le 1$$

- 若 x_0, x_1 为任意两个插值节点

记：$h=x_1-x_0$

$$\boxed{\begin{aligned}H_3(x)=&\ y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\\ &+hy_0'\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+hy_1'\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\end{aligned}}$$

$$x_0\le x\le x_1$$

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]^2$$

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]^2 \qquad \xi\in(x_0,x_1)$$

$$g(x)=\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]^2$$

$$g'(x)=2(x-x_0)(x-x_1)\left[(x-x_1)+(x-x_0)\right]$$

$$=4(x-x_0)(x-x_1)\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)=0$$

$x=x_0,x_1$ 时，$g(x)=0$

$x=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ 时，$g(x)=\left[\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}-x_1\right)\right]^2$

$$=\left[\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)\left(-\frac{x_1-x_0}{2}\right)\right]^2=\frac{h^4}{16}$$ 最大值

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left[(x - x_0)(x - x_1)\right]^2$$

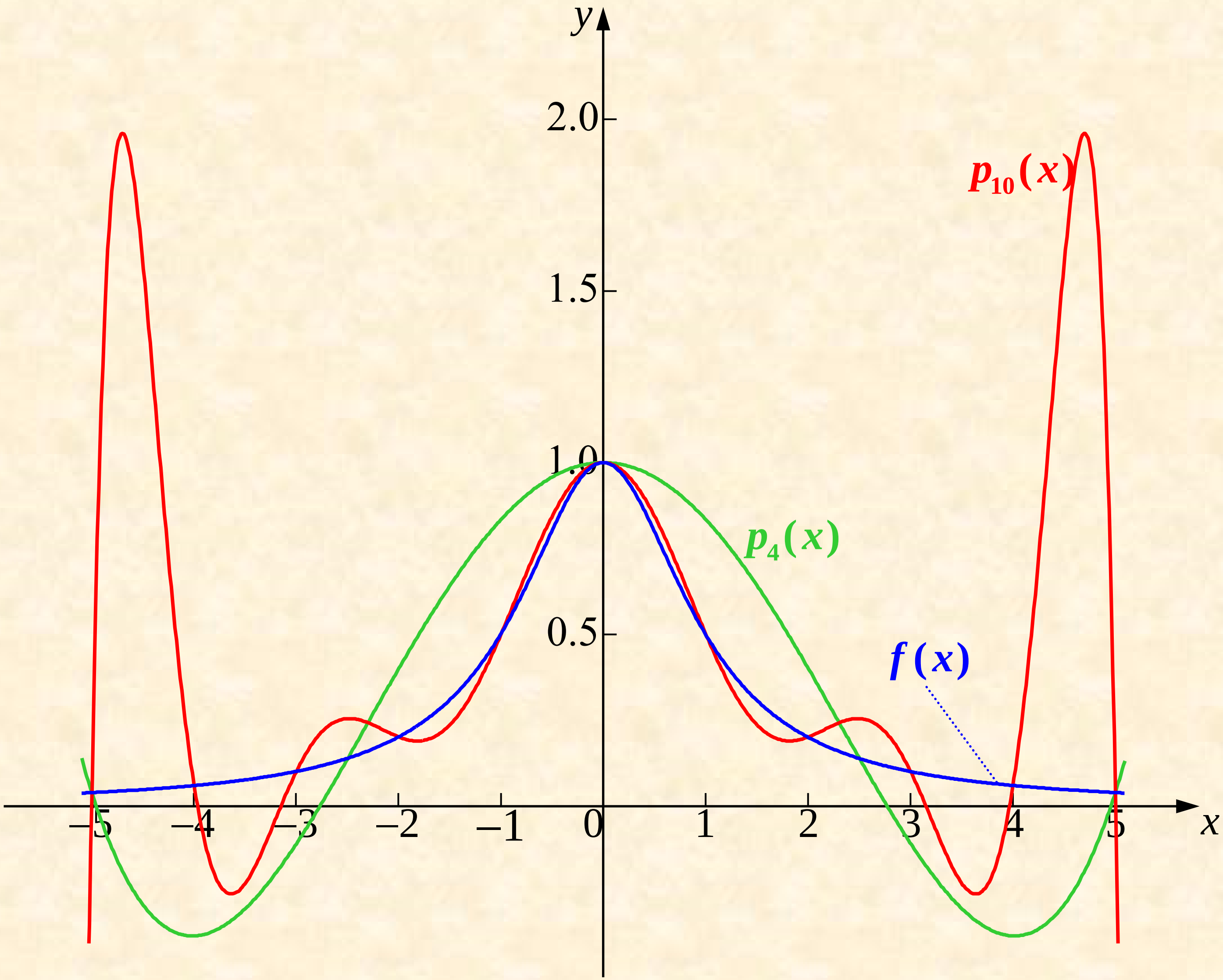
$$\left|R_3(x)\right| = \left|f(x) - H_3(x)\right|$$

$$\leq \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right| \cdot \frac{h^4}{16}$$

$$\leq \frac{h^4}{384} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$h = x_1 - x_0$$

高次插值的 Runge 现象



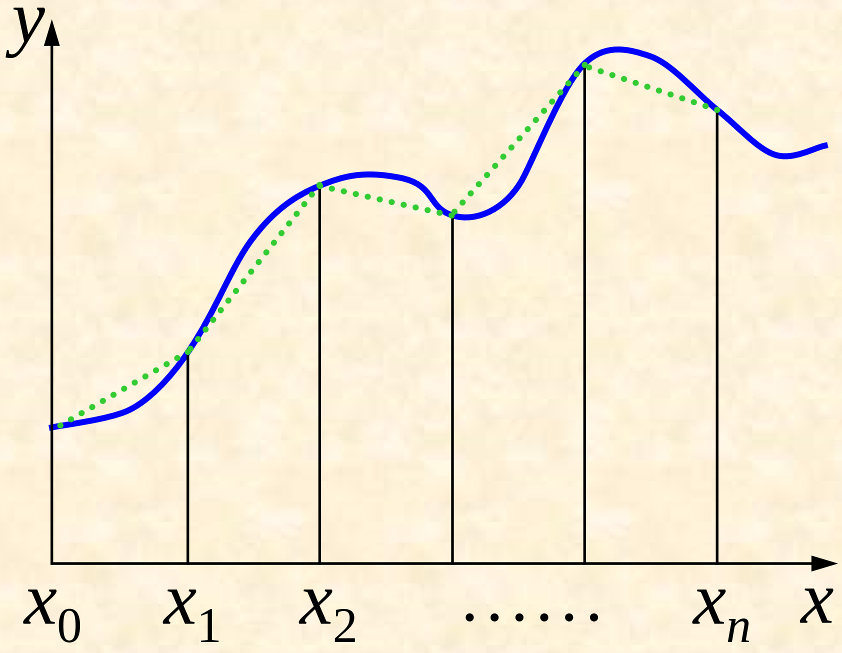
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$-5\le x\le 5$$

当插值节点数达到一定程度后，随着节点个数的增加，逼近精度越来越差

2.5 分段插值

- 将插值区间 $[a, b]$ 作一划分 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
- 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造次数较低的插值多项式 $p_i(x)$
- 将每个小区间上的插值多项式拼接在一起作为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的插值函数 $g(x) = p_i(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}]$



本节内容

- 分段线性插值
- 分段三次Hermite插值

分段插值的公式：在小区间$[x_i, x_{i+1}]$上同前面所学的线性插值、三次Hermite插值；

难点：分段插值的误差。

分段线性插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i，求作具有划分 Δ 的分段一次代数多项式 $S_1(x)$，满足：

$$S_1(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$S_1(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个一次插值多项式，则插值基函数 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ 均为一次式，且：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i \\ 1 & x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$S_1^{[i]}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad \begin{aligned} x \in [x_i, x_{i+1}] \\ i = 0,1,\cdots,n-1 \end{aligned}$$

分段线性插值的误差

n次Lagrange插值的余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$n=1$, 考虑分段线性插值。当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$时

$$f(x) - S_1^{[i]}(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$[(x - x_i)(x - x_{i+1})]' = (x - x_i) + (x - x_{i+1}) = 0$$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

分段线性插值的误差

$$f(x)-S_1^{[i]}(x)=\frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\quad \xi_x\in[x_i,\ x_{i+1}]$$

$$\left|f(x)-S_1^{[i]}(x)\right|$$

$$\le\frac{\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f''(x)\right|}{2!}\cdot\left|\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_i\right)\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_{i+1}\right)\right|$$

$$=\frac{\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f''(x)\right|}{2}\cdot\left|\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\cdot\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{8}h_i^2\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f''(x)\right|\qquad (h_i=\left|x_{i+1}-x_i\right|)\qquad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

定理 2.6

分段线性插值的误差：

$$\left|f(x)-S_1(x)\right| \le \frac{1}{8}h^2 \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right| \qquad h=\max h_i$$

- 上式表明插值余项与 h 相关
- h 越小，则分段线性插值的插值余项越小，因此用分段线性插值法是一个较好的提高逼近精度的方法

分段三次Hermite插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和 y_i'，求作具有划分 Δ 的分段三次代数多项式 $S_3(x)$，满足：

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S_3'(x_i) = y_i' \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式，且

$$\begin{cases} S_3^{[i]}(x_i) = y_i \\ S_3'^{[i]}(x_i) = y_i' \end{cases} \qquad \begin{cases} S_3^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ S_3'^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1}' \end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0(x)=(x-1)^2(2x+1)\\ \alpha_1(x)=x^2(-2x+3)\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_0(x)=x(x-1)^2(2x+1)\\ \beta_1(x)=x^2(x-1)\end{cases}$$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$+hy_0'\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+hy_1'\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\qquad h=x_1-x_0$$

$$S_3^{[i]}(x)=y_i\alpha_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)+y_{i+1}\alpha_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\qquad x\in[x_i,\,x_{i+1}]\quad h_i=x_{i+1}-x_i$$

$$+h_iy_i'\beta_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)+h_iy_{i+1}'\beta_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$$

$$i=0,1,\cdots,n-1$$

定理 2.7

分段三次 Hermite 插值的**误差**：

$$\boxed{\left| f(x) - S_3(x) \right| \le \frac{1}{384} h^4 \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|} \qquad h = \max h_i$$

- h 足够小（例如小于 1）时，分段三次 Hermite 插值的误差远小于分段线性插值的误差，因此前者的插值精度更高
- 分段三次 Hermite 插值的插值曲线比分段线性插值的插值曲线更光滑

分段插值法

- 简单
- 只要插值节点的间距充分小，分段插值收敛性有保证，不会出现Runge现象。
- 局部性

- 分段低次lagrange插值在插值节点处曲线不光滑。
- 三次Hermite插值要求给出插值节点处的导数值。其光滑性也不高。

例 题

例1 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$， 将区间[-5, 5] 分为10等分。

用分段线性插值法求 $f(3.5)$ 的近似值，并估计误差。

解：取 $x_i=3, x_{i+1}=4,$ 则 $y_i=\dfrac{1}{10}, y_{i+1}=\dfrac{1}{17}$

$$s_1(3.5)=\frac{1}{10}\times\frac{3.5-4}{3-4}+\frac{1}{17}\times\frac{3.5-3}{4-3}=\frac{27}{340}$$

本题中 $h=1$。当 $x\in[3,4]$ 时

$$|f(x)-s_1(x)|\le\frac{1}{8}\boxed{\max_{3\le x\le 4}|f''(x)|}$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},\quad f'''(x)=\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

当 $x\in[3,4]$ 时 $f'''(x)\le 0$，故

$$|f(3.5)-s_1(3.5)|\le\frac{1}{8}\max_{3\le x\le 4}|f''(x)|=\frac{1}{8}f''(3)=0.0065$$

2.7 曲线拟合的最小二乘法

- 函数的逼近方式
  - 插值 —— 满足给定的插值条件
  - 拟合 —— 反映给定数据的分布
- 插值存在的问题
  - 整体插值：Runge现象
  - 分段插值：函数光滑性受限
- 曲线拟合：给定函数类H，按照某种准则，找到一条曲线，既能反映给定数据的总体分布形式，又不致于出现局部较大的波动。

最小二乘法

- 给定数据点 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,N)$，记

$$\varepsilon_i = y_i - g(x_i) \qquad (i=1,2,\cdots N)$$

称为残差。

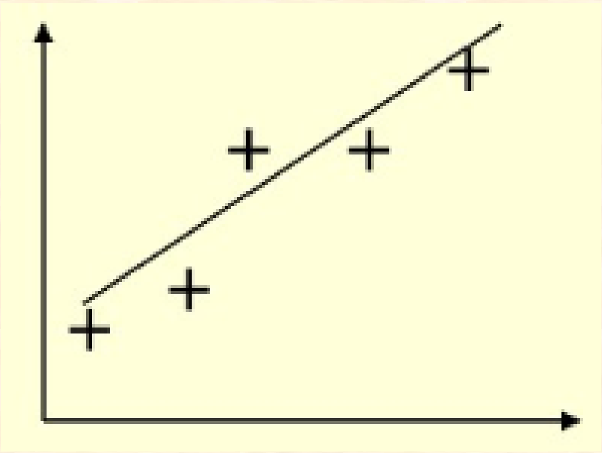
- 曲线拟合的最小二乘法：函数类***H***中找一个函数 $g(x)$ 使得残差的平方和最小，即

$$\sum_{i=0}^{N}\varepsilon_i^{\ 2} = \sum_{i=0}^{N}(y_i - g(x_i))^2 = \min_{h(x)\in H}\sum_{i=0}^{N}(y_i - h(x_i))^2$$

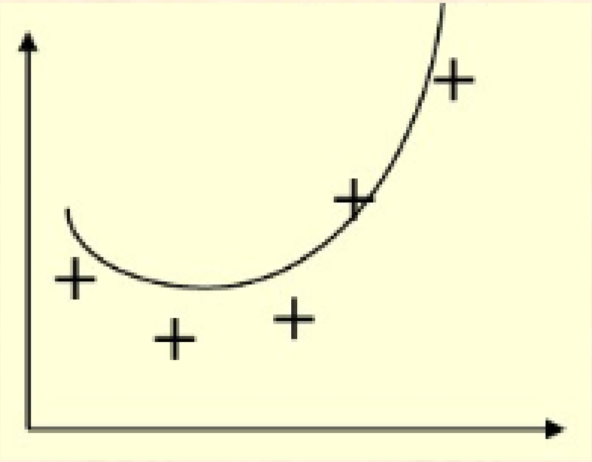
—— 最小二乘条件

最小二乘法

- 函数类$H \Longrightarrow g(x)$的形式
- 通常对给定的数据描图，通过图来寻找数据的分布规律，进而确定$g(x)$的形式。



$$g(x) = ax + b$$



$$g(x) = a + bx + cx^2$$

2.7.1 直线拟合

- 给定数据点 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,N)$，求作一次式

$$g(x)=ax+b$$

使得如下的残差最小：

$$\sum_{i=0}^{N}(y_i-g(x_i))^2=\sum_{i=0}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

- 记

$$Q(a,b)=\sum_{i=0}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

- 上述问题可归结为求二元函数 $Q(a,b)$ 的极值。

即

$$\frac{\partial Q(a,b)}{\partial a}=0,\frac{\partial Q(a,b)}{\partial b}=0$$

$$Q(a,b)=\sum_{i=0}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$\frac{\partial Q(a,b)}{\partial a}=0 \qquad \sum_{i=0}^{N}2[y_i-(a+bx_i)]\times(-1)=0$$

$$Na+b\sum_{i=0}^{N}x_i=\sum_{i=0}^{N}y_i \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Q(a,b)}{\partial b}=0 \qquad \sum_{i=0}^{N}2[y_i-(a+bx_i)]\times(-x_i)=0$$

$$a\sum_{i=0}^{N}x_i+b\sum_{i=0}^{N}x_i^{\ 2}=\sum_{i=0}^{N}x_iy_i \qquad (2)$$

2.7.2 多项式拟合

- 给定数据点 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,N)$，求作m次多项式

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j$$

使得如下的残差最小：

$$Q=\sum_{i=1}^{N}(y_i-g(x_i))^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^{\ j}]^2$$

- 上述问题可归结为求m元函数 Q 的极值。

$$Q=\sum_{i=0}^{N}[y_i-\sum_{j=0}^{m}a_j x_i{}^j]^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j}=0$$

$$\begin{cases} a_0 N + a_1\sum_{i=1}^{N}x_i + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{N}x_i{}^m = \sum_{i=1}^{N}y_i \\ a_0\sum_{i=1}^{N}x_i + a_1\sum_{i=1}^{N}x_i{}^2 + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{N}x_i{}^{m+1} = \sum_{i=1}^{N}x_i y_i \\ \cdots \\ a_0\sum_{i=1}^{N}x_i{}^m + a_1\sum_{i=1}^{N}x_i{}^{m+1} + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{N}x_i{}^{2m} = \sum_{i=1}^{N}x_i{}^m y_i \end{cases} \qquad (3)$$

多项式拟合

- 记 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2,\cdots,\varphi_m(x)=x^m$
- 记 $(\varphi_i,\varphi_j)=\sum_{l=1}^{N}\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l),\quad (f,\varphi_i)=\sum_{l=1}^{N}y_l\varphi_i(x_l)$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{l=1}^{N}1\times 1=N$$

$$(\varphi_m,\varphi_0)=\sum_{l=1}^{N}x_l^m\times 1=\sum_{l=1}^{N}x_l^m$$

$$a_0N+a_1\sum_{i=0}^{N}x_i+\cdots+a_m\sum_{i=0}^{N}x_i^m=\sum_{i=0}^{N}y_i$$

$$(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{l=1}^{N}x_l\times 1=\sum_{l=1}^{N}x_l$$

$$(f,\varphi_0)=\sum_{l=1}^{N}y_l\times 1=\sum_{l=1}^{N}y_l$$

多项式拟合

$$a_0 N + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{N} x_i^{\ m} = \sum_{i=0}^{N} y_i$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) a_0 + (\varphi_1, \varphi_0) a_1 + \cdots (\varphi_m, \varphi_0) a_m = (f, \varphi_0)$$

$$\sum_{j=0}^{m} (\varphi_j, \varphi_0) a_j = (f, \varphi_0)$$

$$((\varphi_0, \varphi_0), (\varphi_1, \varphi_0), \cdots, (\varphi_m, \varphi_0)) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = (f, \varphi_0)$$

多项式拟合

- 记 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=x^2, \cdots, \varphi_m(x)=x^m$
- 记 $(\varphi_i,\varphi_j)=\sum_{l=1}^{N}\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l),\quad (f,\varphi_i)=\sum_{l=1}^{N}y_l\varphi_i(x_l)$

$$
\begin{cases}
a_0N+a_1\sum_{i=0}^{N}x_i+\cdots+a_m\sum_{i=0}^{N}x_i^m=\sum_{i=0}^{N}y_i\\
a_0\sum_{i=0}^{N}x_i+a_1\sum_{i=0}^{N}x_i^2+\cdots+a_m\sum_{i=0}^{N}x_i^{m+1}=\sum_{i=0}^{N}x_iy_i\\
\cdots\\
a_0\sum_{i=0}^{N}x_i^m+a_1\sum_{i=0}^{N}x_i^{m+1}+\cdots+a_m\sum_{i=0}^{N}x_i^{2m}=\sum_{i=0}^{N}x_i^my_i
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\begin{gathered}\sum_{j=0}^{m}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k)\\ k=0,1,2,\cdots,m\end{gathered}}
$$

正规方程组

多项式拟合

$$\boxed{\sum_{j=0}^{m}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k) \qquad (4) \\ k=0,1,2,\cdots,m}$$

- 正规方程组(4)是否有解？
- 该解是否是残差函数Q的最小值点？

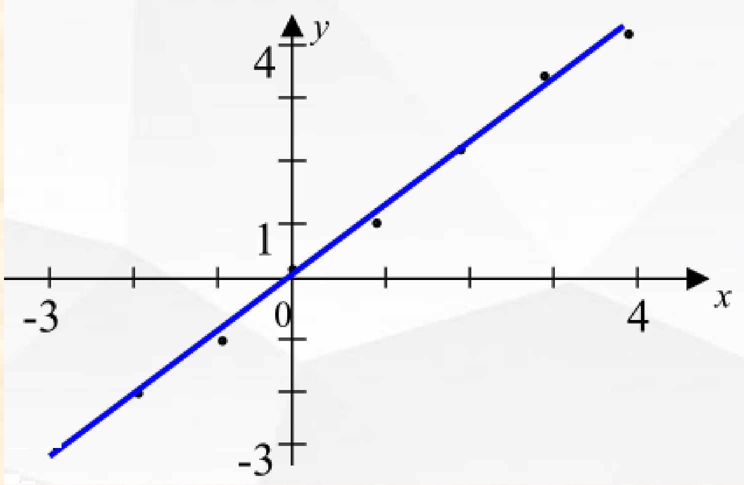
定理2.8 正规方程组(4)的解存在且唯一，而且其解就是使 $Q(a_0,a_1,\cdots,a_m)$ 达到最小值的极值点。

例　题

例1 给定如下离散数据，试求拟合曲线。

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	-3.2	-2.1	-1.2	0.1	0.9	2.1	3.3	4

解： 绘草图，确定拟合曲线类型。



从草图可判定拟合曲线为直线，因此设

$$g(x) = a + bx$$

$$Q(a,b) = \sum_{i=0}^{7}[y_i - (a + bx_i)]^2$$

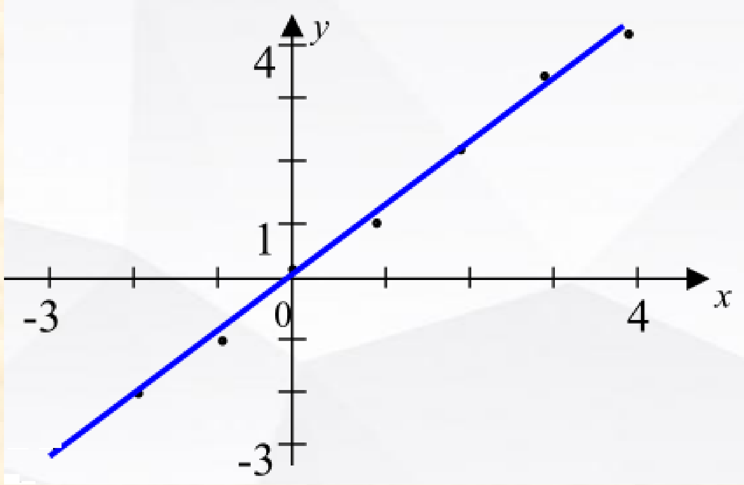
按最小二乘条件，令其偏导数为零得到二元一次方程组，得到**a,b**的值。

例　题

例1 给定如下离散数据，试求拟合曲线。

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	-3.2	-2.1	-1.2	0.1	0.9	2.1	3.3	4

解：绘草图，确定拟合曲线类型。



从草图可判定拟合曲线为直线，可设

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x$$

$$g(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_0=(1,1,1,1,1,1,1,1)^T$$

$$\varphi_1=(-3,-2,-1,0,1,2,3,4)^T$$

$$f=(-3.2,-2.1,-1.2,0.1,0.9,2.1,3.3,4)^T$$

例1（续）

$$\varphi_0=(1,1,1,1,1,1,1,1)^T \qquad \varphi_1=(-3,-2,-1,0,1,2,3,4)^T$$

$$f=(-3.2,-2.1,-1.2,0.1,0.9,2.1,3.3,4)^T$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=8 \qquad (\varphi_1,\varphi_0)=4 \qquad (f,\varphi_0)=3.9$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=4 \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=44 \qquad (f,\varphi_1)=46$$

$$\begin{cases}8a_0+4a_1=3.9\\4a_0+44a_1=46\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a_0=-0.0369\\a_1=1.0488\end{cases}$$

从而拟合直线为：$g(x)=a_0+a_1x=-0.0369+1.0488x$

例 题

例2 对下列数据求形如$y=ae^{bx}$的拟合曲线

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6
z_i	2.72785	3.02042	3.31054	3.60005	3.89386	4.18358	4.47506	4.76729

设$z=\ln y$，则 $z=A+bx$, 其中$A=\ln a$, 由$z_i=\ln y_i$ 得

对$z(x)$作线性拟合曲线,取 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x$.

$\varphi_0=(1,1,1,1,1,1,1,1)^T$, $\varphi_1=(1,2,3,4,5,6,7,8)^T$,

$z=(2.72785, 3.02042, 3.31054, 3.60005, 3.89386, 4.18358, 4.47506, 4.76729)^T$,

$$\begin{cases} 8A+36b=29.97865 \\ 36A+204b=147.13503 \end{cases}$$

解得 $A^*=2.43686$, $b^*=0.29122$, 于是有$a^*=e^{A^*}=11.43707$

第2章 小 结

- Lagrange插值
- Newton插值
- Hermite插值
- 分段插值
- 直线拟合
- 多项式拟合

- 插值基函数
- 差商
- 插值余项-误差估计
- 不同插值方法的异同
- 拟合与插值的不同
- 典型例题

P52 3，8(1)；14，16；19，23；27