

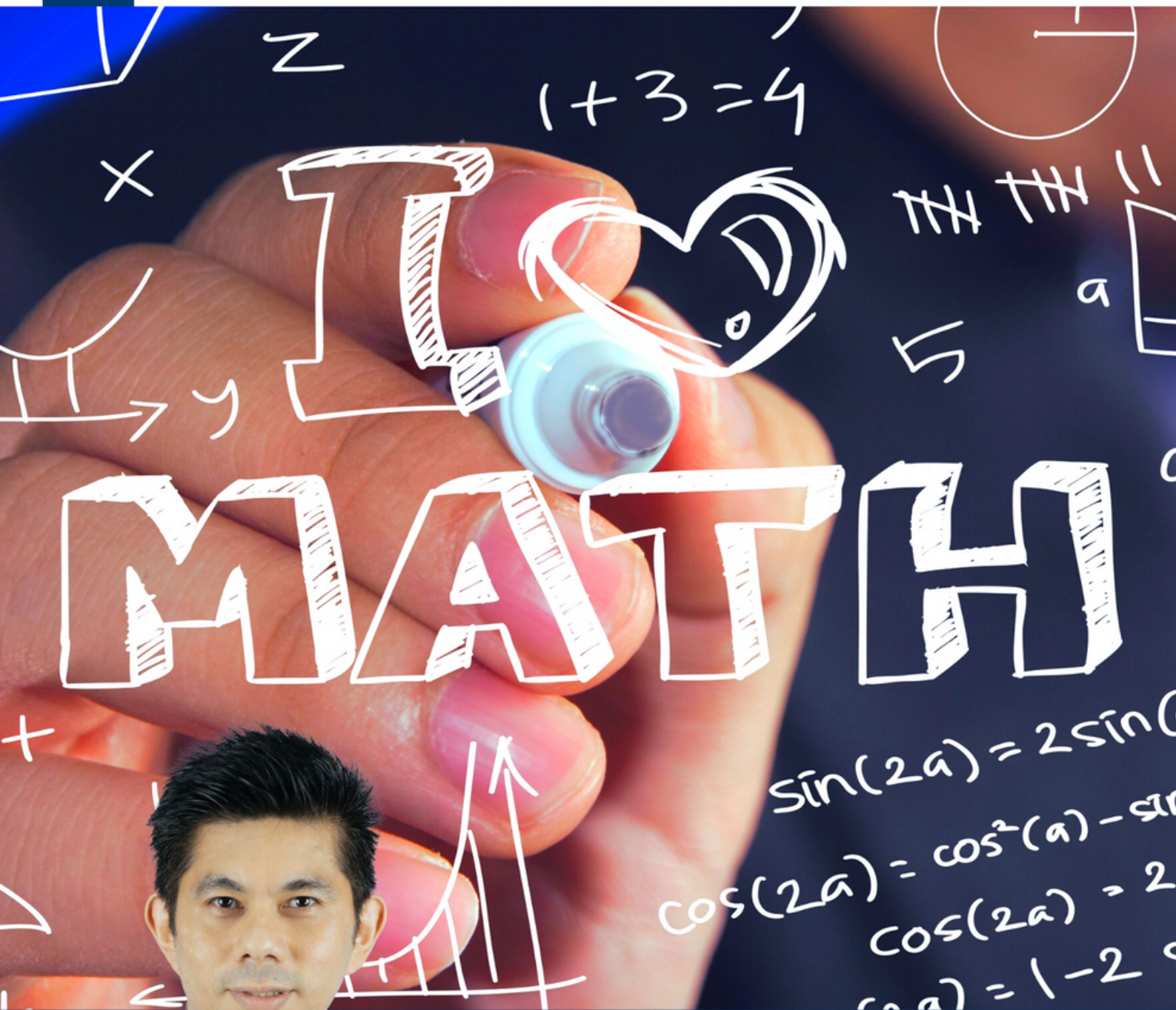
2022



55th Anniversary
Faculty of Science
Prince of Songkla University

วิทยา ภาติว

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



รศ.ดร. เอธิสวัตน์ คำมณี
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์การคำนวณ
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

Trigonometric Functions

สูตรที่ควรและจำเป็นต้องรู้

เอกลักษณ์ผลต่างและผลบวก

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

Double Angle Formulas

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Multiple Angle Formulas

$$\sin(3A) = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos(3A) = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\sin(4A) = 4 \sin A \cos A - 8 \sin^3 A \cos A$$

$$\cos(4A) = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$$

Half-Angle Formulas

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}\end{aligned}$$

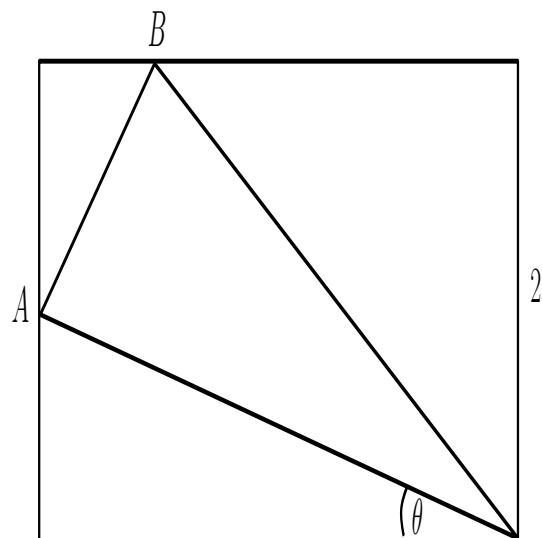
Product-to-Sum Formulas

$$\begin{aligned}2 \sin A \cos B &= [\sin(A + B) + \sin(A - B)] \\ 2 \cos A \sin B &= [\sin(A + B) - \sin(A - B)] \\ 2 \cos A \cos B &= [\cos(A + B) + \cos(A - B)] \\ -2 \sin A \sin B &= [\cos(A + B) - \cos(A - B)]\end{aligned}$$

Sum-to-Product Formulas

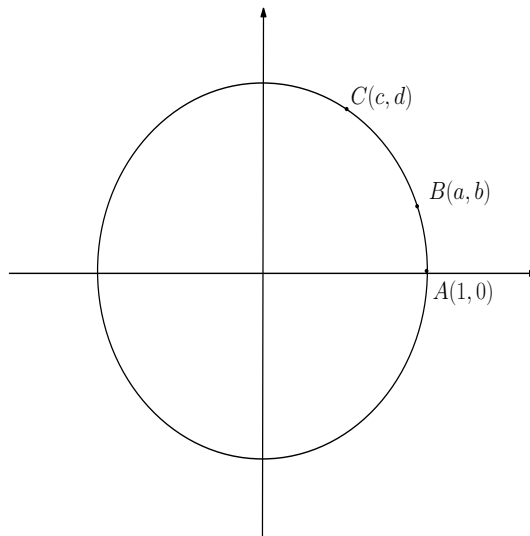
$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \sin\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \sin\left(\frac{A - B}{2}\right)\end{aligned}$$

1. พับกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง 2 หน่วย ให้มุมหนึ่งไปจรดกับขอบด้านหนึ่ง ดังรูป จงหาความยาวด้าน AB



2. จงหาค่า $8 \cos^2 \left(\frac{7\pi}{24} \right)$

3. กำหนดจุด A, B, C บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป



ถ้าส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{24}$ และส่วนโค้ง BC ยาว $\frac{\pi}{6}$ แล้ว ad มีค่าเท่าไร

4. กำหนดให้ $x \in [0, 2\pi]$ จงหาคำตอบของ $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

5. ถ้า $\sin 2x = \frac{1}{5}$ แล้ว $\tan x + \cot x$ มีค่าเท่าใด

6. ถ้า $\tan x = \frac{4}{3}$ และ $\cos y = \frac{12}{13}$ โดยที่ $0 < x < \pi$ และ $\pi < y < 2\pi$ แล้วจงหาค่าของ $\sin(x + y)$

7. ถ้า $\cos 2x = \frac{1}{8}$ และ $\cot y = \frac{-3}{4}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ และ $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$ แล้ว $\cos x + \cos y$ มีค่าเท่าไร

8. จำนวนคำตอบของสมการ $\cos 2x = \sin x$ ที่อยู่ในช่วง $(0, 5\pi)$ เป็นจำนวนเท่าไร

9. มีจำนวนจริง x กี่จำนวนในช่วง $(0, 2\pi)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\cos 2x = \sin 3x$

10. จงหาค่า $\frac{\sin 25^\circ \sin 85^\circ \sin 35^\circ}{\sin 75^\circ}$

11. จงหา $2 \sin^2 60^\circ (\tan 5^\circ + \tan 85^\circ) - 12 \sin 70^\circ$

12. จงหาค่าของ $\sec 40^\circ \sec 80^\circ \sec 160^\circ$

13. จงหาค่า $\frac{\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}$

14. ค่าของ $\sin \frac{3\pi}{8}$ เป็นรากของพหุนามในข้อใด

(a) $x^4 - x^2 + \frac{1}{2}$

(b) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

(c) $x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$

(d) $x^4 - x^2 + \frac{1}{16}$

(e) $x^4 - x^2 + \frac{1}{32}$

15. จงหาค่าของ $(3 - 4 \sin^2 9^\circ)(3 - 4 \sin^2 27^\circ)(3 - 4 \sin^2 81^\circ)(3 - 4 \sin^2 243^\circ)$

16. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $3 \sin(x - y) = 2 \sin(x + y)$ จงหา $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$

17. กำหนดให้ $x \in [0, 2\pi]$ จงหาผลเฉลยของ $2^{1+3\sin x} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{2+\sin x} = 1$

18. กำหนดให้ $\sin t - \sin 2t + \sin 3t = 0$ โดยที่ $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ถ้า $a = \frac{\tan t - \tan 2t}{\cos t - \cos 2t}$ และ $b = \frac{\sin 3t + \sin 4t + \sin 5t}{\cos 3t + \cos 4t + \cos 5t}$ จงหา $a^4 + b^4$

19. กำหนดให้ $x \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ จงหา $(1 + \tan^2 x) \cot x$

20. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ และ $\tan t = \frac{a}{b}$ ถ้า $(\frac{\cos t}{a})^4 + (\frac{\sin t}{b})^4 = \frac{\sin 2t}{ab(a^2 + b^2)}$ จงหา $(\frac{3a}{b}) + (\frac{b}{2a})^2$

21. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$ จงหา $\cos C$

22. ถ้า $\sin x + \sin y = \frac{1}{6}$ และ $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$ แล้วจงหาค่า $\tan(x + y)$

23. ถ้า $3 \sin 2x + 4 \sin x = 12 \cos x + 8$ แล้ว $\cos 2x$ มีค่าเท่าไร

24. จงหาจำนวนจริง $x \in [0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$2 \sin^2 x + 1 = -\sin x + 2\sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$$

25. กำหนดให้ $\cos 20^\circ = a$ ถ้า $\sin 15^\circ + \sin 55^\circ = x$ และ $\cos 15^\circ + \cos 55^\circ = y$ จงหาค่าของ $(x + y)^2 - 2xy$

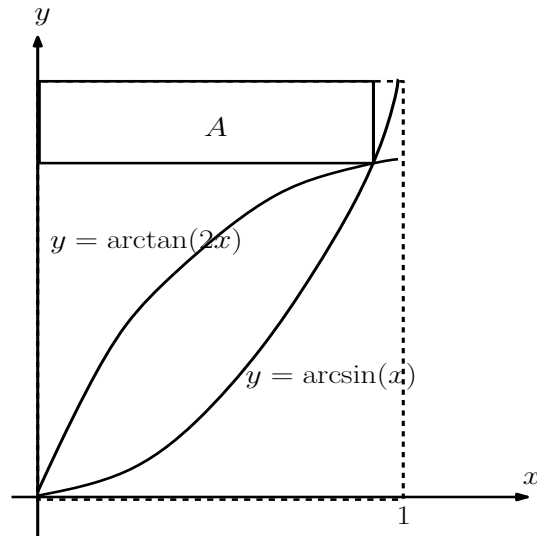
26. ถ้า $\sin^2 7t - \sin^2 5t = \sin 2t \sin 6t$ เมื่อ $0^\circ < t < 30^\circ$ จงหา t

27. จงหาค่าของ $(1 - \tan^2 40^\circ)(1 - \tan^2 80^\circ)(1 - \tan^2 160^\circ)$

28. ถ้า $\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{\cos^4 x}{7} = \frac{1}{12}$ สำหรับบาง $x > 0$ จงหาค่า $\frac{\sin^2 2x}{5} + \frac{\cos^2 2x}{7}$

Inverse Trigonometric Functions

29. กำหนดกราฟของ $y = \arcsin(x)$ และ $y = \arctan(2x)$ เมื่อ $x \in [0, 1]$ ดังรูป



พื้นที่ของบริเวณสีเหลี่ยมผืนผ้า A เท่ากับเท่าไร

30. จงหาค่า $\sin(\tan^{-1} \frac{15}{8} + \cos^{-1} \frac{4}{5})$

31. จงหาค่าของ $\cos^{-1}(\cos 40^\circ + \cos 50^\circ + \cos 70^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ)$

32. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดโดยที่ $0 < x < 1$ สอดคล้องกับ

$$\tan^{-1}(1-x) + \cot^{-1}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \sec^{-1} \sqrt{1+2x(1-x)}$$

จงหาค่า $\cos \pi x$

33. ถ้า $\sec^{-1} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}} - 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ จงหา $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \sec^{-1} x\right)$

34. จงหา $\sec^2(2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7})$

35. ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ จงหาค่าของ

$$\sin(\arctan x + \arctan \frac{1}{x} - 2 \arctan \sqrt{x})$$

36. จงหาค่าของ $5 \sin(6 \arcsin 0.6 + 5 \arccos 0.6)$

37. จงหาคำตอบของสมการ $\cos(2 \arccos(1 - x)) = x^2$

38. ถ้า $\arctan(\sin x) + \arctan(\cos x) + \arctan(\sec x) = \frac{\pi}{3}$ แล้ว $\cos^2 x$

39. จงหาค่าของ $\arctan\left(\frac{2 \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ}\right)$

40. ให้ $P(a, b)$ และ $Q(c, d)$ เป็นจุดบนวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย และให้ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้ง AP และ AQ ตามลำดับโดยที่ θ_1 อยู่ในจตุภาคที่ 1 และ θ_2 อยู่ในจตุภาคที่ 2 จงหาค่าของ $\arctan\left(\frac{ad+bc}{ac-bd}\right)$