

# Metody Optymalizacji - Lista 1

Janusz Witkowski 254663

2 kwietnia 2023

## 1 Zadanie 1

### 1.1 Model

#### 1.1.1 Zmienne decyzyjne

Użyta została tylko jedna zmienna decyzyjna  $\mathbf{X}$ , która jest wektorem spełniającym warunek  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ . Teoretycznym rozwiązaniem problemu będącego zagadnieniem tego zadania jest wektor  $\mathbf{Y} = \mathbf{1}$ . Będziemy mogli później porównać wynikowy wektor  $\mathbf{X}$  z  $\mathbf{Y}$ , aby przekonać się o precyzji GNU MathProg.

#### 1.1.2 Ograniczenia

Za ograniczenia przyjmujemy równania liniowe podane w treści zadania:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

przy warunkach

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j \in 1, \dots, n$$
$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1}, i \in 1, \dots, n$$

Macierz  $A$  jest tzw. macierzą Hilberta, powodującą złe uwarunkowanie zagadnienia.

#### 1.1.3 Funkcja celu

Funkcja celu ma postać podaną w treści polecenia

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

## 1.2 Wyniki

Rozważmy rozwiązania modelu dla  $n \in 1, \dots, 12$ .

n	Błąd względny
1	0
2	$1.05325 \cdot 10^{-15}$
3	$3.67158 \cdot 10^{-15}$
4	$3.2701639 \cdot 10^{-13}$
5	$3.35139917 \cdot 10^{-12}$
6	$6.833357907 \cdot 10^{-11}$
7	$1.678685421923 \cdot 10^{-8}$
8	0.51405897217726825854
9	0.68291133808772241931
10	0.99038757480308581282
11	0.95219663921467334600
12	1.29250739578124163032

Zauważmy przeskok błędu z  $n = 7$  na  $n = 8$ . Od tego momentu rozwiązania problemu nie da się już wyznaczyć z precyzją do dwóch cyfr. Wzrost błędu względnego jest oczywiście spowodowany złym uwarunkowaniem zadania macierzy Hilberta.

## 2 Zadanie 2

### 2.1 Model

#### 2.1.1 Zmienne decyzyjne

Chcemy w pewien sposób zamodelować rozkład jazdy dźwigów różnego typu z jednych miast do innych. Na razie przyjmijmy, że dźwigów nie da się podzielić, żebyśmy obracali się w programowaniu całkowitoliczbowym. Zdefiniujmy następującą zmienną decyzyjną:

$$x \in \mathbb{Z}^{n \times n \times 2}, x \geq 0$$

Przez  $x_{abt}$  będziemy rozumieć ile dźwigów typu  $t$  należy przetransportować z miasta  $a$  do miasta  $b$ .

#### 2.1.2 Parametry

Wprowadźmy pewne parametry, ściśle związane z problemem.

$$d \in \mathbb{Z}^{2 \times n}, d \geq 0$$

$$r \in \mathbb{Z}^{2 \times n}, r \geq 0$$

$$z \in \{0, 1\}^{2 \times 2}$$

$$l \in \mathbb{R}^{n \times n}, l \geq 0$$

$$k \in \mathbb{R}^2, k \geq 0$$

Niech  $d_{ta}$  oznacza ile dźwigów typu  $t$  brakuje w mieście  $a$ .

Niech  $r_{ta}$  oznacza nadmiar dźwigów typu  $t$  w mieście  $a$ .

Niech  $z_{ts}$  oznacza czy dźwig typu  $t$  może zastąpić dźwig typu  $s$ .

Niech  $l_{ab}$  oznacza dystans w kilometrach między miastem  $a$  a miastem  $b$ . Dystanse te wyciągnięto za pomocą API do GoogleMaps.

Niech  $k_t$  oznacza koszt transportu dźwigu typu  $t$  za każdy przebyty kilometr.

### 2.1.3 Ograniczenia

Aby zagwarantować dopuszczalność potencjalnych rozkładów transportu, zdefiniujemy trzy ograniczenia:

1. **Nasyć popyt na różne typy** - każde miasto powinno otrzymać takie dźwigi aby mogło funkcjonować (dźwigi typu II mogą zastąpić dźwigi typu I)

$$(\forall a \in \{1, \dots, n\}, t \in \{I, II\}) \left( \sum_{b=1}^n \sum_{s \in \{I, II\}} x_{abs} \cdot z_{st} \right) \geq d_{ta}$$

2. **Z pustego nawet Salomon nie należy** - miasto nie może oddać więcej dźwigów niż samo posiada

$$(\forall a \in \{1, \dots, n\}, t \in \{I, II\}) \left( \sum_{b=1}^n x_{abt} \right) \leq r_{ta}$$

3. **Nie zgub żadnego dźwigu po drodze** - potrzebujące miasta powinny dostać łącznie tyle dźwigów by zaspokoić swoje niedobory

$$(\forall a \in \{1, \dots, n\}) \left( \sum_{b=1}^n \sum_{t \in \{I, II\}} x_{abs} \right) \geq \sum_{s \in \{I, II\}} d_{sa}$$

### 2.1.4 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować koszty transportu dźwigów między miastami. Zaproponujemy następującą funkcję celu:

$$\min \sum_{t \in \{I, II\}} \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n l_{ab} \cdot x_{abt} \cdot k_t$$

## 2.2 Wyniki

Koszt znalezionej optymalnej rozwiązania wyniósł 1424.4 (zakładając, że za przewóz dźwigu typu I płaci się 1). Poniższa tabelka ilustruje wynikowy rozkład jazdy. Lewa kolumna wskazuje na eksportera, górny wiersz na importera, natomiast każda komórka na to ile przewozi się dźwigi typu I | typu II.

	Opole	Brzeg	Nysa	Prudnik	Strzelce	Koźle	Racibórz
Opole	- -	7 -	- -	- -	- -	- -	- -
Brzeg	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -
Nysa	- 2	2 -	- -	1 -	- -	3 -	- -
Prudnik	- -	- -	- -	- 3	- 4	- 2	- 1
Strzelce	- -	- -	- -	- -	- -	5 -	- -
Koźle	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
Racibórz	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -

Niektóre miasta przesyłają same sobie dźwigi typu II, co na pierwszy rzut oka może wydać się dziwne. Można to potraktować jako sygnał że dźwigi te zastępują dźwigi typu I w obrębie danego miasta. Taka transakcja niczego nie zmienia w kwestii funkcji celu, ponieważ założyliśmy że odległość z miasta do tego samego miasta wynosi 0.

Założenie całkowitościowości nic nie daje w tym przypadku - wyniki są identyczne w przypadku zamiany na zmienne ciągłe.

## 3 Zadanie 3

### 3.1 Model

#### 3.1.1 Zmienne decyzyjne

Model do tego zadania będzie trochę bardziej skomplikowany. Będziemy się tu posługiwać zbiorami: typów ropy *Ropy*, typów paliw wynikowych *Paliwa* oraz typów produktów *Produkty* i *ProduktyKrakowane*. Będziemy się też posługiwać zbiorem procesów (destylacja, krakowanie) o nazwie *Procesy*. Zdefiniujemy 3 zmienne decyzyjne.

$$x \in \mathbb{R}^{Ropy}, x \geq 0$$

$$rdest \in \mathbb{R}^{Ropy \times 0,1}, rdest \geq 0$$

$$rolej \in \mathbb{R}^{Ropy \times Paliwa}, rolej \geq 0$$

$x_{ropa}$  to ilość potrzebnej do kupienia ropy typu *ropa* [w tonach].

$rdest_{ropa,b}$  oznacza ile destylatu z ropy typu *ropa* idzie na krakowanie ( $b = 1$ ), a ile do dalszej produkcji ( $b = 0$ ).

$rolej_{ropa,paliwo}$  wskazuje ile oleju przydzielimy do danego paliwa *paliwo* (tak naprawdę liczą się tylko Domowe i Ciężkie).

#### 3.1.2 Parametry

Zdefiniujemy takie parametry, ściśle zależne od problemu.

$$wdes \in \mathbb{R}^{Produkty \times Ropy}, 0 \leq wdes \leq 1$$

$$wkra \in \mathbb{R}^{ProduktyKrakowane}, 0 \leq wkra \leq 1$$

$$kropy \in \mathbb{R}^{Ropy}, kropy \geq 0$$

$$kproc \in \mathbb{R}^{Procesy}, kproc \geq 0$$

$$w \in \mathbb{R}^{Paliwa}, w \geq 0$$

$$szaw \in \mathbb{R}^{Procesy \times Ropy}, 0 \leq szaw \leq 1$$

$$smax \in \mathbb{R}, 0 \leq smax \leq 1$$

gdzie

- $wdes_{produkt,ropa}$  - wydajność destylacji,
- $wkra_{produkt}$  - wydajność krakowania,
- $kropy_{ropa}$  - koszt kopy na tonę,
- $kproc_{proces}$  - koszt procesu na tonę przetworzonego składnika,
- $w_{paliwo}$  - wymagana produkcja danego paliwa,
- $szaw_{proces,ropa}$  - zawartość siarki w oleju pochodzenia danej ropy z danego procesu,
- $smax$  - maksymalna dozwolona zawartość siarki w paliwie domowym.

### 3.1.3 Ograniczenia

1. **Mad Max Fury Roads** - wyprodukuj co najmniej tyle benzyny, paliw domowych i paliw ciężkich ile ci każą

$$\left( \sum_{r \in Ropy} wdest_{Benzyna,r} \cdot kropy_r + wkra_{Benzyna} \cdot rdest_{r,1} \right) \geq w_{Silnikowe}$$

$$\left( \sum_{r \in Ropy} rolej_{r,Domowe} + wkra_{Olej} \cdot rdest_{r,1} \right) \geq w_{Domowe}$$

$$\left( \sum_{r \in Ropy} wdes_{Resztki,r} \cdot kropy_r + rdest_{r,0} + rolej_{r,Ciżkie} + wkra_{Resztki} \cdot rdest_{r,1} \right) \geq w_{Ciżkie}$$

2. **Aż zbierze się miarka** - suma rozdzielonego na krakowanie i produkcję destylatu powinna być równa destylatowi sprzed procesu; tak samo suma oleju w różnych paliwach powinna być równa olejowi w trakcie produkcji

$$(\forall r \in Ropy) \left( \sum_{kr \in 0,1} rdest_{r,kr} \right) = kropy_r \cdot wdes_{Destylat,r}$$

$$(\forall r \in Ropy) \left( \sum_{p \in Paliwa} rolej_{r,p} \right) = kropy_r \cdot wdes_{Olej,r}$$

3. **Trucie siarką wzbronione** - zadбай o to, by zawartość siarki w paliwach domowych nie przekroczyła zadanego pułapu

$$(\forall r \in Ropy) rolej_{r,Domowe} \cdot szaw_{Destylacja,r} + rdest_{r,1} \cdot wkra_{Olej} \cdot szaw_{Krakowanie,r} = w_{Domowe} \cdot smax$$

### 3.1.4 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować wszystkie koszty jakie rafineria może ponieść, czyli zarówno te od kupna ropy, jak i te z procesów. Zaproponujmy następującą funkcję celu.

$$\min \sum_{r \in Ropy} (kropy_r + kproc_{Destylacja}) \cdot x_r + rdest_{r,1} \cdot kproc_{Krakowanie}$$

## 3.2 Wyniki

Całkowite koszty poniesione przez rafinerię, według rozwiązania z solvera, nie powinny przekroczyć \$1345943600.867679 dolarów. Poniżej przedstawione są poszczególne zakupione ropy:

Ropa	Ilość [t]
B1	1026030.368764
B2	0.0

Najwyraźniej kupowanie jakichkolwiek ilości ropy B2 nie jest postrzegane jako optymalne - zupełnie wystarczającą jest ropa B1.

## 4 Zadanie 4

### 4.1 Model

#### 4.1.1 Zmienne decyzyjne

W modelu wykorzystano następujące zmienne decyzyjne:

$$\begin{aligned}x &\in \{0, 1\}^{n \times m} \\t &\in \{0, 1\}^{\{1, \dots, 5\} \times \{1, \dots, 48\}} \\s &\in \{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}\end{aligned}$$

$x_{gc}$  oznacza zapis Studenta na kurs  $c$  do grupy  $g$ .  $t_{dh}$  indykuje czy Student jest zajęty w dniu  $d$  o godzinie  $h/2$ .  $s_k$  mówi czy Student zapisał się na zajęcia sportowe  $k$ .

#### 4.1.2 Parametry

W modelu wykorzystano następujące parametry, ściśle powiązane z problemem:

$$\begin{aligned}r &\in \mathbb{Z}^{n \times m}, 0 \leq r \leq 10 \\w &\in \mathbb{Z}^{n \times m}, 1 \leq w \leq 5 \\b &\in \mathbb{Z}^{n \times m}, 1 \leq b \leq 48 \\e &\in \mathbb{Z}^{n \times m}, 1 \leq e \leq 48 \\sw &\in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leq sw \leq 5 \\sb &\in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leq sb \leq 48 \\se &\in \mathbb{Z}^{[3]}, 1 \leq se \leq 48\end{aligned}$$

$r_{gc}$  jest oceną (priorytetem) grupy, ustawioną przez Studenta.  $w_{gc}$  mówi w którym dniu tygodnia odbywają się zajęcia grupy  $g$  kursu  $c$ .  $b_{gc}$  oznacza o której pół-godzinie zajęcia się zaczynają.  $e_{gc}$  oznacza o której pół-godzinie zajęcia się kończą. Analogicznie dla  $sw$ ,  $sb$ ,  $se$  dla zajęć sportowych.

#### 4.1.3 Ograniczenia

Musimy rozpisać kilka ograniczeń do określenia modelu, zarówno dla podstawowego wariantu zadania, jak i rozszerzonego.

1. **Realizacja programu studiów** - Student musi zapisać się do dokładnie jednej grupy zajęciowej dla każdego kursu

$$(\forall c \in [m]) \left( \sum_{g \in [n]} x_{gc} \right) = 1$$

2. **Sport to zdrowie** - Student chce zapisać się na co najmniej jedną z trzech możliwych grup z zajęć sportowych

$$\sum_{i \in [3]} s_i \geq 1$$

3. **Nie żyjemy w kwantowej superpozycji** - zajęcia nie mogą się na siebie nakładać (zapiszemy tu od razu terminy )

$$(\forall d \in [5], h \in [24 \cdot 2]) t_{dh} = \left( \sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\text{if } d_{gc} = d \text{ then } 1 \text{ else } 0) \cdot (\text{if } h < b_{gc} \text{ then } 0 \text{ else } (\text{if } h \geq e_{gc} \text{ then } 0 \text{ else } 1)) \right) + \\ \left( \sum_{i \in [3]} (\text{if } sw_i \neq d \text{ then } 0 \text{ else } (\text{if } h < sb_i \text{ then } 0 \text{ else } (\text{if } h \geq se_i \text{ then } 0 \text{ else } 1))) \right)$$

4. **Nie przemęczaj się** - maksymalnie 4 godziny zajęć obowiązkowych w dniu

$$(\forall d \in [5]) \left( \sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\text{if } d_{gc} = d \text{ then } b_{gc} - e_{gc} \text{ else } 0) \right) \leq 4 \cdot 2$$

5. **Przez żołądek do mózgu** - każdego dnia znajdź co najmniej 1 godzinę przerwy między 12:00 a 14:00 (tj. nie zajmuj w tym okresie więcej niż 1 godziny zajęciami)

$$(\forall d \in [5]) \left( \sum_{h \in \{12 \cdot 2, \dots, 14 \cdot 2 - 1\}} t_{dh} \right) \leq 1 \cdot 2$$

6. *[Rozszerzenie]* **Napięty grafik tygodnia** - środy i piątki mają być wolne od zajęć obowiązkowych

$$(\forall d \in \{3, 5\}) \left( \sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\text{if } w_{gc} = d \text{ then } 1 \text{ else } 0) \right) = 0$$

7. *[Rozszerzenie]* **Ponadprzeciętna satysfakcja** - wybieraj kursy o ocenie równej co najmniej 5

$$\left( \sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot (\text{if } r_{gc} < 5 \text{ then } 1 \text{ else } 0) \right) = 0$$

#### 4.1.4 Funkcja celu

Student chce zmaksymalizować sumę punktów priorytetowych z każdych zajęć na które się zapisze.

$$\max \sum_{g \in [n]} \sum_{c \in [m]} x_{gc} \cdot r_{gc}$$

## 4.2 Wyniki

Znaleziony podstawowy grafik ma wartość funkcji celu równą 37 i wygląda następująco:

Kurs	Grupa
Algebra	III
Analiza	II
Fizyka	IV
Minerały	I
Organiczna	II

Możemy zobaczyć jak wygląda ten grafik godzinowo:

	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00	x				
8:30	x				
9:00	x				
9:30	x				
10:00		x	x		
10:30	x	x	x		
11:00	x	x	x		
11:30	x	x	x		
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00				x	
17:30				x	
18:00				x	
18:30				x	
19:00				x	
19:30				x	
20:00					

Widać, że Student nie ma więcej niż 4 godzin ćwiczeń dziennie, ma możliwe przerwy na lunch, oraz że może uprawiać sport w co najmniej jednej grupie (tj. Pn 13:00-15:00).

Po wczytaniu modelu dla wariantu rozszerzonego, udało się odnaleźć takie oto rozwiązanie z wartością funkcji celu równą 28:

Kurs	Grupa
Algebra	I
Analiza	IV
Fizyka	II
Minerały	III
Organiczna	II



	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.
8:00				x	
8:30				x	
9:00				x	
9:30				x	
10:00		x			
10:30	x	x			
11:00	x	x			
11:30	x	x			
12:00		x			
12:30		x			
13:00	x			x	
13:30	x			x	
14:00	x			x	
14:30	x			x	
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					
19:30					
20:00					

Tutaj Student również ma swobodę w lunchu i w uprawianiu sportu (np. grupa Śr 11:00-13:00).