Metody Optymalizacji - Lista 1

Janusz Witkowski 254663

2 kwietnia 2023

1 Zadanie 1

1.1 Model

1.1.1 Zmienne decyzyjne

Użyta została tylko jedna zmienna decyzyjna $\boldsymbol{X}$, która jest wektorem spełniającym warunek $\boldsymbol{X} \geqslant \mathbf{0}$. Teoretycznym rozwiązaniem problemu będącego zagadnieniem tego zadania jest wektor $\boldsymbol{Y} = \mathbf{1}$. Będziemy mogli później porównać wynikowy wektor $\boldsymbol{X}$ z $\boldsymbol{Y}$, aby przekonać się o precyzji GNU MathProg.

1.1.2 Ograniczenia

Za ograniczenia przyjmujemy równania liniowe podane w treści zadania:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

przy warunkach

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j \in 1, ..., n$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i \in 1, ..., n$$

Macierz A jest tzw. macierzą Hilberta, powodującą złe uwarunkowanie zagadnienia.

1.1.3 Funkcja celu

Funkcja celu ma postać podaną w treści polecenia

$$min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

1.2 Wyniki

Rozważmy rozwiązania modelu dla $n \in 1, \ldots, 12$.

n	Błąd względny
1	0
2	$1.05325 \cdot 10^{-15}$
3	$3.67158 \cdot 10^{-15}$
4	$3.2701639 \cdot 10^{-13}$
5	$3.35139917 \cdot 10^{-12}$
6	$6.833357907 \cdot 10^{-11}$
7	$1.678685421923 \cdot 10^{-8}$
8	0.51405897217726825854
9	0.68291133808772241931
10	0.99038757480308581282
11	0.95219663921467334600
12	1.29250739578124163032

Zauważmy przeskok błędu z $n = 7$ na $n = 8$. Od tego momentu rozwiązania problemu nie da się już wyznaczyć z precyzją do dwóch cyfr. Wzrost błędu względnego jest oczywiście spowodowany złym uwarunkowaniem zadania macierzy Hilberta.

2 Zadanie 2

2.1 Model

2.1.1 Zmienne decyzyjne

Chcemy w pewien sposób zamodelować rozkład jazdy dźwigów różnego typu z jednych miast do innych. Na razie przyjmijmy, że dźwigów nie da się podzielić, żebyśmy obracali się w programowaniu całkowitoliczbowym. Zdefiniujmy następującą zmienną decyzyjną:

$$x \in \mathbb{Z}^{n \times n \times 2}, x \geqslant 0$$

Przez x_{abt} będziemy rozumieć ile dźwigów typu t należy przetransportować z miasta a do miasta b.

2.1.2 Parametry

Wprowadźmy pewne parametry, ściśle związane z problemem.

$$d \in \mathbb{Z}^{2 \times n}, d \geqslant 0$$

$$r \in \mathbb{Z}^{2 \times n}, r \geqslant 0$$

$$z \in \{0, 1\}^{2 \times 2}$$

$$l \in \mathbb{R}^{n \times n}, l \geqslant 0$$

$$k \in \mathbb{R}^{2}, k \geqslant 0$$

Niech d_{ta} oznacza ile dźwigów typu t brakuje w mieście a.
Niech r_{ta} oznacza nadmiar dźwigów typu t w mieście a.
Niech z_{ts} oznacza czy dźwig typu t może zastąpić dźwig typu s.
Niech l_{ab} oznacza dystans w kilometrach między miastem a a miastem b. Dystanse te wyciągnięto za pomocą API do GoogleMaps.
Niech k_t oznacza koszt transportu dźwigu typu t za każdy przebyty kilometr.

2.1.3 Ograniczenia

Aby zagwarantować dopuszczalność potencjalnych rozkładów transportu, zdefiniujmy trzy ograniczenia:

1. **Nasyć popyt na różne typy** - każde miasto powinno otrzymać takie dźwigi aby mogło funkcjonować (dźwigi typu II mogą zastąpić dźwigi typu I)

$$(\forall a \in \{1,\ldots,n\}, t \in \{I, II\}) \left(\sum_{b=1}^{n} \sum_{s \in \{I,II\}} x_{abs} \cdot z_{st} \right) \geqslant d_{ta}$$

2. **Z pustego nawet Salomon nie naleje** - miasto nie może oddać więcej dźwigów niż samo posiada

$$(\forall a \in \{1,\ldots,n\}, t \in \{I, II\}) \left(\sum_{b=1}^{n} x_{abt} \right) \leqslant r_{ta}$$

3. **Nie zgub żadnego dźwigu po drodze** - potrzebujące miasta powinny dostać łącznie tyle dźwigów by zaspokoić swoje niedobory

$$(\forall a \in \{1,\ldots,n\}) \left(\sum_{b=1}^{n} \sum_{t \in \{I,II\}} x_{abs} \right) \geqslant \sum_{s \in \{I,II\}} d_{sa}$$

2.1.4 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować koszty transportu dźwigów między miastami. Zaproponujmy następującą funkcję celu:

$$min \sum_{t \in \{I,II\}} \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} l_{ab} \cdot x_{abt} \cdot k_t$$

2.2 Wyniki

Koszt znalezionego rozwiązania optymalnego wyniósł 1424.4 (zakładając, że za przewóz dźwigu typu I płaci się 1). Poniższa tabelka ilustruje wynikowy rozkład jazdy. Lewa kolumna wskazuje na eksportera, górny wiersz na importera, natomiast każda komórka na to ile przewozi się dźwigów typu I | typu II.

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	-|-	7|-	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-
Brzeg	-|-	-|1	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-
Nysa	-|2	2|-	-|-	1|-	-|-	3|-	-|-
Prudnik	-|-	-|-	-|-	-|3	-|4	-|2	-|1
Strzelce	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-	5|-	-|-
Koźle	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-
Racibórz	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-	-|-

Niektóre miasta przesyłają same sobie dźwigi typu II, co na pierwszy rzut oka może wydać się dziwne. Można to potraktować jako sygnał że dźwigi te zastępują dźwigi typu I w obrębie danego miasta. Taka tranzakcja niczego nie zmienia w kwestii funkcji celu, ponieważ założyliśmy że odległość z miasta do tego samego miasta wynosi 0.

Założenie całkowitoliczbowości nic nie daje w tym przypadku - wyniki są identyczne w przypadku zamiany na zmienne ciągłe.

3 Zadanie 3

3.1 Model

3.1.1 Zmienne decyzyjne

Model do tego zadania będzie trochę bardziej skomplikowany. Będziemy się tu posługiwać zbiorami: typów ropy $Ropy$, typów paliw wynikowych $Paliwa$ oraz typów produktów $Produkty$ i $ProduktyKrakowane$. Będziemy się też posługiwać zbiorem procesów (destylacja, krakowanie) o nazwie $Procesy$.
Zdefiniujmy 3 zmienne decyzyjne.

$$x \in \mathbb{R}^{Ropy}, x \geqslant 0$$

$$rdest \in \mathbb{R}^{Ropy \times 0,1}, rdest \geqslant 0$$

$$rolej \in \mathbb{R}^{Ropy \times Paliwa}, rolej \geqslant 0$$

x_{ropa} to ilość potrzebnej do kupienia ropy typu $ropa$ [w tonach].
$rdest_{ropa,b}$ oznacza ile destylatu z ropy typu $ropa$ idzie na krakowanie ($b = 1$), a ile do dalszej produkcji ($b = 0$).
$rolej_{ropa,paliwo}$ wskazuje ile oleju przydzielimy do danego paliwa $paliwo$ (tak naprawdę liczą się tylko Domowe i Ciężkie).

3.1.2 Parametry

Zdefiniujmy takie parametry, ściśle zależne od problemu.

$$wdes \in \mathbb{R}^{Produkty \times Ropy}, 0 \leqslant wdes \leqslant 1$$

$$wkra \in \mathbb{R}^{ProduktyKrakowane}, 0 \leqslant wdes \leqslant 1$$

$$kropy \in \mathbb{R}^{Ropy}, kropy \geqslant 0$$

$$kproc \in \mathbb{R}^{Procesy}, kproc \geqslant 0$$

$$w \in \mathbb{R}^{Paliwa}, w \geqslant 0$$

$$szaw \in \mathbb{R}^{Procesy \times Ropy}, 0 \leqslant szaw \leqslant 1$$

$$smax \in \mathbb{R}, 0 \leqslant smax \leqslant 1$$

gdzie

- $wdes_{produkt,ropa}$ - wydajność destylacji,
- $wkra_{produkt}$ - wydajność krakowania,
- $kropy_{ropa}$ - koszt kopy na tonę,
- $kproc_{proces}$ - koszt procesu na tonę przetworzonego składnika,
- w_{paliwo} - wymagana produkcja danego paliwa,
- $szaw_{proces,ropa}$ - zawartość siarki w oleju pochodzenia danej ropy z danego procesu,
- $smax$ - maksymalna dozwolona zawartość siarki w paliwie domowym.

3.1.3 Ograniczenia

1. **Mad Max Fury Roads** - wyprodukuj co najmniej tyle benzyny, paliw domowych i paliw ciężkich ile ci każą
2. **Aż zbierze się miarka** - suma rozdzielonego na krakowanie i produkcję destylatu powinna być równa destylatowi sprzed procesu; tak samo suma oleju w różnych paliwach powinna być równa olejowi w trakcie produkcji

$$(\forall r \in \mathit{Ropy}) \left(\sum_{kr \in 0,1} rdest_{r,kr} \right) = kropy_r * wdes_{Destylat,r}$$

$$(\forall r \in \mathit{Ropy}) \left(\sum_{p \in Paliwa} rolej_{r,p} \right) = kropy_r * wdes_{Olej,r}$$

3. **Trucie siarką wzbronione** - zadbaj o to, by zawartość siarki w paliwach domowych nie przekroczyła zadanego pułapu

$$(\forall r \in \mathit{Ropy}) rolej_{r,Domowe} \cdot szaw_{Destylacja,r} + rdest_{r,1} \cdot wkra_{Olej} \cdot szaw_{Krakowanie,r} = w_{Domowe} \cdot smax$$

3.1.4 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować wszystkie koszta jakie rafineria może ponieść, czyli zarówno te od kupna ropy, jak i te z procesów. Zaproponujmy następującą funkcję celu.

$$\sum_{r \in Ropy} (kropy_r + kproc_{Destylacja}) \cdot x_r + rdest_{r,1} \cdot kproc_{Krakowanie}$$

3.2 Wyniki

Całkowite koszta poniesione przez rafinerię, według rozwiązania z solvera, nie powinny przekroczyć \$1345943600.867679 dolarów. Poniżej przedstawione są poszczególne zakupione ropy:

Ropa	Ilość [t]
B1	1026030.368764
B2	0.0

Najwyraźniej kupowanie jakichkolwiek ilości ropy B2 nie jest postrzegane jako optymalne - zupełnie wystarczającą jest ropa B1.

4 Zadanie 4

4.1 Model

4.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano następujące zmienne decyzyjne:

$$x \in \{0,1\}^{n \times m}$$

$$t \in \{0,1\}^{\{1,\ldots,5\} \times \{1,\ldots,48\}}$$

$$s \in \{0,1\}^{\{1,2,3\}}$$

x_{gc} oznacza zapis Studenta na kurs c do grupy g. t_{dh} indykuje czy Student jest zajęty w dniu d o godzinie $h/2$. s_k mówi czy Student zapisał się na zajęcia sportowe k.

4.1.2 Parametry

W modelu wykorzystano następujące parametry, ściśle powiązane z problemem:

$$r \in \mathbb{Z}^{n\times m}, 0 \leqslant r \leqslant 10$$
$$w \in \mathbb{Z}^{n\times m}, 1 \leqslant w \leqslant 5$$
$$b \in \mathbb{Z}^{n\times m}, 1 \leqslant b \leqslant 48$$
$$e \in \mathbb{Z}^{n\times m}, 1 \leqslant e \leqslant 48$$
$$sw \in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leqslant sw \leqslant 5$$
$$sb \in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leqslant sb \leqslant 48$$
$$se \in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leqslant se \leqslant 48$$

r_{gc} jest oceną (priorytetem) grupy, ustawioną przez Studenta. w_{gc} mówi w którym dniu tygodnia odbywają się zajęcia grupy g kursu c. b_{gc} oznacza o której pół-godzinie zajęcia się zaczynają. e_{gc} oznacza o której pół-godzinie zajęcia się kończą. Analogicznie dla sw, sb, se dla zajęć sportowych.

4.1.3 Ograniczenia

Musimy rozpisać kilka ograniczeń do określenia modelu, zarówno dla podstawowego wariantu zadania, jak i rozszerzonego.

1. **Realizacja programu studiów** - Student musi zapisać się do dokładnie jednej grupy zajęciowej dla każdego kursu
$$(\forall c \in [m]) \left(\sum_{g\in[n]} x_{gc} \right) = 1$$
2. **Sport to zdrowie** - Student chce zapisać się na co najmniej jedną z trzech możliwych grup z zajęć sportowych
$$\sum_{i\in[3]} s_i \geqslant 1$$
3. **Nie żyjemy w kwantowej superpozycji** - zajęcia nie mogą się na siebie nakładać (zapiszemy tu od razu terminy)
$$(\forall d \in [5], h \in [24{*}2]) t_{dh} = \left(\sum_{g\in[n]} \sum_{c\in[m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } d_{gc} = d \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0) \cdot (\textbf{if } h < b_{gc} \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (\textbf{if } h \geqslant e_{gc} \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1)) \right) +$$
$$\left(\sum_{i\in[3]} (\textbf{if } sw_i \neq d \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (\textbf{if } h < sb_i \textbf{ then } 0 \textbf{ else } (\textbf{if } h \geqslant se_i \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1))) \right)$$
4. **Nie przemęczaj się** - maksymalnie 4 godziny zajęć obowiązkowych w dniu
$$(\forall d \in [5]) \left(\sum_{g\in[n]} \sum_{c\in[m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } d_{gc} = d \textbf{ then } b_{gc} - e_{gc} \textbf{ else } 0) \right) \leqslant 4 \cdot 2$$
5. **Przez żołądek do mózgu** - każdego dnia znajdź co najmniej 1 godzinę przerwy między 12:00 a 14:00 (tj. nie zajmuj w tym okresie więcej niż 1 godziny zajęciami)
$$(\forall d \in [5]) \left(\sum_{h\in\{12\cdot 2,\ldots,14\cdot 2-1\}} t_{dh} \right) <= 1 \cdot 2$$

6. *[Rozszerzenie]* **Napięty grafik tygodnia** - środy i piątki mają być wolne od zajęć obowiązkowych

$$(\forall d \in \{3,5\}) \left(\sum_{g\in[n]} \sum_{c\in[m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } w_{gc} = d \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0) \right) = 0$$

7. *[Rozszerzenie]* **Ponadprzeciętna satysfakcja** - wybieraj kursy o ocenie równej co najmniej 5

$$\left(\sum_{g\in[n]} \sum_{c\in[m]} x_{gc} \cdot (\textbf{if } r_{gc} < 5 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0) \right) = 0$$

4.1.4 Funkcja celu

Student chce zmaksymalizować sumę punktów priorytetowych z każdych zajęć na które się zapisze.

$$max \sum_{g\in[n]} \sum_{c\in[m]} x_{gc} \cdot r_{gc}$$

4.2 Wyniki

Znaleziony podstawowy grafik ma wartość funkcji celu równą 37 i wygląda następująco:

Kurs	Grupa
Algebra	III
Analiza	II
Fizyka	IV
Minerały	I
Organiczna	II

Możemy zobaczyć jak wygląda ten grafik godzinowo:

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00	x				
8:30	x				
9:00	x				
9:30	x				
10:00		x	x		
10:30	x	x	x		
11:00	x	x	x		
11:30	x	x	x		
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00				x	
17:30				x	
18:00				x	
18:30				x	
19:00				x	
19:30				x	
20:00					

Widać, że Student nie ma więcej niż 4 godzin ćwiczeń dziennie, ma możliwe przerwy na lunch, oraz że może uprawiać sport w co najmniej jednej grupie (tj. Pn 13:00-15:00).
Po wczytaniu modelu dla wariantu rozszerzonego, udało się odnaleźć takie oto rozwiązanie z wartością funkcji celu równą 28:

Kurs	Grupa
Algebra	I
Analiza	IV
Fizyka	II
Minerały	III
Organiczna	II

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00				x	
8:30				x	
9:00				x	
9:30				x	
10:00		x			
10:30	x	x			
11:00	x	x			
11:30	x	x			
12:00		x			
12:30		x			
13:00	x			x	
13:30	x			x	
14:00	x			x	
14:30	x			x	
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					
19:30					
20:00					

Tutaj Student również ma swobodę w lunchu i w uprawianiu sportu (np. grupa Śr 11:00-13:00).