

Analiza Algorytmów - Zadanie 24

Janusz Witkowski 254663

21 kwietnia 2023

1 Zadanie 24

1.1 Treść

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości odpowiednio $f_X(x)$ oraz $f_Y(y)$. Dla $Z = X + Y$ pokaż, że

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx$$

Jaki związek ma to zadanie z następnym zadaniem?

Wskazówka: zobacz spłot rozkładów prawdopodobieństwa.

1.2 Rozwiązanie

1.2.1 Spłot rozkładów

Spłot/sumę rozkładów prawdopodobieństwa definiuje się w teorii prawdopodobieństwa i statystyce jako operację w zakresie rozkładów prawdopodobieństwa, która odpowiada dodawaniu niezależnych zmiennych losowych, a co za tym idzie, tworzeniu liniowych kombinacji zmiennych losowych. Operacja ta jest szczególnym przypadkiem spłotu w kontekście rozkładów prawdopodobieństwa.

1.2.2 Wyprowadzenie wzoru

Przypomnienie: Jeżeli Z jest zmienną losową ciągłą z funkcją gęstości f_Z i dystrybuantą F_Z , to

$$f_Z(z) = F'_Z(z)$$

Stąd wychodzi nam oczekiwany wzór

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx \tag{1}$$

1.2.3 Powiązanie z Zadaniem 25

W zadaniu 25 można wykorzystać pokazaną wyżej własność w dowodzie indukcyjnym. Idea jest taka, by w danym kroku indukcyjnym policzyć gęstość za pomocą splotu rozkładu zmiennej losowej składającej się z sumy poprzednich zmiennych losowych oraz z następnej zmiennej losowej. Dzięki temu jesteśmy w stanie w prosty sposób przedstawić wzór na gęstość sumy zmiennych losowych o danych rozkładach.