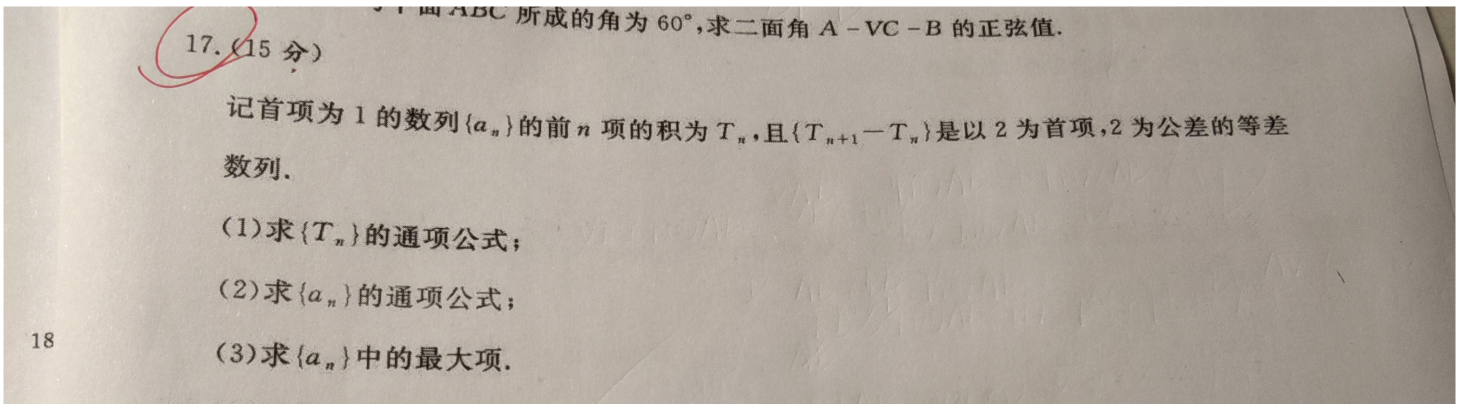
一道数列题——解答一下

题目如下所示：



平面 ABC 所成的角为 60°，求二面角 $A-VC-B$ 的正弦值.

17.（15 分）

记首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的积为 T_n，且 $\{T_{n+1}-T_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列.

（1）求 $\{T_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）求 $\{a_n\}$ 中的最大项.

18

完整分析思路 by Japluto

这道题围绕两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{T_n\}$ 展开，其中 T_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项积。题目的核心是利用一个给定的差分信息来反推出数列的通项公式。

---

1. **第一步：求 $\{T_n\}$ 的通项公式。**
   - 题目给出了一个关键信息：数列 $\{T_{n+1}-T_n\}$ 是一个首项为2，公差为2的等差数列。
   - 我们可以设 $b_n = T_{n+1}-T_n$。根据等差数列的通项公式，可以直接写出 b_n 的表达式，即 $b_n = 2+(n-1)\times 2 = 2n$。
   - 这样我们就得到了关于 $\{T_n\}$ 的一个递推关系式：$T_{n+1}-T_n = 2n$。
   - 为了求出 $\{T_n\}$ 的通项公式，可以使用“裂项相加法”。将 T_n 表示为 T_1 加上从 $k=1$ 到 $n-1$ 的所有差值 $(T_{k+1}-T_k)$ 的和。
   - 根据定义，$T_1 = a_1$。题目已知 $a_1 = 1$，所以 $T_1 = 1$。
   - 将 T_1 的值代入，即可得到 $\{T_n\}$ 的通项公式。

---

2. **第二步：求 $\{a_n\}$ 的通项公式。**
    - 我们知道 T_n 的定义是 $T_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$。
    - 由此可以得到 a_n 和 T_n 之间的关系：
        - 当 $n \geq 2$ 时，$a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}}$。
        - 当 $n = 1$ 时，$a_1 = T_1$。
    - 利用第一步求出的 $\{T_n\}$ 的通项公式，代入即可求出 a_n 的表达式。
    - 最后，检验当 $n = 1$ 时表达式是否也成立，以确定是否可以统一为一个通项公式。

---

3. **第三步：求 $\{a_n\}$ 中的最大项。**
    - 我们已经得到了 $\{a_n\}$ 的通项公式。要求其最大项，通常有两种方法：
        - **作商/作差法：** 比较相邻两项 a_{n+1} 和 a_n 的大小关系，即判断 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 与1的大小或 $a_{n+1} - a_n$ 的正负，从而找到数列的单调性转折点。
        - **函数法：** 将 n 视为连续变量 x，构造函数 $f(x) = a_x$。通过求导数 $f'(x)$ 来判断函数的单调性，从而确定极值点，也就是数列的最大值点。在本题中，函数法更为直观。
    - 找到最大值点对应的整数 n 后，代入通项公式即可求出最大项的值。

完整解答过程

---

(1) 求 $\{T_n\}$ 的通项公式

解：设 $b_n = T_{n+1} - T_n$。
根据题意，数列 $\{b_n\}$ 是一个以2为首项，2为公差的等差数列。
其首项 $b_1 = T_2 - T_1 = 2$。
其通项公式为 $b_n = b_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$。
所以，$T_{n+1} - T_n = 2n$。

当 $n \geq 2$ 时，我们有：

$$T_n = T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \cdots + (T_n - T_{n-1})$$

$$T_n = T_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(T_{k+1} - T_k)$$

$$T_n = T_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$T_n = T_1 + 2 \times \frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$$

$$T_n = T_1 + n(n-1)$$

根据题意，$a_1 = 1$。又因为 $T_1 = a_1$，所以 $T_1 = 1$。
代入上式可得：

$$T_n = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$$

当 $n = 1$ 时，$T_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$，符合题意。
因此，数列 $\{T_n\}$ 的通项公式为 $T_n = n^2 - n + 1$。

---

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

解：根据 T_n 的定义，我们有：
当 $n = 1$ 时，$a_1 = T_1 = 1$。
当 $n \geq 2$ 时，$a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}}$。

我们将第(1)问中求得的 T_n 通项公式代入：

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)^2 - (n-1) + 1}$$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{(n^2 - 2n + 1) - n + 1 + 1}$$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - 3n + 3}$$

检验 $n = 1$ 时该公式是否成立：
当 $n = 1$ 时，$a_1 = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 - 3(1) + 3} = \frac{1}{1} = 1$。
这与已知的 $a_1 = 1$ 相符。
因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - 3n + 3}$。

---

(3) 求 $\{a_n\}$ 中的最大项

解：为了求 $\{a_n\}$ 的最大项，我们研究其单调性。
将通项公式变形：

$$a_n = \frac{(n^2 - 3n + 3) + 2n - 2}{n^2 - 3n + 3} = 1 + \frac{2n - 2}{n^2 - 3n + 3}$$

要使 a_n 最大，即需要使分式 $g(n) = \frac{2n-2}{n^2-3n+3}$ 最大。

- 当 $n = 1$ 时，$g(1) = \frac{2(1)-2}{1-3+3} = 0$，所以 $a_1 = 1$。
- 当 $n \geq 2$ 时，分子 $2n - 2 > 0$，分母 $n^2 - 3n + 3 = (n - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$。所以当 $n \geq 2$ 时，$g(n) > 0$ 且 $a_n > 1$。

我们对 $g(n)$ 进行处理，令 $m = n - 1$ (当 $n \geq 2$ 时，$m \geq 1$)：

$$g(n) = \frac{2(n-1)}{(n-1)^2 - (n-1) + 1} = \frac{2m}{m^2 - m + 1}$$

当 $m \geq 1$ 时，为求其最大值，可以对分母进行配方或求倒数：

$$g(n) = \frac{2}{m - 1 + \frac{1}{m}} = \frac{2}{(m + \frac{1}{m}) - 1}$$

要使 $g(n)$ 最大，就需要使分母 $(m + \frac{1}{m}) - 1$ 最小。
根据基本不等式，当 $m > 0$ 时，$m + \frac{1}{m} \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{1}{m}} = 2$。
当且仅当 $m = 1$ 时，$m + \frac{1}{m}$ 取最小值2。

所以，当 $m=1$ 时，分母取得最小值 $2-1=1$。
此时 $n=m+1=2$。

这意味着当 $n=2$ 时，$g(n)$ 取到最大值，从而 a_n 取到最大值。
我们计算 a_2 的值：

$$a_2 = 1 + g(2) = 1 + \frac{2(2)-2}{2^2-3(2)+3} = 1 + \frac{2}{4-6+3} = 1 + \frac{2}{1} = 3$$

验证 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = \frac{7}{3} \approx 2.33$。可见 $a_1 < a_2$ 且 $a_3 < a_2$。
因此，数列 $\{a_n\}$ 中的最大项是第2项，其值为 **3**。