Janusz Witkowski 254663

ZADANIE 1

ZADANIE 2

Kategoria Group: obiektami są grupy, a morfizmami są homomorfizmy
(homomorfizm $h: G \to J$ t, że $h(g_1 \cdot g_2) = h(g_1) * h(g_2)$, gdzie $g_1, g_2 \in (G, \cdot)$, $h(g_1), h(g_2) \in (J, *)$

Grupa trywialna $E = (\{e\}, *)$, $e * e = e$.

Element początkowy w Group: E.

Weźmy dowolną grupę $(G, \cdot)$ z elementem neutralnym g_e.
Zdefiniujmy funkcję $h_p : E \to G$ t, że $h_p(e) = g_e$.
Zauważmy, że $h_p(e * e) = h_p(e) = g_e = g_e \cdot g_e = h_p(e) \cdot h_p(e)$.
Stąd h_p - homomorfizm. Stąd E jest el. początkowym. $\boxtimes$

Element końcowy w Group: E.

Weźmy dowolną grupę $(J, \circ)$ z el. neutralnym j_e.
Zdefiniujmy $h_k : J \to E$ t, że $h_k(j) = e$ dla dowolnego $j \in J$.
Wtedy dla dowolnych $j_1, j_2, j_3 \in J$ takich że $j_1 \circ j_2 = j_3$ mamy

$$h_k(j_1 \circ j_2) = h_k(j_3) = e = e * e = h_k(j_1) * h_k(j_2)$$

Czyli h_k - homomorfizm. Stąd E jest el. końcowym. $\boxtimes$

ZADANIE 3, (T, μ, η), gdzie T – funktor list $T(X) = X^*$, $\eta(x) = [x]$, $\mu\,[[L_1] \ldots [L_n]] = L_1 ++ \ldots ++ L_n$.

Aby $(T, \mu, \eta) = MT$ było monadą, muszą komutować następujące ~~grafy~~ diagramy:

①
$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(\eta_X)"] \arrow[d, "\eta(T_X)"'] \arrow[dr, equal] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

②
$$\begin{tikzcd} T^3(X) \arrow[r, "\mu_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\mu_X)"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

① Niech $[x_1, \ldots, x_n] \in T(X)$, ozn. $\overline{x}$.

$\mu_X \circ T(\eta_X)(\overline{x}) = \mu_X(T(\eta_X)\,\overline{x}) = \mu_X([\eta_X x_1, \ldots, \eta_X x_n]) = \mu_X([[x_1], \ldots, [x_n]]) =$
$= x_1 ++ x_2 ++ \ldots ++ x_n = [x_1, \ldots, x_n] = \overline{x}$.

Stąd $\mu_X \circ T(\eta_X) = Id_{T(X)}$.

$\mu_X \circ \eta_{T(X)}(\overline{x}) = \mu_X(\eta_{T(X)}[x_1, \ldots, x_n]) = \mu_X([[x_1, x_2, \ldots, x_n]]) = [x_1, \ldots, x_n] = \overline{x}$

konkatenacja jednego elementu.

Stąd $\mu_X \circ \eta_{T(X)} = Id_{T(X)} = \mu_X \circ T(\eta_X)$, czyli diagram ① komutuje. ☑

②

Niech $\overline{\overline{L}} = [[L_{11}, \ldots, L_{1n_1}], [L_{21}, \ldots, L_{2n_2}], \ldots, [L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}]] \in T^3(X)$, $L_{11}, \ldots, L_{mn} \in T(X)$

$\mu_X \circ T(\mu_X)(\overline{\overline{L}}) = \mu_X([\mu_X[L_{11}, \ldots, L_{1n_1}], \ldots, \mu_X[L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}]]) =$

$= \mu_X([L_{11} ++ \ldots ++ L_{1n_1}, \ldots, L_{m1} ++ \ldots ++ L_{mn_m}]) =$

$= (L_{11} ++ \ldots ++ L_{1n_1}) ++ \ldots ++ (L_{m1} ++ \ldots ++ L_{mn_m}) =$

$= L_{11} ++ \ldots ++ L_{1n_1} ++ \ldots ++ L_{m1} ++ \ldots ++ L_{mn_m} \in T(X)$

$\mu_X \circ \mu_{T(X)}(\overline{\overline{L}}) = \mu_X(\mu_{T(X)}[[L_{11}, \ldots, L_{1n_1}], \ldots, [L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}]]) =$
$= \mu_X([L_{11}, \ldots, L_{1n_1}] ++ \ldots ++ [L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}]) =$
$= \mu_X([L_{11}, \ldots, L_{1n_1}, \ldots, L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}]) = L_{11} ++ \ldots ++ L_{1n_1} ++ \ldots ++ L_{m1} ++ \ldots ++ L_{mn_m} =$
$= \mu_X \circ T(\mu_X)(\overline{\overline{L}})$

~~konkatenacja jednego elemn~~

Stąd diagram ② komutuje. ☑

Stąd MT jest monadą!