Metody Optymalizacji - Lista 1

Janusz Witkowski 254663

2 kwietnia 2023

1 Zadanie 1

1.1 Model

1.1.1 Zmienne decyzyjne

Użyta została tylko jedna zmienna decyzyjna $\boldsymbol{X}$, która jest wektorem spełniającym warunek $\boldsymbol{X} \geqslant \mathbf{0}$. Teoretycznym rozwiązaniem problemu będącego zagadnieniem tego zadania jest wektor $\boldsymbol{Y} = \mathbf{1}$. Będziemy mogli później porównać wynikowy wektor $\boldsymbol{X}$ z $\boldsymbol{Y}$, aby przekonać się o precyzji GNU MathProg.

1.1.2 Ograniczenia

Za ograniczenia przyjmujemy równania liniowe podane w treści zadania:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

przy warunkach

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j \in 1, ..., n$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i \in 1, ..., n$$

Macierz A jest tzw. macierzą Hilberta, powodującą złe uwarunkowanie zagadnienia.

1.1.3 Funkcja celu

Funkcja celu ma postać podaną w treści polecenia

$$min\ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

1.2 Wyniki

2 Zadanie 2

2.1 Model

2.1.1 Zmienne decyzyjne

Chcemy w pewien sposób zamodelować rozkład jazdy dźwigów różnego typu z jednych miast do innych. Na razie przyjmijmy, że dźwigów nie da się podzielić, żebyśmy obracali się w programowaniu całkowitoliczbowym. Zdefiniujmy następującą zmienną decyzyjną:

$$x \in \mathbb{Z}^{n \times n \times 2}, x \geqslant 0$$

Przez x_{abt} będziemy rozumieć ile dźwigów typu t należy przetransportować z miasta a do miasta b.

2.1.2 Parametry

Wprowadźmy pewne parametry, ściśle związane z problemem.

$$d \in \mathbb{Z}^{2 \times n}, d \geqslant 0$$

$$r \in \mathbb{Z}^{2 \times n}, r \geqslant 0$$

$$z \in \{0, 1\}^{2 \times 2}$$

$$l \in \mathbb{R}^{n \times n}, l \geqslant 0$$

$$k \in \mathbb{R}^{2}, k \geqslant 0$$

Niech d_{ta} oznacza ile dźwigów typu t brakuje w mieście a. Niech r_{ta} oznacza nadmiar dźwigów typu t w mieście a. Niech z_{ts} oznacza czy dźwig typu t może zastąpić dźwig typu s. Niech l_{ab} oznacza dystans w kilometrach między miastem a a miastem b. Niech k_t oznacza koszt transportu dźwigu typu t za każdy przebyty kilometr.

2.1.3 Ograniczenia

Aby zagwarantować dopuszczalność potencjalnych rozkładów transportu, zdefiniujmy trzy ograniczenia:

1. **Nasyć popyt na różne typy** - każde miasto powinno otrzymać takie dźwigi aby mogło funkcjonować (dźwigi typu II mogą zastąpić dźwigi typu I)

$$(\forall a \in \{1, \ldots, n\}, t \in \{I, II\}) \left(\sum_{b=1}^{n} \sum_{s \in \{I, II\}} x_{abs} \cdot z_{st} \geqslant d_{ta} \right)$$

2. **Z pustego nawet Salomon nie naleje** - miasto nie może oddać więcej dźwigów niż samo posiada

$$(\forall a \in \{1, \ldots, n\}, t \in \{I, II\}) \left(\sum_{b=1}^{n} x_{abt} \leqslant r_{ta} \right)$$

3. **Nie zgub żadnego dźwigu po drodze** - potrzebujące miasta powinny dostać łącznie tyle dźwigów by zaspokoić swoje niedobory

$$(\forall a \in \{1, \ldots, n\}) \left(\sum_{b=1}^{n} \sum_{t \in \{I, II\}} x_{abs} \geqslant \sum_{s \in \{I, II\}} d_{sa} \right)$$

2.1.4 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować koszty transportu dźwigów między miastami. Zaproponujmy następującą funkcję celu:

$$min \sum_{t \in \{I, II\}} \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} l_{ab} \cdot x_{abt} \cdot k_t$$

2.2 Wyniki

3 Zadanie 3

3.1 Model

3.1.1 Zmienne decyzyjne

3.1.2 Ograniczenia

3.1.3 Funkcja celu

3.2 Wyniki

4 Zadanie 4

4.1 Model

4.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano następujące zmienne decyzyjne:

$$x \in \{0,1\}^{n \times m}$$
$$t \in \{0,1\}^{\{1,\ldots,5\} \times \{1,\ldots,48\}}$$
$$s \in \{0,1\}^{\{1,2,3\}}$$

x_{gc} oznacza zapis Studenta na kurs c do grupy g. t_{dh} indykuje czy Student jest zajęty w dniu d o godzinie $h/2$. s_k mówi czy Student zapisał się na zajęcia sportowe k.

4.1.2 Parametry

W modelu wykorzystano następujące parametry, ściśle powiązane z problemem:

$$r \in \mathbb{Z}^{n \times m}, 0 \leqslant r \leqslant 10$$
$$w \in \mathbb{Z}^{n \times m}, 1 \leqslant w \leqslant 5$$
$$b \in \mathbb{Z}^{n \times m}, 1 \leqslant b \leqslant 48$$
$$e \in \mathbb{Z}^{n \times m}, 1 \leqslant e \leqslant 48$$
$$sw \in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leqslant sw \leqslant 5$$
$$sb \in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leqslant sb \leqslant 48$$
$$se \in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leqslant se \leqslant 48$$

r_{gc} jest oceną (priorytetem) grupy, ustawioną przez Studenta. w_{gc} mówi w którym dniu tygodnia odbywają się zajęcia grupy g kursu c. b_{gc} oznacza o której pół-godzinie zajęcia się zaczynają. e_{gc} oznacza o której pół-godzinie zajęcia się kończą. Analogicznie dla sw, sb, se dla zajęć sportowych.

4.1.3 Ograniczenia

Musimy rozpisać kilka ograniczeń do określenia modelu, zarówno dla podstawowego wariantu zadania, jak i rozszerzonego.

1. **Realizacja programu studiów** - Student musi zapisać się do dokładnie jednej grupy zajęciowej dla każdego kursu

$$(\forall c \in [m]) \left(\sum_{g \in [n]} x_{gc} \right) = 1$$

2. **Sport to zdrowie** - Student chce zapisać się na co najmniej jedną z trzech możliwych grup z zajęć sportowych

$$\sum_{i \in [3]} s_i \geqslant 1$$

3. **Nie żyjemy w kwantowej superpozycji** - zajęcia nie mogą się na siebie nakładać (zapiszemy tu od razu terminy)

$$(\forall d \in [5], h \in [24*2]) t_{dh} = \left(\sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } d_{gc} = d \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0) \cdot (\textbf{if } h < b_{gc} \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (\textbf{if } h \geqslant e_{gc} \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1)) \right) +$$
$$\left(\sum_{i \in [3]} (\textbf{if } sw_i \neq d \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (\textbf{if } h < sb_i \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (\textbf{if } h \geqslant se_i \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1))) \right)$$

4. **Nie przemęczaj się** - maksymalnie 4 godziny zajęć obowiązkowych w dniu

$$(\forall d \in [5]) \left(\sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } d_{gc} = d \textbf{ then } b_{gc} - e_{gc} \textbf{ else } 0) \right)$$

5. **Przez żołądek do mózgu** - każdego dnia znajdź co najmniej 1 godzinę przerwy między 12:00 a 14:00 (tj. nie zajmuj w tym okresie więcej niż 1 godziny zajęciami)

$$(\forall d \in [5]) \left(\sum_{h \in \{12 \cdot 2, \ldots, 14 \cdot 2 - 1\}} t_{dh} \right) <= 1 \cdot 2$$

6. *[Rozszerzenie]* **Napięty grafik tygodnia** - środy i piątki mają być wolne od zajęć obowiązkowych

$$(\forall d \in \{3, 5\}) \left(\sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } w_{gc} = d \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0) \right) = 0$$

7. *[Rozszerzenie]* **Ponadprzeciętna satysfakcja** - wybieraj kursy o ocenie równej co najmniej 5

$$\left(\sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } r_{gc} < 5 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0) \right) = 0$$

4.1.4 Funkcja celu

Student chce zmaksymalizować sumę punktów priorytetowych z każdych zajęć na które się zapisze.

$$max \sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot r_{gc}$$

4.2 Wyniki