UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Atividade 5 - Integração Monte Carlo

Jaqueline Lamas da Silva

2024

Sumário

Exercício 1:

Letra a:

$$\int_0^1 exp(e^x)dx \text{ (Caso 1)}$$

```
set.seed(666)
g.u<-function(x)
{
  exp(exp(x))
}
u<-runif(1000000)
mean(g.u(u))
```

```
## [1] 6.315369
```

$$\int_0^1 \exp(\exp(x))\, dx = \mathrm{Ei}(e) - \mathrm{Ei}(1) \approx 6.31656$$

Ei(x) is the exponential integral Ei

A partir de 1 milhão já consegue-se uma aproximação da solução da integral com precisão até a segunda casa decimal.

Letra b:

$$\int_{-2}^2 e^{x+x^2} \text{ (caso 2)}$$

```
funcao.g<-function(x) exp(x + x^2)

funcao.h<-function(y,a,b) # Função transforma em uma integral no intervalo 0 e 1
{
  (b-a)*funcao.g(y*(b-a)+a)
}

u<-runif(100000)
mean(funcao.h(u,a=-2,b=2))
```

```
## [1] 91.91399
```

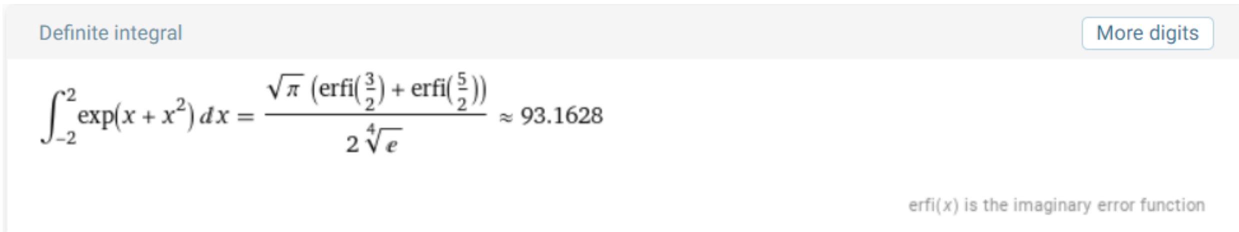

Figure 1: Resolução pelo Wolframalpha

Letra c:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} \text{ (caso 3)}$$

```
funcao.g<-function(x) x/(1+x^2)^2
funcao.h<-function(y)
{
  funcao.g(y/(1-y)) / (1-y)^2
}
u<-runif(100000)
mean(funcao.h(u))
```

```
## [1] 0.4995316
```

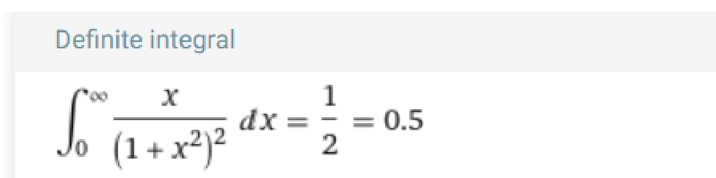

Figure 2: "Resolução pelo Wolframalpha"

Letra d:

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dydx$$

```
funcao.g<-function(x,y){ exp((x+y)^2) }
u1<-runif(100000)
u2<-runif(100000)
mean(funcao.g(u1,u2))
```

```
## [1] 4.890473
```

Definite integral

More digits

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2}\, dy\, dx = \sqrt{\pi}\,(\text{erfi}(2) - \text{erfi}(1)) - \frac{1}{2} + e - \frac{e^4}{2} \approx 4.89916$$

erfi(x) is the imaginary error function

Figure 3: Resolução pelo Wolframalpha

Letra e:

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-(x+y)} dy dx$$

```
funcao.g<-function(x,y)
{
  I.y<-as.numeric(y<x) # Dica do livro Ross simulation, p.44
  exp(-(x+y)) * I.y
}

funcao.h<-function(u1,u2)
{
   funcao.g(u1/(1-u1), u2/(1-u2) ) / ((1-u1)^2 * (1-u2)^2) # Transformação do caso 3 na
}

u1<-runif(1000000)
u2<-runif(1000000)
mean(funcao.h(u1,u2))
```

```
## [1] 0.5010168
```

Definite integral

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp(-(x+y))\, dy\, dx = \frac{1}{2} = 0.5$$

Exercício 2:

$$COV(U, e^U) = E[Ue^U] - E[U]E[e^U]$$

```
funcao.g<-function(x) x*exp(x)
funcao.h<-function(x) exp(x)
u<-runif(100000)
Cov<-mean(funcao.g(u)) - mean(u) * mean(funcao.h(u))
```

$COV(U, e^U)$: 0.141

Exercício 3:

```
Nmin<-function()
{
  u<-runif(1)
  soma<-u
  n<-1
  while(soma<1)
  {
    u<-runif(1)
    soma<-soma+u
    n<-n+1
  }
  return(n)
}
```

Letra a:

```
N<-replicate(100,Nmin())
mean(N)
```

```
## [1] 2.67
```

Letra b:

```
N<-replicate(1000,Nmin())
mean(N)
```

```
## [1] 2.763
```

Letra c:

```
N<-replicate(10000,Nmin())
mean(N)
```

```
## [1] 2.7118
```

e é a quantidade mínima média de números reais aleatórios entre 0 e 1 necessária para que a soma exceda 1. Dessa forma $E(N)$ é 2.7182.... Existem diversas maneiras de mostrar que o valor esperado de N é o número de Euler, uma delas pode ser encontrada no primeiro link das referências.

Referências

Prova do valor esperado de N. Disponível em :https://www.physics.harvard.edu/files/sol38.pdf. Acesso em: 10/06/2024