

Analiza Algorytmów - Zadanie 24

Janusz Witkowski 254663

21 kwietnia 2023

1 Zadanie 24

1.1 Treść

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości odpowiednio $f_X(x)$ oraz $f_Y(y)$. Dla $Z = X + Y$ pokaż, że

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx$$

Jaki związek ma to zadanie z następnym zadaniem?

Wskazówka: zobacz spłot rozkładów prawdopodobieństwa.

1.2 Rozwiązanie

1.2.1 Spłot rozkładów

N

1.2.2 Wyprowadzenie wzoru

Ze strony na Wikipedii o splocie rozkładów prawdopodobieństwa (dołączonej do wskazówki w treści zadania) możemy wyciągnąć ogólny wzór na rozkład złożonej z dwóch niezależnych zmiennych losowych X i Y zmiennej losowej $Z = X + Y$:

$$P(Z = z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = z - k) \quad (1)$$

Dla dowolnych zmiennych losowych X i Y oraz $Z = X + Y$ mamy

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx \quad (2)$$

Ale X i Y są niezależne, więc

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (3)$$

Stąd wychodzi nam oczekiwany wzór

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (4)$$

1.2.3 Powiązanie z Zadaniem 25

W zadaniu 25 można wykorzystać pokazaną wyżej własność w dowodzie indukcyjnym. Idea jest taka, by dla zmiennej losowej w danym kroku indukcyjnym policzyć gęstość za pomocą splotu rozkładu zmiennej losowej będącej sumą poprzedniej zmiennej losowej oraz następnej zmiennej losowej.