

# Modelagem Matemática e Computacional

S. C. Coutinho





## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram apontando erros e dando sugestões: Carlos Eduardo de Schuller Banjar, Breno Martins Silva, Gustavo Henrique Lemos de Lima, Eduarda de Souza Marques, Arthur Sobrinho Ferreira da Rocha, Matheus Silva Hack, Gabriel Ferreira Leão, Henrique Lima Cardoso, Gustavo Marinatto, Davi de Souza Gomes Pereira, João Pedro Silva de Sousa,



## Sumário

Agradecimentos	3
Capítulo 1. Vetores e cinemática	1
1. O espaço	1
2. Rotações	6
3. Mudanças de referenciais	8
4. Movimentos	10
5. Aplicações	14
Exercícios	17
Capítulo 2. Força	19
1. Leis de Newton	19
2. Campos de vetores	22
3. Atrito	25
4. A equação fundamental	28
5. Movimento harmônico	30
6. O pêndulo	33
7. Movimentos sob campos radiais	35
Exercícios	38
Capítulo 3. Momento linear	39
1. Momento linear	39
2. Força e momento linear	40
3. Movimento de um foguete	43
Capítulo 4. Conservação da energia	47
1. Movimento circular	47
2. Campos de vetores	48
3. Conservação da energia	49
4. O pêndulo simples	52
5. O pêndulo interrompido	57
Capítulo 5. Momento angular	59
1. Momento angular e torque	59
2. Sistemas de várias partículas	60
3. Coordenadas em rotação	62

4. O tensor de inércia	64
5. Equações de Euler	68
Capítulo 6. Equações de Lagrange	75
1. Equações de Lagrange em dimensão um	75
2. Equações de Lagrange em $n$ dimensões	79
Apêndice	87

## CAPÍTULO 1

### Vetores e cinemática

Antes de podermos introduzir os princípios básicos da dinâmica, que nos permitirão analisar o movimento de uma variedade de corpos, precisamos explicar o que vamos entender por movimento, velocidade e aceleração.

#### 1. O espaço

Na tradição ocidental, que remonta à Grécia Antiga, para que possa haver movimento é necessário que exista um espaço no qual este fenômeno possa se manifestar. Na mecânica clássica, consideramos os movimentos como ocorrendo no espaço tridimensional usual, que denotaremos por  $\mathbb{E}$ , embora espaços de dimensão maior tenham um papel importante a desempenhar no caso do movimento de muitas partículas.

Embora Huyghens, Newton e outros matemáticos do século XVII tenham investigado fenômenos mecânicos usando geometria euclidiana, o uso de coordenadas, popularizado por Euler no século seguinte, dominou completamente o estudo da mecânica até o final do século XIX, quando os vetores foram introduzidos na física por Hamilton, Grassmann, Maxwell e seus contemporâneos. A grande vantagem das coordenadas sobre os métodos puramente geométricos é que nos permitem modelar problemas físicos usando equações diferenciais; já os vetores provêem uma linguagem compacta na qual representar (e, muitas vezes, resolver) estas equações. O contraste entre estes dois pontos de ficará mais claro à medida que a teoria for sendo desenvolvida.

Para que seja possível introduzir coordenadas e vetores em  $\mathbb{E}$  precisamos fixar um ponto, usualmente denotado por  $O$ , que servirá como origem, tanto do sistema de coordenadas, quanto dos vetores. Ao longo deste livro vamos nos referir aos elementos do  $\mathbb{E}$  como pontos ou vetores, dependendo de nosso ponto de vista: um ponto apenas localiza a posição de uma partícula no espaço, ao passo que, a um vetor, podem ser aplicadas várias operações, que investigaremos em breve.

Uma vez fixada uma origem  $O$ , podemos identificar um ponto  $P \in \mathbb{E}$  usando o chamado *raio vetor*  $\overrightarrow{OP}$ , que tem origem em  $O$  e cuja outra extremidade está em  $P$ . Sempre que não for necessário explicitar o ponto correspondente a um dado



raio vetor, este último será denotado simplesmente por  $\mathbf{r}$ . De modo geral, letras maiúsculas denotarão pontos, ao passo que letras minúsculas em negrito denotarão vetores.

Para que seja possível descrever um ponto de  $\mathbb{E}$  em termos de coordenadas precisamos especificar uma base de  $\mathbb{E}$ . Como precisaremos medir o comprimento de vetores, suporemos sempre que estas bases são ortonormais; isto é, que são constituídas por vetores unitários e ortogonais entre si. Se  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  formam uma base ortonormal com centro em  $O$ , dizemos que a quadrupla  $(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  é um *sistema de coordenadas* ou *referencial* de  $\mathbb{E}$ .

Uma vez que um referencial  $(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  tenha sido fixado, podemos escrever os raios vetores que definem as posições dos pontos de  $\mathbb{E}$  em termos de coordenadas. Neste caso, a norma do vetor

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

será

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Frequentemente designaremos a norma de um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$  por  $v$ ; isto é, pela mesma letra, mas sem usar negrito. O *produto interno* entre os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  é definido por

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos(\theta),$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre os dois vetores. Em termos de geometria espacial,  $\theta$  é o menor ângulo formado pelas retas que têm  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  como vetores diretores, e é medido sobre o plano definido por estas duas retas. Em particular,

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|^2.$$

Como vimos em álgebra linear, se os vetores são dados em termos de coordenadas por

$$\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

então

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Usando a norma vetores podemos determinar a distância entre dois pontos  $P_1, P_2 \in \mathbb{E}$  a partir de seus raios vetores

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2},$$

por  $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ .

Encerraremos a seção apresentando duas operações sobre vetores que normalmente não são introduzidas nos cursos de álgebra linear: o produto vetorial e o produto misto. O *produto vetorial* de

$$\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

é o vetor

$$(1) \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

A maneira de lembrar desta fórmula é fazer de conta que estamos expandindo o “determinante”

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

*pela primeira linha.* As aspas em determinante são necessárias porque não se trata de determinante de verdade, já que temos vetores na primeira linha e números reais nas demais, o que não é possível em um determinante de verdade. Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$  e  $\lambda$  é um número real, então

- (1)  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;
- (2)  $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ;
- (3)  $(\lambda \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times (\lambda \mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ ;
- (4)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ ;
- (5)  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ .

Todas estas propriedades são consequências de propriedades bem conhecidas dos determinantes. Usando, diretamente, a fórmula (1), podemos mostrar que

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3.$$

Combinando isto com as propriedades (1), (4) e (5), vemos que

$$\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2,$$

mas também que

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}.$$

Portanto, o produto vetorial *não* é associativo, nem comutativo, de modo que precisamos de um certo cuidado ao utilizá-lo.

Finalmente, o *produto misto* dos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{E}$  é

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \rangle.$$

Partindo diretamente das definições dos produtos interno e vetorial, vemos que, se

$$\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = (x_3, y_3, z_3),$$

então

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix},$$

em que a segunda igualdade é consequência do fato de que transpor uma matriz não altera o seu determinante. Como no caso do produto vetorial, as propriedades do produto interno podem ser facilmente deduzidas a partir das propriedades elementares dos determinantes. Como o produto misto é, essencialmente, um determinante, temos que

- (1) se dois vetores são iguais, o produto misto se anula;
- (2) se dois vetores trocam de posição, o produto misto troca de sinal;
- (3) se um dos vetores é multiplicado por um número real, todo o produto misto é multiplicado por este número;
- (4) o produto misto é preservado por permutação cíclica dos vetores.

Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{E}$ , a propriedade (4) afirma que

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2].$$

Se, além disso,  $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{E}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

$$(2) \quad [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] + [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4].$$

Combinando isto com a propriedade (2) do produto misto, podemos concluir que a mesma relação vale se a soma de vetores estiver na segunda ou terceira entradas do produto misto.

O produto misto também pode ser usado para provar uma fórmula bastante útil para o produto vetorial de três vetores. Para isto usaremos o fato, bem conhecido, de que, se  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  é uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^3$ , então  $\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{v} \rangle$  é a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $\mathbf{v}$ .

TEOREMA 1.1. Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ , então

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta provar que cada uma das coordenadas do triplo produto vetorial é igual à coordenada correspondente do lado direito da fórmula. Pela observação feita acima, isto corresponde a dizer que

$$\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = \langle \mathbf{e}_i | \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3 \rangle,$$

para todo  $1 \leq i \leq 3$ . Provaremos que isto é verdade quando  $i = 1$ , os casos em que  $i = 2, 3$  são análogos. Começamos observando que

$$\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = [\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3].$$

Como o produto misto não é alterado por permutações cíclicas, temos que

$$\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1];$$

isto é,

$$\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 | \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}_1 \rangle$$

pela definição do produto misto. Contudo, obtemos diretamente da definição de produto vetorial que

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}_1 = -z_1 \mathbf{e}_2 + y_1 \mathbf{e}_3;$$

donde

$$\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 | -z_1 \mathbf{e}_2 + y_1 \mathbf{e}_3 \rangle.$$

Porém, usando as propriedades do produto interno, podemos reescrever o lado direito desta equação na forma

$$\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = -z_1 \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \rangle + y_1 \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \rangle.$$

Usando um argumento análogo, podemos mostrar que

$$\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \rangle = z_2 x_3 - x_2 z_3 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \rangle = -y_2 x_3 - x_2 y_3.$$

Portanto,

$$(3) \quad \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \rangle = -z_1 (z_2 x_3 + x_2 z_3) + y_1 (-y_2 x_3 + x_2 y_3).$$

Por outro lado, como

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle = x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

a primeira coordenada de

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3,$$

será

$$x_2 (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) - x_3 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2);$$

que, depois dos devidos cancelamentos, verificamos que é igual a (3).  $\square$

Podemos usar o produto misto para dar uma caracterização geométrica do produto vetorial. Suponhamos que  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$ . Pela propriedade (1) do produto misto,

$$\langle \mathbf{v} | (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle = [\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{w} | (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle = [\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0,$$

de modo que o produto vetorial é ortogonal a  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Agora, pelo exercício 3,

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle)^2.$$

Mas, usando a definição de produto interno,

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 \cos^2(\theta),$$

em que  $0 \leq \theta \leq \pi$  é o menor ângulo entre os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Rearrmando e usando a identidade trigonométrica básica,

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 \sin^2(\theta).$$

Como  $\sin(\theta) \geq 0$  quando  $0 \leq \theta \leq \pi$ , podemos concluir que

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \sin(\theta).$$

Com isto, já descobrimos quais são a norma e a direção do produto vetorial; falta determinar seu sentido. Mas antes precisamos investigar o comportamento do produto misto e do produto vetorial quando uma mesma rotação é aplicada a todos os vetores.

## 2. Rotações

Começaremos analisando o comportamento do produto misto quando uma transformação ortogonal  $Q$  é aplicada a seus três vetores.

TEOREMA 2.1. *Se  $\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  e  $Q$  é uma rotação do  $\mathbb{R}^3$ , então  $Q$  é uma rotação se, e somente se*

$$[Q\mathbf{w}, Q\mathbf{v}, Q\mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}].$$

*Caso  $Q$  não seja uma rotação,*

$$[Q\mathbf{w}, Q\mathbf{v}, Q\mathbf{u}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}].$$

DEMONSTRAÇÃO. Por definição,

$$(4) \quad [Q\mathbf{w}, Q\mathbf{v}, Q\mathbf{u}] = \det \begin{bmatrix} | & | & | \\ Q\mathbf{w} & Q\mathbf{v} & Q\mathbf{u} \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Mas,

$$(5) \quad \begin{bmatrix} | & | & | \\ Q\mathbf{w} & Q\mathbf{v} & Q\mathbf{u} \\ | & | & | \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{w} & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes destas matrizes, as duas equações anteriores implicam que

$$[Q\mathbf{w}, Q\mathbf{v}, Q\mathbf{u}] = \det(Q)[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}].$$

A primeira afirmação do teorema é consequência do fato de que uma transformação ortogonal é uma rotação se, e somente se, seu determinante é igual a 1; a segunda afirmação segue da primeira, porque o determinante de uma matriz ortogonal só pode ser igual a 1 ou -1.  $\square$

Nossa próxima meta é usar o teorema 2.1 para analisar o comportamento do produto vetorial sob o efeito de uma rotação. Em nosso argumento precisaremos de dois resultados de álgebra linear que começamos por recordar. O primeiro é que o produto interno  $\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{v} \rangle$  retorna a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $\mathbf{v}$ ; o segundo é que,

qualquer que seja a matriz  $A$ , de tamanho  $3 \times 3$ , e quaisquer que sejam os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $\mathbb{E}$ ,

$$(6) \quad \langle A\mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} \mid A^t \mathbf{w} \rangle.$$

TEOREMA 2.2. *Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  são vetores e  $Q$  é uma rotação do  $\mathbb{R}^3$ , então*

$$(Q\mathbf{v}) \times (Q\mathbf{u}) = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Pela definição de produto misto, podemos reescrever a primeira igualdade do teorema 2.1 na forma

$$(7) \quad \langle Q\mathbf{w} \mid Q\mathbf{v} \times Q\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \times \mathbf{u} \rangle.$$

Escolhendo  $\mathbf{w} = Q^T \mathbf{e}_i$ , obtemos

$$\langle \mathbf{e}_i \mid Q\mathbf{v} \times Q\mathbf{u} \rangle = \langle Q^T \mathbf{e}_i \mid \mathbf{v} \times \mathbf{u} \rangle;$$

pois  $Q^T Q = I$ , que é a matriz identidade do  $\mathbb{R}^3$ . de modo que, por (6),

$$\langle \mathbf{e}_i \mid Q\mathbf{v} \times Q\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{e}_i \mid Q(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \rangle.$$

Como isto se aplica a qualquer  $1 \leq i \leq 3$ , podemos concluir que os vetores  $Q\mathbf{v} \times Q\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  têm as mesmas coordenadas, o que prova a afirmação do teorema.  $\square$

Encerraremos a seção estabelecendo o sentido do produto vetorial, que ficou pendente ao final da seção anterior. Para isso precisamos introduzir a orientação de uma base de vetores do  $\mathbb{R}^3$ . Diremos que a base  $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  está *positivamente orientada* quando

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] > 0;$$

caso contrário, ela está *negativamente orientada*. Seja  $Q$  uma reflexão cujo espelho é o plano  $U$  gerado pelos vetores  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ . Como uma reflexão tem determinante igual a  $-1$ , o teorema 2.1 garante que

$$[Q\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = [Q\mathbf{v}_1, Q\mathbf{v}_2, Q\mathbf{v}_3] = -[Q\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3].$$

Portanto, se um dos vetores de uma base  $\beta$  é refletido para o lado oposto do plano gerado pelos outros dois vetores de  $\beta$ , a orientação da base é invertida. Em outras palavras, a orientação de uma base determina de que lado um dos vetores está, relativamente ao plano gerado por seus outros dois vetores.

TEOREMA 2.3. *Se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são vetores não colineares em  $\mathbb{R}^3$ , então*

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] > 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como a única coisa que nos interessa é a orientação da base,

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\},$$

a propriedade (3) do produto misto nos permite supor, sem perda de generalidade, que  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são unitários. Denotando  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle$  por  $\alpha$ , verificamos que

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{v}_1 \rangle = 0;$$

de forma que os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{v}_1$  são ortogonais. Denotando por  $\nu_2$  a norma deste último vetor e por

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\nu_2}(\mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{v}_1)$$

sua normalização, temos que  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  formam uma base ortonormal do mesmo plano gerado por  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Logo,

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\nu_2}(\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{v}_1)) = \frac{1}{\nu_2}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2),$$

pois  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1 = 0$ . Mas isto implica que

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\nu_2}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2].$$

Como a norma de vetor é um número positivo, podemos concluir que

$$(8) \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_2] > 0 \iff [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] > 0.$$

Contudo,  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  são unitários e ortogonais, de modo que existe uma rotação  $Q$  que satisfaz

$$Q\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad Q\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2.$$

Portanto, pelo teorema 2.2,

$$Q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_2) = (Q\mathbf{v}_1) \times (Q\mathbf{u}_2) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.$$

Assim, pelo teorema 2.1,

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_2] = [Q(\mathbf{v}_1), Q(\mathbf{u}_2), Q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_2)] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] = 1 > 0;$$

em que a última igualdade é consequência direta da definição de produto misto. Combinando isto com a equivalência (8), obtemos a afirmação do teorema.  $\square$

### 3. Mudanças de referenciais

Como veremos na seção 4, uma vez que a origem tenha sido fixada fica fácil descrever o movimento de uma partícula rastreando o movimento do raio vetor que especifica a posição da partícula. Contudo, em muitas situações é necessário operar com dois sistemas diferentes de coordenadas. Uma situação típica em que isto ocorre é aquela em que queremos relacionar os fenômenos vistos por dois observadores diferentes. O caso mais simples é aquele em que duas pessoas diferentes observam o mesmo fenômeno a partir de dois lugares distintos. Cada um destes observadores representa um referencial específico, com origem nos pontos em que os observadores se encontram.

Do ponto de vista geométrico, a necessidade de relacionar as coordenadas de dois referenciais com origem diferentes requer o uso de translações. Contudo, mesmo dois sistemas de coordenadas com a mesma origem podem ser definidos por diferentes bases do  $\mathbb{R}^3$ . Para podermos analisar estas mudanças de coordenadas de maneira mais concreta, precisamos fixar dois referenciais,

$$\beta = (O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta} = (\tilde{O}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2, \tilde{\mathbf{w}}_3).$$

Se  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{O\tilde{O}}$  é o vetor no referencial  $\beta$  cuja extremidade é o ponto  $\tilde{O}$ , e  $\mathbf{r}$  é um vetor escrito em coordenadas do sistema  $\tilde{\beta}$  então a transformação que muda coordenadas no referencial  $\tilde{\beta}$  em coordenadas no referencial  $\beta$  deve ter a forma

$$(9) \quad T(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = A\mathbf{r} - A\mathbf{r}_0,$$

em que  $A$  é uma matriz inversível de tamanho  $3 \times 3$ . Em princípio,  $A$  poderia ser qualquer matriz inversível  $3 \times 3$ . Contudo, em mecânica clássica fazemos duas suposições adicionais sobre  $T$ . A primeira é que  $T$  deve preservar a norma de vetores, de modo que

$$\|T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{w}\|,$$

quaisquer que sejam os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{w}$  em  $\mathbb{E}$ . Mas, pela fórmula (9),

$$\|T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{w})\| = \|A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - A(\mathbf{w} - \mathbf{r}_0)\| = \|A\mathbf{r} - A\mathbf{r}_0 - A\mathbf{w} + A\mathbf{r}_0\| = \|A\mathbf{r} - A\mathbf{w}\|.$$

Contudo, sabemos do curso de álgebra linear que

$$\|A\mathbf{r} - A\mathbf{w}\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{w}\|,$$

só pode ocorrer para todo par de vetores  $\mathbf{r}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  se  $A$  for uma matriz ortogonal. Finalmente, nossa experiência do mundo real não inclui mudanças de coordenadas capazes de inverter a orientação do referencial. Portanto, exigiremos não apenas que  $A$  seja ortogonal, mas também que tenha determinante positivo e, portanto, seja uma rotação.

Resumindo, admitiremos, como mudanças de um referencial fixo para outro, apenas transformações

$$T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$$

definidas pela regra

$$T(\mathbf{r}) = Q\mathbf{r} + \mathbf{r}_0,$$

em que  $Q$  é uma rotação do  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{r}_0$  é um vetor fixado. Estas transformações são conhecidas como *movimentos rígidos* ou *isometrias*. Infelizmente isto ainda não dá cabo de todas as transformações que precisaremos utilizar.

Voltando ao exemplo dos dois observadores com o qual começamos a seção, podemos nos perguntar o que aconteceria se um dos observadores estivesse em terra e o outro estivesse em um carro que se move com uma certa velocidade relativamente ao primeiro. Neste caso, temos, por assim dizer, uma “translação que varia no tempo”.



Supondo que a velocidade do carro é constante e igual a  $\mathbf{v}_0$ , e que houve um momento em que os dois referenciais coincidiram, a mudança de coordenadas que transforma o referencial do carro, no referencial em terra, é dada por

$$g(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t,$$

em que  $t$  representa o tempo transcorrido desde a coincidência dos dois referenciais.

Em seu *Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo*, publicado em 1632, Galileu afirmou que as leis do movimento em um referencial que está parado são as mesmas que em um referencial em movimento uniforme, que são aqueles cuja velocidade é constante. Adaptando uma imagem utilizada pelo próprio Galileu, o que ele afirma é que nenhum experimento físico realizado por uma pessoa em um foguete sem janela externa é capaz de determinar se ele está se movendo *em uma reta e com velocidade constante* ou está parado. As ressalvas sobre o movimento ser retilíneo e a velocidade ser constante são fundamentais. Qualquer pessoa que já andou em um elevador muito rápido sabe que é fácil determinar se está acelerando ou parando, mesmo sem ser capaz de olhar para fora e o mesmo ocorre em uma carro que faz uma curva. Tomaremos esta observação de Galileu como um dos princípios da mecânica clássica. Podemos formulá-lo da seguinte maneira.

PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE GALILEU. *Existem referenciais, chamados de inerciais, com as seguintes propriedades:*

- (1) *em qualquer momento, as leis da natureza são as mesmas em quaisquer dois referenciais inerciais;*
- (2) *todo referencial em movimento retilíneo com velocidade constante relativamente a um referencial inercial também é inercial.*

Como seria de esperar, relacionar fenômenos físicos relativamente a dois referenciais, um dos quais não é inercial, é bem mais complicado. Por exemplo, uma criança brincando em um gira-gira sente que tem a sensação de que há uma força puxando-a para fora do brinquedo. Como veremos no capítulo ??, esta é uma das chamadas forças fictícias que se fazem sentir em um referencial em rotação. Essas forças complicam bastante a descrição de movimentos nesses referenciais, mas são a causa de fenômenos importantes, como as correntes oceânicas.

## 4. Movimentos

É chegado o momento de descrever matematicamente o que devemos entender por um movimento. Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Um *movimento* é uma função diferenciável

$$\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{E},$$

cujas variáveis independentes denotaremos sempre por  $t$  e interpretaremos como descrevendo o tempo. Como se trata de uma função cujo contradomínio é um espaço de três dimensões, podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são funções de  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Dizer que  $\mathbf{r}$  é diferenciável, significa que o limite

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

existe para todo  $t \in I$ . Como

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \left( \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \right),$$

a existência do limite em (10) equivale à existência dos limites nos quocientes de Newton do vetor acima. Denotando a derivada em relação ao tempo por um ponto sobre a função, podemos então afirmar que

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

Como  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  determina a taxa de variação da função  $\mathbf{r}(t)$ , vamos defini-la como correspondendo à *velocidade* deste movimento.

Normalmente uma função é chamada de diferenciável se admite primeira derivada em todos os pontos nos quais está definida. Contudo, em mecânica, isto não é suficiente, porque a *aceleração*, que é a taxa de variação da velocidade, corresponde à segunda derivada de  $\mathbf{r}(t)$ . Por isso, de agora em diante, adotaremos a convenção de que todos os movimentos que estamos considerando admitem tantas derivadas quantas forem necessárias. Dito isto, vale observar que, quase sempre, basta que as duas primeiras derivadas de  $\mathbf{r}$  existam.

Um segundo ponto importante é que um raio vetor só define a posição de um ponto, de modo que nossa definição de movimento aplica-se ao que se costuma chamar de uma *partícula*, também chamada de *ponto material*, que é um corpo que pode ser tratado como se toda a sua massa estivesse concentrada em um único ponto. Na prática, saber se um corpo pode ou não ser considerado como ponto material é uma questão de escala. Relativamente à Terra, um satélite artificial pode ser considerado como um ponto material, já no âmbito do sistema solar é a própria Terra que pode ser tratada como ponto material.

Uma característica dos pontos materiais é que não têm nenhuma dimensão, são pontos no sentido usado em geometria elementar. Em particular, não faz sentido falar da rotação de um ponto material. Contudo, há muitos brinquedos interessantes cujo comportamento depende de sua rotação, o mais simples dos quais é, provavelmente, o pião. Por isso, precisaremos investigar o movimento de corpos que não são

pontos materiais. Começaremos tratando o caso de pontos materiais apenas porque seus movimentos são muito mais limitados e fáceis de descrever.

O movimento mais simples é o de um ponto material que se move em linha reta com velocidade constante. Neste caso, podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t,$$

em que  $\mathbf{r}_0$  descreve a posição da partícula quando  $t = 0$ . Como  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ , podemos concluir que este vetor descreve a velocidade da partícula. Note que tanto  $\mathbf{r}_0$ , quanto  $\mathbf{v}$ , são vetores. Um caso um pouco mais geral é o de um movimento acelerado em linha reta, que é descrito por

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2.$$

À primeira vista pode parecer estranho que tenhamos escrito o coeficiente de  $t^2$  como  $\mathbf{a}/t^2$ , em vez de simplesmente  $\mathbf{a}$ . A razão pela qual fizemos isto é para que o vetor  $\mathbf{a}$  corresponda à segunda derivada de  $\mathbf{r}$  e, portanto, à aceleração deste movimento.

Tendo tratado de movimentos em linha reta, vejamos o que acontece quando a partícula se move ao longo de um círculo de raio  $a$  e centro na origem. Neste caso, o movimento é descrito pela função

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t)),$$

em que  $\omega$  é uma constante não nula. Derivando uma vez, encontramos

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a\omega \sin(\omega t), a\omega \cos(\omega t))$$

que é a velocidade da partícula; derivando mais uma vez, obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-a\omega^2 \cos(\omega t), -a\omega^2 \sin(\omega t)),$$

que é sua aceleração. Como  $\omega > 0$  e

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

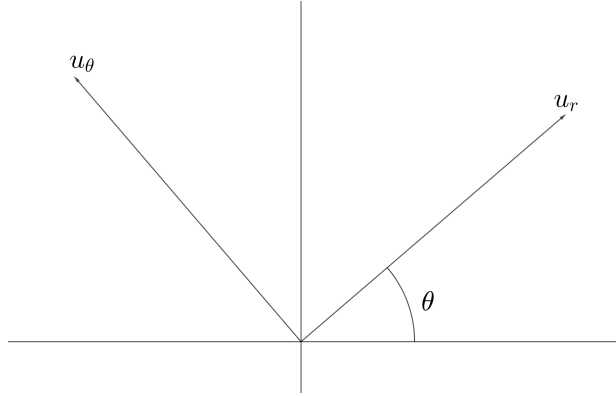
a aceleração aponta radialmente para dentro. Por outro lado,

$$\langle \dot{\mathbf{r}}(t) | \mathbf{r}(t) \rangle = 0,$$

de modo que a velocidade é perpendicular ao raio e, portanto, tangente ao círculo. Finalmente, como  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ , temos que

$$(11) \quad \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \omega a.$$

A constante  $\omega$  é chamada de *velocidade angular* da partícula. Quando a velocidade angular é positiva, a partícula gira em sentido anti-horário; quando negativa, a partícula gira em sentido horário. Já a velocidade escalar da partícula é igual ao raio do círculo vezes a velocidade angular.



O exemplo anterior sugere que o uso de coordenadas polares pode ajudar bastante quando se trata de movimentos planos ao longo de circunferências, mas também de espirais e outras curvas do gênero. Para fazer a tradução estas coordenadas e as coordenadas cartesianas que usamos até aqui precisamos introduzir dois vetores, que denotaremos por  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  e que dependem do ângulo  $\theta$  escolhido. Para um dado  $\theta$ , o vetor  $\mathbf{u}_r$  é unitário ao longo da radial e o vetor  $\mathbf{u}_\theta$  é perpendicular a ele, de modo que a base ortonormal

$$\beta_\theta = \{ \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta \}$$

seja positiva. Escrevendo estes dois vetores em termos da base canônica, temos

$$(12) \quad \mathbf{u}_r = \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin(\theta) \mathbf{e}_1 + \cos(\theta) \mathbf{e}_2.$$

Um cálculo simples mostra que

$$(13) \quad \dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r.$$

Na base  $\beta_\theta$  o raio vetor toma a forma

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{u}_r,$$

em que  $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$ . Supondo que esta última função é diferenciável e usando (13),

$$(14) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta.$$

Na próxima seção veremos como estas fórmulas são usadas, porém, antes de encerrar a seção convém fazer um exemplo em que o movimento não é plano.

Um caso interessante de um movimento que não é plano é o de uma partícula carregada que se desloca em um campo magnético que não varia, nem no espaço, nem no tempo. Neste caso a partícula se desloca ao longo de uma hélice, que podemos descrever por

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Calculando as derivadas, vemos que a velocidade da partícula é

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

e sua aceleração é

$$\mathbf{r}(t) = (-a \cos(t), -a \sin(t), 0).$$

Portanto, à medida que a partícula gira ao longo da hélice, ela sobe ao longo do eixo  $z$  com velocidade constante igual a  $b$ .

Quando os raios vetores variam com o tempo, descrevendo movimentos, os produtos de vetores definem uma função do tempo que precisamos saber como derivar. Suponhamos que

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)).$$

O caso mais simples de analisar é o do produto interno. Como

$$\langle \mathbf{r}_1(t) | \mathbf{r}_2(t) \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i(t) y_i(t),$$

obtemos usando as regras para derivada da soma e do produto, que

$$(15) \quad \frac{d}{dt} (\langle \mathbf{r}_1(t) | \mathbf{r}_2(t) \rangle) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) y_i(t) + x_i(t) \dot{y}_i(t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} (\langle \mathbf{r}_1(t) | \mathbf{r}_2(t) \rangle) = \langle \dot{\mathbf{r}}_1(t) | \mathbf{r}_2(t) \rangle + \langle \mathbf{r}_1(t) | \dot{\mathbf{r}}_2(t) \rangle.$$

O produto vetorial pode ser analisado da mesma maneira, porque cada entrada do vetor  $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$  é uma diferença de produtos de coordenadas. Efetuando os cálculos, verificamos que

$$(16) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \dot{\mathbf{r}}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \dot{\mathbf{r}}_2(t).$$

Ambas as equações são fáceis de lembrar, porque seguem o padrão da derivada de um produto de funções; por isso frequentemente serão utilizados sem referência às equações acima.

## 5. Aplicações

O que aprendemos até aqui sobre movimentos só nos permite resolver alguns problemas muito simples, porque ainda não investigamos nada sobre forças, que são as causas dos movimentos. Um destes problemas é o seguinte.

**PROBLEMA.** *Um javali  $J$  é solto em uma arena circular de raio  $a$  na antiga Roma. Tendo visto o javali, Obelix encontra um caminho subterrâneo que dá acesso ao centro  $O$  da arena e, a partir de então, começa a perseguir o javali. Suponhamos que a estratégia de fuga do javali consiste em correr em torno da arena com velocidade  $u$ , ao passo que Obelix corre com velocidade  $v$ , mantendo-se sempre sobre o raio vetor  $OJ$ .*

- (a) Ache a equação diferencial de primeira ordem que  $r(t)$  satisfaz.
- (b) Resolva a equação diferencial e determine  $r(t)$ . em função de  $t$ ,  $v$ ,  $a$  e  $u$ .
- (c) Mostre que se  $v > u$ , então Obelix sempre alcança o javali e determine, neste caso, quanto tempo Obelix isto levaria.
- (d) Esboce a trajetória que Obelix percorre até alcançar o javali.

Pelo que vimos na seção anterior, a relação entre  $u$  e  $\omega$  é dada por  $u = a\omega$ . Como Obelix sempre se mantém sobre o raio vetor do javali, seu movimento é descrito pelo vetor

$$\mathbf{r}(t) = r(t)u_r.$$

Para calcular a velocidade de Obelix basta derivar  $\mathbf{r}(t)$  relativamente ao tempo usando (14) e lembrar que  $\theta = \omega t$ . Fazendo isto, obtemos

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}u_r + r\omega u_\theta$$

A velocidade escalar do Obelix é a norma deste vetor. Como  $u_r$  e  $u_\theta$  são vetores unitários ortogonais,

$$\|\dot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\omega^2}.$$

Se a velocidade escalar do Obelix é constante igual a  $v$ , então, pela última equação do item (c),

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\omega^2}.$$

Elevando ao quadrado e rearrumando

$$\dot{r}^2 = v^2 - r^2\omega^2.$$

Extraindo a raiz,

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - r^2\omega^2};$$

que é a equação desejada. Para resolver a equação, basta separar variáveis,

$$\frac{\dot{r}}{\sqrt{v^2 - r^2\omega^2}} = 1;$$

que equivale a

$$\frac{\dot{r}}{v\sqrt{1 - (\omega/v)^2 r^2}} = 1.$$

Integrando os dois lados relativamente a  $t$

$$(17) \quad \int \frac{\dot{r} dt}{\sqrt{1 - (\omega/v)^2 r^2}} = \int v dt.$$

Fazendo a substituição de variáveis

$$s = \frac{\omega r}{v},$$

temos que

$$\int \frac{\dot{r} dt}{\sqrt{1 - (\omega/v)^2 r^2}} = \frac{v}{\omega} \int \frac{\dot{s} dt}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

Mas, pela regra da cadeia

$$\frac{v}{\omega} \int \frac{\dot{s} dt}{\sqrt{1 - s^2}} = \frac{v}{\omega} \int \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}};$$

donde

$$\frac{v}{\omega} \int \frac{\dot{s} dt}{\sqrt{1 - s^2}} = \frac{v}{\omega} \arcsin(s) = \frac{v}{\omega} \arcsin\left(\frac{r\omega}{v}\right).$$

Substituindo em (17) e integrando o lado direito,

$$\frac{v}{\omega} \arcsin\left(\frac{r\omega}{v}\right) = vt + c;$$

para alguma constante  $c$ . Logo,

$$\frac{r\omega}{v} = \sin\left(v\left(\frac{\omega}{v}\right)t + c\frac{\omega}{v}\right);$$

isto é,

$$r = \frac{v}{\omega} \sin\left(\omega t + c\frac{\omega}{v}\right).$$

Mas sabemos que  $r(0) = 0$ , pois Obelix sai correndo a partir da origem das coordenadas. Portanto,

$$r = \frac{va}{u} \sin\left(\frac{ut}{a}\right).$$

Como Obelix sempre está sobre o raio vetor do javali, para que ele alcance o javali basta que

$$\frac{va}{u} \sin\left(\frac{ut}{a}\right) = a;$$

que equivale a

$$\sin\left(\frac{ut}{a}\right) = \frac{u}{v};$$

que só tem solução se  $u/v < 1$ . Para encontrar o tempo até Obelix chegar ao javali basta resolver a equação anterior, obtendo

$$\frac{ut}{a} = \arcsin\left(\frac{u}{v}\right) \implies t = \frac{a}{u} \arcsin\left(\frac{u}{v}\right).$$

Desenhando a trajetória do javali em azul e a do Obelix em vermelho, obtemos a figura 1.

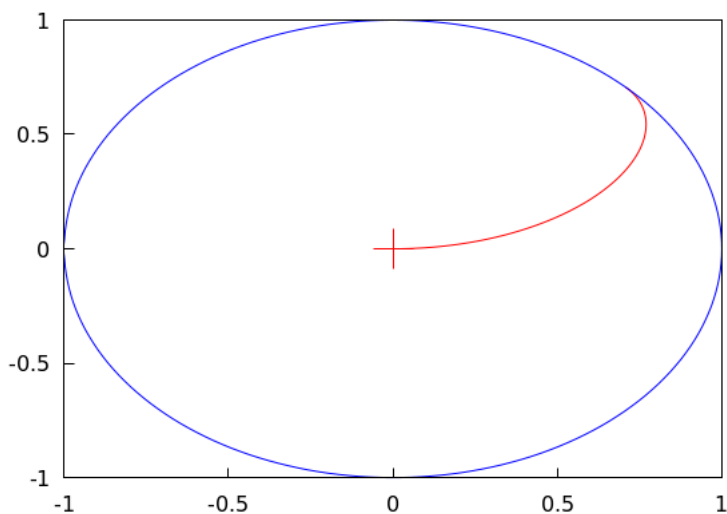


FIGURA 1. Trajetórias do javali (azul) e do Obelix (vermelho).

**Exercícios**

1. Calcule a velocidade e a aceleração do movimento descrito pelas função:  
 (a)  $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 4, t^3, t + 3)$ ;
2. Complete os detalhes da demonstração do teorema 1.1.
3. Prove que

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (-x_1 z_2 + x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

é igual a

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$$

e conclua disto que, se

$$\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

então

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle.$$





## CAPÍTULO 2

### Força

A dinâmica é a parte da física que tenta responder à seguinte pergunta: *supondo que conhecemos todas as forças que atuam sobre um corpo, de que ele irá se movimentar?* Da maneira como a entendemos hoje em dia, a dinâmica teve origem no *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, publicado por Newton em 1687. Seguindo a tradição, começaremos nosso estudo da dinâmica pelas leis com as quais também começa Newton no *Principia*.

#### 1. Leis de Newton

Começaremos relembrando as leis de Newton da forma como são usualmente enunciadas:

**Primeira lei:** um corpo sobre o qual não incide nenhuma força move-se em movimento retilíneo com velocidade.

**Segunda lei:** a força que incide sobre um corpo é igual à sua massa vezes sua aceleração.

**Terceira lei:** a toda ação se opõe uma reação, na mesma direção e sentido oposto.

A primeira coisa a observar é que estas leis só fazem sentido se você tiver conhecimento prévio do que significam as palavras força e massa. Uma saída é usar a primeira lei como inspiração e definir *força* como o que quer que seja que causa uma alteração na velocidade de um corpo. Como a velocidade é um vetor, esta alteração pode ocorrer na norma, na direção ou no sentido da velocidade. Decorre disto que a força é um vetor e que força e aceleração estão intimamente relacionados, já que a aceleração é definida como a variação da velocidade. Portanto, é razoável supor que a força aplicada a um corpo é proporcional à sua aceleração; a constante de proporcionalidade é o que chamamos de *massa* do corpo.

Adotando estas definições de força e massa, podemos usar a terceira lei para calcular a massa de um corpo. Para isso, imagine que no universo inteiro houvesse apenas dois corpos, que chamaremos de  $A$  e  $B$ . Se  $A$  exerce uma força  $\mathbf{F}$  sobre  $B$ , então, pela terceira lei de Newton,  $B$  exerce uma força igual a  $-\mathbf{F}$  sobre  $A$ . Logo,

considerando  $\mathbf{F}$  como agindo sobre  $B$ , temos que

$$\mathbf{F} = m_B \mathbf{a}_B,$$

em que  $m_B$  e  $\mathbf{a}_B$  são a massa e a aceleração de  $B$ . Analogamente,

$$-\mathbf{F} = m_A \mathbf{a}_A,$$

em que  $m_A$  e  $\mathbf{a}_A$  são a massa e a aceleração de  $A$ . Como

$$m_B \|\mathbf{a}_B\| = \|\mathbf{F}\| = \|-\mathbf{F}\| = m_A \|\mathbf{a}_A\|,$$

temos que

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{\|\mathbf{a}_A\|}{\|\mathbf{a}_B\|}.$$

Em particular, tomando a massa de um corpo  $A$  como padrão e declarando que é igual a 1, teremos que

$$m_B = \frac{\|\mathbf{a}_A\|}{\|\mathbf{a}_B\|}.$$

Portanto, em princípio, isto nos daria uma maneira de calcular a massa de qualquer corpo a partir de um outro tomado como padrão.

Naturalmente o problema com este procedimento é que requer um universo em que só há dois corpos, o que não é muito interessante. A saída é introduzir a noção de *sistema isolado*, como sendo aquele cujos corpos interagem entre si, sem que nenhuma força externa esteja agindo sobre eles. Infelizmente sistemas isolados também não existem, porque qualquer corpo no universo está sujeito à ação gravitacional de outros corpos e à radiação que constantemente incide sobre ele. Apesar disto, a noção de sistema isolado representa um ganho expressivo, porque muitos sistemas podem ser considerados como isolados, se levarmos em consideração a margem de erro dos experimento que conseguimos realizar.

Como não estamos interessados em entender detalhadamente os fundamentos da mecânica clássica, vamos nos satisfazer com a definição de força dada acima. Contudo, como se trata de um curso de modelagem, precisamos, a cada passo, observar as muitas hipóteses simplificadoras que estamos fazendo. Até agora, a mais importante é a existência de sistemas isolados, que vai nos acompanhar até o final desta apostila.

Antes de prosseguir precisamos considerar alguns exemplos de força. A mais simples de todas é, provavelmente, a força exercida por uma mola sobre um corpo. Robert Hooke mostrou, experimentalmente, que esta força é proporcional a quanto a mola foi alongada ou contraída. Supondo que a mola tem comprimento  $\ell$  quando está desligada de qualquer outro corpo temos que a força exercida pela mola quando é seu comprimento é igual a  $x$  tem norma igual a  $k(x - \ell)$ , em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade que depende da mola.

Outra maneira concreta de exercer uma força sobre um corpo é acertá-lo com algum outro objeto, como o taco de golfe ou críquete quando acertam a bola. O problema é que colisões não são fáceis de descrever; para isso precisamos da noção de momento linear, que introduziremos na seção 1. Tanto a força exercida pela mola, quando a do taco que acerta a bola, exigem que haja contato entre os corpos. No século XVII esta era basicamente a única maneira como se concebia que uma força agisse sobre um corpo: se não há alguma forma de contato, não há força.

No *Principia* Newton descartou abertamente este pressuposto, quando propôs que a gravitação era uma espécie de força que um corpo exercia sobre outro, em uma certa região do espaço, sem introduzir nenhum mecanismo de contato que explicasse como esta força agia. Descartes, antes dele, havia suposto que o espaço entre sol e planetas é preenchido com pequenas partículas. Segundo ele, seriam os vórtices que ocorrem nestas partículas arrastam os planetas em suas órbitas em torno do Sol.

Ao contrário de Descartes, no sistema de Newton o espaço entre os planetas e o Sol é vazio, de modo que há nada que possa transmitir a gravidade como uma força de contato. Esta posição de Newton está na origem de muitas das críticas contra o *Principia* formuladas na época em que foi publicada. Na segunda edição de seu livro, Newton esclarece,

[a]inda não pude descobrir a razão para estas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos [observados] e não formuarei nenhuma hipótese.

Em uma carta a Richard Bentley, Newton é mais explícito; segundo ele,

[q]ue a gravidade seja inerente e essencial à matéria de modo que um corpo possa agir sobre outro, à distância, no vácuo, sem a mediação de qualquer outra coisa [...] é para mim um absurdo tão grande que creio que nenhum homem que tenha, em matéria de filosofia, competência na capacidade de pensar, possa aceitá-la. (Westfall 1995,505).

Como muitos outros fenômenos, entre eles a eletricidade e o magnetismo, geram forças que agem à distância, sem intermediário aparente, James Clerk Maxwell introduziu, no século XIX, a noção de campo. Segundo ele

[o] campo elétrico é a porção do espaço, na vizinhança de um corpo eletrificado, considerada com referência aos fenômenos elétricos. Ele pode ser ocupado por ar, ou outros corpos, ou pode ser o chamado vácuo[.] (Maxwell, Treatise, p. 44)

Se considerado como uma definição do campo elétrico, este texto de Maxwell deixa muito a desejar. Na próxima seção veremos como formular a noção de campo de maneira matemática, para que possamos usá-la ao explorar a ação da gravidade sobre corpos.

## 2. Campos de vetores

Tomando a definição de campo elétrico formulada por Maxwell, e que vimos ao final da seção anterior, podemos dizer que um campo gravitacional está presente em uma certa região do espaço quando uma partícula, posta nesta região, está sujeita a uma força que depende apenas de sua massa. Como definição, esta é tão ruim quanto a de Maxwell; mas ela acrescenta um dado importante: o campo gravitacional age como uma força sobre a partícula. Em outras palavras, tudo se passa como se, em uma dada região do espaço houvesse uma força invisível capaz de atrair pontos materiais. Como se trata de uma força, podemos representar o campo visualizando o efeito de um campo gravitacional em cada um de seus pontos desenhando o vetor que representa a ação da força gravitacional sobre uma partícula localizada naquele ponto.

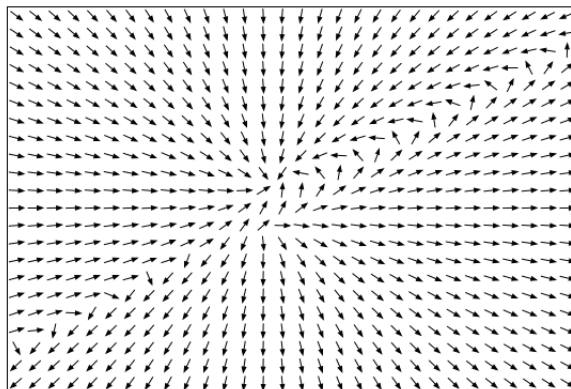


FIGURA 1. Um campo de vetores.

Esta última formulação tem a grande vantagem de ser formalizável matematicamente. Seja  $U$  uma região aberta do espaço  $\mathbb{E}$ . Um *campo vetorial*  $\mathbf{F}$  em  $U$  é uma aplicação que, a cada ponto de  $U$ , associa um vetor  $\mathbf{v}$ . Usualmente definimos  $\mathbf{F}$  simplesmente como uma aplicação

$$\mathbf{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

o que significa que todos os vetores  $\mathbf{F}(p)$  têm origem no mesmo ponto, já que o  $\mathbb{R}^3$  é um espaço vetorial. Apesar disto, quando imaginamos ou desenhamos o campo,

localizamos o vetor  $\mathbf{F}(p)$  como se tivesse sua origem em  $p$ , como ilustrado na figura 1.

Os campos mais simples são aqueles que são constantes. Por exemplo, se a Terra fosse plana e infinita, poderíamos considerar a região em que vivemos como o semi-espaço superior, que denotaremos por  $\mathbb{S}$ . Neste caso o campo gravitacional seria representado pela aplicação

$$\mathbf{F} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida pela regra  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -g \mathbf{e}_3$ , em que  $\mathbf{e}_3$  é o vetor que aponta verticalmente para cima,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\mathbf{r}$  é o raio vetor do ponto no qual desejamos determinar o campo. Este campo é ilustrado na figura 1. Apesar da Terra não ser plana, o campo gravitacional dentro de uma sala de aula varia muito pouco e, por isso, pode ser tratado “como se fosse constante”.

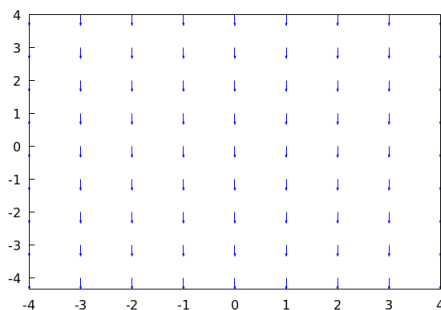


FIGURA 2. Campo constante vertical.

No século XVII várias pessoas, entre as quais Hooke, Halley e Christopher Wren, se deram conta de que as órbitas dos planetas só poderiam ser elipses, como proposto por Kepler, se a força que o Sol exerce sobre os planetas variasse com o inverso do quadrado da distância. Newton foi o primeiro a provar que esta suposição estava correta e a motivação original para escrever o *Principia* foi justamente a de publicar sua solução de forma sistemática.

Um dos resultados mais importantes provado por Newton no *Principia* é a Proposição ?? segundo a qual, se estamos em um ponto afastado de um corpo cuja massa está uniformemente distribuída, seu campo gravitacional se comporta como se toda a massa do corpo estivesse concentrada em seu centro. Isto nos permite idealizar o campo gravitacional de um corpo esférico como um campo radial que varia com o inverso do quadrado da distância de seu centro. Imaginando que o sistema de coordenadas está situado no centro do corpo, o campo será a aplicação

$$\mathbf{F} : \mathbb{E} \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$(18) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \left( \frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|},$$

em que  $G$  é a constante de gravitação universal,  $M$  é a massa total do corpo e  $\mathbf{r}$  é o raio vetor do ponto no qual estamos calculando o campo. Como

$$\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$$

é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}$ , a fórmula acima define um vetor cuja norma é igual a

$$\frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^2}.$$

Usando  $r$  para denotar a norma do vetor  $\mathbf{r}$ , a fórmula (18) pode ser reescrita de maneira mais abreviada na forma

$$(19) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Este campo é ilustrado na figura 3.

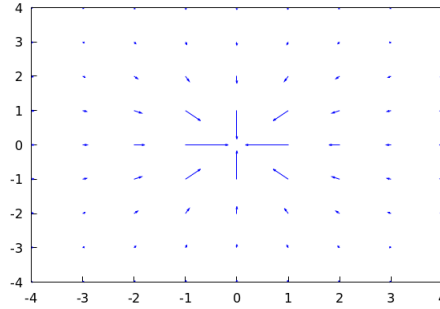


FIGURA 3. Campo gravitacional.

O campo gravitacional é parte da família de *campos radiais*, que são aqueles definidos pela fórmula

$$(20) \quad \mathbf{F} = -g(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

em que  $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  é uma função. No caso do campo gravitacional, esta função é

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}.$$

Como veremos no capítulo ?? os campos radiais têm uma propriedade muito importante, eles são *conservativos*; isto significa que estes campos admitem uma função potencial. Com isso, se uma partícula que se move em um campo conservativo a soma de sua energia cinética e sua energia potencial é constante. Na próxima seção estudaremos uma força para a qual isto não vale: o atrito.

### 3. Atrito

O atrito é uma força que se manifesta quando duas superfícies que estão em contato movem-se uma em relação à outra. A causa do atrito é bem conhecida: por mais polida que uma superfície pareça, ela apresenta pequenas irregularidades microscópicas; quando uma superfície toca a outra estas desigualdades se arrastam umas contra as outras, fazendo com que o corpo perca energia na forma de calor e som, o que o faz perder velocidade.

O atrito se manifesta de muitas formas. Aquela à qual normalmente associamos a palavra atrito é o *atrito seco*, que foi a forma descrita no parágrafo anterior. No *atrito lubrificado* uma lâmina de líquido é introduzida entre duas superfícies sólidas; já o *atrito fluido* se manifesta entre camadas de líquidos viscosos que se movimentam umas contra as outras. Como vamos estudar apenas o atrito seco, é sempre a ele que estamos nos referindo ao usar a palavra atrito.

Já na antiguidade as pessoas haviam notado que é mais fácil manter um corpo movimento do que movê-lo quando está parado. Formalizamos isto postulando que há duas formas de atrito seco, o *atrito estático* e o *atrito cinético*. Um dos primeiros a investigar as propriedades do atrito foi Leonardo da Vinci. Além de entender que o atrito era causado pela aspereza das superfícies em contato, Da Vinci fez duas observações importantes. A primeira é que o tamanho das áreas de contato não afeta o atrito entre duas superfícies; a segunda é que se o peso de um objeto dobra, fica duas vezes mais difícil movê-lo.

Infelizmente, como muito do que Da Vinci fez, suas descobertas ficaram perdidas em seus cadernos de anotação. O primeiro a mencioná-las, ainda que brevemente, foi Giovanni Battista Venturi em um comentário aos cadernos de Da Vinci publicado em 1797. No meio tempo Guillaume Amontons havia, independentemente, redescoberto as mesmas leis, que publicou em 1699. Em 1785, Coulomb mostrou que, além das duas leis anteriormente enunciadas por Amontons, o atrito cinético obedece uma outra: é independente da velocidade.

Dada sua importância no funcionamento de muitas máquinas, o atrito continua sendo investigado até os dias de hoje, mas vamos nos contentar em aplicar as leis três mencionadas anteriormente. Resumindo o que vimos, temos que, se um corpo está sobre uma superfície, então:

**Primeira lei:** o atrito é diretamente proporcional à carga aplicada pelo corpo sobre a superfície;

**Segunda lei :** o atrito não depende do tamanho da área de contato entre o corpo e a superfície;

**Terceira lei:** o atrito cinético independe da velocidade do corpo.



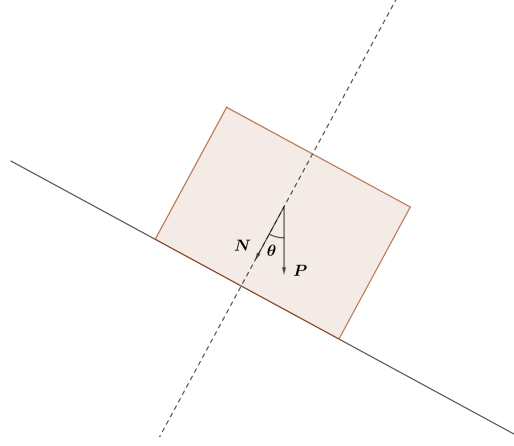


FIGURA 4. Peso e normal ao plano inclinado.

Nosso objetivo é utilizar estas leis para dar uma formulação matemática da força de atrito que possa ser aplicada em nossos modelos. Antes, porém, precisamos esclarecer o que exatamente queremos dizer quando falamos da “carga aplicada por um corpo sobre uma superfície”.

Para facilitar, suponhamos que o corpo é um paralelepípedo de massa  $m$ . Se supusermos que a superfície é horizontal, a carga sobre a superfície será igual ao peso do corpo; mas isto não é verdade se o corpo está sobre um plano inclinado. Neste caso, a carga corresponde à componente do peso que é ortogonal à superfície, como ilustrado na figura 4.

Supondo que  $\theta$  seja o ângulo formado pela reta normal ao plano inclinado com a vertical, temos que a força normal ao plano é igual a

$$\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{P}\| \cos(\theta).$$

Como estamos supondo que o paralelepípedo tem massa  $m$ , podemos reescrever isto na forma

$$(21) \quad \|\mathbf{N}\| = mg \cos(\theta),$$

em que  $g$  é a aceleração da gravidade.

Tendo esclarecido que por “carga”, entendemos a componente do peso do corpo que é normal à superfície, podemos retomar nossa busca de uma formulação matemática do atrito. Pela primeira e segunda leis, o atrito estático independe da área de contato, mas depende da normal  $\mathbf{N}$ ; já pela terceira lei, o atrito independe da velocidade com que o corpo se desloca. Finalmente, vimos que o atrito estático é maior que o cinético. Reunindo tudo isto, podemos afirmar que a força de atrito  $\mathbf{F}$  satisfaz

$$(22) \quad \|\mathbf{F}\| \leq \mu_e \|\mathbf{N}\|,$$

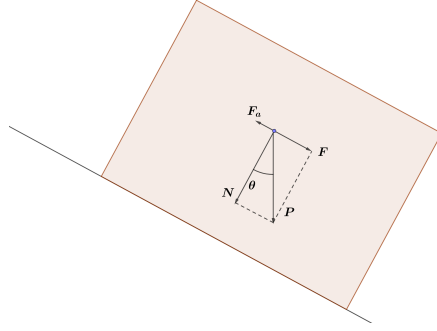


FIGURA 5. Paralelepípedo que desliza em um plano inclinado.

em que  $\mathbf{N}$  é a normal e  $\mu_e$  é um número real positivo, que depende do material de que são feito o corpo e a superfície sobre a qual ele se encontra. Supondo que o corpo está se movendo, teremos

$$(23) \quad \|\mathbf{F}\| = \mu_c \|\mathbf{N}\|,$$

em que  $\mu_c \geq 0$  é outra constante que, como  $\mu_e$ , depende das superfícies que estão em contato. Na tabela 1 listamos valores de  $\mu_e$  e  $\mu_c$  para alguns pares de superfícies.

Materiais		$\mu_e$	$\mu_c$
Ferro fundido	ferro fundido	1,1	0,15
Cobre	aço inoxidável	0,23	0,21
Vidro	níquel	0,78	0,56

TABELA 1. Alguns coeficientes de atrito.

Até aqui apresentamos apenas a norma da força de atrito; mas forças são vetores, de modo que ainda precisamos investigar sua direção e sentido. Como o atrito só se manifesta como resistência ao movimento, é de esperar que a força de atrito está sempre na mesma direção da força que está sendo aplicada ao corpo, mas em sentido oposto. Vamos ilustrar isto analisando o movimento do paralelepípedo ilustrado na figura 4. Supondo que a única força que age sobre o paralelepípedo é seu peso, temos que a força sob a qual o corpo se move é dada por

$$\mathbf{F} = mg \sin(\theta) \mathbf{u}$$

em que  $\mathbf{u}$  é um vetor unitário paralelo à superfície sobre a qual o paralelepípedo repousa. Supondo que o corpo está deslizando para baixo, temos, por (23), que a força de atrito sobre o paralelepípedo será

$$\mathbf{F}_a = -\mu_c mg \cos(\theta) \mathbf{u}.$$

A relação entre estas diversas forças é ilustrada na figura 5. Juntando tudo isto, podemos concluir que a força sob a qual o paralelepípedo desce o plano inclinado é igual a

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_a = mg(\sin(\theta) - \mu_c \cos(\theta)) \mathbf{u}.$$

Em muitos de nossos modelos será conveniente supor que não há atrito ou resistência do ar. Contudo, há uma situação para a qual a presença do atrito é imprescindível, porque, na ausência de atrito, um corpo não rola sobre uma superfície, ele apenas desliza. Portanto, quando modelarmos um cilindro que rola sobre uma superfície estamos admitindo, mesmo que isto não seja dito explicitamente, que há atrito entre os dois. Para simplificar a análise de casos como este, suporemos sempre que o objeto redondo *rola, sem deslizar*, sobre o outro. Com isto queremos dizer que, à medida que o objeto rola, a cada ponto da sua superfície corresponde exatamente um ponto da superfície. Uma maneira mais concreta de dizer a mesma coisa é que, depois de uma volta completa, o cilindro terá percorrido uma distância igual ao comprimento de sua circunferência.

#### 4. A equação fundamental

Agora que já conhecemos vários tipos de forças, precisamos ver como fazer uso delas para investigar o que acontece a uma partícula sujeita a uma dada combinação de forças. Neste capítulo vamos nos limitar ao caso de uma única partícula, nos capítulos posteriores veremos como tratar sistemas formados por várias partículas. Uma última observação antes de enunciar a equação: para simplificar a notação, frequentemente escreveremos simplesmente  $\mathbf{r}$ , em vez de  $\mathbf{r}(t)$ , mesmo que a posição da partícula esteja variando com o tempo.

Se a força total que age sobre uma partícula de massa  $m$  é  $\mathbf{F}$ , então seu movimento  $\mathbf{r}(t)$  fica completamente determinado pela equação

$$(24) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

desde que conheçamos a posição  $\mathbf{r}(t_0)$  e a velocidade  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  desta partícula em um determinado instante  $t_0$ . Vamos nos referir a (24) como *equação fundamental da dinâmica*. A mesma equação é, frequentemente, chamada de *equação de Newton*, um nome que não parece muito adequado, uma vez que ela foi enunciada, pela primeira vez, por Euler em 1752 e nunca aparece em nada do que Newton escreveu. Na verdade, o que é habitualmente conhecido como *mecânica newtoniana* é inteiramente derivado dos trabalhos de Euler, embora, inegavelmente, estes tenham sua fonte no *Principia*.

Vejamos alguns exemplos de como a equação fundamental é utilizada, começando pela queda livre de corpos. Suponhamos que um corpo de massa  $m$  é solto, a partir do repouso, em um ponto apenas  $h$  metros acima do solo. Como vimos na seção 2, se

$h$  for da ordem de uns poucos metros, o campo gravitacional pode ser tratado como constante e igual a  $-mg \mathbf{e}_3$ . Como esta é a única força agindo sobre a partícula, a equação fundamental nos dá

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -mg \mathbf{e}_3.$$

Denotando por  $x$ ,  $y$  e  $z$  as coordenadas de  $\mathbf{r}$ , obtemos da equação anterior o sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= 0; \\ \ddot{z} &= -mg.\end{aligned}$$

Como se trata de três equações diferenciais desacopladas, podemos integrar cada uma independentemente, obtendo

$$x = b_1 t + c_1, \quad y = b_2 t + c_2 \quad \text{e} \quad z = -\frac{mg}{2} t^2 + b_3 t + c_3,$$

em que

$$b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 \quad \text{e} \quad c_3$$

são as constantes de integração. Logo,

$$(25) \quad \mathbf{r}(t) = \left( b_1 t + c_1, b_2 t + c_2, -\frac{mg}{2} t^2 + b_3 t + c_3 \right).$$

Derivando, obtemos que a velocidade com que a partícula cai é

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (b_1, b_2, b_3 - mgt).$$

Supondo que contamos o tempo a partir do momento em que partícula foi abandonada aos efeitos do campo gravitacional, vemos que

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0),$$

porque a partícula parte do repouso. Finalmente,

$$\mathbf{r}(0) = (c_1, c_2, c_3)$$

indica que  $c_3 = h$ , pois esta foi a altura a partir da qual a partícula foi solta. Supondo que a origem do sistema de eixos está imediatamente abaixo do ponto de onde a partícula cai, teremos que  $c_1 = c_2 = 0$ . substituindo tudo isto em (25),

$$\mathbf{r}(t) = \left( 0, 0, h - \frac{mg}{2} t^2 \right).$$

Outro caso simples de analisar é aquele em que uma partícula de massa  $m$  gira em uma órbita circular de raio  $a$ . Neste caso, o movimento é dado por

$$\mathbf{r} = a \mathbf{u}_r,$$

de modo que, por (14), a aceleração será igual a

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-a\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (a\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta.$$

pois  $a$  é constante. Logo, a força

$$m \ddot{\mathbf{r}} = (-am\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (am\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta$$

tem duas componentes: uma componente tangencial cuja norma é

$$\mathbf{F}_t = (am\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta$$

e uma componente radial

$$\mathbf{F}_r = (-am\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r.$$

Lembrando que, por (11), a velocidade tangencial da partícula tem norma

$$v = \ell \dot{\theta},$$

podemos reescrever a componente radial como

$$(26) \quad \mathbf{F}_r = -\left(\frac{mv^2}{a}\right) \mathbf{u}_r.$$

Esta componente é usualmente conhecida como *força centrífuga* e é uma das forças fictícias que agem sobre corpos em movimento. Teremos muito mais a dizer sobre isso no capítulo ???.

## 5. Movimento harmônico

Para nosso terceiro exemplo, vamos usar o sistema formado por um corpo de massa  $m$  que está acoplado, horizontalmente, a uma mola, como na figura 6. Puxando o corpo de modo que a mola é comprimida de um lado e esticada do outro, esperaríamos que o corpo comece a oscilar de um lado para o outro.

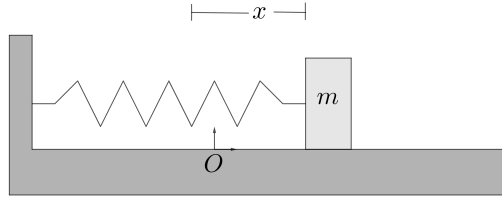


FIGURA 6. Massa  $m$  presa a uma mola.

Para simplificar o modelo, suporemos que não há nenhuma força atuando no sistema além da força da mola; nem atrito, nem resistência do ar, nem nenhuma outra força dissipativa interna à própria mola. Além disso, posicionaremos o sistema de coordenadas de maneira que a extremidade direita da mola coincida com a posição

em que a mola não está alongada, nem comprimida; que corresponde ao ponto  $O$  na figura 6. A mola é, então, alongada de um certo comprimento  $x_0$  e solta. Como estamos supondo que a única força agindo sobre o corpo vem da mola, temos que

$$\mathbf{F} = -kx,$$

em que  $k > 0$  é a constante elástica da mola. Substituindo isto na equação fundamental, obtemos

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Dividindo por  $m$  e denotando  $\sqrt{k/m}$  por  $\alpha$ , a equação se reduz a

$$(27) \quad \ddot{x} = -\alpha^2 x,$$

que é conhecida como *equação do movimento harmônico simples*. Esta é uma equação linear com coeficientes constantes, de modo que, para resolvê-la, precisamos achar sua equação característica que, no caso da equação acima, é

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0.$$

Como as soluções desta equação são números imaginários, a solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\alpha t) + c_2 \cos(\alpha t).$$

Como estamos supondo que a mola foi distendida de  $x_0$  e simplesmente solta, temos que

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Substituindo isto na equação acima, encontramos

$$x_0 = x(0) = c_2.$$

Logo,

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\alpha t) + x_0 \cos(\alpha t).$$

Por outro lado, como

$$\dot{x}(t) = c_1 \alpha \cos(\alpha t) - x_0 \alpha \operatorname{sen}(\alpha t)$$

então

$$0 = \dot{x}(0) = c_1 \alpha;$$

donde  $c_1 = 0$ , pois  $\alpha \neq 0$ . Portanto, a solução de (27) é

$$x(t) = x_0 \cos(\alpha t),$$

cujo gráfico é uma senóide.

Podemos tornar o problema um pouco mais interessante supondo que o sistema está posicionado com a mola vertical e, portanto, sujeita à força da gravidade; como ilustrado na figura 7. A única diferença deste para o anterior é a presença da força de gravidade, de modo que a equação fundamental nos dá,

$$(28) \quad \ddot{x} = -\alpha^2 x + mg.$$

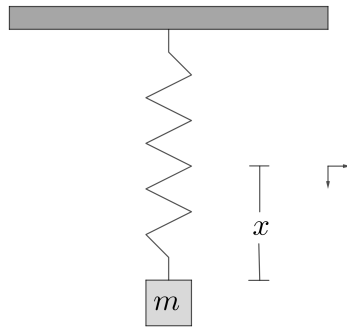


FIGURA 7. Oscilador com mola vertical

Por sorte o termo independente é uma constante e é fácil verificar que  $mg/k$  é uma solução particular desta equação. Supondo que o corpo é solto do repouso a partir da posição em que a mola não está contraída nem extendida,

$$x(t) = \left(-\frac{mg}{\alpha^2}\right)\cos(\alpha t) + \frac{mg}{\alpha^2}.$$

A única diferença desta equação para a anterior é que o gráfico está transladado para baixo, como ilustrado na figura 8, em que tomamos  $\alpha = 2$  e  $mg/\alpha^2 = 1$ . A translação ocorre porque a ação da gravidade sobre a massa  $m$  faz com que o ponto de equilíbrio do sistema agora esteja abaixo do ponto em que a mola não está distendida, nem contraída.

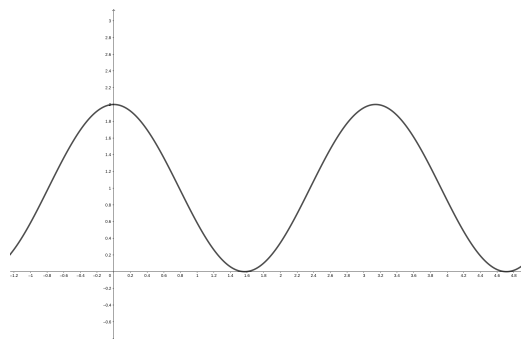


FIGURA 8. Solução do sistema massa-mola sob a gravidade.

## 6. O pêndulo

Nesta seção analisaremos um sistema que nos acompanhará, com diversas variações, até o final do curso: o pêndulo. Como sempre, começaremos analisando o caso mais simples, em que o pêndulo não está sujeito a atrito, resistência do ar ou outra força dissipativa qualquer. Além disso, suporemos que a haste do pêndulo é rígida, que sua massa é desprezível relativamente à massa  $m$  da bola do pêndulo e que o movimento ocorre em um único plano. O ponto onde a haste do pêndulo está presa ao teto é o *pivô* do pêndulo.

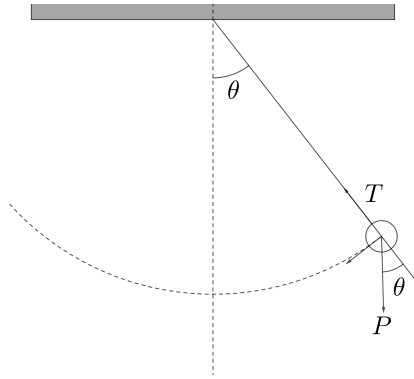


FIGURA 9. Pendulo simples.

As forças que agem sobre o pêndulo estão ilustradas na figura 9. Note que o peso  $\mathbf{P}$  do pêndulo se decompõe em duas forças: uma que está ao longo da haste, ao passo que a outra é paralela à haste e, portanto, tangente ao arco de circunferência descrito pelo pêndulo. A componente ao longo da tangente faz o pêndulo se movimentar, mas a que está ao longo da haste tem que ser compensada, de alguma forma, ou o pêndulo romperia a haste. A força oposta à componente radial do peso é a *tensão* sobre a haste, que denotamos por  $\mathbf{T}$  na figura. Teremos mais a dizer sobre ela um pouco adiante.

Seja  $\theta$  o ângulo formado pela haste do pêndulo com a vertical. Como o vetor  $\mathbf{P}$  também é vertical, a igualdade entre os ângulos correspondentes entre duas paralelas garante que o menor ângulo entre este vetor e a reta suporte da haste também é igual a  $\theta$ . Logo, a força agindo ao ao longo da radial é igual a

$$\mathbf{T} - mg \cos(\theta) \mathbf{u}_r = (mg \cos(\theta) - T) \mathbf{u}_r,$$

em que  $T = \|\mathbf{T}\|$ . Já a força que arrasta o pêndulo ao longo da direção tangente é igual é

$$-mg \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta$$



Como o movimento é plano e a haste do pêndulo é rígida de comprimento  $\ell$ ,

$$\mathbf{r}(t) = \ell \mathbf{u}_r;$$

de modo que, por (13),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\ell\dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r + \ell\ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta.$$

Portanto, pela equação fundamental,

$$m(-\ell\dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r + \ell\ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta) = (mg \cos(\theta) - T) \mathbf{u}_r + mg \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta$$

que nos dá duas equações diferenciais para

$$(29) \quad -\ell m \dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - T;$$

$$(30) \quad m \ell \ddot{\theta} = mg \sin(\theta).$$

A segunda equação é a que, de fato, nos interessa; mas, antes de analisá-la, precisamos entender o que a primeira equação está nos dizendo.

O que torna (29) surpreendente é que, uma análise superficial do comportamento da forças atuando sobre a bola pode dar a impressão de que deveríamos ter, pela terceira lei de Newton, que  $T = mg \cos(\theta)$ . Mas se isto fosse verdade, (29) nos permitiria concluir que  $\dot{\theta} = 0$ , de modo que o pêndulo não estaria se movendo, o que é, obviamente, falso. Para entender o que está acontecendo, vamos reescrever (29) na forma

$$T = mg \cos(\theta) + \ell m \dot{\theta}^2.$$

Portanto,  $T$  se opõe à soma de duas forças: a componente radial do peso e  $\ell m \dot{\theta}^2$ . Mas, por (11), a norma da velocidade tangencial  $v$  da bola é igual a  $\ell \dot{\theta}$ , de modo que

$$\ell m \dot{\theta}^2 = \frac{m(\ell \dot{\theta})^2}{\ell} = \frac{mv^2}{\ell},$$

é a força centrífuga, definida em (26). Tendo esclarecido o significado desta equação, vamos examinar a outra.

Simplificando (29), encontramos

$$(31) \quad \ddot{\theta} = \left( \frac{mg}{\ell} \right) \sin(\theta),$$

conhecida como *equação do pêndulo simples*. Como esta equação não tem solução em termos de funções elementares, faremos uma hipótese adicional: suporemos que as oscilações são pequenas, por exemplo, menores que

$$\frac{10\pi}{180} \approx 0.1745.$$

Como, pela fórmula de Taylor,

$$\sin(\theta) = \theta + O(\theta^3),$$

temos que, neste caso,

$$\sin(\theta) \approx \theta,$$

pois

$$\theta^3 < 0.1745^3 < 0.0054$$

de modo que o erro é bastante pequeno. Sob esta hipótese, a equação do pêndulo se simplifica em

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{mg}{\ell} \right) \theta;$$

que é a equação do oscilador harmônico, que já sabemos resolver. Isto não é surpreendente, porque, assim como o sistema massa-mola, a bola do pêndulo oscila periodicamente em um intervalo fixo.

## 7. Movimentos sob campos radiais

Nesta seção investigamos o movimento de uma partícula que se move em um campo radial. Para simplificar a análise suporemos que o movimento é plano, porque isto nos permite usar coordenadas polares. Contudo esta restrição é apenas aparente porque, como veremos no capítulo 5, o movimento sob um campo radial é necessariamente plano.

Por (14) temos que

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta.$$

Substituindo isto na equação do movimento (??) sob o campo radial

$$(32) \quad \mathbf{F} = -g(r) \mathbf{u}_r,$$

$$\mathbf{F} = -g(r) \mathbf{u}_r,$$

encontramos

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta = -g(r) \mathbf{u}_r.$$

Como  $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^2$ , podemos concluir que

$$(33) \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g(r) \quad \text{e que} \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Para achar a trajetória do corpo, precisamos de uma equação diferencial que descreva  $r$  em função de  $\theta$  e não em função de  $t$ . Contudo, para tornar a equação mais fácil de resolver, faremos primeiro uma mudança de variáveis de  $r$  para  $v = 1/r$ . Considerando  $v$  como função de  $\theta$  e levando em conta que  $r = 1/v$ , obtemos

$$(34) \quad \dot{r} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{dv}{d\theta}.$$

Mas,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

que é igual a zero pois, por (32),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{g(r)}{m} \mathbf{u}_r = -\frac{g(r)}{rm} \mathbf{r}.$$

Logo, o vetor

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r \mathbf{u}_r \times (\dot{r} \mathbf{u}_r + r\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) = r^2\dot{\theta}(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta)$$

é constante. Como

$$\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = r^2\dot{\theta}\|\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta\| = r^2\dot{\theta},$$

pois  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  são unitários e ortogonais, temos que

$$(35) \quad r^2\dot{\theta} = L \in \mathbb{R}$$

também é constante. Supondo que  $\theta = \theta(t)$  e considerando  $r$  como função de  $\theta$ , temos, pela regra da cadeia, que

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Substituindo em (34),

$$\dot{r} = -L \frac{dv}{d\theta}.$$

Derivando novamente e lembrando que  $L$  é constante,

$$\ddot{r} = -L \frac{d^2v}{d\theta^2} \dot{\theta}.$$

Mas, como vimos acima,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{r^2} = Lv^2,$$

pois  $r = 1/v$ . Logo,

$$\ddot{r} = -L^2v^2 \frac{d^2v}{d\theta^2}.$$

Por outro lado, elevando ao quadrado os dois lados de (35), encontramos

$$r^4\dot{\theta}^2 = L^2 \implies r\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{r^3} = L^2v^3$$

Substituindo tudo isto na primeira das duas equações em (33),

$$-L^2v^2 \frac{d^2v}{d\theta^2} - L^2v^3 = -g(1/v);$$

que equivale a

$$(36) \quad -\frac{d^2v}{d\theta^2} - v = -\frac{g(1/v)}{L^2v^2}.$$

Esta última equação é conhecida como *equação da trajetória*.

Encerramos integrando a equação da trajetória para campos radiais que variam com o inverso do quadrado da distância e mostrando que a solução é uma cônica. Se  $g(r) = k/r^2$ , então  $g(1/v) = kv^2$ . Substituindo isto na equação (36), obtemos

$$-\frac{d^2v}{d\theta^2} - v = -\frac{k}{L^2}.$$

Tomando

$$w = v - \frac{k}{L^2}$$

a equação anterior toma a forma

$$-\frac{d^2w}{d\theta^2} - w = 0;$$

pois as derivadas de  $v$  e  $w$  coincidem. Mas esta é uma equação linear, cuja solução é dada por

$$w = c \cos(\theta - \alpha_0),$$

para alguma escolha de constantes  $c$  e  $\alpha_0$ . Portanto,

$$\frac{1}{r} = v = w + \frac{k}{L^2} = c \cos(\theta - \alpha_0) + \frac{k}{L^2};$$

donde

$$(37) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}$$

em que

$$p = \frac{L^2}{k}, \quad e = \frac{cL^2}{k} \quad \text{e} \quad \phi = \theta - \alpha_0.$$

Resta-nos provar que esta equação descreve uma cônica cujo foco está na origem do sistema de coordenadas. Porém, como necessários cálculos necessários para provar isto são bastante elaborados, vamos relegá-los ao apêndice; veja p. 87.

Como parte da demonstração de que (113) representa, descobrimos que o número  $e$  é a *excentricidade* da cônica. No caso da elipse,  $e < 1$ . Se a curva for uma hipérbole teremos  $e > 1$  e, se for uma parábola,  $e = 1$ .

Certamente você já sabia que as órbitas dos planetas são elipses com o Sol em um dos focos, mas talvez nunca tenha se dado conta de que o que a lei do inverso do quadrado da distância garante é que a curva descrita pelo corpo tem que ser uma cônica. Portanto, ao menos em princípio, a órbita de um corpo celeste também poderia ser uma hipérbole ou uma parábola. Como estas duas últimas curvas são abertas, um corpo cuja órbita é hiperbólica ou parabólica nunca voltará à vizinhança do Sol, depois de sua primeira passagem. Naturalmente nenhum planeta pode ter tais órbitas, mas há muitos corpos com órbitas hiperbólicas, entre eles, cometas e objetos exteriores ao sistema solar. Dentre estes últimos o mais famoso é, provavelmente, 1I/2017 U1, conhecido como *Oumuamua*, cuja órbita, na vizinhança do Sol, tinha



FIGURA 10. Cometa C/2023 A3 (Tsuchinshan-ATLAS).

uma excentricidade 1,192; o que faz dela uma hipérbole. Por outro lado, como uma cônica só será uma parábola se sua excentricidade for exatamente igual a 1, a órbita de um corpo celeste nunca será uma parábola. Contudo há cometas cujas órbitas estão muito próximas de serem parabólicas; por exemplo, a órbita de C/2023 A3 (Tsuchinshan-ATLAS) tem excentricidade igual a 1,0001081.

### Exercícios

1. Mostre que se um corpo de massa  $m$  desliza sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal então sua aceleração terá norma igual a

$$g(\sin(\theta) - \mu_c \cos(\theta)),$$

em que  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície do plano.

## CAPÍTULO 3

### Momento linear

Neste capítulo estudamos a primeira das três leis de conservação da mecânica clássica: a conservação do momento linear e sua relação com o conceito de força.

#### 1. Momento linear

Suponhamos que, em um sistema isolado, um corpo de massa  $m_1$  exerce uma força sobre um corpo de massa  $m_2$ . Se  $\mathbf{r}_1(t)$  e  $\mathbf{r}_2(t)$  são as funções que descrevem os movimentos destes dois corpos, então, pela terceira lei de Newton,

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2.$$

Integrando os dois lados desta equação relativamente a  $t$ , obtemos

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + c,$$

em que  $c$  é a constante de integração. Assim,

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = c,$$

é constante durante todo o movimento. Este é o caso mais simples de um princípio muito mais geral mas, antes de enunciá-lo, precisamos de uma definição.

O *momento linear* de um corpo de massa  $m$  cujo movimento é descrito pela função  $\mathbf{r}(t)$  é  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ . O primeiro a definir explicitamente o momento linear foi René Descartes em seus *Principia philosophiæ*, publicado em 1644, que o chamava de *quantidade de movimento*. Na verdade, a segunda lei de Newton, como originalmente enunciada no *Principia* é uma afirmação sobre momento linear e não sobre forças. Segundo Newton

Uma mudança no movimento é proporcional à força motriz imprimida e ocorre ao longo da reta ao longo da qual a força é imprimida.

O *movimento* neste enunciado é a *quantidade de movimento* de Descartes. Portanto, usando a terminologia atual, o que Newton afirma é que, se  $\mathbf{F}$  é a força total que incide sobre um corpo de massa  $m$  e  $\mathbf{v}$  é a velocidade deste corpo, então

$$(38) \quad \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

A propósito, não é mera coincidência que os livros de Descartes e Newton tenham títulos tão parecidos, Newton escolheu seu título propositadamente semelhante ao de Descartes, a tal ponto que, na edição original as palavras *Philosophia* e *Principia* aparecem em uma fonte maior que *Naturalis* e *Mathematica*, como você pode constatar na figura 1.

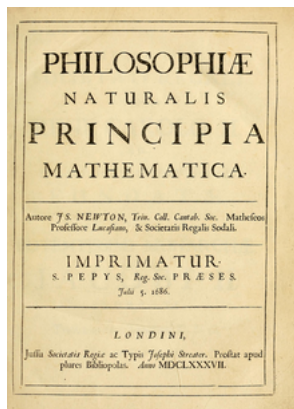


FIGURA 1. Página de rosto do *Principia* de Newton

À primeira vista (38) não pareça dizer além do que nossa velha conhecida força é igual a massa vezes aceleração; contudo, isto só é verdade em situações em que a massa não varia com o tempo. Neste ponto, muitos livros de física recorrem à teoria da relatividade, segundo à qual, à medida que uma partícula acelera, sua massa também aumenta. Entretanto, há muitos fenômenos do dia a dia que podem ser interpretados em termos de corpos de massa variável. Um deles, que estudaremos na seção ??? é o movimento de um foguete. Se modelarmos um foguete como sendo constituído por sua carcassa metálica e seu combustível, temos uma situação em que a massa varia à medida que o combustível é consumido.

## 2. Força e momento linear

Nosso primeiro resultado é uma generalização do enunciado da segunda lei de Newton, além de ser nosso primeiro resultado sobre o movimento de vários corpos. sujeitos a certas forças que podemos separar em dois grupos:

**forças internas:** que são aquelas que uma partícula exerce sobre a outra;

**forças externas:** que são aquelas aplicadas a partir de algo que está fora do sistema.

**LEI DOS MOMENTOS.** *Suponhamos que um sistema é formado por  $k$  partículas, cujos momentos lineares são iguais a  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ . Se o corpo  $i$  está sujeito a uma*

força externa  $\mathbf{F}_i$ , então

$$\sum_{i=1}^k \frac{d(\mathbf{p}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i.$$



Note que, como a demonstração deste resultado deixará claro, as forças internas não contribuem em nada para a variação do momento linear das partículas.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\mathbf{G}_{ij}$  a força que a partícula  $i$  exerce sobre a partícula  $j$ . Aplicando a equação 38 a cada uma das partículas que formam o sistema, temos que

$$\frac{d(\mathbf{p}_j)}{dt} = \mathbf{F}_j + \sum_{i=1}^k \mathbf{G}_{ij} \quad \text{para } 1 \leq j \leq k.$$

Somando sobre todas as  $k$  partículas, encontramos

$$(39) \quad \sum_{j=1}^k \frac{d(\mathbf{p}_j)}{dt} = \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \mathbf{G}_{ij}.$$

Mas,

$$(40) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq k} (\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}).$$

Contudo, pela terceira lei de Newton,

$$\mathbf{G}_{ji} = -\mathbf{G}_{ij},$$

de modo que o somatório (40) é igual a zero. Substituindo isto em (39) obtemos o resultado desejado.  $\square$

O princípio de conservação do momento linear é mera aplicação da lei dos momentos ao caso em que não há forças externas agindo sobre o sistema. Quando isto acontece, dizemos que o sistema é *isolado*.

PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR. *Em um sistema isolado, a soma dos momentos lineares de suas partículas é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando a notação do enunciado da lei dos momentos, temos que, como o sistema é isolado, então ]

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{p}_i \right) = \sum_{j=1}^k \frac{d(\mathbf{p}_j)}{dt} = 0,$$



o que nos permite concluir que

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{p}_i$$

é um vetor constante. □

Uma propriedade importante dos sistemas isolados está relacionada à noção de centro de massa. Suponhamos que um sistema isolado é formado por  $k$  partículas cujas massas são iguais a  $m_1, \dots, m_k$  e sejam  $\beta$  e  $\tilde{\beta}$  dois sistemas inerciais relativamente aos quais as velocidades das partículas  $m_1, \dots, m_k$  são, respectivamente,

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \text{ e } \tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_k.$$

Se o sistema  $\beta$  move-se com velocidade  $\mathbf{u}$  relativamente a  $\tilde{\beta}$ , então

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{u} \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k m_i (\tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{u});$$

donde,

$$\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k m_i \tilde{\mathbf{v}}_i + \left( \sum_{i=1}^k m_i \right) \mathbf{u}.$$

No caso especial em que as partículas estão paradas relativamente ao sistema  $\tilde{\beta}$ , teremos

$$\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{v}_i = \left( \sum_{i=1}^k m_i \right) \mathbf{u};$$

donde

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^k m_i}.$$

Logo, se as massas dos corpos não variam com o tempo

$$(41) \quad \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \right),$$

em que  $\mathbf{r}_i$  é o raio vetor da partícula de massa  $m_i$  relativamente ao sistema  $\beta$ . Denotando por

$$(42) \quad M = \sum_{i=1}^k m_i$$

a *massa total* do sistema, definimos o *centro de massa* do sistema como sendo o ponto cujo raio vetor é

$$(43) \quad \mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{r}_i}{M}.$$

Reescrevendo esta equação na forma

$$\sum_{i=1}^k m_k \mathbf{r}_i = M \mathbf{R}$$

e derivando relativamente a  $t$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^k m_k \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{R}}.$$

Portanto, se

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^k m_k \dot{\mathbf{r}}_i$$

é o *momento linear total* do sistema, então

$$(44) \quad \mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}.$$

Derivando (44) relativamente ao tempo e usando a lei dos momentos, obtemos

$$(45) \quad \mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = M \ddot{\mathbf{R}};$$

em que  $\mathbf{F}$  é a soma das forças externas que agem sobre as partículas do sistem. Logo, *um sistema se move como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa.*

### 3. Movimento de um foguete

A grande diferença entre o movimento de um foguete e aqueles que analisamos até aqui é o foguete está perdendo massa, sob a forma de alguma substância que é jogada para trás em alta velocidade.

Começaremos nossa análise com um caso um pouco mais simples. Imagine um brinquedo que consiste de um carrinho de massa  $m_c$  que se move com velocidade  $\mathbf{v}_0$  e que, depois de um certo tempo, ejeta uma bola de massa  $m_b$ . Se  $\mathbf{v}_d$  for a velocidade do carrinho depois de ejetar a bola, então, pela conservação do momento linear

$$(m_c + m_b) \mathbf{v}_0 = m_c \mathbf{v}_d;$$

donde

$$\mathbf{v}_d = \frac{m_c + m_b}{m_c} \mathbf{v}_0 > \mathbf{v}_0,$$

pois a massa é sempre um número real positivo. Podemos usar isto como uma aproximação grosseira do que acontece em um foguete. Uma diferença importante é que, no jato que move o foguete, muitas moléculas são emitidas a cada fração de tempo.

Para simplificar nossa análise, introduziremos algumas hipóteses adicionais sobre nosso foguete. Em primeiro lugar, suporemos que o movimento ocorre ao longo de uma reta, de modo que só precisamos nos preocupar em analisar a velocidade escalar

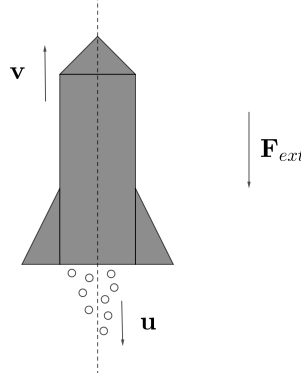


FIGURA 2. Os círculos representam as moléculas ejetadas pelo foguete.

do foguete. Em segundo lugar, admitiremos que o material que é ejetado pelo foguete é emitido a uma taxa constante. Em outras palavras, a velocidade com que o material é emitido é constante relativamente ao referencial do foguete. A terceira, e última, hipótese é que o foguete está sujeito, apenas, à ação de uma força externa constante, que age na mesma direção, mas sentido oposto, do movimento retilíneo do foguete, como ilustrado na figura 2.

Seja  $M(t)$  o momento linear do foguete no tempo  $t$ . Se  $m(t)$  e  $v(t)$  são, respectivamente, a massa e a velocidade escalar do foguete no tempo  $t$ , então

$$M(t) = m(t)v(t).$$

Pela lei dos momentos, a variação do momento linear tem que ser igual à força externa constante  $\mathbf{F}_{ext}$  que está sendo aplicada ao foguete; isto é,

$$(46) \quad \mathbf{F}_{ext} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t}$$

Para podermos calcular o limite acima, precisamos determinar o momento do sistema depois de um intervalo de tempo  $\Delta t$ .

A primeira coisa a fazer é esclarecer de que sistemas estamos falando. A resposta é que, no momento  $t$ , trata-se do foguete e seu combustível; ao passo que, no tempo  $t + \Delta t$ , devemos considerar o foguete, o que restou de combustível dentro dele e a fração de combustível que foi ejetada ao longo do intervalo  $\Delta t$ . No tempo  $t$  o momento linear do sistema em questão é  $m(t)v(t)$ ; o que acontece depois do intervalo  $\Delta t$  requer uma análise mais cuidadosa.

Conforme as observações do parágrafo anterior, o momento linear do sistema tem duas contribuições. A primeira é igual ao produto da massa

$$m(t + \Delta t),$$

correspondente ao envólucro do foguete e ao combustível que sobrou dentro dele, pela velocidade

$$v(t + \Delta t)$$

desta parte do sistema. A segunda contribuição vem da massa ejetada, que é igual a

$$m(t) - m(t + \Delta t)$$

multiplicada pela velocidade desta massa relativamente ao sistema inercial. Como a massa é ejetada a uma velocidade constante  $u$ , *relativamente ao foguete*, sua velocidade relativamente ao sistema inercial será igual a

$$v(t) - u.$$

O sinal de menos associado a  $u$  indica que a velocidade da massa ejetada aponta na direção oposta à velocidade  $v(t)$ . Portanto, a contribuição do foguete e a sobra de combustível ao momento linear do sistema que estamos considerando é igual a

$$m(t + \Delta t)v(t + \Delta t),$$

ao passo que a contribuição do combustível ejetado é igual a

$$(m(t) - m(t + \Delta t))(v(t) - u).$$

Logo,

$$(47) \quad M(t + \Delta t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) + (m(t) - m(t + \Delta t))(v(t) - u).$$

Para concluir nossa análise, precisamos determinar aproximações para  $m(t + \Delta t)$  e  $v(t + \Delta t)$ . Fazemos isto aplicando a fórmula de Taylor, o que nos dá

$$m(t + \Delta t) = m(t) + \dot{m}(t)\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

para a massa e

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \dot{v}(t)\Delta t + O((\Delta t)^2),$$

para a velocidade. Assim,

$$m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) = m(t)v(t) + (\dot{m}(t)v(t) + m(t)\dot{v}(t))\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

ao passo que

$$(m(t) - m(t + \Delta t))(v(t) - u) = -\dot{m}(t)(v(t) - u)\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

Substituindo tudo isto em (47) e fazendo os devidos cancelamentos,

$$(48) \quad M(t + \Delta t) = m(t)v(t) + (m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t)u)\Delta t + O((\Delta t)^2).$$

Logo,

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t)u + O((\Delta t)).$$

Portanto, por (46),

$$(49) \quad \mathbf{F} = m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t)u,$$

que é conhecida como *equação do foguete*.

Aplicaremos a equação do foguete em duas situações simples. A primeira é aquela em que o foguete está no espaço interestelar e não sobre a ação de nenhuma força significativa. Neste caso, podemos supor que a força externa é nula, de modo que a equação se reduz a

$$m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t)u = 0.$$

Separando variáveis e integrando relativamente ao tempo,

$$\int_0^{t_f} \dot{v}(t)dt = -u \int_0^{t_f} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}dt,$$

em que  $t_f$  é o tempo ao final do qual o combustível foi esgotado. Fazendo uma mudança de variáveis do lado direito, podemos reescrever isto na forma

$$\int_0^{t_f} \dot{v}(t)dt = -u \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m},$$

em que  $m_0$  é a massa inicial do foguete e seu combustível e  $m_f$  é a massa do envólucro do foguete. Calculando as integrais,

$$v(t) - v(t_0) = -u \log(m_f) + u \log(m_0).$$

Portanto, se o foguete partiu do repouso,

$$v(t_f) = u \log\left(\frac{m_0}{m_f}\right),$$

será sua velocidade quando todo o combustível tiver sido ejetado.

O outro caso que analisaremos é o de um foguete de brinquedo que atinge uma altura de apenas alguns metros, na ausência de resistência do ar. A razão para a restrição na altura é que ela nos permite considerar a força da gravidade como constante. Neste caso, a equação do foguete se resume a

$$-m(t)g = m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t)u.$$

Separando variáveis e integrando,

$$\int_0^{t_f} \dot{v}(t)dt + \int_0^{t_f} gdt = -u \int_0^{t_f} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}dt;$$

donde

$$v(t_f) = u \log\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - g(t_f - t_0).$$

Analisar, realisticamente, o comportamento de um foguete que sobe da superfície da Terra para o espaço é muito mais difícil. Além da variação da atração gravitacional com o inverso do quadrado da distância, teríamos que levar em consideração forças resultantes do movimento de rotação da Terra.

## CAPÍTULO 4

### Conservação da energia

Ao longo de todo o texto adotaremos a seguinte convenção. Se  $P$  é um ponto do plano e  $O$  é a origem do sistema de coordenadas que estamos utilizando, então o ponto  $P$  será identificado com o vetor  $\overrightarrow{OP}$ , que vai de  $O$  a  $P$ . Portanto, uma vez que um sistema de coordenadas tenha sido fixado, podemos considerar os pontos do plano como sendo vetores. Assim, um ponto genérico do plano será denotado por  $\mathbf{r}$  e sua distância à origem por  $r$ .

#### 1. Movimento circular

Antes de começar a discutir movimento circular, vale lembrar que, por definição

$$\mathbf{u}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

e também que

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r.$$

Suponhamos, agora, que uma partícula se move em torno de um círculo de raio  $r$ . A equação do movimento nos dá,

$$\mathbf{r}(t) = r \mathbf{u}_r,$$

em que o ângulo  $\theta$  varia com o tempo  $t$ . Derivando, obtemos a velocidade,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta = r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta,$$

porque  $r$  é constante. Para obter a aceleração, derivamos novamente,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r.$$

Logo, a aceleração tem duas componentes, a componente radial, cuja norma é  $r \dot{\theta}^2$ , e a componente tangencial, cuja norma é  $r \ddot{\theta}$ . Frequentemente vamos nos referir a estas componentes como *aceleração radial* e *aceleração tangencial*.

Como  $\dot{\theta}$  é a velocidade angular e como estamos supondo que o raio é fixo, a velocidade da partícula no ponto em que o ângulo é  $\theta$  será igual a  $v = r \dot{\theta}$ . Portanto,

$$r \dot{\theta}^2 = r \left( \frac{v}{r} \right)^2 = \frac{v^2}{r};$$

de modo que a aceleração radial em um movimento circular será

$$(50) \quad \mathbf{a}_r = \frac{v^2}{r}.$$

## 2. Campos de vetores

Seja  $W$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^3$ . Um *campo de vetores* em  $W$  é uma aplicação

$$F : W \longrightarrow \mathbb{R}^3;$$

que associa a cada ponto  $p$  de  $W$  um vetor. Dependendo do campo o vetor pode representar, por exemplo, a velocidade ou a aceleração que incidiria sobre uma partícula, com determinadas propriedades, que fosse colocada no ponto  $p$ . No caso do campo gravitacional, a propriedade relevante é a massa da partícula; no caso do campo elétrico, sua carga; e assim por diante.

De nosso ponto de vista os dois campos mais importantes são o campo constante e os campos radiais, porque são usados para representar a ação da gravidade; perto do chão, no primeiro caso, e longe dele, no segundo. Matematicamente, o *campo constante*

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

é definido em todo o espaço  $\mathbb{R}^3$  pela regra  $\mathcal{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}$ , em que  $\mathbf{u}$  é um vetor do  $\mathbb{R}^3$ , o mesmo para todos os pontos do espaço. No caso específico do campo gravitacional na vizinhança da Terra, temos que

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

é definido por  $\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -g\mathbf{e}_3$ , em que  $g$  é igual a aceleração da gravidade na superfície da Terra; isto é,  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ . Um campo constante vertical, como o campo gravitacional na proximidade da Terra, é ilustrado na figura 1.

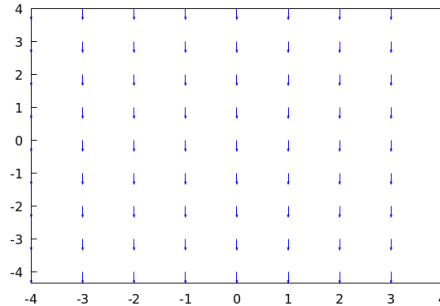


FIGURA 1. Campo constante vertical.

Um campos de vetores

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

é *radial* se existe uma função

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}) = -f(r) \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Note que  $\mathbf{r}/r$  é o vetor unitário na mesma direção e sentido de  $\mathbf{r}$ . No caso específico do campo gravitacional, ilustrado na figura 3, temos que

$$f(r) = \frac{GM}{r^2};$$

em que  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  é a massa do corpo que gera o campo e que escolhemos como centro do sistema de coordenadas.

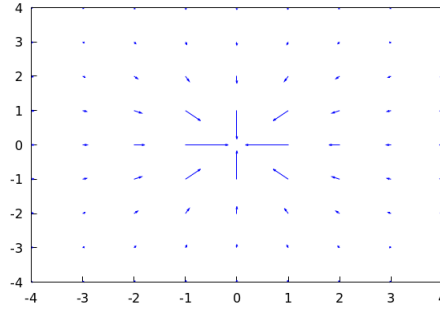


FIGURA 2. Campo gravitacional.

### 3. Conservação da energia

Uma propriedade muito importante dos campos radiais é que podem ser definidos a partir do gradiente de uma função real. Seja

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

o campo radial definido por

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}) = -f(r) \mathbf{u}_r.$$

Lembre-se que

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função que toma valores em  $\mathbb{R}$ . Como estamos supondo que  $f$  é diferenciável, ela tem uma primitiva

$$F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$



tal que

$$\frac{dF}{dt}(r) = f(r);$$

isto é,

$$G(r) = \int g(r)dr.$$

Seja  $U(r) = F(r)$ . Como estamos considerando o movimento como ocorrendo no  $\mathbb{R}^3$ , temos que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Logo,

$$U(x, y, z) = G(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dG}{dr}(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Mas,

$$\frac{dG}{dr} = g,$$

donde,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Por outro lado, aplicando, novamente, a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(r) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{f(r)x}{r}.$$

Um cálculo semelhante mostra que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{f(r)y}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{f(r)z}{r}.$$

Substituindo em

$$\nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

o que fizemos acima, encontramos

$$\nabla U = \frac{f(r)}{r}(x, y, z) = f(r) \mathbf{u}_r.$$

Portanto,

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}) = -\nabla U.$$

Os campos com esta propriedade são conhecidos como conservativos. Para nossos propósitos, outro campo conservativo importante é o campo constante. Por exemplo, se

$$U(\mathbf{r}) = gz,$$

para alguma constante  $g$ , então

$$-\nabla U = -g\mathbf{e}_3$$

é um campo constante vertical que, quando  $g$  é a aceleração da gravidade, representa o campo gravitacional na vizinhança do solo.

De uma maneira geral, um campo de vetores

$$\mathcal{F} : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definido em um aberto  $W \subset \mathbb{R}^3$  é *conservativo* se existe uma função

$$U : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}),$$

para todo  $\mathbf{r} \in W$ . Dizemos que  $U$  é a *função potencial* do campo  $\mathcal{F}$ , terminologia que foi introduzida pelo matemático inglês George Green (1793-1841). Um detalhe importante é que, se  $U$  é uma função potencial do campo  $\mathcal{F}$  e  $c$  é uma constante, então  $U + c$  também é uma função potencial para o mesmo campo. Isto decorre do fato de que as derivadas parciais de  $U$  e de  $U + c$ , relativamente a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , coincidem. Isto nos permite estabelecer a posição em que o potencial se anula em qualquer ponto que desejarmos.

Para esclarecer a razão pela qual os campos conservativos têm este nome, tomaremos como ponto de partida da equação do movimento

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla U(\mathbf{r}(t))$$

de uma partícula sujeita a um  $\mathcal{F}$  que tem  $U$  como função potencial. Calculando o produto interno dos dois lados desta expressão com  $\dot{\mathbf{r}}$ , obtemos

$$\langle \dot{\mathbf{r}} | \ddot{\mathbf{r}} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{r}} | \nabla U(\mathbf{v}) \rangle.$$

Integrando estas funções reais relativamente a  $t$ ,

$$(51) \quad \int \langle \dot{\mathbf{r}} | \ddot{\mathbf{r}} \rangle dt = - \int \langle \dot{\mathbf{r}} | \nabla U(\mathbf{v}) \rangle dt.$$

Como

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad \text{e} \quad \nabla U(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

verificamos que

$$\langle \dot{\mathbf{r}} | \nabla U(\mathbf{r}) \rangle = \dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial U}{\partial z}$$

donde, pela regra da cadeia,

$$\langle \dot{\mathbf{r}} | \nabla U(\mathbf{r}) \rangle = \frac{d}{dt}(U(\mathbf{r})(t)).$$

Portanto, ao calcular as integrais em (51), obtemos

$$\frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{r}} | \dot{\mathbf{r}} \rangle = -U(\mathbf{r}) + c,$$

para alguma contante  $c$ . Multiplicando tudo por pela massa  $m$  da partícula que descreve o movimento e rearrumando a equação,

$$\frac{m}{2} \langle \dot{\mathbf{r}} | \dot{\mathbf{r}} \rangle + mU(\mathbf{r}) = mc.$$

Denotando  $\dot{\mathbf{r}}$  por  $\mathbf{v}$  e  $\langle \dot{\mathbf{r}} | \dot{\mathbf{r}} \rangle$  por  $\mathbf{v}^2$ , esta equação toma a forma

$$\frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + mU(\mathbf{r}) = mc;$$

isto é, somando a *energia cinética*

$$\frac{m}{2} \mathbf{v}^2$$

da partícula de massa  $m$  à sua energia potencial

$$mU(\mathbf{r})$$

obtemos a *energia total*  $mc$  desta partícula. Como  $mc$  é constante, os cálculos que fizemos provam o seguinte resultado.

**TEOREMA 3.1.** *A energia total de uma partícula que se move, sujeita apenas a um campo conservativo, é constante.*

Este teorema está na origem de um dos princípios fundamentais da física, o da conservação da energia. O princípio tem uma história longa e complexa. O primeiro a definir energia cinética parece ter sido Leibniz; mas, em seus estudos sobre o movimento Galileu já havia considerado sistemas que, de nosso ponto de vista, representam a conversão de energia cinética em potencial. Do ponto de vista atual o princípio pode ser formulado da seguinte maneira.

**CONSERVAÇÃO DA ENERGIA.** *A energia total de um sistema isolado é constante.*

Como nosso interesse resume-se à dinâmica clássica, a conservação da energia nos sistemas que estudaremos limita-se aos casos em que os campos sob o qual estamos trabalhando são conservativo. Assim, ao incluir, por exemplo, o atrito em nossos modelos, teremos sistemas que, de nosso ponto de vista, não são isolados, uma vez que representam situações em que há perda de energia sob a forma de calor e som.

#### 4. O pêndulo simples

Nesta seção aplicaremos o princípio de conservação da energia para estudar o movimento de um pêndulo que se move em um plano. Suporemos que o movimento

ocorre na ausência de resistência do ar e atrito, que sua haste é rígida e tem comprimento  $\ell$ , e que a bola na extremidade da haste tem massa  $m$ . As dimensões da bola e a massa da haste serão consideradas desprezíveis e, portanto, ignoradas.

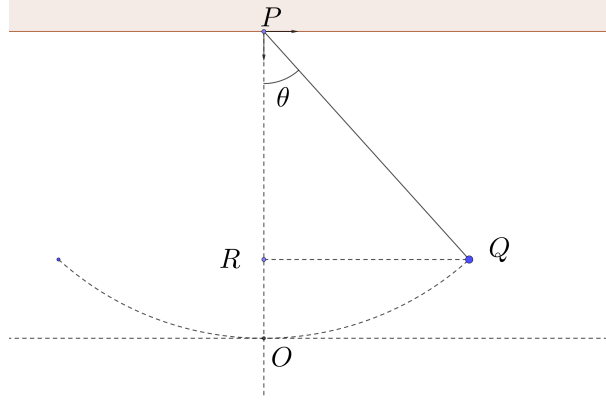


FIGURA 3. Pêndulo simples.

Para simplificar as equações, suporemos que o potencial é zero na reta horizontal que passa pelo ponto mais baixo da trajetória do pêndulo, denotado por  $O$  na figura 3. Como a haste do pêndulo tem comprimento  $\ell$ , a altura da bola no ponto  $Q$  é igual a

$$\overline{PO} - \overline{PR} = \ell - \overline{PR}$$

Por sua vez,

$$\overline{PR} = \overline{PQ} \cos(\theta) = \ell \cos(\theta);$$

donde,

$$(52) \quad \overline{RO} = \ell(1 - \cos(\theta)).$$

Por causa da geometria do problema, convém posicionar o sistema de eixos de uma maneira pouco usual, com o eixo das abscissas apontando verticalmente para baixo e o das ordenadas apontando horizontalmente para a direita. Posicionando os eixos desta maneira, as coordenadas da bola do pêndulo serão

$$x = \ell \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \ell \sin(\theta).$$

Com isto,

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2.$$

Mas o campo é constante e, portanto, conservativo, com função potencial  $U(h) = gh$ , em que  $h$  é a altura relativamente à reta horizontal por  $O$ . Então, a conservação da energia nos dá

$$(53) \quad \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos(\theta)) = E,$$

em que a altura da bola do pêndulo quando a haste forma um ângulo  $\theta$  com a vertical é dada pela equação (52). Supondo que o pêndulo foi solto, do repouso, quando a haste formava um ângulo  $\theta_0$  com  $\overleftrightarrow{OP}$ , temos, por (52), que

$$E = mgl(1 - \cos(\theta_0)).$$

Substituindo isto em (53) e fazendo os devidos cancelamentos

$$\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 - g\cos(\theta) = -g\cos(\theta_0).$$

Rearrmando,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

Porém, a equação toma uma forma mais adequada aos nossos propósitos se usarmos a substituição  $\theta = 2\phi$ , porque, pela fórmula do cosseno do dobro de um ângulo,

$$\cos(\theta) = \cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2(\phi).$$

Substituindo na equação acima e simplificando,

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{\ell}(\sin^2(\phi_0) - \sin^2(\phi)).$$

Pondo  $\sin^2(\phi_0)$  em evidência

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g\sin^2(\phi_0)}{\ell} \left( 1 - \frac{1}{\sin^2(\phi_0)} \sin^2(\phi) \right).$$

Escrevendo

$$k = \frac{1}{\sin(\phi_0)},$$

a equação anterior pode ser reescrita na forma

$$(54) \quad \dot{\phi}^2 = \frac{g}{k^2\ell} (1 - k^2 \sin^2(\phi)).$$

Extraindo a raiz,

$$\dot{\phi} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}.$$

Ainda que a equação (54) se aplique, indiferentemente, quando  $\dot{\theta} < 0$  e quando  $\dot{\theta} > 0$ , o mesmo não se dá depois de extrairmos as raízes. Como o pêndulo foi solto, do repouso quando a haste formava um ângulo igual a  $\theta_0 = 2\phi_0$  com a reta  $\overleftrightarrow{OP}$ , teremos que

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)} < 0$$

até a haste formar um ângulo igual a  $-\theta_0 = -2\phi_0$  com  $\overleftrightarrow{PO}$ ; deste ponto em diante,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)} > 0,$$

até o pêndulo voltar à posição em que o ângulo entre a haste e  $\overleftarrow{PO}$  é igual a  $\theta_0$ . Portanto, como vamos integrar a equação depois de extraída a raiz, precisamos considerar estes dois casos separadamente. No que segue, resolveremos apenas

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)},$$

já que a solução da outra equação diferencial é inteiramente análoga. Separando variáveis, obtemos

$$\frac{\dot{\phi}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}} = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Supondo que  $\phi(t) < -\phi_0$ , podemos integrar esta expressão dos dois lados entre 0 e  $t$ ,

$$\int_0^t \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}} = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{\ell}}t,$$

donde

$$(55) \quad \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}} = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{\ell}}t,$$

A integral do lado esquerdo desta equação não é uma função elementar; isto é, não pode ser expressa em termos de polinômios, exponenciais, logaritmos e funções trigonométricas. Entretanto, esta integral aparece com tanta frequência em problemas de geometria e física que tem um nome e uma notação especial. Assim,

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}}$$

é conhecida como *integral elíptica do primeiro tipo*. Portanto,

$$t = -k\sqrt{\frac{\ell}{g}}(F(\phi, k) - F(\phi_0, k)).$$

Um caso especial do pêndulo que é muito conhecido, e historicamente muito importante, é aquele em que as oscilações são pequenas, por exemplo, menores que

$$\frac{10\pi}{180} \approx 0.1745.$$

Como, pela fórmula de Taylor,

$$\sin(\alpha) = \alpha + O(\alpha^3),$$

temos que, neste caso,

$$\sin(\alpha) \approx \alpha,$$

pois

$$\alpha^3 < 0.1745^3 < 0.0054$$

de modo que o erro é bastante pequeno. Substituindo  $\text{sen}(\phi)$  por  $\phi$  e

$$k\phi = \frac{\phi}{\text{sen}(\phi_0)}$$

por  $\phi/\phi_0$  em (55),

$$\int_{-\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\phi^2}} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t,$$

Fazendo  $u = k\phi$  e simplificando, obtemos

$$\int_{-1}^{\phi/\phi_0} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\sqrt{\frac{g}{\ell}} t.$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\arcsen(u)) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}},$$

temos que

$$\arcsen\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) - \arcsen(1) = -\sqrt{\frac{g}{\ell}} t,$$

donde

$$\arcsen\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) = -\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(56) \quad \frac{\phi}{\phi_0} = -\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

pois o seno é uma função ímpar. Mas o pêndulo começa a recuar se  $\phi = -\phi_0$ ; isto é, quando

$$\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t - \frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

o que ocorre se

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2};$$

donde,

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \pi.$$

Como isto corresponde a metade de uma oscilação completa do pêndulo, podemos concluir que o período do pêndulo, quando as oscilações são inferiores a  $10^\circ$ , é aproximadamente igual a

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

que é a fórmula que aprendemos no ensino médio.

### 5. O pêndulo interrompido

Para os propósitos deste exemplo, suporemos que o cabo do pêndulo é flexível, mas inextensível e com massa desprezível relativamente à massa da bola. Como na seção anterior, a massa da bola do pêndulo será denotada por  $m$  e o comprimento do cabo por  $\ell$ . Além disso, admitiremos que o pêndulo *não* pode oscilar livremente, porque um prego foi fixado em um ponto  $Q$  da reta vertical que passa pelo pivô do pêndulo, como na figura 4. O pêndulo é, então, solto do repouso, com seu cabo totalmente estendido, formando um ângulo  $\theta$  com a reta  $\overleftrightarrow{OP}$ . Suporemos, finalmente que, no momento em que é solta, a bola está do lado direito de  $\overleftrightarrow{OP}$ .

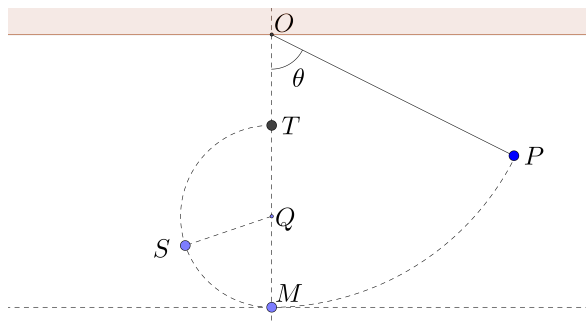


FIGURA 4. Pêndulo interrompido

Sob estas condições a bola vai descrever um arco de raio  $\overline{OP} = \ell$  até atingir o ponto  $M$  na reta  $\overleftrightarrow{OP}$ . Neste ponto o cabo atinge o prego posicionado no ponto  $Q$  e a bola começa a descrever outra circunferência, desta vez com raio  $\overline{QM} < \overline{OP}$ . Nosso objetivo é resolver o seguinte problema.

**PROBLEMA.** *Encontre o menor ângulo  $\theta$  para o qual a bola do pêndulo descreve a semicircunferência  $\widehat{MST}$ .*

Como sempre, trabalharemos na ausência de atrito e de resistência do ar, de modo que a energia é conservada. Sob estas condições, a energia total  $E$  será a mesma em  $P$ , em  $M$  e em  $T$ . Estabelecendo a reta horizontal pelo ponto  $M$ , como correspondendo ao nível de potencial zero, teremos que, como na seção anterior,

$$E = mg\ell(1 - \cos(\theta))$$

pois o pêndulo é solto do repouso e, portanto, no ponto  $P$  toda a sua energia é potencial. Denotando por  $h$  a distância  $\overline{OQ}$  entre o pivô e o prego e por  $v_T$  a velocidade escalar da bola em  $T$ , temos que, neste ponto, a energia total será

$$E = \frac{mv_T^2}{2} + 2mg(\ell - h)$$



pois  $\overline{TM} = 2(\ell - h)$ . Logo,

$$(57) \quad mg\ell(1 - \cos(\theta)) = \frac{mv_T^2}{2} + 2mg(\ell - h).$$

Para que a bola percorra o semicírculo  $\widehat{MST}$ , o cabo não pode ficar folgado antes de atingir o ponto  $T$ . Mas o cabo só ficará folgado quando a tensão sobre o cabo do pêndulo for nula. Para que isto aconteça, a aceleração radial devido à força centrífuga tem que ser igual à componente radial da aceleração da gravidade naquele ponto. Como em  $T$  a aceleração radial aponta para cima, o cabo fica folgado em  $T$  quando ela é, em módulo, igual a  $g$ . Portanto, pela fórmula (50), isto vai ocorrer quando

$$\frac{v_T^2}{(\ell - h)} = g;$$

donde,

$$v_T^2 = g(\ell - h).$$

Substituindo em (57),

$$mg\ell(1 - \cos(\theta)) = \frac{mg(\ell - h)}{2} + 2mg(\ell - h).$$

Simplificando,

$$\ell(1 - \cos(\theta)) = \frac{(\ell - h)}{2} + 2(\ell - h) = \frac{5}{2}(\ell - h).$$

Resolvendo, encontramos

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\ell} \left( \ell - \frac{5}{2}(\ell - h) \right) = \frac{5}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right) - \frac{3}{2}.$$

Como

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

teremos que

$$-1 \leq \frac{5}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right) - \frac{3}{2} \leq 1;$$

que equivale a

$$\frac{1}{5} \leq \frac{h}{\ell} \leq 1.$$

Em particular, quando  $h < \ell/5$  a bola não consegue descrever um arco de círculo e atingir  $T$ .

## CAPÍTULO 5

### Momento angular

#### 1. Momento angular e torque

Lembre-se do que acontece quando você tentar mover um objeto usando uma alavanca. Em primeiro lugar, como o dito atribuído a Arquimedes nos lembra, você precisa de um ponto de apoio. Mas, é isto que faz a alavanca tão útil, quando maior o braço da alavanca, menor é a força que precisa ser aplicada para mover o objeto. Estas observações são formalizadas na noção de torque.

O *torque* de uma força  $\mathbf{F}$  relativamente a um ponto  $P$  é definido como o produto vetorial com a força do vetor que vai de  $P$  ao ponto de aplicação da força. Escolhendo o sistema de coordenadas de maneira que o ponto  $P$  é a origem, teremos que

$$(58) \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Como

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}},$$

podemos reescrever o torque como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Contudo,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}},$$

pois

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0.$$

Logo,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p});$$

isto é, o torque é igual à variação de

$$(59) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

relativamente ao tempo. O vetor  $\mathbf{L}$  é o *momento angular* de uma partícula de massa  $m$ . Temos, com isto, que:

o momento angular está para o torque assim como o momento linear está para a força.

Vejamos o que pode ser dito sobre o movimento de uma partícula, quando o torque relativamente à origem é zero. Por (58), isto significa que o momento angular é um vetor constante  $\mathbf{L}$ . Precisamos considerar dois casos. Se o momento angular não for nulo, então, por (59), o raio vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  é sempre ortogonal a  $\mathbf{L}$ , de modo que o movimento da partícula dá no plano ortogonal a  $\mathbf{L}$ . Por outro lado, se o momento angular se anular, então

$$m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = 0.$$

Mas isto implica que

$$\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin(\theta) = 0,$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$ . Portanto,

$$\mathbf{r} = 0 \text{ ou } \dot{\mathbf{r}} = 0 \text{ ou } \sin(\theta) = 0.$$

Nos dois primeiros casos a partícula está parado, porque sua velocidade é zero; no terceiro caso,  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$  são colineares, de modo que o movimento ocorre ao longo de uma reta. Portanto, quando o momento angular é nulo, ou a partícula fica parado, ou se move ao longo de uma reta.

Um exemplo importante de campo para o qual o momento angular se anula é aquele em que o campo é radial. Suponhamos que a força seja dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -f(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

em que  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função real. Então, o torque relativamente à origem será

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -f(r) \left( \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0,$$

o que mostra que o momento angular é realmente constante quando o campo é radial.

## 2. Sistemas de várias partículas

Tudo o que fizemos na seção anterior refere-se ao momento angular de uma única partícula, quando o sistema contém  $n$  partículas, somamos os momentos angulares relativamente a cada uma delas. Suponhamos que haja  $k$  partículas e que a  $i$ -ésima partícula tenha momento linear  $\mathbf{p}_i$  e raio vetor  $\mathbf{r}_i$ . O momento angular deste sistema relativamente à origem será

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Como veremos adiante, esta maneira de definir o momento angular em sistemas de  $k$  partículas tem uma propriedade importante, que mostra que esta deve mesmo ser a maneira correta de proceder.

Nosso próximo passo consistirá em relacionar  $\mathbf{L}_O$  ao momento angular  $\mathbf{L}_Q$ , do mesmo sistema de  $k$  partículas, só que relativamente a um ponto  $Q \neq O$  fixo. A primeira coisa a notar é que, se  $\mathbf{r}_Q$  é o raio vetor do ponto  $Q$ , então

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_Q = \dot{\mathbf{r}}_i,$$

para cada  $1 \leq i \leq k$ , pois estamos supondo  $Q$  fixo. Somando os momentos angulares, relativamente a  $Q$ , de cada uma das partículas,

$$\mathbf{L}_Q = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Usando a distributividade do produto vetorial sobre a soma,

$$(60) \quad \mathbf{L}_Q = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_Q \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{L}_O - \mathbf{r}_Q \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Como

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

é o centro de massa do sistema, podemos reescrever (60) na forma

$$(61) \quad \mathbf{L}_Q = \mathbf{L}_O - \mu \mathbf{r}_Q \times \dot{\mathbf{R}},$$

em que

$$\mu = \sum_{i=1}^n m_i$$

é a massa total do sistema. Para encontrar o torque correspondente, basta derivar (61) relativamente ao tempo. Fazendo isto encontramos

$$\dot{\mathbf{L}}_Q = \dot{\mathbf{L}}_O - \mu \dot{\mathbf{r}}_Q \times \dot{\mathbf{R}} - \mathbf{r}_Q \times \ddot{\mathbf{R}}.$$

Logo,

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \boldsymbol{\tau}_O - \mu \dot{\mathbf{r}}_Q \times \dot{\mathbf{R}} - \mu \mathbf{r}_Q \times \ddot{\mathbf{R}}.$$

Quando  $Q$  coincide com o centro de massa, temos  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{R}$ , de modo que  $\dot{\mathbf{r}}_Q = \dot{\mathbf{R}}$ ; o que faz com que  $\dot{\mathbf{r}}_Q \times \dot{\mathbf{R}}$  se anule. Portanto, usando  $\tau_{CM}$  para denotar o torque relativo ao centro de massa, obtemos

$$(62) \quad \boldsymbol{\tau}_{CM} = \boldsymbol{\tau}_O - \mu \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}.$$

Um caso especial desta última fórmula é aquele em que a força que age sobre os corpos é a gravidade perto do solo. Neste caso temos, pela definição de torque, que

$$\boldsymbol{\tau}_{CM} = \sum_{i=1}^k ((\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i g \mathbf{u}_3) = \left( \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{r}_i \right) \times g \mathbf{u}_3 - \mathbf{R} \times \left( \sum_{i=1}^K m_i \right) g \mathbf{u}_3.$$

Mas,

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mu \mathbf{R},$$

donde,

$$\boldsymbol{\tau}_{CM} = \mu \mathbf{R} \times g \mathbf{u}_3 - (\mathbf{R} \times \mu g \mathbf{u}_3) = 0.$$

Substituindo em (62) e rearrumando,

$$(63) \quad \boldsymbol{\tau}_O = \mu \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}.$$

Portanto, temos o seguinte resultado.

**TEOREMA 2.1.** *Suponhamos que um sistema de  $k$  partículas move-se sujeito apenas à força da gravidade proximidade do solo. Então o torque sobre este sistema é igual àquele de uma única partícula de massa igual à de todo o sistema, localizada no centro de massa deste último.*

Podemos usar este resultado para justificar uma afirmação que aprendemos na escola: *um corpo cai quando é inclinado de modo que seu centro de massa se move para fora de sua base*. Para simplificar, digamos que o corpo é uma caixa retangular. Como o movimento ocorre como se o peso da caixa estivesse todo concentrado no centro de massa, tudo o que precisamos saber é onde cairia um corpo situado neste ponto: a caixa cairá do lado onde este suposto corpo viria a cair. Para decidir isto fazemos a projeção ortogonal do centro de massa e da base da caixa sobre a superfície plana onde a caixa está apoiada. Se a projeção do centro de massa estiver fora da projeção da base, a caixa tombará; caso contrário voltará à sua posição original; os dois casos são ilustrados na figura 1, na qual  $CM$  indica a posição do centro de massa da caixa.

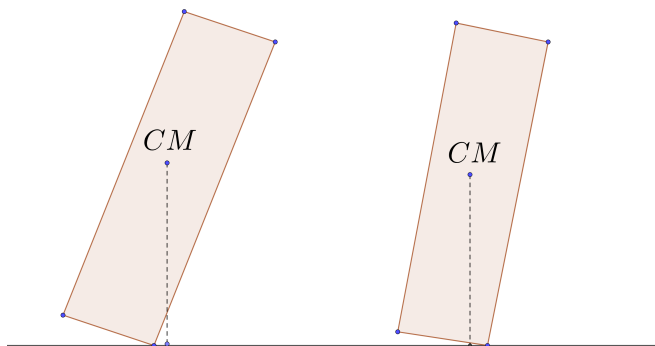


FIGURA 1. A caixa da esquerda cairá, a da direita voltará à posição original.

### 3. Coordenadas em rotação

Na seção anterior vimos como relacionar o momento angular e o torque, de um sistema de várias partículas, calculados relativamente à origem e a um outro ponto

do  $\mathbb{R}^3$ . Nesta seção investigaremos como relacionar vetores quando um dos sistemas de coordenadas roda relativamente ao outro. Na próxima seção, aplicaremos o que aprendermos aqui ao momento angular e ao torque.

Sejam  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  os raios vetores de uma mesma partícula relativamente dois sistemas de coordenadas de mesma origem  $O$ , definidos pelas bases ortonormais

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}.$$

Suporemos, ao longo deste capítulo, que a base  $\beta$  está parada, mas que  $\beta'$  gira em torno dela. Por isso, diremos que  $\beta$  é a *base fixa* e que  $\beta'$  é a *base móvel*.

Como  $\beta'$  gira em torno de  $\beta$ , então existe uma matriz de rotação  $Q(t)$  tal que

$$(64) \quad \mathbf{r}(t) = Q(t) \mathbf{r}'(t).$$

Derivando relativamente ao tempo,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{Q}(t) \mathbf{r}'(t) + Q(t) \dot{\mathbf{r}}'(t).$$

Supondo que a partícula está em repouso relativamente ao sistema  $\beta'$ , obtemos

$$(65) \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{Q}(t) \mathbf{r}'(t).$$

Como  $Q$  é ortogonal,  $Q(t)^{-1} = Q(t)^\top$ . Logo, por (64),

$$Q(t)^\top \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t);$$

o que nos permite reescrever (65) na forma

$$(66) \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{Q}(t) Q(t)^\top \mathbf{r}(t).$$

Porém, derivando  $Q(t)Q(t)^\top = I$ , em que  $I$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ , encontramos

$$\dot{Q}(t)Q^\top(t) + Q(t)\dot{Q}(t)^\top = 0$$

Denotando  $\dot{Q}(t)Q(t)^\top$  por  $A$ , segue-se da equação anterior que

$$A^\top = (\dot{Q}(t)Q(t)^\top)^\top = Q(t)\dot{Q}(t)^\top = -\dot{Q}(t)Q^\top(t) = -A.$$

As matrizes com esta propriedade são conhecidas como *antissimétricas*. Mas, se  $A$  é uma matriz antissimétrica  $3 \times 3$ , existem números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, se  $\mathcal{A}$  for o conjunto das matrizes antissimétricas  $3 \times 3$ , podemos definir uma aplicação

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

pela regra

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cy + bz \\ cx - az \\ -bx + ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

de modo que, se  $A$  for uma matriz antissimétrica, então

$$(67) \quad Av = \phi(A) \times v,$$

para qualquer vetor  $v \in \mathbb{R}^3$ . Como  $\dot{Q}(t)Q(t)^\top$  é antissimétrica, podemos usar (67) para reescrever (66) na forma

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \phi(\dot{Q}(t)Q(t)^\top) \times \mathbf{r}(t).$$

Para descomplicar a notação, denotaremos

$$\phi(\dot{Q}(t)Q(t)^\top)$$

por  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ , de modo que

$$(68) \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t).$$

Em geral, se  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{v}'(t)$  são as coordenadas de um vetor relativamente às bases  $\beta$  e  $\beta'$ , obtemos de  $\mathbf{v}(t) = Q(t)\mathbf{v}'(t)$  que  $\mathbf{v}'(t) = Q(t)^\top \mathbf{v}(t)$ . Logo,

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{Q}(t)\mathbf{v}'(t) + Q(t)\dot{\mathbf{v}}'(t) = \dot{Q}(t)Q(t)^\top \mathbf{v}(t) + Q(t)\dot{\mathbf{v}}'(t);$$

donde

$$(69) \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(t) + Q(t)\dot{\mathbf{v}}'(t).$$

Com isto estamos prontos para relacionar o momento angular e o torque em sistemas que rodam um em relação ao outro.

#### 4. O tensor de inércia

Começamos com uma definição. Um sistema é um *corpo rígido* se a distância entre suas partículas é sempre a mesma ao longo de todo o movimento. Para nossos propósitos, canecas, bolas de sinuca, mesas e cadeiras são corpos rígidos, mas não um balão que sobe atmosfera acima, porque a diferença de pressão do ar faz que vá inflando à medida que sobe.

É possível que a menção a canecas, mesas e cadeiras tenha lhe deixado um tanto inquieto. Afinal, estes são sólidos, mas, até aqui, lidamos apenas com sistemas formados por uma quantidade finita de partículas. A saída, contudo, é simples: se considerarmos estes corpos do ponto de vista microscópico, veremos que são formados por moléculas que, apesar de muitas, são em quantidade finita. Num corpo real, a distância entre as moléculas não é fixa, como estamos exigindo que seja o caso de um corpo rígido. Porém, diante das muitas hipóteses simplificadoras que estamos fazendo (por exemplo, nada de ar ou atrito), esta até que parece bastante inócua.

Seja, portanto, um corpo rígido formado por  $k$  partículas de massas iguais a  $m_1, \dots, m_k$  e digamos que  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  seja o raio vetor da partícula  $m_i$  relativamente à base fixa  $\beta$ . O momento angular deste sistema de  $k$  partículas será

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

que, por (68), pode ser reescrito como

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^k m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))$$

Lembrando que

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3$$

obtemos

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^k m_i (\langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i \rangle \boldsymbol{\omega} - \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{r}_i \rangle \mathbf{r}_i);$$

que, em notação matricial, equivale a

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^k m_i ((\mathbf{r}_i^\top \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i^\top \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i).$$

Como  $\mathbf{r}_i^\top \cdot \boldsymbol{\omega}$  é uma função real, esta última equação pode ser reescrita na forma

$$(70) \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^k m_i ((\mathbf{r}_i^\top \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i^\top) \boldsymbol{\omega}).$$

Observe que  $\mathbf{r}_i^\top \cdot \mathbf{r}_i$  é um escalar, mas  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i^\top$  é uma matriz  $3 \times 3$ . Denotando por  $I$  a matriz identidade  $3 \times 3$ , temos, portanto, que

$$(\mathbf{r}_i^\top \cdot \mathbf{r}_i) I - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i^\top)$$

é uma matriz  $3 \times 3$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Logo, pondo  $\boldsymbol{\omega}$  em evidência em (70), obtemos

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^k m_i ((\mathbf{r}_i^\top \cdot \mathbf{r}_i) I - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i^\top)) \boldsymbol{\omega},$$



Denotando por  $B$  a matriz  $3 \times 3$ ,

$$(71) \quad \sum_{i=1}^k m_i ((\mathbf{r}_i^\top \cdot \mathbf{r}_i)I - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i^\top))$$

o momento angular do sistema de  $k$  partículas pode, então, ser escrito, compactamente, na forma

$$(72) \quad \mathbf{L} = B \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Suponhamos, agora, que  $\beta'$  é uma base ortonormal fixa no corpo rígido e que, portanto, gira relativamente a  $\beta$ . Denotando por  $\mathbf{r}'_i$  os raios vetores dos pontos do corpo relativamente a  $\beta'$  temos que

$$\mathbf{r}_i = Q \mathbf{r}'_i \text{ e que } \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{Q} \mathbf{r}'_i$$

pois os vetores  $\mathbf{r}'_i$  são constantes. Substituindo em (71), encontramos

$$(73) \quad B = Q \mathbb{I} Q^\top,$$

em que

$$(74) \quad \mathbb{I} = \sum_{i=1}^k m_i ((\mathbf{r}'_i{}^\top \cdot \mathbf{r}'_i)I - (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}'_i{}^\top))$$

é o chamado *tensor de inércia* do corpo. Substituindo (73) em (72),

$$\mathbf{L} = (Q \mathbb{I} Q^\top) \cdot \boldsymbol{\omega};$$

donde

$$(75) \quad Q^\top \mathbf{L} = \mathbb{I} \cdot (Q^\top \boldsymbol{\omega}).$$

Vamos nos referir a

$$(76) \quad \mathbf{L}' = Q^\top \mathbf{L} \text{ e } \boldsymbol{\Omega} = Q^\top \boldsymbol{\omega}$$

como, respectivamente, o momento angular e a velocidade angular do corpo nas coordenadas  $\beta'$ . Isto nos permite reescrever (75) como

$$(77) \quad \mathbf{L}' = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

Note que, ao contrário de  $B$ , a matriz  $\mathbb{I}$  é constante, porque o corpo é rígido. Pelas propriedades da transposta de uma matriz,

$$\mathbb{I}^\top = \mathbb{I};$$

de modo que  $\mathbb{I}$  é um matriz simétrica com coeficientes constantes. Portanto, pelo teorema espectral, é possível escolher os vetores do sistema  $\beta'$  de modo que

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix},$$

em que  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são números reais. Sob esta escolha de  $\beta'$ , os eixos correspondentes a  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  são conhecidos como *eixos principais* do corpo rígido. Já os números  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os *momentos de inércia* do corpo.

Para encerrar, vamos calcular o tensor de inércia de um anel circular de raio  $a$  cuja espessura é desprezível relativamente ao seu diâmetro. A primeira coisa a fazer é determinar como (74) deveria ser expressa no caso de um objeto contínuo. Para isto, suponhamos que

$$\mathbf{r}'_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Considerando este vetor como matriz coluna, temos que

$$\mathbf{r}'_i{}^\top \mathbf{r}'_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

ao passo que

$$\mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i{}^\top = \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix};$$

de modo que

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k m_i (z_i^2 + y_i^2) & -\sum_{i=1}^k m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^k m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^k m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^k m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_{i=1}^k m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^k m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^k m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^k m_i (y_i^2 + x_i^2) \end{bmatrix}.$$

Para calcular o tensor de inércia de um corpo contínuo basta substituir os somatórios por integrais e as massas  $m_i$  por elementos infinitesimais de massa  $dm$ . Suponhamos que o anel, cujo tensor de inércia queremos calcular, tem densidade uniforme. Então os elementos infinitesimais de massa do anel serão

$$dm = \frac{M}{2\pi} d\theta.$$

Portanto, como

$$\mathbb{I}_{1,1} = \int_A (y_i^2 + z_i^2) dm,$$

teremos, em coordenadas polares, que

$$\mathbb{I}_{1,1} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(\theta) d\theta.$$

Contudo,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \left[ \frac{-\cos(\theta) \sin(\theta) + \theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Portanto,

$$\mathbb{I}_{1,1} = \frac{Ma^2}{2}.$$

Um cálculo semelhante mostra que

$$\mathbb{I}_{2,2} = \frac{Ma^2}{2}.$$

Por outro lado,

$$\mathbb{I}_{3,3} = \int_A (x_i^2 + y_i^2) dm,$$

de modo que, em coordenadas polares,

$$\mathbb{I}_{3,3} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 d\theta = Ma^2.$$

Passando às entradas fora da diagonal, calcularemos

$$\mathbb{I}_{1,2} = \int_A (x_i y_i) dm.$$

Usando coordenadas polares mais uma vez, obtemos

$$\mathbb{I}_{1,2} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{Ma^2}{2\pi} [\sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0.$$

Todas as demais entradas de  $\mathbb{I}$  são definidas a partir da terceira coordenada do raio vetor dos pontos do anel e, portanto, são nulas, já que o anel está contido no plano  $xy$ . Reunindo tudo isto, mostramos que

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} Ma^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & Ma^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & Ma^2 \end{bmatrix}.$$

## 5. Equações de Euler

O que já fizemos nos permite deduzir as famosas equações de Euler, que descrevem o movimento de rotação de um corpo rígido na base móvel. Para isso, aplicamos a equação (69) ao momento angular  $\mathbf{L}$ , o que nos dá

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + Q\dot{\mathbf{L}}'.$$

Logo, por (76),

$$\dot{\mathbf{L}} = Q\boldsymbol{\Omega} \times Q\mathbf{L}' + Q\dot{\mathbf{L}}'.$$

Como  $Q$  é uma rotação, isto equivale a

$$\dot{\mathbf{L}} = Q(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}') + Q\dot{\mathbf{L}}';$$

donde,

$$Q^\top \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}' + \dot{\mathbf{L}}'.$$

Como  $\dot{\mathbf{L}}$  é o torque aplicado ao sistema na base fixa, vamos nos referir a  $Q^\top \dot{\mathbf{L}}$  como *torque na base móvel* e denotá-lo por  $\boldsymbol{\tau}'$ . Com esta notação, a equação anterior pode ser reescrita como

$$(78) \quad \dot{\mathbf{L}}' = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}' + \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{L}' \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}'.$$

Finalmente, usando (77) e lembrando que  $\mathbb{I}$  é uma matriz cujos coeficientes são constantes,

$$(79) \quad \mathbb{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbb{I}\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}',$$

que são as *equações de Euler* expressas em forma vetorial. Note que o produto vetorial na primeira parcela do lado direito desta equação *não* é nulo, porque  $\mathbb{I}\boldsymbol{\Omega}$  *não* é um múltiplo escalar de  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Supondo que a base móvel corresponde aos eixos principais e que

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}' = (\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3),$$

a equação vetorial (79), se reduz ao sistema

$$(80) \quad \begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + \tau'_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 + \tau'_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 + \tau'_3. \end{aligned}$$

Não esqueça que estas equações descrevem a rotação do ponto de vista da base móvel; isto é, de um observador que está *sobre* o objeto em rotação. Voltaremos a este ponto adiante.

Vejamos o que as equações de Euler nos dizem sobre o movimento de um *pião esférico*, que é o nome dado ao caso em que os três momentos de inércia coincidem. Denotando

$$I_1 = I_2 = I_3$$

simplesmente por  $I$ , o sistema (80) tem a forma

$$\begin{aligned} I \dot{\Omega}_1 &= \tau'_1 \\ I \dot{\Omega}_2 &= \tau'_2 \\ I \dot{\Omega}_3 &= \tau'_3; \end{aligned}$$

de modo que as equações são desacopladas e podem ser resolvidas separadamente. Lembrando que  $I$  é constante, mas  $\boldsymbol{\tau}'$  pode variar com o tempo, temos que

$$\Omega_i = \frac{1}{I} \int_0^t \tau'_i dt.$$

Apesar de simples, esta solução é bastante insatisfatória, por duas razões. A primeira é que precisamos conhecer  $\boldsymbol{\tau}'$  na base móvel e, normalmente, isto requer que conheçamos a matriz  $Q$ ; a segunda é que, dependendo das regras que definem as funções  $\tau'_i$ , a integral pode não ter uma solução fechada.

Outro caso especial interessante é aquele em que o torque é nulo; de modo que o sistema se reduz a

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 \\ I_2 \dot{\Omega}_1 &= (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 \\ I_3 \dot{\Omega}_1 &= (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2. \end{aligned}$$

Sem nenhuma restrição adicional, a solução do sistema requer o uso de funções elípticas; os detalhes podem ser encontrados [Whittaker, *Analytical Dynamics*, p. 144–147]. Contudo, se supusermos que dois dos momentos de inércia do corpo são iguais, o sistema tem solução analítica relativamente simples. Digamos, por exemplo, que  $I = I_1 = I_2$ . Com isto o sistema será

$$\begin{aligned} I \dot{\Omega}_1 &= (I - I_3) \Omega_2 \Omega_3 \\ I \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I) \Omega_1 \Omega_3 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= 0; \end{aligned}$$

de modo que  $\Omega_3$  é constante. Pondo

$$\alpha = \frac{(I - I_3) \Omega_3}{I}$$

o sistema se simplifica para

$$(81) \quad \dot{\Omega}_1 = \alpha \Omega_2$$

$$(82) \quad \dot{\Omega}_2 = -\alpha \Omega_1.$$

Derivando (81) relativamente a  $t$ ,

$$\ddot{\Omega}_1 = \alpha \dot{\Omega}_2,$$

e substituindo (82) em seu lado direito,

$$\ddot{\Omega}_1 = -\alpha^2 \Omega_1,$$

que é uma equação linear de segunda ordem em  $\Omega_1$ . Procedendo de maneira análoga com a segunda equação, obtemos o sistema de segunda ordem

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega}_1 + \alpha^2 \Omega_1 &= 0 \\ \ddot{\Omega}_2 + \alpha^2 \Omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

cujas equações têm a vantagem de serem desacopladas. Como o polinômio característico de ambas as equações é

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0,$$

que não tem raízes reais, suas soluções podem ser expressas em termos de funções trigonométricas. Mas, se

$$\Omega_2 = c \cos(\alpha t),$$

então por (??),

$$\dot{\Omega}_1 = \alpha \Omega_2 = c\alpha \cos(\alpha t).$$

Integrando, obtemos

$$\Omega_1 = c \sin(\alpha t).$$

Portanto,

$$\mathbf{\Omega} = (c \sin(\alpha t), c \cos(\alpha t), \Omega_3).$$

Lembrando que  $\Omega_3$  é constante, vemos que  $\mathbf{\Omega}$  descreve um ponto que se move em uma circunferência

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c^2,$$

de raio  $c$ ; como ilustrado na figura 2. Portanto, o eixo de rotação do corpo gira em torno do eixo  $\mathbf{e}_3$  do corpo, produzindo o comportamento conhecido como *precessão* do eixo de rotação.

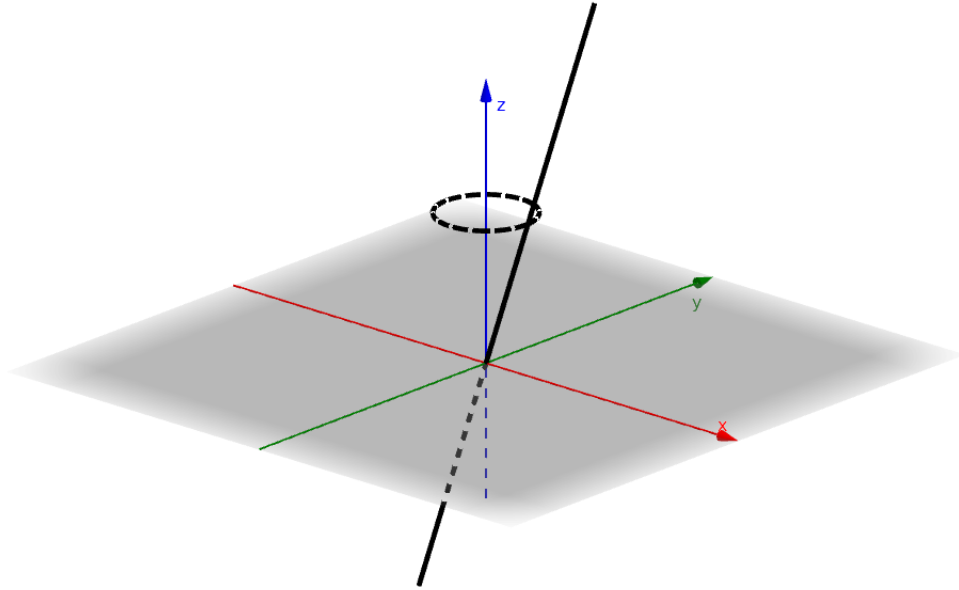


FIGURA 2. Precessão do eixo de rotação

É possível que você já tenha ouvido a palavra precessão antes, no contexto do fenômeno conhecido como precessão dos equinócios, cuja descoberta é atribuída ao astrônomo grego Hiparco, que viveu no século 2 a.C.. Os equinócios são os pontos em que a trajetória aparente do sol na esfera celeste, chamada de eclíptica, intersecta o equador celeste, que é a projeção do equador da Terra sobre a esfera celeste. Hiparco teria sido o primeiro a perceber que a posição dos equinócios muda de ano para ano, deslocando-se para oeste relativamente às estrelas fixas. Isto ocorre porque o eixo da Terra muda de orientação por causa do efeito da gravitação do Sol e da Lua.

Outra aplicação simples das equações de Euler diz respeito à estabilidade sob rotação de um sólido, por exemplo, um satélite artificial, em torno de um de seus eixos principais.

Suponhamos que os momentos de inércia de um corpo rígido sejam  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  e que  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  sejam os respectivos eixos principais. Faremos o corpo girar em torno de  $\mathbf{u}_1$  e analisaremos o que acontece quando ocorre uma leve perturbação relativamente a um dos outros eixos. Em outras palavras, estamos supondo que  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  são muito pequenos quando comparados a  $\Omega_1$ . Para simplificar o argumento, suporemos que a velocidade angular  $\Omega_1$  é constante e que não há forças externas atuando sobre o corpo, de modo que o torque é nulo.

Começamos derivando a segunda equação (80) com respeito ao tempo, o que nos dá

$$I_2 \ddot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)(\dot{\Omega}_1 \Omega_3 + \Omega_1 \dot{\Omega}_3).$$

Substituindo nesta equação os valores de  $\dot{\Omega}_1$  e  $\dot{\Omega}_3$  obtidos a partir da primeira e terceira equações em (80), encontramos

$$(83) \quad I_2 \ddot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \left( \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \Omega_2 \Omega_3^2 + \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \Omega_1^2 \Omega_2 \right).$$

Como estamos considerando  $\Omega_3$  como sendo muito menor que  $\Omega_1$ , a parcela que contém  $\Omega_3^2$  do lado direito de (83) pode ser desprezada. Fazendo isto, obtemos

$$I_2 \ddot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \Omega_1^2 \Omega_2.$$

Como estamos supondo que  $\Omega_1$  é constante, podemos reescrever a equação anterior como

$$(84) \quad \ddot{\Omega}_2 = \lambda \Omega_2.$$

em que

$$\lambda = \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)\Omega_1^2}{I_2 I_3}$$

é um número real. Mas a solução geral de (84), é

$$\Omega_2 = \frac{c}{\lambda} \exp(\lambda t),$$

para alguma constante  $c \neq 0$ . Portanto, o comportamento de  $\Omega_2$  depende, de maneira crucial, do sinal de  $\lambda$ . Se  $\lambda < 0$ , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_2 = c \lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(\lambda t)) = 0;$$

já no caso em que  $\lambda > 0$ , teremos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_2 = c \lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(\lambda t)) = \pm\infty.$$

No primeiro caso, quaisquer pequenas oscilações que surgirem relativamente ao eixo  $\mathbf{u}_2$  tenderão a desaparecer com o passar do tempo; no segundo caso ocorre exatamente o oposto, com as oscilações sendo amplificadas ao longo do tempo.

Contudo, como  $\Omega_1^2$  e os momentos de inércia são números reais positivos, quem controla o sinal de  $\lambda$  é o termo

$$(I_1 - I_2)(I_3 - I_1);$$

que só é negativo se

$$(I_1 < I_2 \text{ e } I_3 > I_1) \text{ ou } (I_1 > I_2 \text{ e } I_3 < I_1).$$

Portanto, quando o movimento de rotação só será instável se  $I_1$  estiver entre os valores de  $I_2$  e  $I_3$ .

Para fixar as ideias, suponhamos que o corpo rígido seja uma caixa, cujos três lados têm tamanhos bem diferentes. Isto fará com que os três momentos de inércia tenham valores distintos, com os momentos de inércia maiores correspondendo aos lados maiores. Segundo a análise acima, se você jogar a caixa para o ar de modo que ela gire em torno dos eixos principais correspondentes ao maior, ou ao menor, dos três momentos de inércia a caixa subirá e descenderá sem oscilações laterais. Já se a escolha recair sobre o eixo principal correspondente ao lado de tamanho intermediário da caixa, ela vai girar em torno deste eixo oscilando de um lado para o outro. Apesar das inúmeras hipóteses simplificadoras que fizemos em nossa análise, esta conclusão é facilmente confirmada se você fizer o experimento.





## CAPÍTULO 6

### Equações de Lagrange

#### 1. Equações de Lagrange em dimensão um

Seja  $q(t)$  uma função do tempo tal que

$$(85) \quad x(t) = x(q(t), t).$$

Note que estamos considerando  $x$  como função do tempo de duas maneiras diferentes: diretamente, mas também através da coordenada  $q$  que, por sua vez, é função de  $t$ ; por exemplo,

$$(86) \quad x(t) = t \cdot q(t)^2 + 2 \cdot t^3 - q(t)^5.$$

Nos argumentos a seguir, consideraremos, frequentemente,  $t$ ,  $q$  e  $\dot{q}$  como variáveis independentes e levaremos isto em conta ao calcular a derivada de uma dada função relativamente a  $t$ ,  $q$  e  $\dot{q}$ . Para entender porque podemos fazer isto, lembre-se que uma função  $\psi(t) = \phi(q, \dot{q}, t)$  deve ser considerada como a composta de  $\phi(x, y, z)$  com as funções que levam  $x$  em  $q(t)$ ,  $y$  em  $\dot{q}(t)$  e  $z$  em  $t$ . Assim, pela regra da cadeia

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(q, \dot{q}, t) \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(q, \dot{q}, t) \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(q, \dot{q}, t) \cdot \frac{dt}{dt};$$

donde

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(q, \dot{q}, t) \cdot \dot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(q, \dot{q}, t) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(q, \dot{q}, t).$$

Para não ter que multiplicar o número de variáveis, abreviaremos esta expressão escrevendo simplesmente,

$$(87) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

deixando a seu cargo a interpretação correta. Por exemplo, aplicando (87) a (85), obtemos

$$(88) \quad \dot{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t};$$

por outro lado, segue-se de (88) e de nossas convenções que

$$(89) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}.$$

No exemplo (86),

$$\frac{\partial x(t)}{\partial q} = 2tq(t) - 5q(t)^4 \quad \text{e} \quad \frac{\partial x(t)}{\partial t} = q(t)^2 + 6t^2;$$

de modo que, pela fórmula (88),

$$\dot{x}(t) = (2tq(t) - 5q(t)^4)\dot{q}(t) + q(t)^2 + 6t^2;$$

donde

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = 2tq(t) - 5q(t)^4.$$

Quando formos usar a fórmula (87), diremos, simplesmente, que vamos aplicar a *regra da cadeia*, porque (87) não passa de uma maneira compacta de escrever aquela regra quando uma das funções tem três variáveis.

Feito este preâmbulo, podemos começar o argumento propriamente dito para derivar as equações do movimento de Lagrange. Começamos derivando a energia cinética

$$(90) \quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

relativamente a  $\dot{x}$ ,

$$(91) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p.$$

Mas, (85) nos permite considerar  $T$  como função de  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $t$ . Temos de (85) e (90) que

$$(92) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = p \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = p \cdot \frac{\partial x}{\partial q};$$

em que a última igualdade é consequência de (89). Derivando (92) relativamente a  $t$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + p \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right).$$

Como estamos supondo que as funções que consideramos têm tantas derivadas quantas sejam necessárias, podemos permutar as derivadas na segunda parcela do lado direito, obtendo

$$(93) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + p \cdot \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \right).$$

Substituindo o  $p$  na segunda parcela do lado direito de (93) pela expressão em (91),

$$(94) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \right).$$

Contudo,

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}.$$

Aplicando isto à última parcela de (94), encontramos

$$(95) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial q}.$$

Porém, pela equação do movimento,

$$\dot{p} = F(x, \dot{x}, t)$$

em que  $F$  é a força que atua sobre o sistema, o que nos permite rescrever (95) na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = F(x, \dot{x}, t) \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial q}.$$

ou, na forma usual,

$$(96) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = F(x, \dot{x}, t) \cdot \frac{\partial x}{\partial q}.$$

Suponhamos que o movimento ocorre em um campo conservativo cujo potencial é  $U(x)$ , mas que o corpo também está sujeito a uma força não conservativa  $f$ , como atrito ou resistência do ar. Neste caso,

$$F = f - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Escrevendo  $V(q) = U(x(q, \dot{q}, t))$ , obtemos

$$F \frac{\partial x}{\partial q} = f \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} = f \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q}.$$

Substituindo em (96),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = f \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q};$$

que equivale a

$$(97) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q} = f \frac{\partial x}{\partial q}.$$

Escrevendo  $\mathcal{L} = T - V$  e levando em conta que  $V$  não depende de  $\dot{q}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$$

Substituindo em (97),

$$(98) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = f \frac{\partial x}{\partial q}.$$

A função  $\mathcal{L}$  é o *lagrangiano* do sistema e

$$Q = f \frac{\partial x}{\partial q}$$

é a *força generalizada* à qual o sistema está sujeito; finalmente  $q$  é a *coordenada generalizada*. Quando toda a força que atua no sistema é conservativa, a equação (98) se simplifica em

$$(99) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.$$

Vejamos como aplicar a equação de Lagrange ao caso do pêndulo plano, sem atrito ou arrasto, sujeito apenas à gravidade, que já investigamos antes à la Newton. Usando  $\theta$  como coordenada generalizada, temos que a posição do pêndulo é dada por

$$x = \ell \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \ell \sin(\theta),$$

em que  $\ell$  é o comprimento da haste do pêndulo. Como  $\ell$  é constante, mas  $\theta$  varia com o tempo,

$$\dot{x} = -\ell \sin(\theta) \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \ell \cos(\theta) \dot{\theta}.$$

Se a massa da bola do pêndulo é  $m$ , a energia cinética do sistema será

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2}.$$

Como a única força agindo sobre o pêndulo é a gravidade,

$$V(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta)).$$

Portanto, o lagrangiano do pêndulo plano será

$$\mathcal{L} = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} - mg\ell(1 - \cos(\theta)).$$

Como a única coordenada generalizada neste caso é  $\theta$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg\ell \sin(\theta).$$

Por (99), a equação do pêndulo será

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\theta}) + mg\ell \sin(\theta) = m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta);$$

ou, depois dos devidos cancelamentos,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0.$$

## 2. Equações de Lagrange em $n$ dimensões

Repetindo, passo-a-passo, a demonstração que fizemos no caso unidimensional, e tomando os devidos cuidados, veremos que as equações de Lagrange para um sistema no qual há  $n$  coordenadas generalizadas é

$$(100) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n;$$

em que o lagrangiano  $\mathcal{L} = T - V$  é a diferença entre a energia cinética de todo o sistema e o potencial das forças conservativas que atuam sobre ele, ao passo que

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \left( f_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)$$

Como cada partícula requer três coordenadas de posição, precisaremos de  $n = 3k$  coordenadas de posição

$$x_1, \dots, x_n$$

para descrever um sistema em que há  $k$  partículas. Por sua vez, cada uma destas coordenadas dependerá das  $n$  coordenadas generalizadas

$$q_1, \dots, q_n;$$

de modo que

$$(101) \quad x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t);$$

donde

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i(q_1, \dots, q_n, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right).$$

Logo, para cada  $1 \leq i \leq n$ ,

$$(102) \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i}.$$

Para simplificar os índices nos somatórios, adotaremos a convenção de que se

$$x_j, x_{j+1} \text{ e } x_{j+2}$$

são as coordenadas da  $j$ -ésima partícula, então

$$m_j = m_{j+1} = m_{j+2}$$

é a sua massa. Como no caso unidimensional, começaremos derivando a energia cinética

$$T = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

só que, desta vez, relativamente a  $\dot{x}_j$ , o que nos dá

$$(103) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j = p_j,$$

que é o momento linear da partícula  $m_i$ . Por outro lado, (101) nos permite escrever

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{x}_i(q_1, \dots, q_n, t)^2;$$

de forma que, pela regra da cadeia,

$$(104) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j};$$

em que a última igualdade segue-se de (103). Derivando (104) relativamente a  $t$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \dot{p}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + p_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right).$$

Como estamos supondo que as funções que consideramos têm tantas derivadas quantas sejam necessárias, podemos permutar as derivadas na segunda parcela do lado direito, obtendo

$$(105) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \dot{p}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + p_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right)$$

Substituindo o  $p_i$  na segunda parcela do lado direito de (105) pela expressão em (103),

$$(106) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \dot{p}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right).$$

Aplicando a regra da cadeia ao segundo somatório do lado direito,

$$(107) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \dot{p}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Porém, pela equação do movimento,

$$\dot{p}_i = F_i(x, \dot{x}, t),$$

em que  $F_i$  é a força que atua sobre o sistema, o que nos permite rescrever (107) na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left( F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

ou, na forma usual,

$$(108) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Suponhamos que o movimento ocorre em um campo conservativo cujo potencial é  $U(x_1, \dots, x_n)$ , mas que a partícula  $m_i$  também está sujeita a uma força não conservativa  $f_i$ . Neste caso,

$$F_i = f_i - \nabla U.$$

Escrevendo

$$V(q_1, \dots, q_n) = U(x_1(q_1, \dots, q_n, t), \dots, x_n(q_1, \dots, q_n, t))$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left( f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Denotando por

$$\mathcal{L} = T - V$$

o lagrangiano, a equação (108) toma a forma

$$(109) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q_j,$$

em que os

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left( f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right),$$

são as *forças generalizadas*, que provêm das forças não conservativas às quais o sistema está sujeito. Quando toda a força que atua no sistema é conservativa, a equação (109) se simplifica em

$$(110) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0.$$

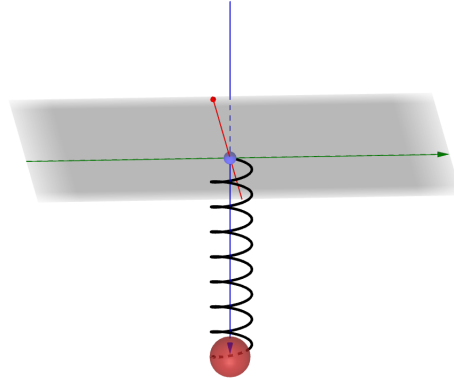


FIGURA 1. Um pêndulo elástico.

Usaremos as equações que acabamos de obter para modelar um pêndulo plano no qual a haste é uma mola, conhecido como *pêndulo elástico*. Suponhamos que o sistema de coordenadas tem centro no pivô do pêndulo, com o eixo  $x$  apontando para baixo e o eixo  $y$  para a direita. Como o movimento é plano, podemos escrever

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = r \sin(\theta);$$



só que, desta vez, tanto  $\theta$  quanto  $r$  variam com o tempo e fazem o papel de coordenadas generalizadas. Como

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta}$$

temos que

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

Por outro lado, supondo que o nível de potencial zero ocorre na altura em que o pivô do pêndulo está localizado, temos que

$$U = \frac{k}{2}(r - \ell)^2 - mgr \cos(\theta),$$

em que  $\ell$  é o comprimento da mola quando não está esticada, nem comprimida. Logo,

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{2}(r - \ell)^2 + mgr \cos(\theta).$$

Derivando,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - \ell) + mg \cos(\theta).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}$$

e a equação de Lagrange correspondente é

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - \ell) + mg \cos(\theta).$$

Passando à segunda coordenada generalizada, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgr \sin(\theta).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

e a equação de Lagrange correspondente é

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = -mgr \sin(\theta).$$

Portanto, as equações que descrevem o comportamento do pêndulo elástico são

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}(r - \ell) + g \cos(\theta) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{r} \sin(\theta) - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \end{aligned}$$

Este sistema não tem solução em termos de funções elementares, de modo que, para resolvê-lo é necessário usar algoritmos numéricos.

Nosso segundo exemplo é o sistema formado por uma conta de massa  $m$ , dessas usadas para fazer um colar, que está enfiada em um aro circular de raio  $R$ , no qual

desliza sem atrito. O arco está na posição vertical, apoiado em uma superfície horizontal em seu ponto mais baixo. Nosso objetivo é determinar a posição da conta quando o arco é posto a girar em torno de seu diâmetro vertical com velocidade angular constante  $\omega$ .

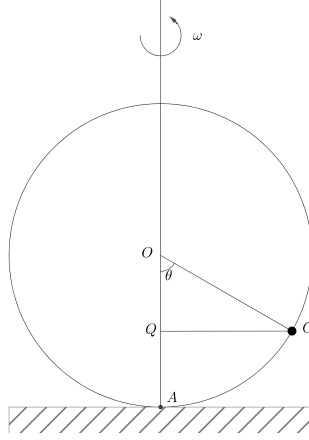


FIGURA 2. Conta em aro circular.

O sistema é ilustrado na figura 2, na qual  $C$  é a posição da conta,  $OQ$  é o eixo em torno do qual o aro gira e  $A$  é o ponto no qual o aro se apoia sobre a superfície horizontal. Seja  $OC$  o raio que vai do centro do arco até a posição da conta em  $C$ . Adotaremos o ângulo  $\theta$  entre  $OC$  e o eixo vertical  $OQ$  como coordenada generalizada.

Sejam  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  vetores unitários cuja origem comum está em  $A$ . Supondo  $\mathbf{e}_1$  ortogonal ao plano do papel e  $\mathbf{e}_3$  ao longo da semirreta  $\overrightarrow{AO}$ , teremos que  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$  aponta para a direita.

Digamos que, no momento em que o tempo começou a ser marcado, a semirreta  $\overrightarrow{OQ}$  estava alinhado com o vetor  $\mathbf{e}_1$ . Neste caso, depois de um tempo  $t$ ,  $\overrightarrow{QC}$  formará um ângulo igual a  $\omega t$  com  $\mathbf{e}_1$ . Com isto, as coordenadas cartesianas da conta serão

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\theta) \cos(\omega t); \\ y &= R \sin(\theta) \sin(\omega t); \\ z &= R \cos(\theta); \end{aligned}$$

em que  $\theta = \theta(t)$ . Como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R \cos(\omega t) \cos(\theta) \dot{\theta} - R \omega \sin(\omega t) \sin(\theta); \\ \dot{y} &= R \sin(\omega t) \cos(\theta) \dot{\theta} + R \omega \cos(\omega t) \sin(\theta); \\ \dot{z} &= -R \sin(\theta) \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Portanto, a energia cinética do sistema será

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2(\theta)).$$

Posicionando o nível de potencial zero na altura do centro  $O$  do aro, a energia potencial da conta será

$$V = -mgR \cos(\theta).$$

Portanto,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2(\theta)) + mgR \cos(\theta)$$

será o lagrangiano do sistema. Como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (mR^2\dot{\theta}) = mR^2\ddot{\theta}$$

ao passo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - mgR \sin(\theta);$$

teremos apenas a equação lagrangiana,

$$(111) \quad \ddot{\theta} = \omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{g}{R} \sin(\theta).$$

A partir desta equação é fácil determinar a velocidade angular  $\dot{\theta}$  da conta enquanto gira em torno do aro. Para isto basta multiplicar os dois lados da equação por  $\dot{\theta}$  e integrar o resultado relativamente a  $t$ ,

$$\int \dot{\theta} \ddot{\theta} dt = \omega^2 \int \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} dt - \frac{g}{R} \int \sin(\theta) \dot{\theta} dt.$$

Calculando as integrais encontramos,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sin^2(\theta) + \frac{g}{R} \cos(\theta) + c,$$

para alguma constante  $c$ ; que equivale a

$$(112) \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{2} \sin^2(\theta) + \frac{g}{R} \cos(\theta) + c},$$

Em princípio poderíamos separar variáveis e integrar a função resultante; contudo, como esta função não é integrável em termos de funções elementares, não faremos isto.

Apesar da equação diferencial (111) não ter solução em termos de funções elementares, podemos extrair dela bastante informação a respeito do movimento da conta. Por exemplo, podemos determinar facilmente as posições no arco nas quais a partícula não se move. Para responder esta pergunta basta lembrar que, quando isto

ocorre,  $\theta$  é constante e, portanto, suas derivadas são nulas. Levando isto em conta, (111) se simplifica em

$$\omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0;$$

donde,

$$\sin(\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = \frac{g}{R\omega^2}.$$

O primeiro caso só pode ocorrer quando  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ ; isto é, quando a conta está no ponto mais baixo, ou no ponto mais alto, do arco, o que não é nada surpreendente. O segundo caso é mais interessante. Para começar, ele só pode ocorrer se

$$\frac{g}{R\omega^2} \leq 1;$$

que equivale a dizer que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Em particular, descobrimos que, quando o arco está girando muito rápido, a conta sobe até o ponto definido pelo ângulo

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right),$$

e fica parada neste ponto. Mas, o que acontece quando  $\omega < \sqrt{g/R}$ ? Para responder a esta pergunta, resolveremos a equação (111) numericamente quando

$$\frac{g}{R} = 1, \quad \omega = 2 \quad \text{e} \quad c = 1.$$

Para isto, precisamos representar esta equação como o sistema de primeira ordem,

$$\dot{\theta} = \alpha$$

$$\dot{\alpha} = \omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{g}{R} \sin(\theta).$$

A figura 3 representa o gráfico de  $\theta$  construído a partir da integração numérica do sistema acima. Como fica claro na figura, o movimento neste caso é periódico.

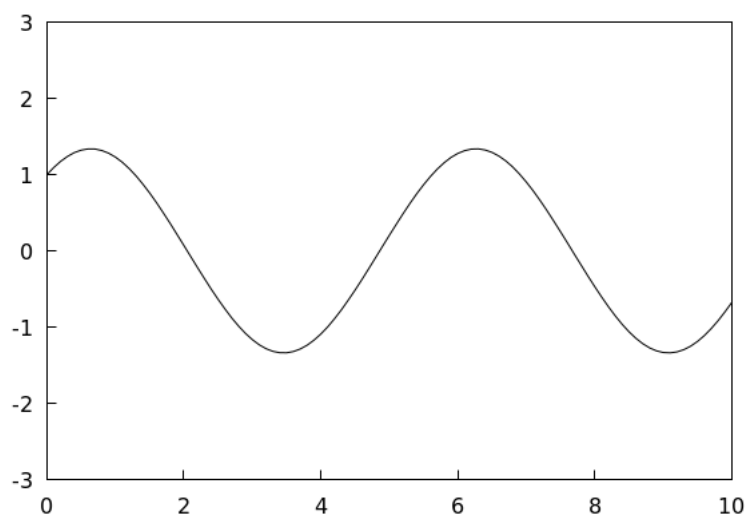


FIGURA 3. Conta no arco quando  $\omega$  é pequeno.

## Apêndice

Neste apêndice apresentamos os detalhes dos cálculos necessários para mostrar que a equação

$$(113) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}$$

descreve uma cônica cujo foco está na origem do sistema de coordenadas. Faremos os detalhes apenas no caso em que a curva é uma elipse; os casos da hipérbole e da parábola ficarão por sua conta. A equação de uma elipse cujo centro está na origem é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Contudo, a elipse que nos interessa não tem seu centro, mas sim seu foco, na origem. Mas os focos da elipse acima estão nos pontos

$$(-c, 0) \text{ e } (c, 0)$$

em que

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Portanto, para obter uma elipse com um foco na origem basta transladar um dos focos para esta posição. Fazendo isto para  $(c, 0)$ , a equação será

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Substituindo  $x = r \cos(\phi)$  e  $y = r \sin(\phi)$  e usando produtos notáveis

$$\frac{r^2 \cos^2(\phi) + 2c \cos(\phi) + c^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2(\phi)}{b^2} = 1.$$

Agrupando os termos segundo as potências de  $r$ ,

$$(114) \quad \left( \frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} \right) r^2 + \frac{2rc \cos(\phi)}{a^2} + \left( \frac{c}{a} \right)^2 - 1 = 0.$$

Antes de continuar, simplificaremos o coeficiente de  $r^2$  desta equação. Começamos substituindo  $\sin^2(\phi)$  por  $1 - \cos^2(\phi)$ ,

$$\frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} = \frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{1 - \cos^2(\phi)}{b^2};$$

donde

$$\frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} = \frac{1}{b^2} + \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) \cos^2(\phi).$$

Lembrando que  $c^2 = a^2 - b^2$ ,

$$\frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} = \frac{1}{b^2} - \left( \frac{c^2}{a^2 b^2} \right) \cos^2(\phi).$$

Pondo  $1/b^2$  em evidência,

$$\frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} = \frac{1}{b^2} \left( 1 - \left( \frac{c^2}{a^2} \right) \cos^2(\phi) \right),$$

que, como  $e = c/a$ , torna-se

$$\frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} = \frac{1}{b^2} (1 - e^2 \cos^2(\phi)).$$

Substituindo isto em (114), sem esquecer que  $e = c/a$ , encontramos

$$(115) \quad \left( \frac{1}{b^2} (1 - e^2 \cos^2(\phi)) \right) r^2 + \left( \frac{2e \cos(\phi)}{a} \right) r + (e^2 - 1) = 0.$$

Precisamos resolver esta equação para obter  $r$  em função de  $\cos(\theta)$ . Como se trata de uma equação quadrática em  $r$ , começaremos calculando seu discriminante, que é

$$\Delta = \left( \frac{2e \cos(\phi)}{a} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{b^2} (1 - e^2 \cos^2(\phi)) \right) (e^2 - 1).$$

Fazendo as devidas multiplicações, verificamos que

$$\Delta = \frac{4e^2 \cos^2(\phi)}{a^2} - \frac{4}{b^2} (e^2 - e^4 \cos^2(\phi) - 1 + e^2 \cos^2(\phi)),$$

que pode ser rearrumada na forma

$$\Delta = \left( \frac{4e^2}{a^2} + \frac{4e^4}{b^2} - \frac{4e^2}{b^2} \right) \cos^2(\phi) - \frac{4}{b^2} (e^2 - 1).$$

Usando  $c^2 = a^2 - b^2$ ,

$$\frac{4e^2}{a^2} + \frac{4e^4}{b^2} - \frac{4e^2}{b^2} = \frac{4e^4}{b^2} + 4e^2 \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) = \frac{4e^4}{b^2} - 4e^2 \left( \frac{c^2}{a^2 b^2} \right),$$

que, como  $e = c/a$ , nos dá

$$\frac{4e^2}{a^2} + \frac{4e^4}{b^2} - \frac{4e^2}{b^2} = \frac{4e^4}{b^2} - 4e^2 \left( \frac{e^2}{b^2} \right) = 0.$$

Logo,

$$\Delta = -\frac{4}{b^2} (e^2 - 1).$$

Contudo,

$$e^2 - 1 = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2};$$

de modo que

$$\Delta = \left(-\frac{4}{b^2}\right) \left(-\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{4}{a^2}.$$

Portanto, resolvendo (115) como equação quadrática em  $r$ , encontramos

$$r = \frac{-\left(\frac{2e \cos(\phi)}{a}\right) \pm \frac{2}{a}}{\frac{2}{b^2} (1 - e^2 \cos^2(\phi))}$$

que, depois da devidas simplificações, pode ser reescrita como

$$r = \frac{b^2}{a} \left( \frac{\pm 1 - e \cos(\phi)}{1 - e^2 \cos^2(\phi)} \right).$$

Lembrando que  $r \geq 0$ , devemos escolher o sinal positivo no numerador, o que nos dá

$$(116) \quad r = \frac{b^2}{a} \left( \frac{1 - e \cos(\phi)}{1 - e^2 \cos^2(\phi)} \right).$$

Porém, como  $b \neq 0$ ,

$$e^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1;$$

obtemos que  $e < 1$ . Combinando isto com  $\cos(\phi) \leq 1$ , verificamos que

$$1 - e \cos(\theta) > 0;$$

donde

$$a^2 - c^2 \cos^2(\phi) = a^2 (1 - e^2 \cos^2(\theta)) > 0.$$

Portanto, podemos cancelar  $1 - e \cos(\phi)$  do numerador e do denominador em (116), obtendo

$$r = \frac{b^2}{a} \left( \frac{1}{1 + e \cos(\phi)} \right)$$

Tomando

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{k},$$

a equação anterior toma a forma desejada; isto é,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}.$$