Modelagem Matemática e Computacional

João Henrique Schmidt de Carvalho

119050097

Questão 1

Duas bolas caem verticalmente, separadas por uma pequena distância, com a bola grande abaixo da pequena. No momento em que a bola grande acerta o chão, ambas as bolas têm velocidade $-v0$ relativamente ao eixo vertical que aponta para cima. Ignorando a resistência do ar e supondo os choques perfeitamente elásticos:

(a) qual a velocidade da bola grande imediatamente após o impacto com o chão?

Como o choque é perfeitamente elástico $e = \frac{v_{afastamento}}{v_{aproximação}} = 1$

Pela conservação de momento:

$$Q_{antes} = Q_{depois}$$

$$\implies Mv = Mv'$$

Assim, em módulo: $|\vec{v}| = v_0$ e $\vec{v} = (0, v_0)$

Pela conservação de momento:

$$Q_{antes} = Q_{depois}$$

$$\implies Mv_M + mv_m = Mv'_M + mv'_m$$

Com os valores dados:

$$Mv_0 + m(-v_0) = Mv'_M + mv'_m$$

$$v_0(M - m) = Mv'_M + mv'_m$$

Mas pelo coeficiente de restituição:

$$e = 1 \implies |v_0 - (-v_0)| = |v'_M - v'_m| \implies 2v_0 = |v'_M - v'_m|$$

Assim, supondo $|v'_m| < |v'_M|$:

$$\begin{cases} 2v_0 = v'_M - v'_m \\ v_0(M-m) = Mv'_M + mv'_m \end{cases}$$

Substituindo $v'_M = 2v_0 + v'_m$ na segunda equação:

$$v_0(M-m) = M(2v_0 + v'_m) + mv'_m$$

$$\implies v_0(M-m) = 2Mv_0 + (M+m)v'_m$$

$$\implies v_0(-M-m) = (M+m)v'_m$$

$$\implies (M+m)v'_m = v_0(-M-m)$$

$$\implies v'_m = \frac{-v_0(M+m)}{M+m} = v_0$$

$$\implies v'_M = 3v_0$$

Supondo $|v'_m| > |v'_M|$:

$$\begin{cases} 2v_0 = v'_m - v'_M \\ v_0(M-m) = Mv'_M + mv'_m \end{cases}$$

Substituindo $v'_M = v'_m - 2v_0$ na segunda equação:

$$v_0(M-m) = M(v'_m - 2v_0) + mv'_m$$

$$\implies v_0(M-m) = -2Mv_0 + (M+m)v'_m$$

$$\implies v_0(3M-m) = (M+m)v'_m$$

$$\implies (M+m)v'_m = v_0(3M-m)$$

$$\implies v'_m = \frac{v_0(3M-m)}{M+m}$$

$$\implies v'_M = \frac{v_0(3M-m)}{M+m} - 2v_0 = \frac{v_0(3M-m)+v_0(-2M-2m)}{M+m}$$

$$\implies v'_M = \frac{v_0(M-3m)}{M+m}$$