

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UFRJ - 2024.2

MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL-LISTA 0

1. Seja R uma rotação de eixo ℓ em \mathbb{R}^3 e $v = (1, 1, 1)$ um vetor ortogonal a ℓ . Sabendo-se que $Rv = (1, -1, 1)$, determine:
 - (a) o cosseno do ângulo de rotação de R ;
 - (b) o eixo da rotação R ;
 - (c) a matriz de R na base canônica.
2. Seja ρ a rotação do \mathbb{R}^3 cujo eixo é a reta $\langle (1, 0, -1) \rangle$ e que leva o vetor $(1, 0, 1)$ no vetor $(-7, 8, -7)/9$.
 - (a) Determine uma base ortonormal β do \mathbb{R}^3 formada por um vetor ao longo do eixo e dois vetores sobre o plano perpendicular ao eixo.
 - (b) Determine o ângulo de rotação.
 - (c) Determine as matrizes $(\rho)_\beta$, $M_{\beta\varepsilon}$, $M_{\varepsilon\beta}$ e $(\rho)_\varepsilon$.
3. Calcule as seguintes integrais usando integração por substituição:
 - (a) $\int \exp(x) \sin(\exp(x)) dx$;
 - (b) $\int x \exp(-x^2) dx$;
 - (c) $\int x \sqrt{1-x^2} dx$.
4. Calcule as seguintes integrais usando integração por partes:
 - (a) $\int x^2 \exp(x) dx$;
 - (b) $\int x^2 \exp(x) dx$;
 - (c) $\int x^2 \sin(x) dx$.
5. Calcule as integrais abaixo:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

6. Use integração por partes duas vezes para mostrar que

$$\int \sin^2(u) du = \frac{u - \sin(u) \cos(u)}{2}.$$

7. Use a substituição $u = h \sin^2(r)$ para mostrar que

$$\int \left(\sqrt{\frac{r}{h-r}} \right) dr = h \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{r}{h}} \right) - \sqrt{\frac{r}{h}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r}{h}} \right)$$

8. Use o método de separação de variáveis para resolver as seguintes equações diferenciais:

(a) $\dot{y} = (1+y)/(1+t)$;

(b) $\dot{y} - 2ty = t$;

(c) $\dot{y} - \tan(t)y = \cos(t)$.

Para a letra (c) use $u = \cos(t)y$.

9. Determine a solução geral para as seguintes equações:

(a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$;

(b) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$;

(c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$;

10. Ache soluções particulares para as seguintes equações:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = t^2 + 4t \quad \text{e} \quad \ddot{x} + \dot{x} = 2t + 1.$$