

14/7/2007

ตรีโกณมิติ (Trigonometry)

1. สูตรตรีโกณมิติ

1. คำมูลและนิยามพื้นฐาน

| มุม (θ) | 0 | 30 ($\frac{\pi}{6}$) | 45 ($\frac{\pi}{4}$) | 60 ($\frac{\pi}{3}$) | 90 ($\frac{\pi}{2}$) |
|------------------|---|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\sin \theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos \theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan \theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ไม่นิยาม |

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ; \cos \theta \neq 0 \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} ; \cos \theta \neq 0 \\ \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} ; \sin \theta \neq 0 \\ \cot \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} ; \sin \theta \neq 0\end{aligned}$$

2. สูตรตรีโกณมิติพื้นฐาน

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ 1 + \cot^2 \theta &= \csc^2 \theta ; \sin \theta \neq 0 \\ \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta ; \cos \theta \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \sin B \cos A \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\ \tan(A \pm B) &= \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\ \cot(A \pm B) &= \frac{\cot A \cot B \pm 1}{\cot A \pm \cot B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \sin A \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\
 2 \cos A \sin B &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\
 2 \cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\
 2 \sin A \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin A + \sin B &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
 \sin A - \sin B &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
 \cos A + \cos B &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
 \cos A - \cos B &= -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\
 &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\
 \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\
 &= 1 - 2 \sin^2 A \\
 &= 2 \cos^2 A - 1 \\
 \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\
 \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\
 \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\
 \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\
 \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}
 \end{aligned}$$

3. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

| ฟังก์ชัน | โดเมน | เรนจ์ |
|----------|--|----------------------------------|
| \sin | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | $[-1, 1]$ |
| \cos | $[0, \pi]$ | $[-1, 1]$ |
| \tan | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | \mathbb{R} |
| \csc | $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ |
| \sec | $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ |
| \cot | $(0, \pi)$ | \mathbb{R} |

| ฟังก์ชัน | โดเมน | เรนจ์ |
|-------------------------|----------------------------------|--|
| \arcsin | $[-1, 1]$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |
| \arccos | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |
| \arctan | \mathbb{R} | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ |
| arccsc | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ |
| arcsec | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ |
| arccot | \mathbb{R} | $(0, \pi)$ |

4. กฎของโคไซน์และไซน์

กฎของไซน์ (sine - law)

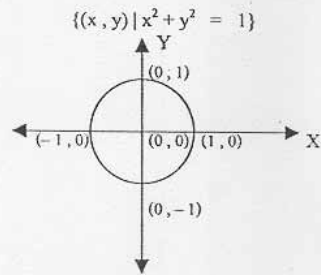
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของโคไซน์ (cosine - law)

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

นิยามที่ 1 วงกลมหนึ่งหน่วย (the unit circle) คือวงกลมที่มีกราฟของความสัมพันธ์อยู่ในรูป



2π = ความยาวของเส้นรอบวงกลมหนึ่งหน่วย

นิยามที่ 2

ฟังก์ชันไซน์, sine = $\{(\theta, y) \mid (x, y) \text{ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว } \theta \text{ หน่วย}\}$

ฟังก์ชันโคไซน์, cosine = $\{(\theta, x) \mid (x, y) \text{ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว } \theta \text{ หน่วย}\}$

เมื่อ (θ, y) sine จะเขียนว่า $y = \sin \theta$

เมื่อ (θ, x) cosine จะเขียนว่า $x = \cos \theta$

หมายเหตุ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ($\theta \in \mathbb{R}$) จะหมายถึงจุดปลายของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่เริ่มวัดจากจุด $(1, 0)$ ไปตามส่วนโค้งเป็นระยะทาง $|\theta|$ หน่วย โดยทิศทาง (ตามเข็มนาฬิกา หรือทวนเข็มนาฬิกา)

| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|----------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| sin | | | | | | | | | |
| cos | | | | | | | | | |

| θ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | 2π |
|----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------|
| sin | | | | | | | | |
| cos | | | | | | | | |

นิยามที่ 4 ถ้า θ รั่วจำนวนจริง θ ใดๆ นิยาม

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

ข้อสรุปที่ 5

$$5.1 \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$5.2 \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

- (3.) ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $0 \leq x \leq 2\pi$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ii. $\sin x + \cos x \geq 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

ข. $\tan x \geq 0$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ หรือ $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

1. ក. ពួក ឆ្មារ ២. ពួក

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

4. ค่าของ $\frac{\sin \frac{3\pi}{8}}{\sin \frac{5\pi}{8}} + \frac{\tan \frac{13\pi}{7}}{\tan \frac{\pi}{7}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2

2. -1

3. 0

4. 1

5. ข้อความใดต่อไปนี้มีผิด

1. $\sin x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\left[-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}\right]$

2. $\tan x$ เป็นฟังก์ชันลดบน $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

3. $\cos x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$

4. $\cot x$ เป็นฟังก์ชันลดบน $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

6. ถ้า $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ และ $\sin \theta < 0$ แล้ว $\cos \theta$ เท่ากับเท่าไร

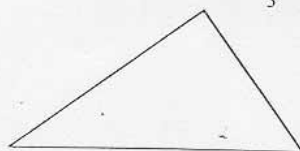
1. $\frac{3}{5}$

2. $\frac{4}{5}$

3. $-\frac{3}{5}$

4. $-\frac{4}{5}$

7.



จากรูป กำหนดให้พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC = 20$ ตารางหน่วย \overline{AB} ยาว 10 หน่วย $CBE = 120$ และ

CDB = 90 ข้อใดต่อไปนี้ เป็นความยาวของ \overline{BD} และ \overline{BC} ตามลำดับ

1. $\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{4\sqrt{3}}{3}, 8$
3. $4\sqrt{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}$
4. $4\sqrt{3}, 8$

8.) ถ้า $\tan \theta = \frac{4}{3}$ และ $\sin \theta < 0$ แล้ว $\sec \theta$ มีค่าเท่าไร

1. $-\frac{5}{3}$
2. $-\frac{5}{4}$
3. $\frac{5}{3}$
4. หาค่าไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

9. $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})[\sec \frac{\pi}{3} - \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})]$ มีค่าอยู่ในช่วงใด

1. $(-2, -0.5)$
2. $[-0.5, 0)$
3. $[0, 0.5)$
4. $[0.5, 2)$

10. ข้อใดต่อไปนี้ ผิด

1. ถ้า $\sin \theta = -0.1$ แล้ว ชุดปลายของส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในควอดรันต์ที่ 3 หรือ 4
2. 40 องศา เท่ากับ $\frac{2\pi}{9}$ เรเดียน
3. ถ้า $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ แล้ว $\sin \theta - \cos(6\pi + \theta) > 0$
4. $|\cos \frac{29\pi}{6}| < \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. ค่าของ $\frac{2\sin(-330^\circ) + \tan(-405^\circ)}{\cot^2 225^\circ}$ ตรงกับข้อใด

1. 0
2. -2
3. $-\sqrt{3} - 1$
4. $\sqrt{3} - 1$

12. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง ถ้า $Q(x)$ แทน $\sqrt{2}x^2 \sin(-\frac{\pi}{4}) + 2x \cos(-\frac{\pi}{3}) + 2 = 0$

เซตคำตอบของ $Q(x)$ ตรงกับข้อใด

1. $\{1, -2\}$
2. $\{-1, 2\}$
3. $\{-1, -2\}$
4. $\{1, 2\}$

13. จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ข้อใดผิด

1. ไม่มีจำนวนจริง θ ใดที่ทำให้ $\cos \theta = 3$
2. ค่าของ $\sin x$ ลดลงจาก 0 ไปถึง -1 เมื่อ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
3. $\sin x < \cos x$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
4. โดเมนของฟังก์ชันโคเซกแทนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n, n \in \mathbb{I}\}$

14. จงพิจารณาแต่ละข้อใดต่อไปนี้ว่าข้อใดถูก

1. ถ้า $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ แล้ว $\theta_1 = \theta_2$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6}$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin \theta$ อาจหมายถึง sine ของมุมที่มีขนาด θ เรเดียน หรืออาจหมายถึง sine ของจำนวนจริง θ ก็ได้

4. เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ $|\sec \theta| \leq 1$ เสมอ

15. ถ้า $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และ $\tan \theta = \frac{12}{5}$ แล้วข้อสรุปใดต่อไปนี้จริง

1. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{13}$

2. $\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta = \frac{-2}{3}$

3. $\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta = \frac{-91}{60}$

4. $\sec \theta - \cos \theta = \frac{144}{65}$

16. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี 2 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด วัฏระยะทางไปตามส่วนโค้งในทิศทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(2, 0)$ ไปยาว θ หน่วย จุดปลายของส่วนโค้งนี้อยู่บนเส้นตรง $x = -1$ ในควอดรันต์ที่สอง ค่าของ $\sin \theta - \sin 2\theta$ เท่ากับ

1. $\sqrt{3}$

2. $-\sqrt{3}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. ค่าใดเป็นค่าทั่วไปของ x ที่ทำให้สมการ $\sin x + \cos x = 0$ เป็นจริง

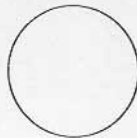
1. $(1 + 2n) \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

2. $(2 + 3n) \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

3. $(3 + 4n) \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

4. $(4 + 5n) \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

18. จากรูป กำหนดให้รัศมีของวงกลมเท่ากับ 2 หน่วย และ OABC เป็นสี่เหลี่ยมคี่มุม พื้นที่ของรูปส่วนที่แรเงาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



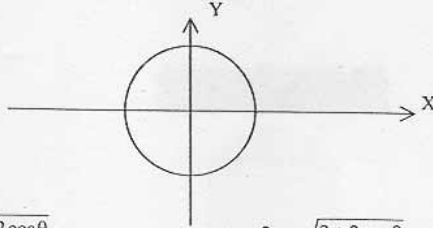
1. $\pi - \sqrt{3}$ ตารางหน่วย

2. $\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

3. $\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย

4. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

19. กำหนดให้วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้า θ เป็นความยาวของส่วนโค้ง PQ ดังรูปแล้ว ความยาวของคอร์ด PQ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $\sqrt{2-2\cos\theta}$
 2. $\sqrt{2+2\cos\theta}$
 3. $\sqrt{2-2\sin\theta}$
 4. $\sqrt{2+2\sin\theta}$
20. พื้นที่ภายในวงกลมรัศมียาว 1 เมตร ถูกแบ่งเป็น 2 ส่วนด้วยคอร์ดยาว 1 เมตร พื้นที่ส่วนน้อยของวงกลมเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ ตารางหน่วย
 2. $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย
 3. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ ตารางหน่วย
 4. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ ตารางหน่วย
22. ให้ $A = \left\{ \frac{x}{n+1} \mid n \text{ เป็นจำนวนนับ} \right\}$ และ $f(x) = \sin x$ เมื่อ $x \in A$ ข้อสรุปใดต่อไปนี้ไม่แท้
1. มี $a, b \in A$ ซึ่ง $f(a) = 2f(b)$
 2. มี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = 0$
 3. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 4. $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in A$
23. ข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูก
1. $\sin x$ มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $\left[-\frac{3x}{2}, -x \right]$
 2. $\cos x$ มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $\left[-\frac{3x}{2}, -x \right]$
 3. $\sin x$ มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $\left[\frac{x}{2}, x \right]$
 4. $\cos x$ มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $\left[\frac{x}{2}, x \right]$
24. ค่าของ $\cos \frac{7\pi}{6} \left(\sin \frac{5\pi}{3} - 2 \sin \frac{5\pi}{3} \right)$ คือข้อใดต่อไปนี้
1. $-\frac{9}{4}$
 2. $-\frac{3}{4}$
 3. $\frac{3}{4}$
 4. $\frac{9}{4}$
25. ถ้า $0 \leq x \leq 2\pi$ แล้ว สมการ $\sin x + \cos x = 1$ จะมีคำตอบกี่คำตอบ
1. 1
 2. 2
 3. 3
 4. 4
26. ถ้าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และสูง 1 เมตร แล้วมุมยอดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 30°
 2. 60°
 3. 90°
 4. 120°
27. เมื่อควงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบแล้ว ตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงาวงทำกับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{150}{\sqrt{3}}$
 2. $\frac{150}{\sqrt{3}}$
 3. $150\sqrt{3}$
 4. $150\sqrt{2}$

28. ผู้ค้ายืนอยู่ทางทิศตะวันตกของตึกหลังหนึ่ง มองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45° จากจุดนี้ผู้ค้าเดินไปทางทิศใต้เป็นระยะ 100 เมตร จะมองเห็นยอดตึก (ที่ตำแหน่งเดิม) เป็นมุมเงย 30° ความสูงของตึกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1000 2. $50\sqrt{2}$ 3. $50\sqrt{3}$ 4. $\frac{100}{\sqrt{3}}$

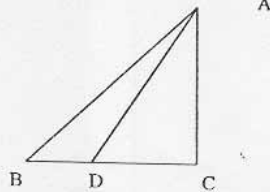
29. ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมีพื้นที่ 20 ตารางหน่วย มุม \widehat{BAD} เท่ากับ 120° ถ้า AB ยาว 5 หน่วย แล้วเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมรูปนี้มีค่าเท่าไรกับข้อใดต่อไปนี้

1. 18 2. 20 3. $10 + 8\sqrt{3}$ 4. $10 + \frac{16}{\sqrt{3}}$

30. ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีฐาน AB ยาว 6 หน่วย มุม \widehat{CBA} เท่ากับ 30° องศา และพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 6 ตารางหน่วย แล้วด้าน BC ยาวเท่าใด

31. ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากรูป ซึ่งมี $AB = 40\sqrt{3}$ ซม. $AD = 40$ ซม. และ $4 \sin^2(20^\circ) = 3$ แล้วมุม \widehat{ADC} จะมีค่ากี่องศา

1. 30
2. 45
3. 60



4. หาค่าไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

32. นาย ก. เดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ a หน่วย แล้วเดินต่อไปทางทิศตะวันตก b หน่วย ค่อยจากนั้นจึงเดินต่อไปทางทิศเหนืออีก c หน่วย อยากทราบว่า นาย ก. อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ 2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ac)^{1/2}$
3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2}$ 4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2}$

33. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\cos 2\theta = \sin \theta$ หรือ $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$
หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ข. ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan \theta \sin \theta + \tan \theta = 0$ คือ $2n\pi$ หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ข้อใดต่อไปนี้จริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

34. ให้ $A = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ฟังก์ชันใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลดบนเซต A

1. $\sin x$ 2. $\cos x$
3. $\operatorname{cosec} x$ 4. $\sec x$

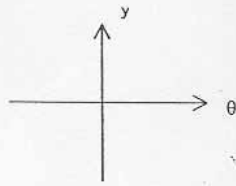
35. วงกลม 2 วง จุดศูนย์กลางที่ P และ Q มีรัศมีรวมกันเป็น 1 หน่วย ตัดกันที่จุด A และ B ถ้ามุม \widehat{PAB} และมุม \widehat{BAQ} เป็น 60° และ 45° ตามลำดับ แล้วรัศมีของวงกลมทั้งสอง คือข้อใดต่อไปนี้

1. $3 - \sqrt{6}, \sqrt{6} - 2$
2. $\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}$
3. $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
4. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

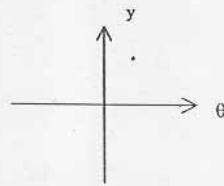
36. ถ้า $10^y = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)^{\frac{1}{2}}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ แล้ว y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log |\sec x + \tan x|$
2. $(\log |\sin x|) - (\log |\cos x|)$
3. $\log |\csc x - \cot x|$
4. $(\log |\sec x|) + (\log |\tan x|)$

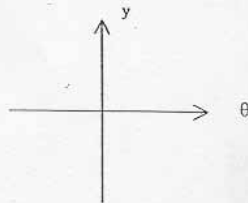
ข้อสรุปที่ 6 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ



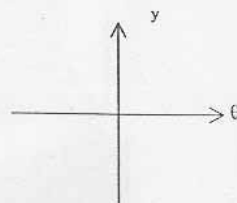
1. $y = \sin \theta$



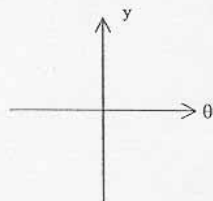
2. $y = \cos \theta$



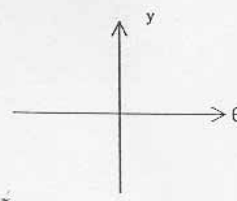
3. $y = \tan \theta$



4. $y = \cot \theta$



5. $y = \operatorname{cosec} \theta$



6. $y = \sec \theta$

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = |\sin x|$
2. $y = |\cos x|$
3. $y = |\tan x|$
4. $y = \sin 2x$
5. $y = \cos 2(x + \pi)$
6. $y = \cos |x|$
7. กำหนดให้ $y_1 = |x|$ และ $y_2 = \cos x$ ถ้ากราฟของ y_1 และ y_2 ตัดกันที่จุด (x, y) แล้วค่าทั้งหมดของ x ที่เป็นไปได้อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}\right]$

2. $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

3. $\left[-\pi, \frac{\pi}{8}\right]$

4. $[0, \pi]$

7. การเปิดตารางตรีโกณมิติ

จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\cos 43^\circ = 0.7314$ และ $\cos 43^\circ 10' = 0.7294$ ถ้า $\sin \theta = 0.7310$

และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว ค่าของ θ คือข้อใด

1. $42^\circ 58'$

2. $43^\circ 2'$

3. $46^\circ 58'$

4. $47^\circ 2'$

จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\tan 27^\circ 10' = 1.532$ และ $\tan 27^\circ 20' = 0.5169$

ค่าของ $\tan 152^\circ 45'$ ตรงกับข้อใด

1. -0.5113

2. -0.5151

3. 0.5151

4. 0.5113

ข้อสรุปที่ 8

8.1 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

8.2 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$; $\sin \theta \neq 0$

8.3 $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$; $\cos \theta \neq 0$

9. สูตรผลบวก - ต่าง

9.1 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

9.2 $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

9.3 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

9.4 $\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

10. สูตรมุม 2A

10.1 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

10.2 $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - \sin^2 A = \cos^2 A - \sin^2 A$

10.3 $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

10.4 $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

10.5 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

10.6 $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$

11. สูตรมุม 3A

11.1 $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

11.2 $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

11.3 $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

12.

| စာမျက်နှာ | 15° | 75° | 105° | 165° | 195° | 225° | 285° | 345° |
|-----------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| sin | | | | | | | | |
| cos | | | | | | | | |
| tan | | | | | | | | |

13.

| | |
|------|--|
| 13.1 | $2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$ |
| 13.2 | $2 \cos A \sin A = \sin (A + B) - \sin (A - B)$ |
| 13.3 | $2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$ |
| 13.4 | $2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$ |
| 13.5 | $\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$ |
| 13.6 | $\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$ |
| 13.7 | $\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$ |
| 13.8 | $\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$ |

แบบฝึกหัด

1. $\frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\tan \theta - \sin \theta \cos \theta}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1. $2 \cot^2 \theta$
 2. $2 \cot \theta$
 3. $2 \cot^2 \theta \sec^2 \theta$
 4. $2 \cos \theta \operatorname{cosec} \theta$
2. ถ้า $2 \sin 2\theta + 3 \cot 2\theta - 3 \operatorname{cosec} 2\theta = 0$, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\cos \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1. 1
 2. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 4. $\frac{1}{2}$
3. ข้อใดต่อไปนี้ผิด
 1. $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta - \pi)$
 2. $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sec \frac{\pi}{4}$
 3. ถ้า $\sec^2 x + \tan^2 x = 3$ และ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ แล้ว $\cos x = 0.707$
 4. ไม่มีจำนวนจริง θ ใดในช่วง $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ มีค่า $\tan \theta = 2.2637$
4. ข้อใดคือค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\pi < x < 2\pi$
 1. $\frac{\pi}{3}$
 2. $\frac{5\pi}{3}$
 3. $\frac{2\pi}{3}$
 4. ข้อ 1, 2, 3 ถูกทุกข้อ
5. ถ้า $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $3 + \cos 3x$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ x มีค่าเท่าใด
 1. $-\frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{\pi}{2}$
 2. $-\frac{\pi}{6}$ หรือ $\frac{\pi}{6}$
 3. $-\frac{\pi}{3}$ หรือ $\frac{\pi}{3}$
 4. $-\frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{\pi}{4}$
6. ถ้า $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ และ $\operatorname{cosec}^2 \theta + 2 \cot^2 \theta = 10$ แล้ว ค่าของ $\sin \theta$ ตรงกับข้อใด
 1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 2. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
 3. $\frac{1}{2}$
 4. $-\frac{1}{2}$
7. กำหนดให้ $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

$$\text{ถ้า } \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin(x+y) \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ แล้ว}$$

$\tan(2x + y)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $-\sqrt{3}$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $\sqrt{3}$

8. กำหนดให้ $A = \{x \mid \tan x + \sec x = 0\}$
 $B = \{x \mid 2 \operatorname{cosec} x - 1 = 0\}$
 $C = \{x \mid \sin 3x \geq 3\}$
 $D = \{x \mid 3 \tan x + 5 = 2\}$

ใน 4 เซตนี้ มีเซตว่างอยู่ที่เซต

1. 0

2. 1

3. 2

4. 3

9. กำหนดให้ $\sin 3\theta + \sin \theta = 1 - 4\sin^3 \theta$ แล้ว $\sec 2\theta + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{8}$

2. $\frac{9}{8}$

3. $\frac{25}{28}$

4. $\frac{39}{28}$

10. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $0 \leq x \leq \pi$ แล้ว อินเวอร์สของ $y = \sin x$ เป็นฟังก์ชัน

2. โดยที่ $-1 \leq \sin x \leq 1$ ดังนั้น $-3 \leq \sin 3x \leq 3$

3. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin 4\pi$

4. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1$ สำหรับทุกๆ ค่าของ θ

11. ถ้า $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta = 0$ แล้ว จุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในที่ใด

1. ควอดรันต์ที่หนึ่งหรือสอง

2. ควอดรันต์ที่สามหรือสี่

3. บนแกน X

4. บนแกน Y

12. กำหนดให้ $A = \{x \mid \sin 4x + \sin 2x = 0 \text{ โดยที่ } 0 \leq x < 2\pi\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3π

2. 7π

3. 11π

4. 16π

13. ถ้าทราบบางค่าของ x จงพิจารณาว่าข้อใดไม่มีโอกาสเป็นไปได้

1. $\sin 2x = 2 \sin x$

2. $\cos x = \tan x$

3. $\sin x + \cos x = 2$

4. ไม่มีข้อใดถูกทั้งข้อ 1, 2 และ 3

14. จงพิจารณาว่าข้อใดถูก

1. ถ้า $\cos(\pi - A) + 2 \cos(2\pi - A) = \sin \frac{13\pi}{6}$ แล้ว $\cos A = \frac{1}{2}$

2. ถ้า $0 < A < 90$ แล้ว $\frac{\cos \sec(180^\circ - A)}{\sec(180^\circ + A)} \cdot \frac{-\cos(-A)}{\sin(180^\circ + A)} = -\cot^2 A$

3. มีจำนวนจริง A ที่ $\sec A = \sqrt{0.05}$

4. ไม่มีข้อใดถูกทั้งข้อ 1, 2 และ 3

15. เซตของค่าของ x ที่ทำให้ $2 \operatorname{cosec} 2x \cot x - \cos^2 x = 1$ ตรงกับข้อใด
1. $[0, 2\pi]$
 2. $\{0, \pi, 2\pi\}$
 3. $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$
 4. ไม่ถูกทั้งข้อ 1, 2 และ 3
16. ถ้า $y = \cos(3x - \pi)$ และ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ แล้ว เมื่อ y มีค่าสูงสุด $\tan 2x$ จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 0
 2. -1
 3. $\sqrt{3}$
 4. $-\sqrt{3}$
17. ถ้า $A = \{(x, y) \mid 0 < x \leq \pi, 0 < y \leq \pi, \cos(x+y) \geq 0, \sin(x+y) \leq 0\}$ แล้ว A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้
1. $\{(x, y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq 2\pi - x, x \leq \pi\}$
 2. $\{(x, y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq \pi, x \leq \pi\}$
 3. $\{(x, y) \mid 0 < y \leq 2\pi - x, x > 0\}$
 4. $\{(x, y) \mid \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \frac{3\pi}{4} \leq y \leq \pi\}$
18. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $\cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$
- ข. $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (โดยกำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$)
- ข้อใดต่อไปนี้ถูก
1. ก. จริง, ข. จริง
 2. ก. จริง, ข. เท็จ
 3. ก. เท็จ, ข. จริง
 4. ก. เท็จ, ข. เท็จ
19. กำหนดให้ $5\cos 3A \cos A + 5\sin 3A \sin A = -3$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\tan A$
1. $\frac{1}{2}$
 2. 1
 3. $\frac{3}{2}$
 4. 2
20. ค่าของ $\frac{1}{8} \sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$ มีค่าเท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{8}$
 2. $\frac{1}{16}$
 3. $\frac{1}{32}$
 4. $\frac{1}{64}$
21. จำนวนจริง x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ
- $$2 \sin 2x + 1 = -\sin x + 2\sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$$
- อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้
1. $[0, \pi]$
 2. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 3. $[\pi, 2\pi]$
 4. $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

22. ให้ a, b เป็นค่าคงที่ และ $f(x) = a \sin x + b \cos x + x^2$ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ ถ้า $f(2) = 3$ แล้ว $f(-2)$ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

23. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว 4 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดที่กำหนดให้ θ เป็นระยะทางที่วัดไปตามส่วนโค้งของวงกลมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(0, 4)$ ไปยังจุดปลายที่ อยู่บนเส้นตรง $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x$ ในควอดรันต์ที่ 2 (นั่นคือ $\theta > 0$) และให้ ϕ เป็นระยะทางที่วัดไปตามส่วนโค้งของวงกลมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด $(4, 0)$ ไปยังจุดปลายที่ อยู่บนเส้นตรง $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x$ ในควอดรันต์ที่ 4 (นั่นคือ $\phi < 0$) ดังนั้น $\cos(\theta + \phi)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

24. สมการใดต่อไปนี้ เป็นเอกลักษณ์
1. $\operatorname{cosec} x + \cot x = \tan \frac{x}{2}$
 2. $\sec x + \tan x = \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
 3. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$
 4. $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$
25. กำหนดให้ $4 \sin^2 x - 6 \sec^2 x = 0$ โดยที่ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ค่าของ $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ เท่ากับ

1. $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$
 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
 3. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$
 4. -1
26. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $450\sqrt{3}$ ตารางนิ้ว มีมุมหนึ่งเท่ากับ 60 องศา และด้านตรงข้ามกับมุมนี้ยาว $30\sqrt{3}$ นิ้ว ความยาวของด้านที่สั้นที่สุดของรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากับ
1. 20 นิ้ว
 2. 25 นิ้ว
 3. 30 นิ้ว
 4. 40 นิ้ว
27. จากรูป ท่อนไม้สามท่อนยาว a, b และ c หน่วย วางเรียงต่อกันทำมุม A, B และ C กับแนวตั้งตามลำดับ จะมีระยะ PQ เท่าใด

1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$
 2. $(a^2 + b^2 + c^2 + a^2 \sin^2 A + b^2 \sin^2 B + c^2 \sin^2 C)^{\frac{1}{2}}$
 3. $\{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(A+B) + 2bc \cos(b+c) + 2ca \cos(C+A)\}^{\frac{1}{2}}$
 4. $\{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(A-B) + 2bc \cos(B-C) + 2ca \cos(C-A)\}^{\frac{1}{2}}$
28. รูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุลงในวงกลมรัศมียาว a หน่วย มีพื้นที่เท่าใด
1. $\frac{1}{2} na^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ ตารางหน่วย
 2. $\frac{1}{2} na^2 \cos \frac{2\pi}{n}$ ตารางหน่วย
 3. $\frac{1}{2} na^2 \cot \frac{\pi}{n}$ ตารางหน่วย
 4. $\frac{1}{2} na^2 \tan \frac{\pi}{n}$ ตารางหน่วย

29. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sin 2x > 2 \cos x$
 และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$
 โดยที่ $x \in [0, 2\pi]$ แล้ว $A - B$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้
1. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
 2. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 3. $(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$
 4. $(\frac{\pi}{2}, \pi] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$
30. เซตคำตอบของสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0, 0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นส่วนหนึ่งของเซตในข้อใดต่อไปนี้
1. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$
 2. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$
 3. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$
 4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$
31. นายแดงนั่งอยู่บนลาดฟ้าของโรงแรมวิมฮาดแห่งหนึ่ง สังเกตเห็นเรือสองลำทอดสมออยู่ในทะเล เป็นมุมกับ x และ y ตามลำดับ จากเส้นระดับสายตาเดียวกัน ถ้าเรือทั้งสองอยู่ห่างกัน 2 ฟุต แล้วลาดฟ้าโรงแรมแห่งนี้สูงจากระดับน้ำทะเลเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{z}{2} \operatorname{cosec}(x-y) [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
 2. $\frac{z}{2} \operatorname{cosec}(x-y) [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$
 3. $\frac{z}{2} [\cot(x-y) - \cot(x+y)]$
 4. $\frac{z}{2} [\cot(x+y) - \cot(x-y)]$
32. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\cos 2\theta = \sin \theta$ คือ $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
- ข. ค่าทั่วไปของ θ ที่สอดคล้องกับสมการ $\tan \theta \sin \theta + \tan \theta = 0$ คือ $2n\pi$
 หรือ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
1. ก. ถูก และ ข. ถูก
 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
 3. ก. ผิด และ ข. ถูก
 4. ก. ผิด และ ข. ผิด
33. กำหนดให้ $A = \{x \mid \sin 4x + \sin 2x = 0 \text{ โดยที่ } 0 \leq x < 2\pi\}$
 ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 3π
 2. 7π
 3. 11π
 4. 16π

34. ถ้า $3\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$ และ $\sin \alpha - 2\sin \beta = 0$ โดยที่ $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ แล้ว $\sin(\alpha + \beta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
4. 1

35. เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $x \in [-2\pi, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} \sin x & 2\sin x \\ -\cos x & 2\cos x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-2\pi, 2\pi]$
2. $[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
3. $[-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi]$
4. $[-2\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi]$

36. กำหนดให้ $x \in [0, 4\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\}$
2. $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\right\}$
3. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right\}$
4. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

37. เซตคำตอบของสมการ $\sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$ เมื่อ $-\pi \leq x \leq \pi$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid -\pi \leq x < -\frac{\pi}{3} \text{ หรือ } \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi\}$
2. $\{x \mid -\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\}$
3. $\{x \mid -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\}$
4. $\{x \mid -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\}$

38. กำหนดให้ $4\sin^2 \theta + 11\cos \theta - 1 = 0$ แล้ว $\cot^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sec(\theta - 3\pi)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 11
3. 15
4. 19

39. ถ้า $\tan A = \frac{1}{7}$ และ $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}}$ เมื่อ A และ B เป็นมุมแหลม แล้ว $\tan(A + 2B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

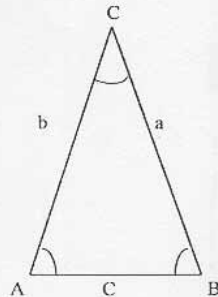
1. $\frac{1}{2}$
2. 1
3. $\frac{3}{2}$
4. 2

40. กำหนดให้ $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ ค่าของ $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{12\sqrt{3}}{25}$
2. $-\frac{6\sqrt{3}}{25}$
3. $\frac{6\sqrt{3}}{25}$
4. $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

41. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก
1. ถ้า $0 \leq x \leq \pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$
 2. ถ้า $\pi \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$
 3. ถ้า $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $f(x) = 0$
 4. ถ้า $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $f(x) = 0$
42. ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{11}{32}$
 2. $\frac{11}{16}$
 3. $\frac{9}{16}$
 4. $\frac{9}{12}$
43. ถ้า θ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$
 2. $\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$
 3. $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$
 4. $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$
44. ถ้า $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ แล้วค่าของ $1 + \tan^2 \theta - \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. $3 - 2\sqrt{2}$
 2. $3 + 2\sqrt{2}$
 3. $5 - 2\sqrt{2}$
 4. $5 + 2\sqrt{2}$
45. ถ้า $\sin(2\pi - \theta) - \sin(\pi - \theta) = 1$ แล้วข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\cos^2 \theta$
1. $\frac{1}{4}$
 2. $\frac{1}{2}$
 3. $\frac{3}{4}$
 4. 1
46. ถ้า $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ และ $6 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ แล้ว $(\cos \theta + \tan \theta)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $25/72$
 2. $49/72$
 3. $64/72$
 4. $81/72$
47. ถ้า $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \frac{5}{3}$ แล้ว $\sin \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{30}{34}$
 2. $\frac{15}{34}$
 3. $\frac{25}{30}$
 4. $\frac{15}{34}$

14.

sine - law

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

cosine - law

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

1. ถ้า $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ และ $C(3, 5)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC แล้ว $\sin \frac{B}{2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{50}-1}{\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$

2. $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{50}+1}{\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$

3. $\left(\frac{\sqrt{50}+1}{2\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$

4. $\left(\frac{\sqrt{50}-1}{2\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$

2. กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาว $\sqrt{12}$ หน่วย ด้าน AC ยาว $\sqrt{8}$ หน่วย มุม $B = 45^\circ$ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

2. $2(\sqrt{3}+1)$

3. $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

4. $\sqrt{3}+1$

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน BC, CA และ AB ยาว a, b และ c หน่วยตามลำดับ

ถ้า $(a+b+c)(a-b-c) = -3bc$ และ $4a^2 = 6b^2$ แล้ว $1+2\sin^2(3A-2B)$ เท่ากับเท่าใด

4. สามเหลี่ยม ABC มีด้าน a, b, c, เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B, C ซึ่งมีความยาวเป็น 3, 2.5, 1 หน่วย ตามลำดับ ค่าของ $b \cos C + c \cos B$ เท่ากับข้อใด

5. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

| ฟังก์ชัน | โดเมน | เรนจ์ |
|------------------------|--|----------------------------------|
| \sin | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | $[-1, 1]$ |
| \cos | $[0, \pi]$ | $[-1, 1]$ |
| \tan | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | \mathbb{R} |
| cosec | $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ |
| \sec | $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ |
| \cot | $(0, \pi)$ | \mathbb{R} |

| ฟังก์ชัน | โดเมน | เรนจ์ |
|---------------------------|----------------------------------|--|
| \arcsin | $[-1, 1]$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |
| \arccos | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |
| \arctan | \mathbb{R} | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ |
| $\operatorname{arccosec}$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ |
| arcsec | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ |
| arccot | \mathbb{R} | $(0, \pi)$ |

แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ถ้า

$$A = \{\arcsin x \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

$$B = \{\arccos x \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

$$C = \{\arctan x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$$

แล้ว $(A \cap C) \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

2. $[0, \frac{\pi}{2}]$

3. $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

4. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\arctan(\cot(\frac{17\pi}{3}))$ มีค่าเท่ากับ $\frac{5\pi}{6}$

3. $\cos(\arcsin \frac{5}{13} + \arccos \frac{3}{5})$ มีค่าเท่ากับ $\frac{56}{65}$

4. $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. ผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \frac{1}{2}))) = \pi$ เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \dots\}$

2. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \dots\}$

3. $\{\dots, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \dots\}$

4. $\{\dots, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$

4. ค่าของ $\arcsin(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{5\pi}{12})$ เท่ากับ

1. 0

2. $\frac{\pi}{2}$

3. $\frac{\pi}{3}$

4. $\frac{\pi}{4}$

5. ค่าของ $\tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1

2. 1

3. $\frac{4}{3}$

4. $-\frac{4}{3}$

6. ค่าของ $\sin\left(\frac{\arctan \frac{3}{4}}{2}\right) + \cos\left(2\arcsin \frac{3}{5}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{6}{25}}$

2. $\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{6}{25}}$

3. $\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{7}{25}}$

4. $\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{7}{25}}$

7. กำหนดให้ $2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) = \frac{\pi}{3}$ ดังนั้น $\arcsin a$ มีค่าอยู่ในช่วงใด

1. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$

2. $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

3. $(0, \frac{\pi}{4})$

4. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

8. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\cot \theta \cos 2\theta - \tan \theta \sin 2\theta = 2 \cot 2\theta$

3. ถ้า $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\cos 2\theta \geq \sin 2\theta$

4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2 \arccos \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - 1$

9. เซตคำตอบของสมการ $\cos(2 \arccos(1-x)) = x^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\{2 + \sqrt{3}\}$

2. $\{2 - \sqrt{3}\}$

3. $\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

4. ข้อ 1, 2, 3 ไม่มีข้อใดถูก

10. เซตคำตอบของสมการ $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{x}{4}$

เป็นเส้นตรงของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-4, 0)$

2. $(-3, 1)$

3. $(-2, 2)$

4. $(-1, 3)$

11. ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2 \arcsin x$ แล้วค่าของ $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{9}$

2. $\frac{2}{9}(1 + \sqrt{8})$

3. $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12}$

4. $\frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$

12. จำนวนสมาชิกของเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x-x^2) = \arcsin x + \arcsin(x-1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4