lista02

Lista 02

- João Henrique Schmidt de Carvalho
- 119050097

Questão 1

Um barco que está amarrado a um cabo puxado por um carro que se move na margem de um trecho retilíneo de um canal. A tensão no cabo é igual a T e o cabo forma um ângulo α com a direção na qual o barco se move. Qual a força com a qual o barco está sendo puxado?

Supondo a velocidade distância entre a margem e o barco é mantida, i.e, a força resultante é 0, então a única força resultante é paralela à margem com módulo $T * \cos(\theta)$

Questão 2

Quatro partículas de massa m estão situadas nos vértices de um tetraedro regular cuja aresta mede a. Qual a intensidade da força gravitacional exercida sobre uma das partículas pelas outras três?

É sabido que ângulo entre os átomos de moléculas tetraedricas é $\arccos(-1/3) \approx 109.5$. Portanto, visto de dos vertices, o ângulo entre o centro do tetraedro e outro vértice é $\alpha = \frac{\pi - \arccos(-1/3)}{2}$. É possível achar isso graças à soma internas de triângulos $\pi = \arccos(-1/3) + 2\alpha$

Pela Lei da Gravitação Universal, a força entre duas particulas é $F = \frac{Gm^2}{a^2}$

Portanto, o valor do modulo da força é $F_{res} = 3\cos(\frac{\pi - \arccos(-1/3)}{2}) * \frac{Gm^2}{2}$

Questão 3

O movimento de uma partícula de massa m, no plano xy, é descrito por $x = a(\alpha t - \sin(\alpha t))$ e $y = a(1 - \cos(\alpha t))$.

(a) **Use um computador para desenhar a trajetória da partícula.**

Primeiramente, pode-se escrever αt em função de y.

$\alpha t = \arccos(a - y)$

$x = a(\arccos(a - y) - \sin(\arccos(a - y)))$

(b) **Determine o vetor que descreve a força que está agindo sobre a partícula para produzir a trajetória dada.**

Para isso pode-se derivar duas vezes para achar o vetor de aceleração:

$x = a(\alpha t - \sin(\alpha t))$ e $y = a(1 - \cos(\alpha t))$

$\therefore x' = a(\alpha - \cos(\alpha t)\alpha)$ e $y' = a\sin(\alpha t)\alpha$

$\therefore x'' = a\sin(\alpha t)\alpha^2$ e $y'' = a\cos(\alpha t)\alpha^2$

Assim, a força resultante é dado pelo vetor:

$F = m * (a\sin(\alpha t)\alpha^2, a\cos(\alpha t)\alpha^2)$

Isolando os termos:

$F = m * a * \alpha^2(\sin(\alpha t), \cos(\alpha t))$

Questão 4

Uma bola de massa m está amarrada em um barbante de comprimento l, que suporta uma tensão máxima igual a T. Qual a velocidade máxima com que a bola pode ser girada em um círculo horizontal sem que o barbante se parta?

Circulo Horizontal é equivalente a uma mesa ou superficie qualquer, isso é, sem a ação da gravidade.

Pode-se usar a fórmula da força centripeda, que precisa ser igual a Tensão máxima.

A fórmula da força centrípeta: $f_c = T = m * \frac{v^2}{l}$

Assim, $v_{máx} = \sqrt{\frac{l*T}{m}}$

Questão 5

Um carrinho de brinquedo é solto do repouso, no ponto mais alto P de uma rampa de altura h. Determine a velocidade mínima que o carrinho deve ter no ponto A para continuar tocando na superfície do círculo de raio R.

A força mínima necessário é quando a Normal chega a 0, fazendo com que a força centrípeta seja apenas influência da força gravitacional mg, ou também que a pseudoforça seja resultante da força gravitacional apenas.

Como no ponto A: $f_{cp} = \frac{mv_A^2}{R} = mg$

$\implies v_A^2 = gR$ (1)

Supondo que não haja perda de energia por atrito, tem-se a fórmula de conservação de energia:

$hmg + \frac{mv_P^2}{2} = 2Rmg + \frac{mv_A^2}{2}$

Usando (1):

$hmg + \frac{mv_P^2}{2} = 2Rmg + \frac{mgR}{2}$

Somando $-hmg$:

$\frac{mv_P^2}{2} = 2Rmg + \frac{mgR}{2} - hmg$

m. 2 e dividindo por m:

$v_P^2 = 4Rg + gR - 2hg$

$\therefore v_P = \sqrt{(5R - 2h)g}$

Questão 6 (Versão antiga)

Uma partícula de massa m move-se ao longo da elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

A aceleração da partícula é paralela ao eixo y. Quando $t = 0$, as coordenadas da partícula são $(0, b)$ e sua velocidade escalar é v_0.

(a) Determine a velocidade horizontal da partícula em um tempo t

> OBS: Supondo afirmação "A aceleração da partícula é paralela ao eixo y" verdadeira apenas no $t = 0$

Usando trigonometria:

Como $1 > \frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2} > 0$, pode-se escolher uma função trigonométrica que satisfaça a equação.

Pela identidade: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

Assim pode-se reescrever usando as equações iniciais:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(t) \\ 0 = a\sin(0) \\ b = b\cos(0) \end{cases}$$

Para achar a velocidade, basta derivar a primeira equação em função do tempo: $\frac{dx}{dt} = a\cos(t)$

(b) Use derivação implícita para calcular a velocidade vertical da partícula em função de v_0, x e y.

Derivando implicitamente pelo tempo: $\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{dt} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dt} = 0$

div. 2 e renomeando as derivadas:

$\frac{x}{a^2}x' + \frac{y}{b^2}y' = 0$

No instante $t = 0$, $\frac{b}{b^2}v_y = 0 \implies v_y = 0$

Derivando novamente:

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{x}{a^2}x'' + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{y}{b^2}y'' = 0$

Pela questão anterior, é sabido que $y' = -b\sin(t)$

$\therefore y' = \frac{-bx}{a}$

Questão 6 (Versão nova)

Uma partícula de massa m move-se ao longo da parábola

$y^2 = 2\sqrt{v_0} * x + b$

A aceleração da partícula é paralela ao eixo y. Quando t = 0, as coordenadas da partícula são (0, b) e sua velocidade escalar é v0.

(a) Determine a velocidade horizontal da partícula em um tempo t.

Derivando implicitamente:

$2y * \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{v_0} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{v_0}}{y}$

Explicação da regra da cadeia:

Supondo um valor y em função de x: $y = y(x)$. Por sua vez, x é uma função do tempo $x = x(t)$. Então podemos dizer que y também pode ser vista como indireta do tempo, via dependência de x: $y(t) = y(x(t))$

Derivando os dois lados e utilizando a regra da cadeia:

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \implies v_y = \frac{dy}{dx} * v_x \implies \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}$

Mas $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{v_0}}{y} \implies \frac{\sqrt{v_0}}{y} = \frac{v_y}{v_x}$

No instante $t = 0$:

$\frac{\sqrt{v_0}}{b} = \frac{v_y(0)}{v_x(0)}$

Mas pelo pitágoras: $v_0^2 = v_x(0)^2 + v_y(0)^2 \implies v_0^2 - v_x(0)^2 = v_y(0)^2$

Substituindo pela equação elevada ao quadrado:

$\frac{v_0}{b^2} = \frac{v_0^2 - v_x(0)^2}{v_x(0)^2}$

$$\implies v_0 * v_x(0)^2 = b^2(v_0^2 - v_x(0)^2)$$

Dist b^2:

$$\implies v_0 * v_x(0)^2 = b^2 * v_0^2 - b^2 * v_x(0)^2$$

Add $b^2 * v_x(0)^2$

$$\implies v_0 * v_x(0)^2 + b^2 * v_x(0)^2 = b^2 * v_0^2$$

Isolando:

$$\implies v_x(0)^2(v_0 + b^2) = b^2 * v_0^2$$

Finalmente:

$$\implies v_x(0)^2 = \frac{b^2 * v_0^2}{v_0 + b^2}$$

(b) Use derivação implícita para calcular a velocidade vertical da partícula em função de v0 e y.

Pela questão anterior, podemos chegar a mesma conclusão fora do instante $t = 0$

Mas $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{v_0}}{y} \implies \frac{\sqrt{v_0}}{y} = \frac{v_y}{v_x}$

Sabemos que a aceleração é paralela ao eixo y, isto é v_x é constante.

Portanto o resultado da questão anterior também vale pra outros instantes:

$$\implies v_x^2 = \frac{b^2 * v_0^2}{v_0 + b^2}$$

Substituindo:

$$v_y = \frac{\sqrt{v_0}}{y} \sqrt{\frac{b^2 * v_0^2}{v_0 + b^2}}$$

(c) Use derivação implícita para calcular a velocidade vertical da partícula em função de v0 e y.

Pela equação da questão **(a)**:

$$v_y = v_x \frac{\sqrt{v_0}}{y}$$

Derivando implicitamente:

$$a_y = -\frac{1}{y^2}\sqrt{v_0}v_x + \frac{1}{y}\sqrt{v_0}a_x$$

Como aceleração é paralela a y, então $a_x = 0$

$$\implies a_y = -\frac{1}{y^2}\sqrt{v_0}v_x$$

Pela letra **(b)**: $v_x^2 = \frac{b^2 * v_0^2}{v_0 + b^2}$

$$\implies a_y = -\frac{\sqrt{v_0}}{y^2}\sqrt{\frac{b^2 * v_0^2}{v_0 + b^2}}$$

(d) Determine a intensidade da força que age sob a partícula em cada ponto de sua trajetória.

$$F_y = -m\frac{\sqrt{v_0}}{y^2}\sqrt{\frac{b^2 * v_0^2}{v_0 + b^2}}$$