Questão 1

Seja R uma rotação de eixo l em R^3 e $v = (1,1,1)$ um vetor ortogonal a l. Sabendo-se que $Rv = (1,-1,1)$, determine:

(a) o \cosseno do ângulo de rotação de R;

O angulo de rotação pode ser determinado pelo produto vetorial entre dois vetores:

$$< Rv, v >= ||Rv|| * ||v|| * \cos(\theta) => \cos(\theta) = \frac{< Rv, v >}{||Rv|| * ||v||}$$

$$\therefore$$

$$\cos(\theta) = \frac{1*1+1*(-1)+1*1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}*\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}*\sqrt{3}} = 1/3$$

(b) o eixo da rotação R;

$$l = (a, b, c)$$

O eixo l é perpendicular a v e Rv, portanto.

$$< l, v >= a*1+b*1+c*1 = 0 => a+b+c = 0$$

$$< l, Rv >= a*1+b*(-1)+c*1 = 0 => a-b+c = 0$$

$$\therefore$$

$b = 0$ e $a = -c => l = (a, 0, -a)$

(c) a matriz de R na base canônica

$$Rv = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} * v = (1, -1, 1)$$

$$\therefore$$

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ d+e+f = -1 \\ g+h+i = 1 \end{cases}$$

Pular.

Questão 2

Seja ρ a rotação do R^3 cujo eixo é a reta $\langle(1,0,-1)\rangle$ e que leva o vetor $(1,0,1)$ no vetor $(-7,8,-7)/9$

(a)

Determine uma base ortonormal β do R^3 formada por um vetor ao longo do eixo e dois vetores sobre o plano perpendicular ao eixo.

Se os dois vetores no plano são perpendiculares ao eixo, então o eixo $(1,0,-1)$ é normal ao plano.

Portanto podemos usar a fórmula do plano $ax+by+cz+d=0$ para normal $n=(a,b,c)$

Portanto para o eixo $(1,0,-1)$, temos $x-z+d=0$

(b) Determine o ângulo de rotação.

Usando a mesma justificativa da questão 1a, temos:

$$<(1,0,1),(-7/9,8/9,-7/9)>=||(1,0,1)||*||(-7/9,8/9,-7/9)||*\cos(\theta)$$

$$-7/9-7/9=\sqrt{2}*\sqrt{\frac{49+49+64}{81}}*\cos(\theta)$$

$$=>\cos(\theta)=\frac{-14*\sqrt{81}}{9*\sqrt{162*2}}=\frac{-14}{18}$$

$$=>\theta=\arccos(-7/9)$$

(c) Determine as matrizes $(\rho)_\beta, M_{\beta\varepsilon}, M_{\varepsilon\beta}$ e $(\rho)_\varepsilon$.

Pular.

Questão 3

// TODO: Revisar dps

(a) $\int \exp(x)*\sin(\exp(x))dx$

$$u=\exp(x)=>du=d(\exp(x))=\exp(x)dx$$

$$\int\sin(u)*du=-\cos(u)+c=-\cos(\exp(x))+c$$

(b) $\int x*\exp(-x^2)dx$

$$u=\exp(-x^2)=>du=\exp(-x^2)(-2x)dx$$

$\int x * \exp(-x^2)dx = -1/2 \int -2x * \exp(-x^2)dx$

$= -1/2 \int du = -1/2 * (u + c) = -1/2(\exp(-x^2) + c)$

$\therefore \int x * \exp(-x^2)dx = -\exp(-x^2)/2 + c$

(c) $\int x * \sqrt{1 - x^2}dx$

$\sin(\theta) = x => \sin(\theta) * d\theta = dx$

$\int \sin(\theta) * \sqrt{1 - \sin(\theta)^2}d\theta = \int \sin(\theta) * \sqrt{\cos(\theta)^2}d\theta = \int \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta =$
$\int \sin(2\theta)d\theta/2$

$= -\cos(2\theta)/4 + c = 1/4 - 2\sin^2(\theta)/4 + c = 1/4 - x^2/2 + c$

Questão 4

(a) $\int x^2 e^x dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \implies du = 2xdx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{cases}$$

$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int e^x x dx$

$$\begin{cases} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{cases}$$

$\therefore x^2 e^x - 2\int e^x x dx = x^2 e^x - 2[e^x x - \int e^x dx] = x^2 e^x - 2e^x x + e^x$

(b) igual a (a)

(c) $\int x^2 \sin(x)dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \implies du = 2xdx \\ dv = \sin(x)dx \implies v = -\cos(x) \end{cases}$$

$\therefore \int x^2 \sin(x)dx = x^2(-\cos(x)) + 2\int \cos(x)xdx$

$$\begin{cases} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos(x)dx \implies v = \sin(x) \end{cases}$$

$\therefore -x^2\cos(x) + 2\int \cos(x)xdx = -x^2\cos(x) + 2[x\sin(x) - \int \sin(x)dx]$

$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + \cos(x)$

Questão 5

(a) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

Pular

$$u^2 = a^2 + x^2 \implies x = \sqrt{u^2 - a^2} \implies dx = \frac{1}{2}(u^2 - a^2) * 2u * du$$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{(u^2-a^2)*u*du}{u} = \int (u^2 - a^2)du = \int u^2 du - \int a^2 du = \frac{u^3}{3} - ua^2$$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a^2\sqrt{1-x^2/a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2/a^2}}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0 \implies a^2 \geq x^2 \implies \exists\theta : \sin^2(\theta) = x^2/a^2$$

$$\sin^2(\theta) = x^2/a^2 \implies \sin(\theta) = x/a \text{ ou } \sin(-\theta) = x/a$$

$$\sin(\theta) = x/a \implies a * \cos(\theta)d\theta = dx$$

$$\therefore \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a*\cos(\theta)*dx}{\cos(\theta)} = \frac{1}{a^2}\int adx = \frac{1}{a^2} * ax + c = \frac{x}{a} + c$$

Questão 6

Use integração por partes duas vezes para mostrar que

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$$

$$\begin{cases} u = \sin^2(x) \implies du = 2\sin(x)\cos(x)dx \\ dv = dx \implies v = x \end{cases}$$

$$\int \sin^2(x)dx = x * \sin^2(x) - \int x * 2\sin(x)\cos(x)dx = x\sin^2(x) - \int x\sin(2x)dx$$

$$\begin{cases} u = x \implies du = dx \\ dv = \sin(2x)dx \implies v = -\cos(2x)/2 \end{cases}$$

$$\int \sin^2(x)dx = x\sin^2(x) - \int x\sin(2x)$$

$$= x\sin^2(x) - [-x\cos(2x)/2 - \int -\cos(2x)/2dx]$$

$$= x\sin^2(x) + x\cos(2x)/2 - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = x\sin^2(x) + x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Questão 7

Pular

Use a substituição $u = h\sin^2(r)$ para mostrar que

$$\int \left(\sqrt{\frac{r}{h-r}}\right) dr = h\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{h}}\right) - \sqrt{\frac{r}{h}} \cdot \sqrt{1-\frac{r}{h}}\right)$$

Como $h \neq 0$, é equivalente a provar:

$$\int \left(\sqrt{\frac{1}{h^2}\frac{r}{h-r}}\right) dr = \arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{h}}\right) - \sqrt{\frac{r(h-r)}{h^2}}$$

ou

$$\frac{1}{h}\int \left(\sqrt{\frac{r}{h-r}}\right) dr = \arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{h}}\right) - \frac{1}{h}\sqrt{r(h-r)}$$

Na integral, temos a seguinte restrição que nos dá duas alternativas

$$\frac{r}{h-r} \geq 0 \implies$$

Alternativa 1. $h-r, r \geq 0$

$$\implies h > r$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{r} \implies du = \frac{1}{2} r\sqrt{r} dr \\ dv = \frac{1}{\sqrt{h-r}} dr \implies v = 2(h-r)^{1/2} \end{cases}$$

$$\int \left(\sqrt{\frac{r}{h-r}}\right) dr = \sqrt{r} * 2\sqrt{h-r} - \int 2\sqrt{h-r} * r\sqrt{r} dr$$

$$= 2\sqrt{r(h-r)} - 2\int r\sqrt{r(h-r)} dr$$

$$sin^2(\theta) = r/h$$

Alternativa 2. $h-r, r \leq 0$

Questão 8

Use o método de separação de variáveis para resolver as seguintes equações diferenciais:

(a) ẏ = (1 + y)/(1 + t);

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1+y}{1+t}$$

Supondo $y \neq 1$:

$$\frac{dy}{1+y} = \frac{dt}{1+t}$$

Aplicando integral e resolvendo:

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$ln|1+y| = ln|1+t| + C$$

Exponencial:

$$1 + y = (1+t) * e^C \implies y = (1+t) * e^C - 1$$

(b) ẏ – 2ty = t;

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = t$$

$$\frac{dy}{dt} = t(1-2y)$$

$$\frac{dy}{1-2y} = t * dt$$

$$\int \frac{dy}{1-2y} = \int t * dt$$

$$ln|1-2y| = t^2/2 + C$$

Aplicando Exponencial:

$$1 - 2y = e^{t^2/2+C}$$

$$y = \frac{1-e^{t^2/2}}{2} * C'$$

(c) ẏ – tan(t)y = cos(t).

Pular

Para a letra (c) use $u = \cos(t) * y$.

$$\frac{dy}{dt} - \tan(t) * y = \cos(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} * y + \cos(t)$$

$$\frac{dy(\cos(t))}{dt} = \sin(t) * y + \cos^2(t)$$

Questão 9

Determine a solução geral para as seguintes equações:

(a) ẍ – 5ẋ + 6x = 0;

Supodo $x(t) = e^{rt} > 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0 \implies r^2e^{rt} - 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0$$

$$\therefore r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$$

Na solução geral:

$$x(t) = C_1 * e^{2t} + C_2 * e^{3t}$$

(b) ẍ – 4ẋ + 4x = 0;

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \implies r^2e^{rt} - 4re^{rt} + 4e^{rt} = 0$$

$$\therefore r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$$

Na solução geral:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

(c) ẍ + 2ẋ + 5x = 0

Pular

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0 \implies r^2e^{rt} + 2re^{rt} + 5e^{rt} = 0$$

$$\therefore r^2 + 2r + 5 = (r) = 0$$

Questão 10

Ache soluções particulares para as seguintes equações:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = t^2 + 4t$$