INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UFRJ - 2024.2

MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL–LISTA 3

1. Sejam $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Mostre que
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{w_1} \times \boldsymbol{w_2}) = \dot{\boldsymbol{w}}_\mathbf{1} \times \boldsymbol{w_2} + \boldsymbol{w_1} \times \dot{\boldsymbol{w}}_\mathbf{2}.$$

2. Determine a velocidade escalar de um satélite de massa m, que se move em torno da Terra, em uma trajetória círcular de raio r.

3. Uma partícula de massa m move-se de modo que o vetor $\boldsymbol{r}(t)$ satisfaz as equações
$$\langle \boldsymbol{r}(0) \mid \boldsymbol{c} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r},$$
para um certo vetor constante não nulo $\boldsymbol{c}$. Seja H o plano ortogonal a $\boldsymbol{c}$ que contém a origem.
   (a) Mostre que a derivada de $\langle \boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{c} \rangle$ em relação ao tempo é nula.
   (b) Mostre que $\boldsymbol{r} \in H$ e conclua que o movimento é plano.
   (c) Use $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}$ e a representação $\boldsymbol{r}(t) = r(t)\,\boldsymbol{u}_r$ na base $\{\,\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta\}$, para mostrar que
$$\dot{r} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{r}} = r\dot{\theta}u_\theta.$$
   (d) Mostre que m move-se com velocidade escalar constante em uma órbita circular.

4. Uma bola é chutada com velocidade escalar v, do alto de um penhasco de altura h, em uma direção que forma um ângulo θ relativamente à horizontal. Determine:
   (a) a distância horizontal x e a distância vertical y percorrida pela bola em função de h, da aceleração da gravidade g, do tempo t e do ângulo θ;
   (b) a fórmula para y em função de x, v, h, g e $\tan(\theta)$;
   (c) a distância horizontal percorrida pela bola para um dado valor de θ;
   (d) a máxima distância do penhasco que a bola pode cair;
   (e) a tangente do ângulo em que a bola deve ser chutada para que caia o mais longe possível do penhasco.

5. Suponha que um campo radial varia com o inverso do cubo da distância, de modo que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -(1/r^3)\boldsymbol{u}_r$, em $\boldsymbol{u}_r$ é o vetor radial unitário.

(a) Ache a equação que descreve a trajetória de uma partícula que se move sob este campo tendo $\boldsymbol{L} = (0,0,1)$ como momento angular.
(b) Resolva a equação diferencial de segunda ordem encontrada em (a).
(c) Use (b) para achar de que modo r depende de θ.
(d) Supondo que as constantes de integração *não* sejam negativas, quais os possíveis comportamento da trajetória à medida que θ aumenta?

Lembre-se que todo movimento em campos radiais é plano.

Respostas

2. A velocidade é igual a
$$\sqrt{\frac{GM}{r}},$$
em que G é a constante gravitacional e M é a massa da Terra.

4. (b)
$$y = h = x\tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v^2}(1+\tan(\theta)^2).$$
(d)
$$x = \sqrt{\frac{2v^2gh + v^4}{g^2}}.$$

5. (a) Usando a notação da apostila $dv/d\theta = 0$. (c) $r = 1/(k_1\theta + k_2)$ em que $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. (d) Quando $k_1 = 0$ temos um círculo; quando $k_1 \neq 0$ temos uma espiral que tende para a origem.