



安徽大学  
人工智能学院  
School of Artificial Intelligence  
Anhui University

## 《自动控制原理》报告

### 实验四：根轨迹曲线绘制

学 院                      人 工 智 能 学 院

专 业                      机 器 人 工 程

姓 名 学 号              黄 敏 WA2224108

姓 名 学 号              张 瑜 晨 WA2224078

姓 名 学 号              郭 义 月 WA22204013

指 导 老 师              赵 冬

课 程 编 号              ZH52164

课 程 学 分              1

提 交 日 期              2024.12.16

## 目 录

一、实验目的及内容 .....	- 3 -
1.1 实验目的 .....	- 3 -
1.2 实验原理 .....	- 3 -
1.3 实验内容 .....	- 4 -
1.4 实验要求 .....	- 5 -
二、任务 1：题目一的求解 .....	- 5 -
2.1 列写根轨迹方程并绘制根轨迹曲线 ( $K_1 \geq 0, K_2 \geq 0$ ) .....	- 5 -
2.2 分析保证系统稳定的增益 $K_1$ 和 $K_2$ 的范围 .....	- 8 -
2.3 利用 MATLAB 绘制不同 $K_1$ 和 $K_2$ 值下的根轨迹曲线 .....	- 8 -
2.4 根据根轨迹曲线讨论增益 $K_1$ 和 $K_2$ 对系统稳定性的影响 .....	- 12 -
三、任务 2：题目二的求解 .....	- 13 -
3.1 分析 $a$ 对分离点个数的影响 .....	- 13 -
3.2 利用 MATLAB 绘制不同 $a$ 值下(选六组)的根轨迹曲线 .....	- 14 -
3.3 根据根轨迹曲线讨论 $a$ 值对系统稳定性的影响 .....	- 15 -
四、实验总结 .....	- 16 -

# 一、实验目的及内容

## 1.1 实验目的

- (1) 复习根轨迹绘制的相关法则，学习绘制系统概略根轨迹图
- (2) 学习利用 matlab 绘制根轨迹曲线
- (3) 讨论参数的变化对根轨迹分离点，稳定性的影响

## 1.2 实验原理

根轨迹的主要特征应反映根轨迹的起始和终止、相交与分离、与实轴或虚轴相交与分离等情况，通过 7 条基本法则予以确定。

### 法则 1 根轨迹的分支数、对称性连续性

根轨迹的分支数等于开环传递函数分子多项式和分母多项式次数的最大者，即等于  $\max(m,n)$ 。根轨迹连续且关于实轴对称。

### 法则 2 根轨迹的起点和终点

根轨迹起于开环极点，终于开环零点，根轨迹共有  $\max(m,n)$  条分支，

当  $n > m$  时，系统除了  $m$  个开环有限零点外，其余  $n-m$  个开环无限零点位于无穷远处；当  $n < m$  时，根轨迹有  $m-n$  个开环无限极点

### 法则 3 根轨迹的渐近线

当  $n > m$  时， $n-m$  条根轨迹分支沿着与实轴夹角为  $\varphi$ ，交点为  $\sigma$  的一组渐近线趋向无穷远处。

当  $n < m$  时， $m-n$  条根轨迹分支沿着与实轴夹角为  $\varphi$ ，交点为  $\sigma$  的一组渐近线渐离无穷远处。

渐近线与交点的计算公式为：
$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad \sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

### 法则 4 根轨迹在实轴上的分布

根轨迹在实轴上按区间分布，任一根轨迹区间的右侧的开环实有限零极点数为奇数

### 法则 5 根轨迹的分离点与分离角

$l$  条根轨迹分支在分离点处会合又立即分开，分离点  $d$  满足以下方程

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

分离点处根轨迹的分离角  $\varphi$  为  $\varphi = (2k+1)\pi / l$

### 法则 6 根轨迹的起始角和终止角

根轨迹在开环极点处，切线与实轴正方向的夹角

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left[ \sum_{j=1}^m \angle(p_i - z_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^n \angle(p_i - p_j) \right]$$

根轨迹在开环零点处，切线与实轴正方向的夹角

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi + \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^m \angle(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^n \angle(z_i - p_j) \right]$$

### 法则 7 根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴的交点  $s = j\omega$  为  $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$  的解，解方程

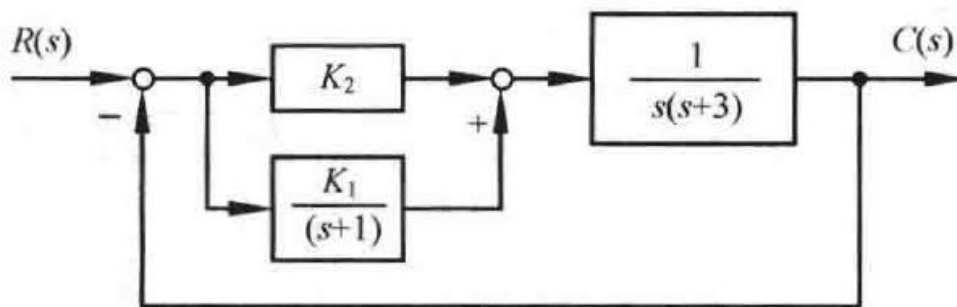
$$\begin{cases} 1 + \operatorname{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \end{cases}$$

可以求出  $K, \omega$

也可以根据劳斯判据确定交点  $s = j\omega$ ，列些劳斯表，可令含  $K$  的行出现全零行，建立辅助方程，获得关于虚轴对称的根，取其中的纯虚根

## 1.3 实验内容

1. 设控制系统如图所示，要求：（1）列写根轨迹方程并绘制根轨迹曲线 ( $K_1 \geq 0, K_2 \geq 0$ )；（2）分析保证系统稳定的增益  $K_1$  和  $K_2$  的范围；（3）利用 MATLAB 绘制不同  $K_1$  和  $K_2$  值下的根轨迹曲线；（4）根据根轨迹曲线讨论增益  $K_1$  和  $K_2$  对系统稳定性的影响。



2. 设系统的特征方程为：

$$D(s) = s^3 + as^2 + Ks + K = 0, \quad K \geq 0$$

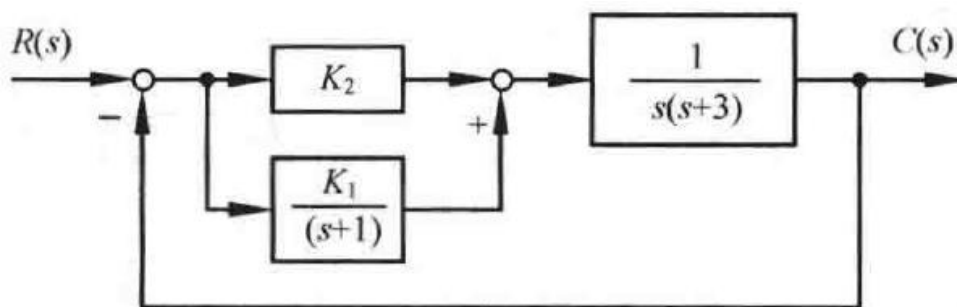
要求：(1) 分析确定根轨迹具有一个、两个和没有实数分离点的 $a$ 值范围；(2) 利用 MATLAB 绘制不同 $a$ 值下(选六组)的根轨迹曲线；(3) 根据根轨迹曲线讨论 $a$ 值对系统稳定性的影响。

## 1.4 实验要求

1. 对系统进行详细的概略根轨迹绘制规则分析
2. 列写利用 MATLAB 实现根轨迹绘制的程序语句
3. 根据绘制的根轨迹，分析系统的动态及稳态性能

## 二、任务 1：题目一的求解

### 2.1 列写根轨迹方程并绘制根轨迹曲线( $K_1 \geq 0, K_2 \geq 0$ )



题目一的系统结构图

该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_2 s + K_1 + K_2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{K_2 (s + (K_1 + K_2)/K_2)}{s(s+1)(s+3)}$$

系统的零极点为:

$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -3$$

$$z_1 = -(K_1 + K_2) / K_2$$

由于  $K_1 \geq 0, K_2 \geq 0$  , 所以  $z_1 < -1$  。

根据  $z_1$  的取值不同, 分以下两种情况:

(1) 当  $-3 < -(K_1 + K_2) / K_2 < -1$  时, 即  $K_1 / K_2 < 2$  , 取  $K_1 = K_2$  , 即  $z_1 = -2$

根据法则 4, 可得: 根轨迹在实轴上的分布为

$$[-3, -2] \text{ 和 } [-1, 0]$$

根据法则 3, 可得根轨迹的渐近线:

$$\sigma_a = \frac{0-1-3+2}{3-1} = -1, \quad \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2}$$

根据法则 5, 可得根轨迹的分离点方程:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+2}$$

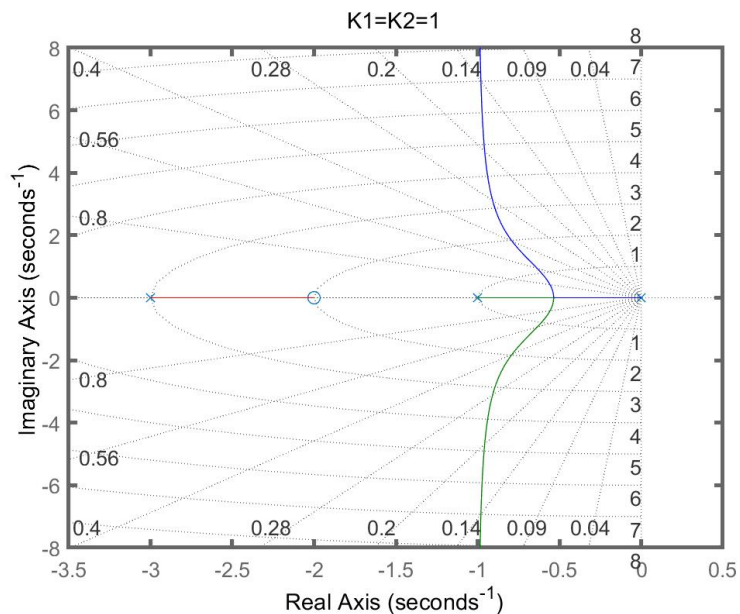
解得分离点横坐标:  $d = -0.53$  。

根据以上几点可以画出根轨迹曲线。

绘制根轨迹的 MATLAB 代码:

```
num=[1 2];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);
roots([2,10,16,6])
```

结果图:



(2) 当  $-(K_1 + K_2)/K_2 \leq -3$  时, 即  $K_1/K_2 \geq 2$ , 取  $K_1 = 3K_2$ , 即  $z_1 = -4$

根据法则 4, 可得: 根轨迹在实轴上的分布为  $[-4, -3]$  和  $[-1, 0]$ 。

根据法则 3, 可得根轨迹的渐近线:

$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 3 + 4}{3 - 1} = 0, \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2}$$

根据法则 5, 可得根轨迹的分离点方程:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+4}$$

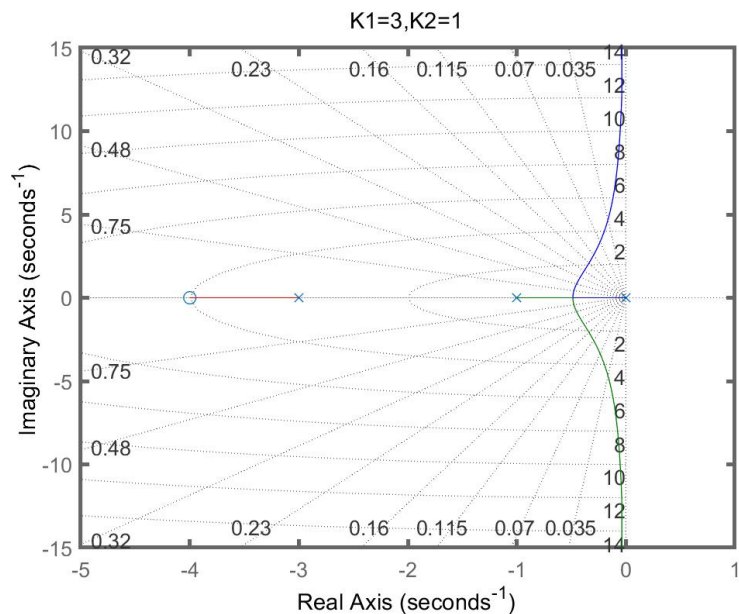
解得分离点横坐标:  $d = -0.49$ 。

根据以上几点可以画出根轨迹曲线。

绘制根轨迹的 MATLAB 代码:

```
num=[1,4];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=3,K2=1')
grid on;
set(gca,'linewidth',2);
roots([2,16,32,12])
```

结果图:



## 2.2 分析保证系统稳定的增益 $K_1$ 和 $K_2$ 的范围

由题 1：该系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_2 s + K_1 + K_2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{K_2 (s + (K_1 + K_2)/K_2)}{s(s+1)(s+3)}$$

则系统特征方程为

$$D(s) = s^3 + 4s^2 + (3 + K_2)s + K_1 + K_2 = 0$$

可列写劳斯表：

$$\begin{array}{l} s^3 \quad 1 \quad \quad \quad 3 + K_2 \\ s^2 \quad 4 \quad \quad \quad K_1 + K_2 \\ s^1 \quad \frac{4*(3 + K_2) - (K_1 + K_2)}{4} \\ s^0 \quad K_1 + K_2 \end{array}$$

所以保证系统稳定的条件是 $12 + 3K_2 - K_1 > 0$  且  $K_1 + K_2 > 0$ 。

## 2.3 利用 MATLAB 绘制不同 $K_1$ 和 $K_2$ 值下的根轨迹曲线

(1) 当 $-3 < z_1 < -1$  时

MATLAB 代码：



```

subplot(2,2,1);
num=[1 1.25];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=0.25,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

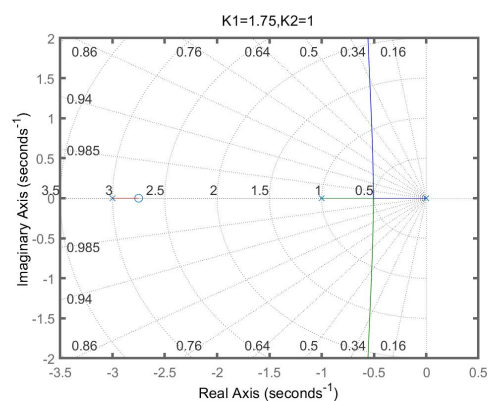
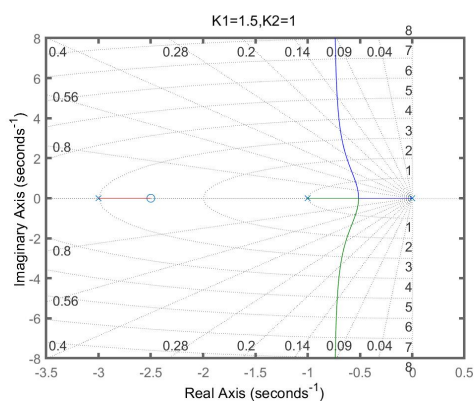
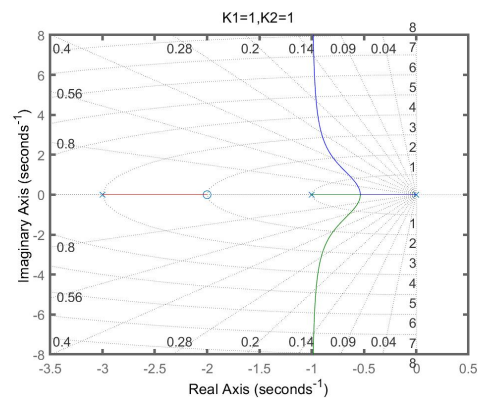
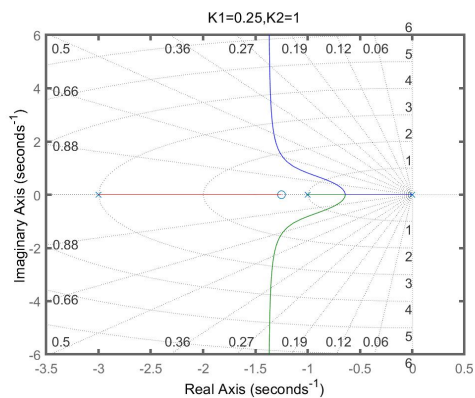
subplot(2,2,2);
num=[1 2];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=1,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

subplot(2,2,3);
num=[1 2.5];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=1.5,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

subplot(2,2,4);
num=[1 2.75];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=1.75,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

```

实验结果:



(2) 当  $z < -3$  时

MATLAB 代码:

```
subplot(3,2,1);
num=[1 3.9];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=2.9,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

subplot(3,2,2);
num=[1 4];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=3,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);
```

```

subplot(3,2,3);
num=[1 4.1];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=3.1,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

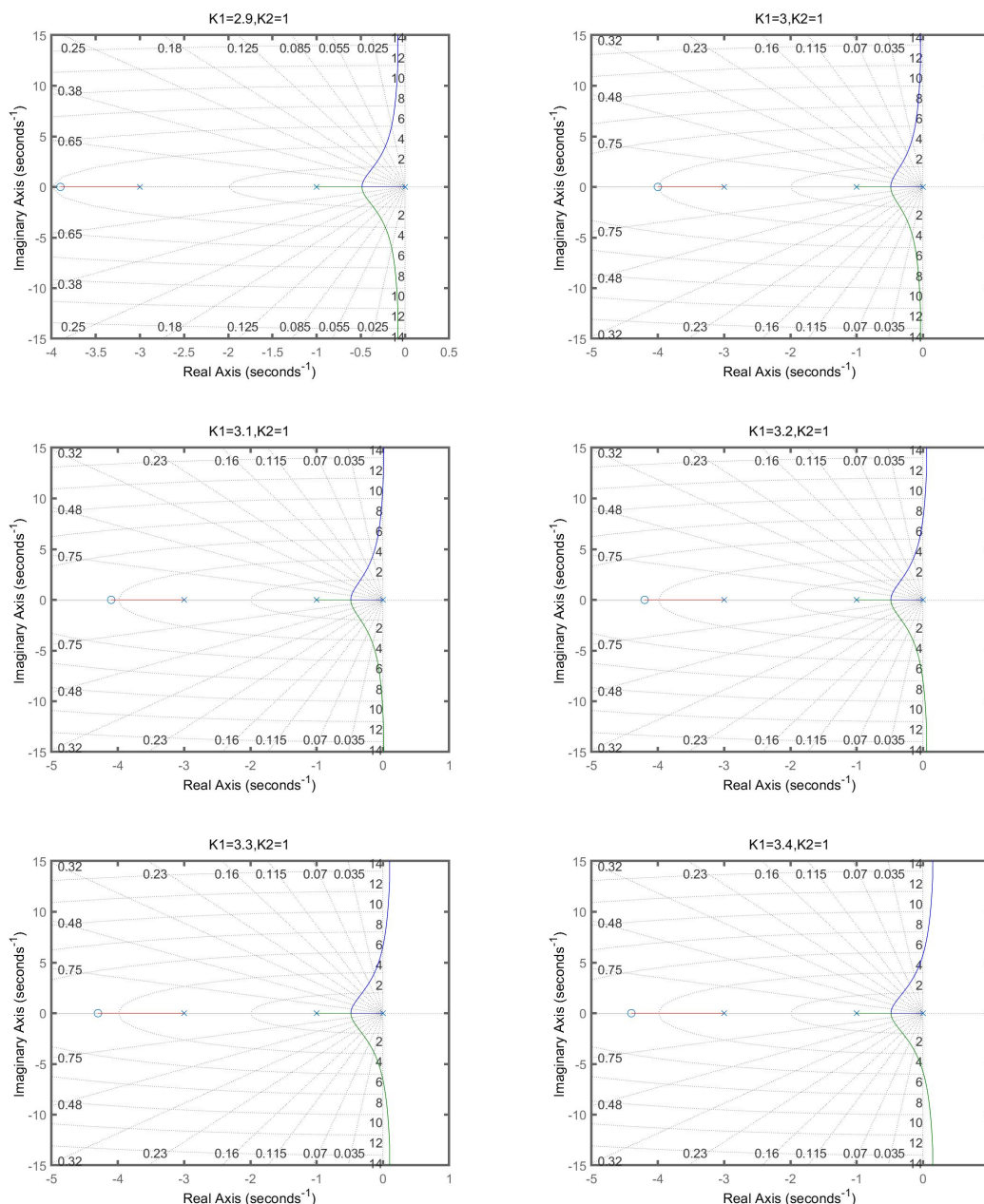
subplot(3,2,4);
num=[1 4.2];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=3.2,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

subplot(3,2,5);
num=[1 4.3];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=3.3,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

subplot(3,2,6);
num=[1 4.4];
den1=conv([1 0],[1 1]);
den=conv(den1,[1 3]);
sysG=tf(num,den);
rlocus(sysG)
title('K1=3.4,K2=1');
grid on;
set(gca,'linewidth',2);

```

实验结果:



## 2.4 根据根轨迹曲线讨论增益 $K_1$ 和 $K_2$ 对系统稳定性的影响

由题 2.3 的实验结果可得：

(1) 当  $K_1 / K_2 < 2$  时：只要满足  $K_1 \geq 0$  和  $K_2 \geq 0$ ，则根轨迹曲线全部落在复平面的左半平面，即系统稳定。

(2) 当  $K_1 / K_2 \geq 2$  时：

$2 \leq K_1 / K_2 \leq 3$  时，根轨迹曲线全部落在复平面的左半平面，即系统稳定。

$K_1 / K_2 > 3$  时，根轨迹曲线有一部分落在复平面的右半平面，即系统不稳定。

## 三、任务 2：题目二的求解

### 3.1 分析 $a$ 对分离点个数的影响

系统的特征方程为：

$$D(s) = s^3 + as^2 + Ks + K = 0, K \geq 0$$

此时可得等效的系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}$$

此时，系统有三个开环极点，分别为  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = -a$ ，有一个开环零点， $z = -1$ ，根据分离点的计算公式

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i}$$

带入本题中的三个开环极点与一个开环零点，可得

$$\frac{2}{d} + \frac{1}{d+a} = \frac{1}{d+1}$$

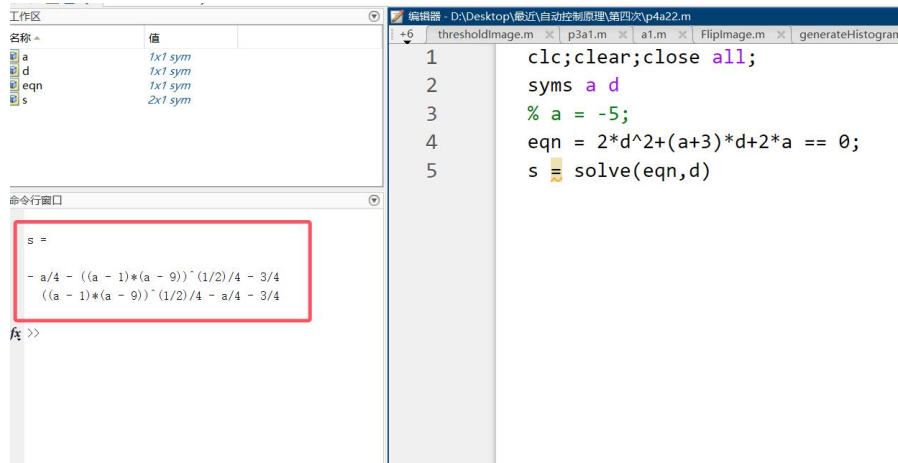
解方程，得  $2d^2 + (a+3)d + 2a = 0$ ，若要求有实数分离点，则需要此一元二次

方程  $\Delta = a^2 - 10a + 9 \geq 0$ ，即当  $a \geq 9$  或  $a \leq 1$  时，根轨迹有实数分离点。

用 matlab 的 solve 函数辅助求解分离点：

```
clc;clear;close all;
syms a d
% a = -5;
eqn = 2*d^2+(a+3)*d+2*a == 0;
s = solve(eqn,d)
```

可得分离点的坐标：



$$\text{即 } d_1 = \frac{-a-3}{4} - \frac{\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}, \quad d_2 = \frac{-a-3}{4} + \frac{\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$$

当  $a > 9$  时，根据根轨迹右侧零极点之和为奇数的法则，可知实轴上的根轨迹范围为  $(-a, -1)$ ，可计算在此情况下，总有  $d_1 > -a, d_2 < -1$ ，即此时，两个分离点都落在实轴根轨迹上，此时有两个实数分离点。

类似的可以计算，当  $a = 9$  或  $a < 0$  时，系统有一个实数分离点；当  $9 > a \geq 0$  时，没有实数分离点。

### 3.2 利用 MATLAB 绘制不同 $a$ 值下(选六组)的根轨迹曲线

实验代码：

分别取  $a = 15, 10, 5, 9, 0, -5$

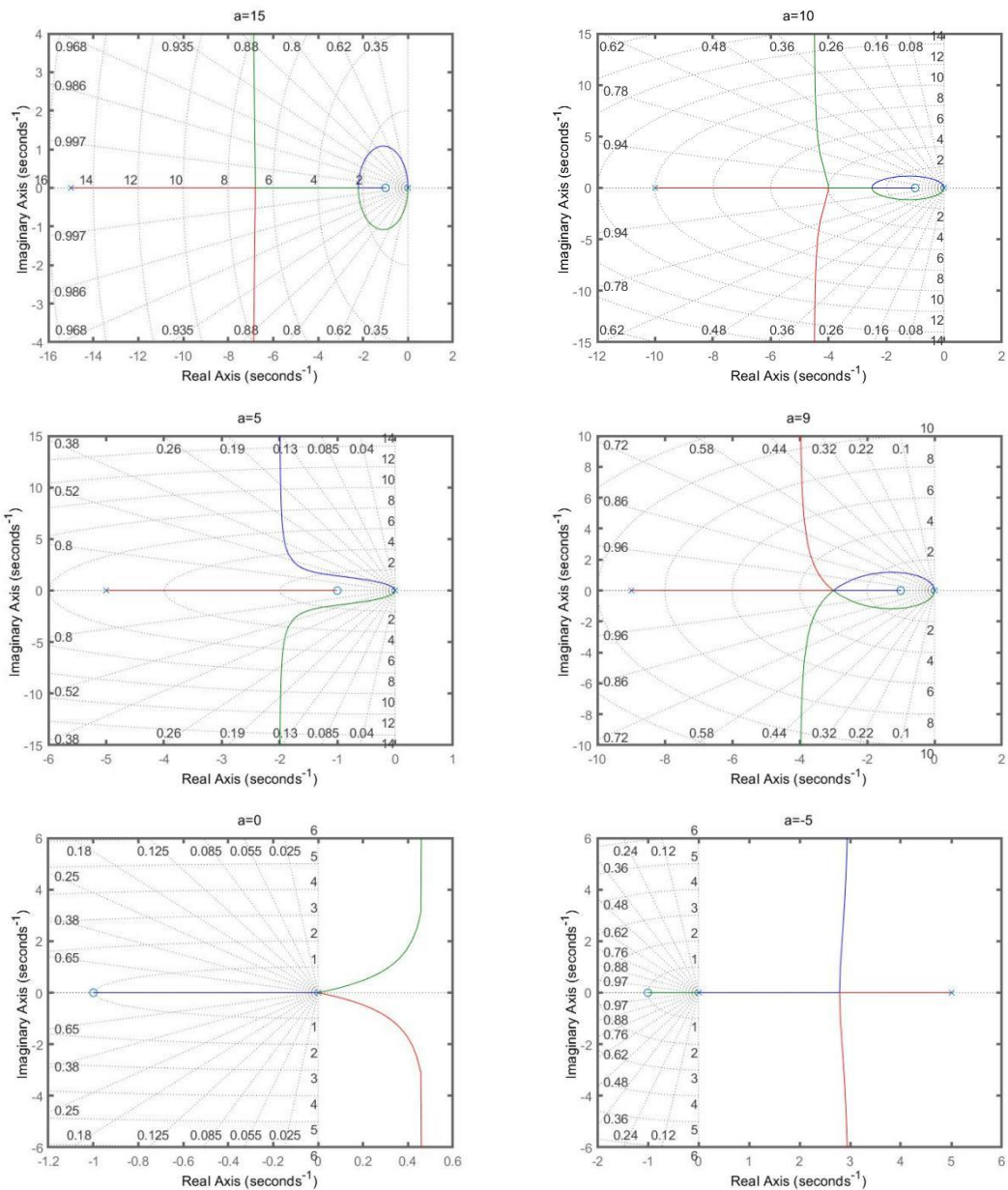
```

clc;clear;close all;
a = [15,10,5,9,0,-5];
for i = 1:6
    subplot(2,3,i);
    a1 = a(i);
    sys1 = tf([1,1],[1,a1,0,0]);
    rlocus(sys1);
    grid on;
    title(sprintf('a=%d',a1))
    set(gca,'linewidth',2);
end

```

实验结果：

A 取不同值时的根轨迹曲线：



### 3.3 根据根轨迹曲线讨论 $a$ 值对系统稳定性的影响

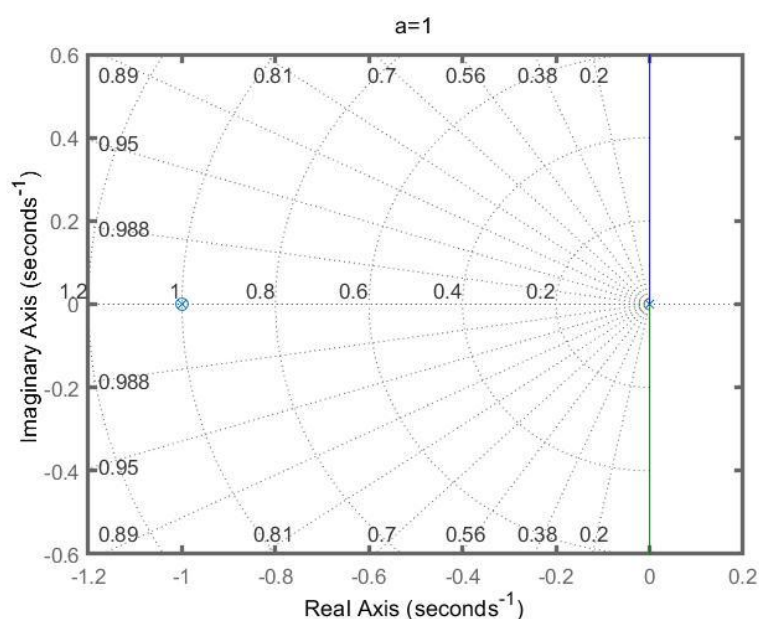
可根据劳斯判据判断稳定性，对于特征方程  $D(s) = s^3 + as^2 + Ks + K = 0, K \geq 0$ ，

列写劳斯表：

$s^3$	1	K
$s^2$	a	K
$s^1$	$\frac{aK - K}{a}$	
$s^0$	K	

根据劳斯表知，当  $a > 1$  时，系统是稳定的。

通过 matlab 绘制  $a = 1$  的根轨迹曲线，观察可知，此时系统处于临界稳定状态。



当  $a > 1$  时，系统的根轨迹曲线都落在复平面的左半平面，系统是稳定的，当  $a < 1$  时，结合 3.2 中系统的根轨迹曲线有部分落在了复平面的右半平面，系统是不稳定的。

## 四、实验总结

(1) 本次实验加深了对根轨迹绘制 7 条法则的认识，复习了如何绘制概略根轨迹。

(2) 在任务 1 中，分析系统增益对稳定性的影响，在任务 2 中，分析参数  $a$  的变化对稳定性的影响，通过分析系统的稳定性，加深了对劳斯判据的理解。

(3) 通过确定根轨迹具有一个、两个和没有实数分离点的  $a$  值范围，复习了分离点的计算过程，增强的分类讨论以及对高数的应用能力。

(4) 实验中进一步学习了 MATLAB 的使用，包括代码的编写、根轨迹的绘制和控制参数变化，以及图形的美化处理（如坐标轴标注、图例和线条样式设置），使图像更加直观和清晰。