好的，这是根据您的要求，移除引用标记后重新排版的内容。

问题 1

题目分析

给定一个线性时不变系统 $\dot{x} = Ax$。我们已知两组不同的初始条件 $x(0)$ 及其对应的时间响应 $x(t)$。

1. 当 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 时, $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}^T$。
2. 当 $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ 时, $x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}^T$。
   要求解系统的系统矩阵 A 和状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

解答思路

1. 线性时不变系统的解可以表示为 $x(t) = \Phi(t)x(0)$，其中 $\Phi(t) = e^{At}$ 是状态转移矩阵。
2. 我们可以利用给定的两组初始条件和响应，构建一个矩阵方程，从而求解出 $\Phi(t)$。
3. 将两组条件写成一个矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix}$$

4. 代入具体数值，解出 $\Phi(t)$。
5. 根据状态转移矩阵与系统矩阵的关系 $A = \frac{d\Phi(t)}{dt}|_{t=0}$，求出矩阵 A。

解题过程

1. **构造矩阵方程**
   根据系统的解 $x(t) = \Phi(t)x(0)$，我们将给定的两个条件组合成一个矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. **求解状态转移矩阵 $\Phi(t)$**
   为了解出 $\Phi(t)$，我们需要对初始条件矩阵求逆。令 $X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$。
   该矩阵的行列式为 $\det(X_0) = (1)(-1) - (2)(-1) = -1 + 2 = 1$。
   矩阵的逆为：

$$X_0^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   现在，我们可以求解 $\Phi(t)$：

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} X_0^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

进行矩阵乘法：

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t}(-1)+2e^{-2t}(1) & e^{-2t}(-2)+2e^{-2t}(1) \\ -e^{-2t}(-1)+(-e^{-2t})(1) & -e^{-2t}(-2)+(-e^{-2t})(1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3. **求解系统矩阵 A**

   系统矩阵 A 是状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 在 $t=0$ 时的导数：

$$A=\dot{\Phi}(0)=\left.\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\right|_{t=0}$$

   首先求导：

$$\dot{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-2t} & 0 \\ 0 & -2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

   然后令 $t=0$：

$$A=\begin{bmatrix} -2e^{0} & 0 \\ 0 & -2e^{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

最终答案

- 系统矩阵 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
- 状态转移矩阵 $\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

问题 2

题目分析

给定一个连续时间系统的状态方程，要求在采样周期 T=0.01s 下，求其对应的离散化状态方程。
连续系统为:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

解答思路

1. 连续时间状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 对应的离散化形式为 $x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$。
2. 其中，离散系统矩阵 $G = e^{AT}$，输入矩阵 $H = (\int_0^T e^{A\tau} d\tau)B$。
3. 首先，根据给定的 A 矩阵计算矩阵指数 e^{At}。
4. 然后，将 $t = T$ 代入得到 G。
5. 最后，计算积分并乘以 B 矩阵得到 H。

解题过程

1. **识别 A 和 B 矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. **计算状态转移矩阵 $\Phi(t) = e^{At}$**
   我们可以使用泰勒级数展开来计算 e^{At}：

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

   计算 A 的幂：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   因为 A^2 是零矩阵，所以所有更高次的幂（$A^3, A^4, \dots$）也都是零矩阵。因此，级数展开只有前两项：

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **计算离散系统矩阵 G**
   令 $t = T = 0.01s$：

$$G = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **计算离散输入矩阵 H**

$$H = \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau \right) B$$

   对矩阵进行积分：

$$\int_0^T \begin{bmatrix}1 & \tau \\ 0 & 1\end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix}\int_0^T 1 d\tau & \int_0^T \tau d\tau \\ \int_0^T 0 d\tau & \int_0^T 1 d\tau\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\tau]_0^T & [\frac{\tau^2}{2}]_0^T \\ [0]_0^T & [\tau]_0^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T\end{bmatrix}$$

代入 B 矩阵进行计算：

$$H = \begin{bmatrix}T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T(0) + \frac{T^2}{2}(1) \\ 0(0) + T(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{T^2}{2} \\ T\end{bmatrix}$$

代入 $T = 0.01s$：

$$H = \begin{bmatrix}\frac{(0.01)^2}{2} \\ 0.01\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{0.0001}{2} \\ 0.01\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00005 \\ 0.01\end{bmatrix}$$

最终答案

该连续系统对应的离散化状态方程为：

$$x(k+1) = \begin{bmatrix}1 & 0.01 \\ 0 & 1\end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix}0.00005 \\ 0.01\end{bmatrix} u(k)$$

问题 3

题目分析

给定一个二阶差分方程 $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$。

1. 选取状态变量 $x_1(k) = y(k)$ 和 $x_2(k) = y(k+1)$，写出系统的状态空间方程。
2. 在初始值 $y(0) = 1, y(1) = 0$ 的条件下，求系统的单位阶跃响应 $y(k)$。

解答思路

1. **状态空间方程**:
   - 根据状态变量的定义，建立 $x_1(k+1)$ 和 $x_2(k+1)$ 与 $x_1(k), x_2(k)$ 以及 $u(k)$ 之间的关系。
   - $x_1(k+1) = y(k+1)$，根据定义，这等于 $x_2(k)$。
   - $x_2(k+1) = y(k+2)$，可以从原差分方程中解出。
   - 将这些关系写成标准的状态空间矩阵形式。
2. **单位阶跃响应**:
   - 利用Z变换求解差分方程是求解响应的直接方法。
   - 对差分方程两边进行Z变换，并代入初始条件。
   - 输入为单位阶跃信号 $u(k) = 1(k \geq 0)$，其Z变换为 $U(z) = \frac{z}{z-1}$。

- 求解出输出 $Y(z)$ 的表达式。
- 对 $Y(z)$ 进行部分分式展开，然后通过Z反变换求得时域响应 $y(k)$。

解题过程

1. **建立状态空间方程**
   - 根据定义，$x_1(k+1)=y(k+1)=x_2(k)$。
   - 从差分方程移项可得：$y(k+2)=-2y(k)-3y(k+1)+u(k)$。
   - 代入状态变量定义：$x_2(k+1)=-2x_1(k)-3x_2(k)+u(k)$。
   - 写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

   - 输出方程为 $y(k)=x_1(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$。
2. **求解单位阶跃响应**
   - 对差分方程 $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$ 两边取Z变换：

$$Z\{y(k+2)\}+3Z\{y(k+1)\}+2Z\{y(k)\}=Z\{u(k)\}$$

   - 利用Z变换的时域位移性质，并代入初始条件 $y(0)=1, y(1)=0$：

$$[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]+3[zY(z)-zy(0)]+2Y(z)=U(z)$$

$$[z^2Y(z)-z^2]+3[zY(z)-z]+2Y(z)=U(z)$$

   - 整理可得：

$$(z^2+3z+2)Y(z)-z^2-3z=U(z)$$

   - 输入是单位阶跃，$U(z)=\frac{z}{z-1}$。代入并求解 $Y(z)$：

$$(z+1)(z+2)Y(z)=z^2+3z+\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{z^2+3z}{(z+1)(z+2)}+\frac{z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$Y(z)=\frac{(z^2+3z)(z-1)+z}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{z^3-z^2+3z^2-3z+z}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{z^3+2z^2-2z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

   - 为方便进行部分分式展开，我们先处理 $\frac{Y(z)}{z}$：

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2+2z-2}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z+2}$$

计算系数 A, B, C：

$$A = \left.\frac{z^2+2z-2}{(z+1)(z+2)}\right|_{z=1} = \frac{1+2-2}{(2)(3)} = \frac{1}{6}$$

$$B = \left.\frac{z^2+2z-2}{(z-1)(z+2)}\right|_{z=-1} = \frac{1-2-2}{(-2)(1)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \left.\frac{z^2+2z-2}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=-2} = \frac{4-4-2}{(-3)(-1)} = -\frac{2}{3}$$

- 所以：

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1/6}{z-1} + \frac{3/2}{z+1} - \frac{2/3}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{6}\frac{z}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{z}{z+1} - \frac{2}{3}\frac{z}{z+2}$$

- 进行Z反变换得到 $y(k)$：

$$y(k) = \frac{1}{6}(1)^k + \frac{3}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k, \quad k \geq 0$$

最终答案

- 状态方程为: $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$, 输出方程为 $y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$。
- 系统的单位阶跃响应为 $y(k) = \frac{1}{6} + \frac{3}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k$, for $k \geq 0$。

问题 4

题目分析

已知离散时间线性时不变系统 $x(k+1) = Ax(k)$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

给定初始值 $x(0) = [1, 1, 0, 1]^T$，要求计算 $x(50)$。

解答思路

1. 系统的解为 $x(k) = A^k x(0)$。因此，我们需要计算 $x(50) = A^{50} x(0)$。
2. 直接计算 A^{50} 非常复杂。一个更高效的方法是利用矩阵的特征值和特征向量。
3. 如果一个矩阵 A 可对角化，即 $A = PDP^{-1}$，其中 D 是特征值组成的对角矩阵，P 是对应特征向量组成的矩阵，那么 $A^k = PD^kP^{-1}$。
4. 不过，一个更简便的方法是将初始向量 $x(0)$ 表示为特征向量的线性组合：$x(0) = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4$。
5. 这样，$x(k) = A^k x(0) = c_1 A^k p_1 + c_2 A^k p_2 + \cdots = c_1 \lambda_1^k p_1 + c_2 \lambda_2^k p_2 + \ldots$。
6. 解题步骤：
   - 计算矩阵 A 的特征值 λ_i。
   - 计算每个特征值对应的特征向量 p_i。
   - 将初始条件 $x(0)$ 表示为特征向量的线性组合，解出组合系数 c_i。
   - 利用公式 $x(50) = \sum c_i \lambda_i^{50} p_i$ 计算最终结果。

解题过程

1. **求特征值**
   特征方程为 $\det(A - \lambda I) = 0$。

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(-2-\lambda)((-2-\lambda)^2 - 1)] = (1-\lambda)(-2-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3)$$

$$= -(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

   特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -3$。
2. **求特征向量**
   对于每个特征值 λ_i，求解 $(A - \lambda_i I)p_i = 0$。
   - $\lambda_1 = 1$: $p_1 = [24, 1, 3, 9]^T$
   - $\lambda_2 = -1$: $p_2 = [0, 1, 1, 1]^T$
   - $\lambda_3 = -2$: $p_3 = [0, 1, 0, 0]^T$
   - $\lambda_4 = -3$: $p_4 = [0, -1, 1, -1]^T$
3. **分解初始向量**
   将 $x(0)$ 表示为 $x(0) = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4$。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 24 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

这构成一个线性方程组：

$$\begin{cases} 24c_1 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 - c_4 = 1 \\ 3c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ 9c_1 + c_2 - c_4 = 1 \end{cases}$$

解得：$c_1 = \frac{1}{24}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = -\frac{3}{8}$。

4. **计算 x(50)**
   利用公式 $x(50) = c_1\lambda_1^{50}p_1 + c_2\lambda_2^{50}p_2 + c_3\lambda_3^{50}p_3 + c_4\lambda_4^{50}p_4$。
   计算各特征值的50次方：
   - $\lambda_1^{50} = 1^{50} = 1$
   - $\lambda_2^{50} = (-1)^{50} = 1$
   - $\lambda_3^{50} = (-2)^{50} = 2^{50}$
   - $\lambda_4^{50} = (-3)^{50} = 3^{50}$
     代入数值：

$$x(50) = \frac{1}{24}(1)p_1 + \frac{1}{4}(1)p_2 + \frac{1}{3}(2^{50})p_3 + (-\frac{3}{8})(3^{50})p_4$$

$$x(50) = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2^{50}}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3 \cdot 3^{50}}{8}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

     分别计算每个分量：
   - $x_1(50) = \frac{24}{24} + 0 + 0 - 0 = 1$
   - $x_2(50) = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{2^{50}}{3} - \frac{3^{51}}{8}(-1) = \frac{7}{24} + \frac{2^{50}}{3} + \frac{3^{51}}{8}$
   - $x_3(50) = \frac{3}{24} + \frac{1}{4} + 0 - \frac{3^{51}}{8}(1) = \frac{9}{24} - \frac{3^{51}}{8} = \frac{3}{8} - \frac{3^{51}}{8}$
   - $x_4(50) = \frac{9}{24} + \frac{1}{4} + 0 - \frac{3^{51}}{8}(-1) = \frac{15}{24} + \frac{3^{51}}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3^{51}}{8}$

最终答案

$$x(50) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{24} + \frac{2^{50}}{3} + \frac{3^{51}}{8} \\ \frac{3-3^{51}}{8} \\ \frac{5+3^{51}}{8} \end{bmatrix}$$