弱形式的素数定理

子瞻

2022 年 7 月 23 日

素数定理

那么, 开门见山的说, 本文将要证明的是

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty$$

其中 π 是素数计数函数, 左侧积分取柯西主值. 这也就是弱形式的素数定理. 证明的方法会涉及一点点一维 Fourier 分析的内容.

本文是笔者对华罗庚的数论里证明的一个改进, 证明也许会有错, 不过至少结论是对的. 如果有读者发现错误就劳烦告诉笔者一声了.

记号

在本文中, 函数 f 的 Fourier 变换是

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\mathrm{d}t$$

以 $\sum_{n\le x}$ 表示 $\sum_{1\le n\le x}$, 即对不大于 x 的正整数求和,$\sum_{p\le x}$ 则表示对不大于 x 的素数求和. $\mathcal{O}$ 叫做 Landau 记号, 也叫大 O 符号,$\ll$ 叫做 Vinogradov 记号, 它们的意思差不多:

$$f = \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow f \ll g : \exists C > 0, |f| \le g.$$

还有一个我也不知道叫什么名字的记号:$f \asymp g$ 表示 $f \ll g$ 且 $g \ll f$.

定理转化

引入 Tchébyshev theta 和 psi 函数

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x}\log p, \quad \psi(x) := \sum_{n\le x}\Lambda(n)$$

其中 Λ 是 Mangoldt 函数, 当 n 是素数 p 的整数次幂时 $\Lambda(n) = \log p$, 否则 $\Lambda(n) = 0$. 由定义就能得知

$$\psi(x) = \sum_{k\ge 1}\sum_{p\le \sqrt[k]{x}}\log p = \sum_{k\ge 1}\vartheta(\sqrt[k]{x})$$

注意 psi 函数中到 $k > \frac{\log x}{\log 2}$ 时有 $\sqrt[k]{x} < 2$, 这时候内层求和是空的, 所以就把这些空的和给去掉, 得到

$$\psi(x) = \sum_{1 \le k \le \frac{\log x}{\log 2}} \vartheta(\sqrt[k]{x})$$

再把 $k = 1$ 的时候内层和单独拎出来, 然后对其它部分, 内层和不超过 $\sqrt{x}\log x$, 所以

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log^2 x) \tag{1}$$

将目光转向素数计数函数, 由 Abel 变换可得

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p \le x} \frac{\log p}{\log p} = \int_{3/2}^{x} \frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\log t} \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

用估计 $\vartheta(x) \ll x$ [?], 可得

$$\int_{3/2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t = \int_{3/2}^{\sqrt{x}} \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t \ll \frac{x}{\log^2 x}$$

因此,

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

再由 (1) 式即可知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \tag{2}$$

因此弱形式的素数定理等价于 $\psi(x) \sim x, \quad x \to \infty.$

之所以将它像这样转化, 是由于 psi 函数是 Mangoldt 函数的部分和, 而利用 Mangoldt 函数又能很好地与 zeta 函数构造起联系, 这一点在文章后面就可以体现.

Delta 型函数族

本文的证明需要用到 Fourier 分析中的一个表面上与数论毫无联系的定理, 而在这之前需要一个先证明一个命题.

首先来看一个广义函数论里的东西 (Dirac 函数)

$$\delta(t) = 0, \text{for } t \ne 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

它的一种定义方式是这样的: 给定函数族 $\{\delta_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$, 满足

$$\delta_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & 0 \le t \le \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

该定义给出的 δ_α 随着 α 的减小非零的区间越来越小, 直到趋于零, 同时非零区间的值也越来越大, 但它始终满足

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_\alpha(t)\mathrm{d}t = 1$$

由此, 令 $\alpha \to 0$ 即为 Dirac 函数. 不难得知, 一个在点 x 处连续的函数 f , 与 δ_α 的卷积

$$(f * \delta_\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\delta_\alpha(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{\alpha\to 0} f(x)$$

因此有 $(f * \delta)(x) = f(x)$. 由 Dirac 函数启发, 不妨引入这样的定义:

定义 1. 设依赖于参变量 $\alpha \in A$ 的函数 $\Delta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{\Delta_\alpha : \alpha \in A\}$ 满足

- $\forall \alpha \in A, \Delta_\alpha(t) \geq 0$
- $\forall \alpha \in A, \int_{\mathbb{R}} \Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t = 1$
- $\forall \varepsilon > 0, \lim_{\alpha\to\omega} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t = 1$

就称 $\{\Delta_\alpha : \alpha \in A\}$ 当 $\alpha \to \omega$ 时是 **delta 型函数族** .

显然第三个条件等价于对 0 的任意邻域 U ,

$$\lim_{\alpha\to\omega} \int_{\mathbb{R}\setminus U} \Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t = 0$$

那么接下来就可以证明一个基本命题.

命题 2. 设有界函数 f 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上一致连续, $\{\Delta_\alpha : \alpha \in A\}$ 在 $\alpha \to \omega$ 时是 *delta* 型函数族, 如果 $\forall \alpha \in A$, 卷积 $(f * \Delta_\alpha)$ 存在, 则

$$x \in E, \alpha \to \omega \quad \Rightarrow (f * \Delta_\alpha)(x) \rightrightarrows f(x)$$

证明. 任意取 $\varepsilon > 0, \rho = \rho(\varepsilon) > 0$, 依 f 的一致连续性及有界性可知, $x \in E$

$$\begin{aligned} |(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(t))\Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t \right| \\ \leq &\int_{-\rho}^{\rho} |f(x-t) - f(t)|\Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t + \int_{|t|\geq\rho} |f(x-t) - f(t)|\Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t \\ <&\varepsilon \int_{-\rho}^{\rho} \Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t + 2M \int_{|t|\geq\rho} \Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t \\ \leq&\varepsilon + 2M \int_{|t|\geq\rho} \Delta_\alpha(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

最后一个积分在 $\alpha \to \omega$ 时趋于零, 所以从某个时刻开始第二项就不超过 ε , 因此

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

对 $x \in E$ 一致成立. □

Fejér 定理

现在让我们将目光转向 Fourier 积分. 对绝对可积的函数 f , 其 Fourier 积分为

$$I(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\xi t}\mathrm{d}t\right)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi$$

取 I 的绝对值不超过 A 的积分

$$I_A(x)=\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi$$

考虑该积分的平均值

$$\mathfrak{S}_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T I_A(x)\mathrm{d}A$$

交换积分的次序 (不难验证可以交换), 得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_T(x)&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\int_{|\xi|}^{T}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}A\mathrm{d}\xi\\&=\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\xi|}{T}\right)\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由此即可得

$$\mathfrak{S}_T(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\xi|}{T}\right)e^{i\xi(x-t)}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}t$$

记内层积分为 $\mathfrak{F}_T$, 称之为 Fourier 积分的 Fejér 核

$$\mathfrak{F}_T(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\xi|}{T}\right)e^{i\xi u}\mathrm{d}\xi$$

则有 $\mathfrak{S}_T=f*\mathfrak{F}_T$. 可以证明以下定理.

定理 3. (Fejér 定理) 设有界函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 在 $E\subset\mathbb{R}$ 上一致连续, 则

$$x\in E,T\to\infty\quad\Rightarrow\mathfrak{S}_T(x)\rightrightarrows f(x)$$

证明. 只需验证 $\{\mathfrak{F}_T:T>0\}$ 在 $T\to\infty$ 时是 Delta 型函数族.

注意到 Fejér 核本身可以看作以下函数的 Fourier 变换.

$$\Phi_T(\xi)=\begin{cases}1-\frac{|\xi|}{T}, & |\xi|\le T\\ 0, & |\xi|>T\end{cases}$$

因此由 Fourier 逆变换得到

$$\Phi_T(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{F}_T(u)e^{i\xi u}\mathrm{d}u$$

取 $\xi=0$, 得到

$$\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{F}_T(u)\mathrm{d}u=1\tag{3}$$

另一方面, 通过分部积分可以算出

$$\mathfrak{F}_T(u)=\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\sin Tu/2}{Tu/2}\right)^2$$

这说明了 $\mathfrak{F}_T$ 非负. 而对 $\varepsilon>0$, 当 $T\to\infty$ 时

$$\int_{|u|\geq\varepsilon}\mathfrak{F}_T(u)\mathrm{d}u=\frac{T}{\pi}\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{\sin Tu/2}{Tu/2}\right)^2\mathrm{d}u\leq\frac{4}{T\pi}\int_\varepsilon^\infty\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\xrightarrow{T\to\infty}0 \tag{4}$$

结合 (3) 和 (4) 以及 $\mathfrak{F}_T$ 非负, 可知 $\{\mathfrak{F}_T:T>0\}$ 在 $T\to\infty$ 时确实是 Delta 型函数族. 于是根据上一节的命题得证定理. □

接下来就是重头戏了.

Wiener-Ikehara 定理

此乃本文的证明里最重要的东西. 首先给出一个引理

引理 4. 设 $g:\mathbb{R}_{\geq0}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ 是在定义域内的任意有限区间上分段连续的函数, 且 $\forall h>0$, 积分

$$G(h)=\int_0^\infty e^{-ht}g(t)\mathrm{d}t$$

收敛, 则

$$\lim_{h\to0^+}G(h)=\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t$$

证明. 因 g 非负, 所以

$$G(h)\leq\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t$$

又对 $\forall T>0$,

$$G(h)\geq\int_0^T e^{-ht}g(t)\mathrm{d}t\geq e^{-hT}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\leq\lim_{h\to0^+}G(h)\leq\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t$$

依 T 的任意性, 可令 $T\to\infty$, 从而得证引理. □

接下来, 结合前面的讨论, 就可以合成究极形态了.

定理 5. (Wiener-Ikehara) 设 $\varphi:\mathbb{R}_{\geq0}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ 是递增的有界变差函数, 且 $\varphi(t)\ll e^{at}$. 指数函数 e^{-st} 在它的定义域内对它的 *Stieltjes* 积分

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\varphi(t)$$

称为 φ 的 *Laplace-Stieltjes* 变换, 假定它在 $\Re(s)>a$ 时收敛. 如果函数

$$G(s)=\frac{F(s)}{s}-\frac{A}{s-a}$$

可以解析延拓至 $\Re(s) \geq a$ 上, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{e^{at}} = A.$$

证明. 由于 $\varphi(t) \ll e^{at}$, 对 F 用一次分部积分可得

$$\frac{F(s)}{s} = \int_0^\infty \varphi(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

又有 $\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = 1/(s-a)$, 令 $s = a+\varepsilon+i\xi$, 那么

$$G(a+\varepsilon+i\xi) = \int_0^\infty \left(\frac{\varphi(t)}{e^{at}} - A\right)e^{-\varepsilon t}\cdot e^{-i\xi t}\mathrm{d}t$$

引入 Heaviside 函数,

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

并令 $g_\varepsilon(t) = H(t)(\varphi(t)/e^{at} - A)e^{-\varepsilon t}, \varepsilon \geq 0$, 则 $G(a+\varepsilon+i\xi) = \hat{g}_\varepsilon(\xi)$. 定理最终就是要证明 $g(t) := g_0(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$. 不妨考虑

$$\mathfrak{S}_{\varepsilon,T}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}_T(x-t)g_\varepsilon(t)\mathrm{d}t$$

那么就有

$$\mathfrak{S}_{\varepsilon,T}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\xi|}{T}\right)e^{i\xi x}G(a+\varepsilon+i\xi)\mathrm{d}\xi$$

由 Riemann-Lebesgue 引理, 以及 $G(s)$ 可解析延拓至 $\Re(s) \geq a$ 可知

$$\lim_{x\to\infty}\mathfrak{S}_{\varepsilon,T}(x) = 0$$

对任意的 $\varepsilon \geq 0$ 都成立, 而据引理又有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathfrak{S}_{\varepsilon,T}(x) = \mathfrak{S}_T(x) := \int_{\mathbb{R}}\mathfrak{F}_T(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

所以对任意的 $T > 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\mathfrak{S}_T(x) = 0 \tag{5}$$

接下来就可以考虑 Fejér 定理了, 但还需验证是否满足使用条件.

由 $\varphi(t) \ll e^{at}$ 知 $g(t)$ 有界. 当 $t > t_0, |t-u| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varphi(t)}{e^{at}} - \frac{\varphi(u)}{e^{au}}\right| &\leq \left|\frac{\varphi(t)}{e^{at}} - \frac{\varphi(u)}{e^{at}}\right| + \left|\frac{\varphi(u)}{e^{au}} - \frac{\varphi(u)}{e^{at}}\right| \\ &< e^{-at_0}|\varphi(t)-\varphi(u)| + |\varphi(u)|e^{-at}|1-e^{a(u-t)}|\end{aligned}$$

因 φ 是有界变差, 所以最后一个不等号第一项在 $t_0 \to \infty$ 趋于零, 而第二项

$$|\varphi(u)|e^{-at}|1-e^{a(u-t)}| \ll 1-e^{a(u-t)} \ll \delta$$

故 $g(t)$ 在 $t \to \infty$ 时一致连续, 依 Fejér 定理可知

$$T \to \infty, \lim_{x\to\infty} \mathfrak{S}_T(x) = \lim_{t\to\infty} g(t)$$

再据 (5) 式, 得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{e^{at}} - A = 0 \tag{6}$$

□

OK, 那么接下来让我们来看看这个定理和素数定理有怎样的关系吧. 从

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1 \tag{7}$$

取对数导数可得

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

从而有

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{d}\psi(e^t), \quad \Re(s) > 1$$

我们记得 $\psi(x) \ll x$, 所以如果能证明

$$H(s) := -\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

可以解析延拓至 $\Re(s) \geq 1$, 那么也就证明了 $\psi(x) \sim x$.

解析延拓与非零区域

到达本文最后一站. 先试试来对 $\zeta(s)$ 延拓一下

$$\zeta(s) = \int_{1^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}[x]}{x^s} = \frac{1}{s-1} + 1 + s\int_{1^-}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$$

上式对 $\Re(s) > 0$ 且 $s \neq 1$ 皆解析, 令 $h(s) = \zeta(s) - 1/(s-1)$, 那么

$$h'(s) = \zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2}$$

从而可得

$$\begin{aligned}
-(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\frac{(s-1)^2\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} \\
&= \frac{1-(s-1)^2h'(s)}{1+(s-1)h(s)} \\
&= 1 - \frac{(s-1)h'(s)+(s-1)^2h(s)}{1+(s-1)h(s)}
\end{aligned}$$

令 $h_1(s)=(s-1)h(s)$, 则

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}-\frac{h_1'(s)}{1+h_1(s)}$$

所以, 最终得到

$$H(s)=-\frac{1}{s}\cdot\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}=-\frac{1}{s}-\frac{h_1'(s)}{1+h_1(s)} \tag{8}$$

这里据定义分子和分母都解析, 因此只需要依分母为零与否即可判断 H 是否解析. 而注意到分母的零点刚好就是 ζ 的零点, 那么接下来就对此进行讨论吧. 由 (7) 式可见 ζ 在 $\Re(s)>1$ 上非零, 接下来考虑 $\Re(s)\geq 1$ 的情况. 有

$$\log\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+i\tau}}$$

令 $s=\sigma+i\tau$ 来表示 s 的实部与虚部, 则

$$\log|\zeta(\sigma+i\tau)|=\Re\log\zeta(\sigma+i\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\cdot\frac{\cos\tau\log n}{n^{\sigma}}$$

据不等式 $3+4\cos\theta+\cos 2\theta=2(1+\cos\theta)^2\geq 0$, 可知 $\sigma>1$ 时

$$\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+i\tau)\zeta(\sigma+2i\tau)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\cdot\frac{2(1+\cos\tau\log n)^2}{n^{\sigma}}\geq 0$$

也就是

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+i\tau)\zeta(\sigma+2i\tau)|\geq 1 \tag{9}$$

假设在 $\Re(s)=1$ 上 ζ 函数有一个零点 $s_0=1+i\tau_0$, 那么对 $\varepsilon>0$,

$$\zeta(1+\varepsilon+i\tau_0)=\zeta(1+\varepsilon+i\tau)-\zeta(1+i\tau)=\mathcal{O}(\varepsilon)$$

有熟知的估计

$$\zeta(1+\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\ll\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon}$$

而由解析延拓可知 $\zeta(1+\varepsilon+2i\tau_0)=\mathcal{O}(1)$. 所以

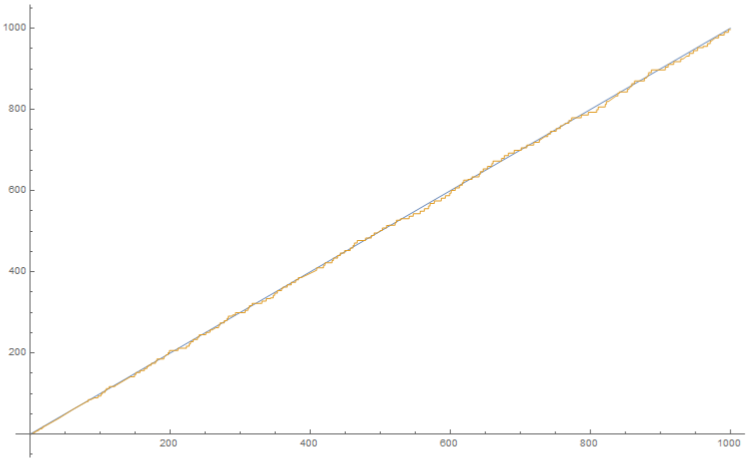
$$|\zeta^3(1+\varepsilon)\zeta^4(1+\varepsilon+i\tau)\zeta(1+\varepsilon+2i\tau)|=\mathcal{O}(\varepsilon)$$

这在 $\varepsilon\to 0$ 时与 (9) 式矛盾, 假设不成立, 即 ζ 函数在 $\Re(s)\geq 1$ 时无零点, 从而可知 8) 式确实可延拓至 $\Re(s)\geq 1$ 上. 从而据 (2) 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1 \tag{10}$$

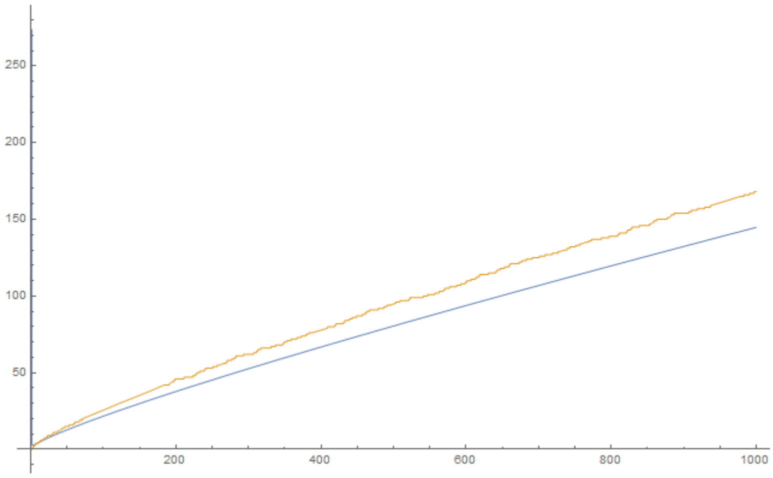
素数定理至此得证.

呼 , 终于是给这家伙给证完了, 接下来就用 mathematica 康康这些东西的图像叭.



$\psi(x)$ 与 x 的图像

可以看到这两个的图像是十分接近的, 所以用 x 做 $\psi(x)$ 的近似是十分合适的, 然后再看另一个的图像.



$\pi(x)$ 与 $x/logx$ 的图像

emmm，虽然两者增长速度确实大差不差, 但是误差确实还是有一点点大. 注意到对数积分函数

$$\mathrm{li}(x)=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}=\frac{x}{\log x}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log^2 t}$$

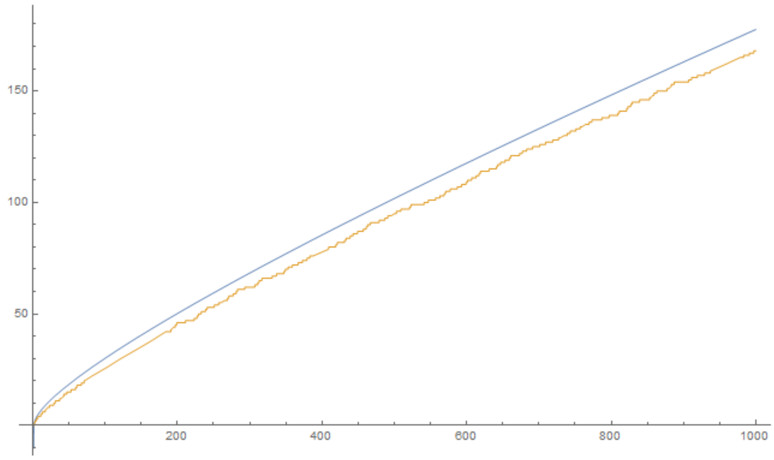
由此可得

$$\frac{x}{\log x}=\mathrm{li}(x)+o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

因此由 (10) 式, 也有

$$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+o\left(\frac{x}{\log x}\right)\tag{11}$$

再将 π 和右边主项的图像画出,



$\pi(x)$ 与 $\mathrm{li}(x)$ 的图像

可以看到误差明显变小了. 所以实际上 (9) 式是素数计数函数更精确的近似, 但有时为了实际情况需要, 会将对数积分函数的下界降为 0, 这时候的积分是取柯西主值

$$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}=\lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}+\int_{1+\delta}^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

它与 $\mathrm{li}(x)$ 只相差一个常数 $\mathrm{Li}(2)\approx 1.04516$.

参考文献

[1] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社,1957. 第九章

[2] B.A.Zorich. 数学分析 *(第二卷)*[M]. Moscow,1981. 第十八章

[3] Javier Duoandikoetxea. *GSM29.Fourier Analysis*[M]. Addison-Wesley and Universidad Autónoma de Madrid,1995 chapter I

[4] 子瞻. 素数计数函数的初步估阶 [E]. 知乎. `https://zhuanlan.zhihu.com/p/480096835`