Analiza Algorytmów - Zadanie 24

Janusz Witkowski 254663

21 kwietnia 2023

1 Zadanie 24

1.1 Treść

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości odpowiednio $f_X(x)$ oraz $f_Y(y)$. Dla $Z = X + Y$ pokaż, że

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx$$

Jaki związek ma to zadanie z następnym zadaniem?

Wskazówka: zobacz splot rozkładów prawdopodobieństwa.

1.2 Rozwiązanie

1.2.1 Splot rozkładów

Splot/sumę rozkładów prawdopodobieństwa definiuje się w teorii prawdopodobieństwa i statystyce jako operację w zakresie rozkładów prawdopodobieństwa, która odpowiada dodawaniu niezależnych zmiennych losowych, a co za tym idzie, tworzeniu liniowych kombinacji zmiennych losowych. Operacja ta jest szczególnym przypadkiem splotu w kontekście rozkładów prawdopodobieństwa.

Rozkład prawdopodobieństwa sumy dwóch lub więcej niezależnych zmiennych losowych jest splotem ich indywidualnych rozkładów. Jest to tłumaczone faktem, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa (funkcja masy prawdopodobieństwa w przypadku dyskretnym) sumy niezależnych zmiennych losowych jest splotem odpowiadających im funkcji gęstości prawdopodobieństwa (funkcji mas prawdopodobieństwa w przypadku dyskretnym).

1.2.2 Wyprowadzenie wzoru

Ze strony na Wikipedii o splocie rozkładów prawdopodobieństwa (dołączonej do wskazówki w treści zadania) możemy wyciągnąć ogólny wzór na rozkład złożonej z dwóch dyskretnych zmiennych losowych X i Y zmiennej losowej $Z = X + Y$:

$$P(Z = z) = P(X + Y = z) = P(X = k \wedge Y = z - k, k \in \mathbb{Z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \wedge Y = z - k) \tag{1}$$

Jeśli X i Y są niezależne, to

$$P(Z = z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \wedge Y = z - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = z - k) \tag{2}$$

Przyjrzyjmy się teraz ciągłym rozkładom. Dla dowolnych ciągłych zmiennych losowych X i Y oraz $Z = X + Y$ mamy

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z - x)\, dx \tag{3}$$

gdzie f_{XY} jest *funkcją wspólnej gęstości (joint probability density function)*, a przez $f_{XY}(x, z - x)$ rozumieć będziemy gęstość prawdopodobieństwa tego że $X = x \wedge Y = z - x$ dla danego $x \in \mathbb{R}$.

W zadaniu zakładamy, że X i Y są niezależne, z czego wynika (jak w przypadku dyskretnym)

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{4}$$

Stąd wychodzi nam oczekiwany wzór

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)\, dx \tag{5}$$

1.2.3 Powiązanie z Zadaniem 25

W zadaniu 25 można wykorzystać pokazaną wyżej własność w dowodzie indukcyjnym. Idea jest taka, by w danym kroku indukcyjnym policzyć gęstość za pomocą splotu rozkładu zmiennej losowej składającej się z sumy poprzednich zmiennych losowych oraz z następnej zmiennej losowej. Dzięki temu jesteśmy w stanie w prosty sposób przedstawić wzór na gęstość sumy zmiennych losowych o danych rozkładach.