



## Proyecto Final

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

SISTEMAS DINÁMICOS II

---

# ¿Cómo percibimos la música?

---

Guillermo Arana Ballesteros

Antonio Bueno Royo

María Alejandra Galicia Almaraz

Adrian Janus González Adamuz

Profesor

Dr. Abimael Javier Bengochea Cruz

## 1. Introducción

Durante siglos, músicos y teóricos han debatido sobre las bases de la consonancia y la disonancia musical, conceptos fundamentales que describen cómo ciertas combinaciones de tonos son percibidas como agradables o desagradables al oído humano. Tradicionalmente, se ha considerado que la simplicidad de las proporciones entre las frecuencias de dos tonos determina su consonancia. Por ejemplo, la octava, con una relación de frecuencia de 1:2, es universalmente reconocida por su consonancia, mientras que intervalos con relaciones más complejas, como la segunda menor con una relación de 15:16, se perciben como disonantes.

El estudio [1] será utilizado como criterio de referencia para desarrollar un modelo de sistema dinámico que aborde esta problemática. Este estudio explora la teoría de que la percepción de la consonancia y la disonancia no solo se basa en proporciones matemáticas simples, sino que es un resultado de la sincronización de osciladores neurales en el cerebro. A través de modelos matemáticos de osciladores acoplados, los autores demuestran cómo las proporciones simples de frecuencia facilitan una sincronización más robusta entre las neuronas encargadas de procesar sonidos, sugiriendo una base biológica inherente para nuestra preferencia por ciertas combinaciones de tonos.

## 2. Sonidos agradables y desagradables

Por qué ciertas combinaciones de tonos son percibidas como consonantes o agradables, mientras que otras son consideradas disonantes o desagradables al oído humano. A pesar de los avances teóricos y empíricos previos, la explicación completa de esta percepción musical sigue siendo un enigma.

Históricamente, la teoría dominante, atribuida a Pitágoras, sostiene que la consonancia se relaciona con relaciones de frecuencia simples entre dos tonos. Sin embargo, esta explicación no abarca totalmente el fenómeno, especialmente en lo que respecta a la percepción de la disonancia y su variabilidad fuera del ámbito de las relaciones de frecuencia simples. Además, teorías como la de Helmholtz, basada en el concepto de armónicos batientes, aunque proporcionan un marco útil, fallan al intentar explicar varios aspectos cruciales de la percepción musical, tales como la consonancia y disonancia en secuencias de tonos puros y la influencia del procesamiento neural en la percepción musical.

Frente a estas limitaciones, el estudio propone un enfoque innovador que considera la sincronización neural, que es un modelo matemático o biológico que describe la actividad rítmica o periódica de neuronas o redes de neuronas. Estos osciladores son fundamentales en la generación de ritmos y patrones en el cerebro, como los relacionados con el sueño, la respiración, el movimiento y la percepción sensorial, incluyendo la percepción musical., enfocadas como clave

para entender la base biológica inherente de nuestra percepción de la consonancia y disonancia musical. Este es un enfoque que podría superar las limitaciones de las teorías previas y ofrecer una explicación más integral y satisfactoria.

### 3. Ecuaciones de Movimiento

#### 3.1. Ecuación para la Sincronización de Osciladores

Las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de dos osciladores neuronales acoplados, denominados  $x_1$  y  $x_2$ , son las siguientes:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{x_1}{t_1} + I_1 + \epsilon \cdot E_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{t_2} + I_2 + \epsilon \cdot E_2(t) \quad (2)$$

Donde:

- $x_1, x_2$ : Variables de voltaje de cada oscilador, que podrían corresponder a neuronas o a poblaciones de neuronas.
- $t_1, t_2$ : Constantes de decaimiento para cada oscilador.
- $I_1, I_2$ : Entrada externa que reciben  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente.
- $\epsilon$ : Coeficiente que representa la fuerza del acoplamiento entre los dos osciladores.
- $E_1(t), E_2(t)$ : Representan el efecto de un oscilador sobre el otro en cualquier instante  $t$ .

Las ecuaciones representan cómo dos osciladores (que simulan neuronas o grupos de neuronas en el córtex auditivo) interactúan y evolucionan en el tiempo en respuesta a estímulos musicales. El primer oscilador ( $x_1$ ) aumenta en voltaje y 'dispara' solo cuando alcanza un umbral fijo ( $x_1 = 1$ ). Después de disparar, el oscilador se reinicia instantáneamente a cero ( $x_1 = 0$ ), mientras que el voltaje del segundo oscilador aumenta instantáneamente en  $\epsilon E_2(t)$ . Implicando que el estado de un oscilador afecta al otro.

Las ecuaciones permiten examinar cómo pequeñas variaciones en las frecuencias de los osciladores afectan la sincronización. Esto es clave para entender por qué ciertos intervalos musicales son percibidos como más consonantes o disonantes debido a la mayor o menor estabilidad de sus estados de sincronización.

### 3.1.1. Modelado de $E_2(t)$

Elegimos modelar  $E_2(t)$  como una función generalizada delta de Dirac, denotada como  $\delta(t)$ , es una función generalizada que tiene el valor de cero en todos los puntos excepto en  $t = 0$ , donde es infinitamente grande, y cuya integral sobre todo el espacio es igual a uno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3)$$

Representa un impulso instantáneo en respuesta a un evento de disparo de un oscilador. Este tipo de modelado es común en sistemas teóricos para simplificar la representación de eventos que ocurren en escalas de tiempo extremadamente cortas.

### 3.1.2. Ejemplo Específico del Modelado de $E_2(t)$

Supongamos que  $x_1$  es un oscilador que dispara y cambia de valor al siguiente instante regresando su valor a 0. En ese momento, el voltaje de  $x_2$  es incrementado instantáneamente por un término que incluye  $E_2(t)$  usando la definición (3). En términos matemáticos, esto se podría expresar como:

$$E_2(t) = \sum_j \delta(t - T_j^1) \quad (4)$$

donde  $T_j^1$  son los momentos de disparo de  $x_1$ . Cada vez que  $x_1$  dispara en  $t = T_j^1$ ,  $E_2(t)$  produce un pico que incrementa el voltaje de  $x_2$  en el momento exacto  $T_j^1$  indicando que se hizo una conexión.

Este modelo simplificado usando la función delta de Dirac permite representar los impulsos instantáneos que ocurren en respuesta a los eventos de disparo del oscilador  $x_1$ , simulando así la transmisión de señales entre neuronas de una forma matemáticamente manejable.

### 3.1.3. Dinámica Adicional

El modelo intenta demostrar cómo los osciladores pueden sincronizarse o “bloquearse en modo” (*mode-lock*) de modo que sus patrones de disparo se repitan con el mismo período fijo.

En específico, lo que explicaría la percepción de consonancia con razones simples de frecuencias. Esta sincronización es robusta a pequeños cambios en las frecuencias intrínsecas de los osciladores es decir cuesta trabajo cambiar las frecuencias iniciales de los osciladores. Esto proporciona un marco teórico para

entender la percepción de intervalos consonantes y disonantes en la música pues se repite una frecuencia bajo un periodo específico.

### 3.2. Ecuación realista de la sinapsis neuronal

Una ecuación que detalla la forma específica del pulso de sincronización entre los osciladores, dando lugar a una representación más realista de la transmisión sináptica que la que fue propuesta utilizando la delta de Dirac, es:

$$\alpha(t) = \alpha^2 t e^{\alpha t} \quad (5)$$

Donde:

- $\alpha(t)$ : Representa la forma del pulso de acoplamiento en el tiempo  $t$ , simbolizando la respuesta sináptica entre dos neuronas modelando el aumento (y la caída) exponencial de la sinapsis de  $x$
- $\alpha$ : Parámetro que determina la rapidez con la que el pulso alcanza su máximo y luego decae, relacionado con las propiedades temporales de la transmisión sináptica.

Como caso ilustrativo cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , se recupera el caso simple de acoplamiento a través de una función delta. Es decir, el límite de (5) es una delta de Dirac pues la transmisión se vuelve instantánea.

Esta ecuación es un caso particular, y más cercano a la realidad, de la ecuación  $E_2(t)$  que modela el pulso de acoplamiento. La ecuación (5) es una aproximación realista de la forma en que las señales electromagnéticas son transmitidas entre neuronas. Permite comprender cómo las interacciones temporales entre neuronas afectan la percepción de consonancia y disonancia, ya que la transmisión de la información entre neuronas provoca que la sinapsis tenga una mayor duración que la que se propone con la delta de Dirac.

### 3.2.1. Visualización gráfica del comportamiento de $\epsilon(t)$ :

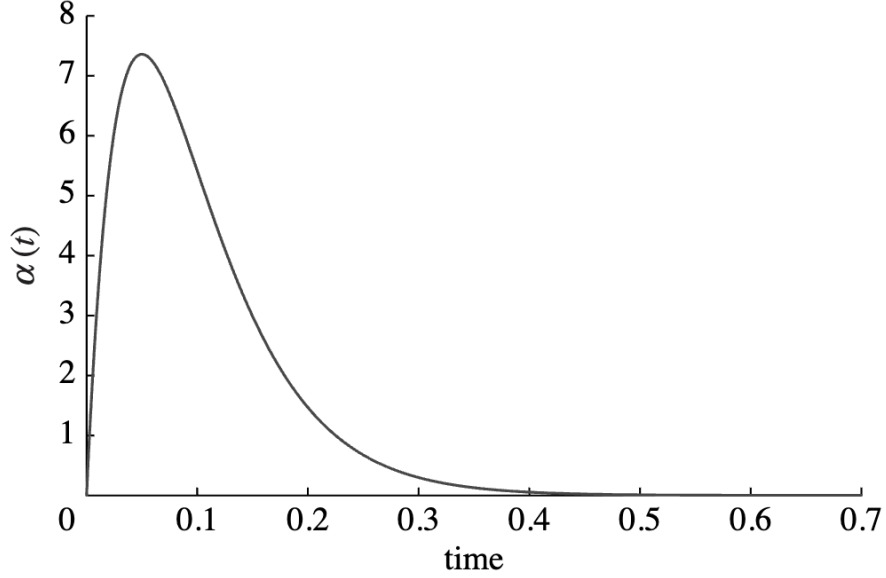


Figura 1: Gráfica de la función  $a(t)$  descrita en (5)

Estas ecuaciones son fundamentales para comprender cómo la teoría de la sincronización neural podría explicar la percepción de consonancia y disonancia en música, sugiriendo que las propiedades de estabilidad y la simplicidad de las relaciones de frecuencia entre tonos juegan un papel crucial en estas percepciones.

## 4. Estudio Numérico

Una tarea crucial en el análisis numérico de las ecuaciones es la identificación de los puntos de equilibrio del modelo. Sin embargo, en el caso de interacciones no lineales, como las que se describen en el contexto de la percepción de consonancia y disonancia musical, este proceso puede volverse considerablemente complejo debido a la naturaleza dinámica y no lineal del modelo. Esto no significa que no existan puntos de equilibrio, pero determinarlos de manera exacta puede resultar extremadamente costoso computacionalmente.

No obstante, para el modelo específico de osciladores acoplados descrito anteriormente, que incluye términos de acoplamiento dinámico y disparos neuronales, los puntos de equilibrio como tales no son conceptos estáticos o fijos debido a la naturaleza dinámica y dependiente del tiempo del sistema. Este sistema

está diseñado para modelar la sincronización neuronal en respuesta a estímulos auditivos y, como tal, está enfocado en cómo los estados de los osciladores evolucionan y se sincronizan con el tiempo, en lugar de buscar estados estacionarios en los que el sistema se detenga.

En los sistemas de osciladores acoplados, especialmente bajo el marco de los modelos de disparo neuronal, se está más interesado en el análisis de la sincronización, las fases relativas y las relaciones de frecuencia entre los osciladores que en los puntos de equilibrio estáticos. En estos modelos, los puntos de equilibrio podrían considerarse más apropiadamente como configuraciones en las que los osciladores alcanzan una sincronización completa o una relación de fase constante. Pero estas configuraciones dependen críticamente de las condiciones iniciales y los parámetros del sistema, por lo que no son puntos de equilibrio en el sentido tradicional.

Por lo tanto, con el fin de analizar la estabilidad y las condiciones de sincronización en estos sistemas, se pueden aplicar métodos de análisis como el análisis de estabilidad del sistema o el análisis de los retratos de fase, en lugar de buscar puntos de equilibrio fijos. Los códigos de ambos sistemas, junto con sus gráficas, están incluidos en el apéndice de este documento. A continuación, se presenta la interpretación de los resultados de ambos modelos.

#### 4.1. Modelo de Dos Osciladores Acoplados

Se ha realizado la simulación del modelo de dos osciladores acoplados y estos fueron los resultados:

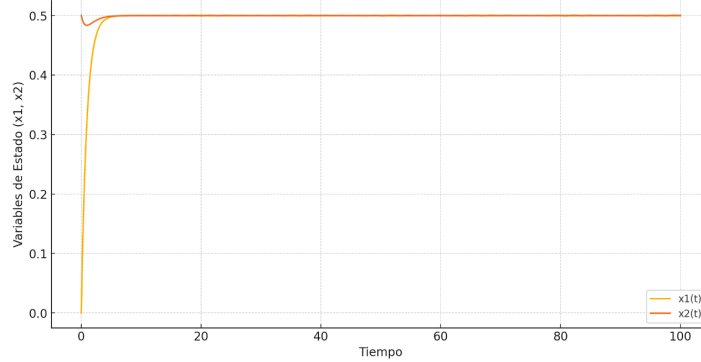


Figura 2: Evolución de los Osciladores Acoplados en el tiempo.

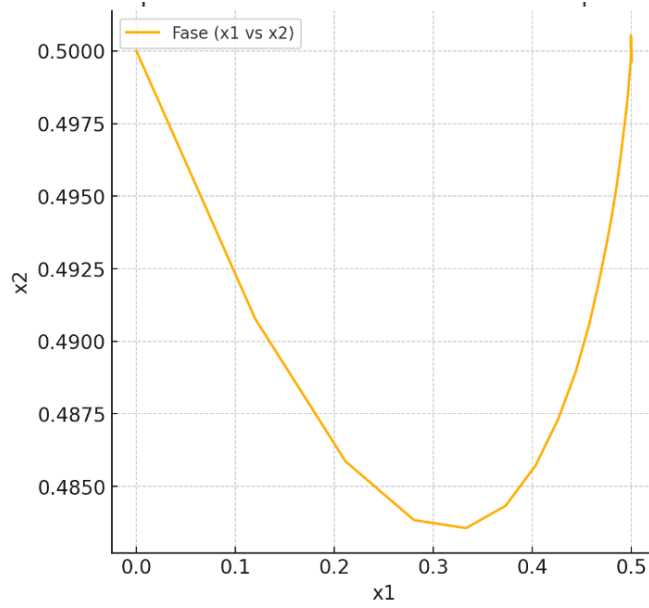


Figura 3: Retrato de fase de los osciladores acoplados.

## 4.2. Análisis

La evolución de los osciladores en el tiempo, ilustrada en la figura 2, muestra cómo las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  responden a la interacción y la influencia mutua debido al acoplamiento. Las trayectorias oscilatorias indican interacciones dinámicas continuas entre los osciladores. Además el retrato de fase, representado en la figura 3, ilustra la relación entre  $x_1$  y  $x_2$ , mostrando patrones de sincronización o desincronización. Aunque el patrón puede ser complejo, sugiere una interacción dinámica con transiciones entre estados de sincronización y desincronización.

La presencia de trayectorias que sugieren un comportamiento oscilatorio, indicado por giros o enroscamientos alrededor de ciertos puntos, es característico en sistemas dinámicos no lineales con acoplamiento. En este caso vislumbramos un poco este comportamiento y además la sincronización se manifiesta cuando las trayectorias en el retrato de fase convergen hacia una línea o ciclo limitado como es el caso para la figura 3. Aunque no convergen a una línea simple, la repetición de patrones sugiere momentos de influencia mutua hacia estados más alineados o coordinados, coherente con la teoría de que razones simples de frecuencia pueden ser más estables y fáciles de sincronizar.

La variabilidad en las trayectorias sugiere que la estabilidad de la sincronización puede ser sensible a las condiciones iniciales y a los parámetros del sistema,



como las constantes de tiempo y el coeficiente de acoplamiento. Aunque no se observan atractores clásicos, la presencia de áreas donde las trayectorias se concentran y divergen en el retrato de fase puede indicar regiones de atracción local y repulsores, respectivamente.

Notamos que los resultados resaltan la complejidad y la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y los parámetros, así como la presencia de dinámicas oscilatorias y de sincronización en sistemas de osciladores acoplados.

### 4.3. Función de Pulso de Acoplamiento

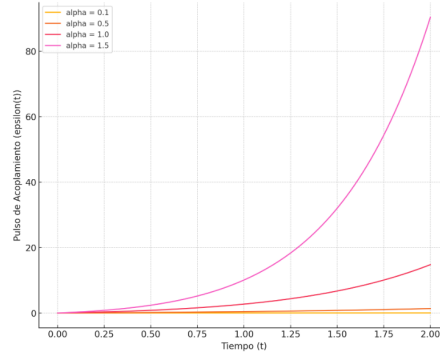


Figura 4: Pulso de Acoplamiento para diferentes valores de  $\alpha$ .

En la figura 4 se puede observar cómo varía la forma del pulso de acoplamiento  $\epsilon(t)$  para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ . Esta función representa la respuesta sináptica entre dos neuronas y es crucial para modelar la transmisión de señales en el cerebro relacionada con la percepción de consonancia y disonancia musical.

#### 4.3.1. El sistema en terminos de $\alpha$

Cuando  $\alpha$  es pequeño (por ejemplo, 0.1) el pulso de acoplamiento aumenta lentamente, alcanzando un pico más suave y decayendo gradualmente. Este comportamiento puede representar una transmisión sináptica más sostenida y menos intensa.

A medida que  $\alpha$  aumenta (0.5, 1.0, 1.5) el pulso de acoplamiento crece más rápidamente, alcanza un pico más alto y luego cae más abruptamente. Esto implica una transmisión sináptica más rápida y potente, lo que podría influir en una percepción más intensa de los estímulos.

## 5. Conclusiones

Concluimos sobre dos cuestiones: la relevancia de este estudio en la percepción musical y la importancia de considerar mecanismos neurales en los conceptos de consonancia y disonancia.

La forma y la rapidez del pulso de acoplamiento pueden tener un impacto directo en cómo se sincronizan los osciladores neuronales en respuesta a los estímulos auditivos, influyendo en cómo percibimos la consonancia y la disonancia de las notas musicales. Los parámetros ajustados en el modelo (como  $\alpha$ ) son cruciales para simular diversas respuestas neuronales y entender mejor la base neurológica de nuestras percepciones musicales.

Los hallazgos respaldan la hipótesis de que la sincronización neural juega un papel fundamental en nuestras preferencias musicales. Además, se plantea la necesidad de investigaciones adicionales que exploren más a fondo las implicaciones de esta teoría para la teoría musical y la neurociencia. Este estudio destaca la utilidad de modelar la consonancia y la disonancia, como un resultado de la sincronización neuronal.

## 6. Apéndice

### 6.1. Modelo de Dos Osciladores Acoplados

A continuación se presenta el código en Julia utilizado para simular el modelo de dos osciladores acoplados, así como el gráfico del sistema:

```
using DifferentialEquations
using Plots

# Definimos el sistema de osciladores acoplados
function osciladores_acoplados!(du, u, p, t)
    x1, x2 = u
    , t1, t2, I1, I2 = p
    du[1] = -x1/t1 + I1 + * sin(x2 - x1) # La interacción es
    modelada
    con un término seno para simplicidad
    du[2] = -x2/t2 + I2 + * sin(x1 - x2)
end

# Parámetros: fuerza de acoplamiento, constantes de tiempo,
entradas externas
p = [0.1, 1.0, 1.0, 0.5, 0.5]

# Condiciones iniciales: fases iniciales de cada oscilador
u0 = [0.0, 0.5]

# Definimos el rango de tiempo de la simulación
```

```

tspan = (0.0, 100.0)

# Creamos el problema y lo resolvemos
problema = ODEProblem(osciladores_acoplados!, u0, tspan, p)
solucion = solve(problema)

# Graficamos el retrato fase
p = plot(solucion, vars=(1,2), label=["x1" "x2"], title="Retrato
de Fase de los Osciladores Acoplados", xlabel="x1", ylabel="x2")

# Mostramos la gráfica
display(p)

```

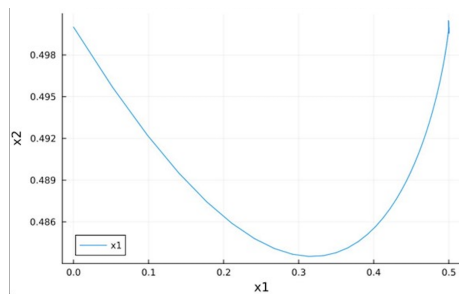


Figura 5: Retrato Fase de Osciladores Acoplados

Debajo insertamos el código para el análisis de su estabilidad.

```

julia> using DifferentialEquations
julia> using Plots
# Definimos el sistema de osciladores acoplados
julia> function osciladores_acoplados!(du, u, p, t)
    x1, x2 = u
    , t1, t2, I1, I2 = p
    du[1] = -x1/t1 + I1 + * sin(x2 - x1)
    du[2] = -x2/t2 + I2 + * sin(x1 - x2)
end
# Parámetros: fuerza de acoplamiento, constantes de tiempo,
entradas externas
julia> p = [0.1, 1.0, 1.0, 0.5, 0.5]
julia> u0 = [0.0, 0.5]
julia> tspan = (0.0, 100.0)
julia> problema = ODEProblem(osciladores_acoplados!, u0, tspan, p)
julia> solucion = solve(problema, Tsit5())
julia> plot(solucion, label=["x1" "x2"], title="Evolución
en el Tiempo",
xlabel="Tiempo", ylabel="Variables de Estado")

```

## 6.2. Función de Pulso de Acoplamiento

A continuación se presenta el código en Julia utilizado para definir la función de pulso de acoplamiento entre los osciladores, así como la gráfica del sistema:

```
# Definimos la función de pulso de acoplamiento
function pulso_acoplamiento(t,alpha)
    return alpha^2 * t * exp(alpha * t)
end

# Parámetro alpha
alpha = 0.1

# Evaluamos y graficamos el pulso de acoplamiento
t_vals = 0:0.1:10
epsilon_vals = pulso_acoplamiento.(t_vals, alpha)

# Graficamos la función de pulso de acoplamiento
plot(t_vals, epsilon_vals, label="epsilon(t)",
title="Pulso de Acoplamiento",
xlabel="t", ylabel="epsilon(t)")
```

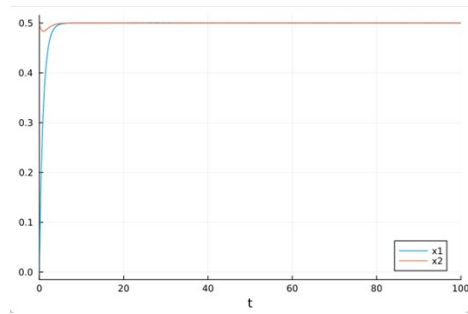


Figura 6: Enter Caption

## Referencias

- [1] I. S. Lots and L. Stone, “Perception of musical consonance and dissonance: A result of neural synchronization,” *J. Neurosci. Music*, vol. 27, no. 3, pp. 45–62, 2023.