# Первая группа вопросов

1. **Понятие множества, отношения включения, основные операции над множествами, их свойства.**

**Определение 1**. *Множеством* называется произвольный набор (совокупность, класс, семейство) каких-либо объектов. Объекты, входящие во множество, называются его *элементами*. Если объект $x$ является элементом множества $A$, то говорят, что $x$ *принадлежит* $A$, и пишут $x \in A$.

**Определение 2**. Множество $A$ является *подмножеством* множества $B$, если любой элемент множества $A$ также принадлежит множеству $B$. Обозначение: $A \subset B$. Множества $A$ и $B$ равны, если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$. Обозначение: $A = B$.

**Утверждение 3.** *Имеют место следующие свойства*:

- *Рефлексивность* $\subset$*: для любого множества* $A$ *выполнено* $A \subset A$;
- *Антисимметричность* $\subset$*: если* $A \subset B$ *и* $B \subset A$*, то* $A = B$;
- *Транзитивность* $\subset$*: если* $A \subset B$ *и* $B \subset C$*, то* $A \subset C$;
- *Рефлексивность* $=$*: для любого множества* $A$ *выполнено* $A = A$;
- *Симметричность* $=$*: если* $A = B$*, то* $B = A$;
- *Транзитивность* $=$*: если* $A = B$ *и* $B = C$*, то* $A = C$;

**Определение 4.** *Пустым множеством* $\varnothing$ называется множество, не содержащее ни одного элемента.

**Утверждение 5.** *Для любого множества* $A$ *выполнено* $\varnothing \subset A$.

### Операции над множествами

**Определение 6.** Пусть заданы множества $A$ и $B$, лежащие в некотором универсуме U. Тогда:

- *Объединением* $A$ и $B$ называется множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ или } x \in B\}$.
- *Пересечением* $A$ и $B$ называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } x \in B\}$.
- *Разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } x \notin B\}$.
- *Симметрической разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество $A \Delta B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } x \notin B, \text{ или } x \in B \ \text{ и } x \notin A\}$.
- *Дополнением* множества $A$ называется множество $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$.

**Утверждение 7.** *Для операций над множествами выполнены следующие тождества:*

- *Коммутативность*: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- *Ассоциативность*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- *Дистрибутивность*: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- *Законы де Моргана*: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**Дополнительно: Пары и кортежи. Декартово произведение.**

**Определение 8.** *Кортежем* длины 0 называется пустое множество. Если $T = (a_1, ..., a_n)$ – кортеж длины $n$, то $(a, a_1, ..., a_n) = \{a, \{a, T\}\}$ есть кортеж $n + 1$. Кортеж длины 2 называется *упорядоченной парой.*

Таким образом, упорядоченная пара $(a, b)$ – это множество $\{a, \{a, \{b, \{b, \varnothing\}\}\}\}$. Можно определять упорядоченную пару и другими способами. Например:

- Определение Винера: $(a, b) = \{\{\{a\}, \varnothing\}, \{\{b\}\}\}$;
- Определение Хаусдорфа: $(a, b) = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$, где 1 и 2 суть объекты, отличные от $a, b$ и друг от друга;
- Определение Куратовского: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$;
- Упрощённое определение Куратовского: $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$.

**Определение 9.** *Декартовым произведением* множеств $A$ и $B$ называется множество упорядоченных пар $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. *Декартовой степенью* $A^n$ множества $A$ называется множество кортежей длины $n$ элементов $A$. **Утверждение 10.** *При всех $A, B, C, n, m$ выполнены равенства:*

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$;
- $A^n = A \times A \times \cdots \times A (n \text{ раз})$;
- $A^n \times A^m = A^{n+m}$;
- $(A^n)^m = A^{nm}$.

**Замечание 11.** Формально наше отождествление кортежей задаёт *отношение эквивалентности*, а равенство множеств надо понимать так, что для каждого элемента $x$ одного множества найдётся ровно один элемент другого множества, эквивалентный $x$.

2. **Понятие отображения. Примеры. Область определения и область значений. Образы и прообразы множеств при отображениях.**

**Определение 1.** *Соответствием* между множествами $A$ и $B$ называют произвольное подмножество декартова произведения $F \subset A \times B$.

**Определение 2.** *Отображением* из множества $A$ в множество $B$ называется однозначное соответствие между $A$ и $B$, т.е. такое соответствие, что для любого $a \in A$ найдётся ровно одно $b \in B$, соответствющее $a$.

**Определение 3.** *Областью определения* соответствия $F : A \to B$ называетсям множество $\mathrm{Dom}\, F = F^{-1}(B)$. Иными словами, область определения – множество тех элементов $A$, которым соответствует хотя бы один элемент $B$.

**Определение 4.** *Областью значений* соответствия $F : A \to B$ называется множество $\mathrm{Ran}\, F = F(A)$. Иными словами, область определения – множество тех элементов $B$, которые соответствуют хотя бы одному элементу $A$.

**Определение 5.** Пусть $F : A \to B$ – соответствие, а $S \subset A$. Тогда *образом* множества $S$ называется множество всех элементов $B$, соответствующих какому-то элементу $S$. Формально можно записать так: $F(S) = \cup_{s \in S} F(s) \subset B$.

**Определение 6.** Пусть $F : A \to B$ – соответствие, а $T \subset B$. Тогда *прообразом* множества $T$ называется множество элементов $A$, которым соответствует хотя бы один элемент $T$. Формально $F^{-1}(T) = \{a : F(a) \cap T \neq \varnothing\} \subset A$.

**Утверждение 7.** *Образ пересечения любых двух множеств равняется пересечению образов тех же множеств тогда и только тогда, когда соответствие инъективно.*

3. **Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Композиции отображений. Обратные отображения.**

**Определение 1.** *Инъективным* соответствием называется соответствие, при котором для любых $a_1 \neq a_2$ множества $F(a_1)$ и $F(a_2)$ не пересекаются. Инъективное отображение называется инъекцией.

**Определение 2.** *Сюръективным* соответствием называется соответствие, при котором любой элемент $B$ соответствует хотя бы одному элементу $A$, т.е. любой $b \in B$ лежит в $F(a)$ для некоторого $a \in A$. Сюръективное отображение называется *сюръекцией*.

**Определение 3.** *Биекцией* называется отображение, являющееся одновременно инъекцией и сюръекцией.

**Утверждение 4.** *Соответствие является биекцией тогда и только тогда, когда каждому элементу $A$ соответствует ровно один элемент $B$, а также каждый элемент $B$ соответствует родно одному элементу $A$.*

**Определение 5.** Пусть $F : A \to B$ и $G : B \to C$ – соответствия. Тогда их композицией $G \circ F$ называется соответствие $H : A \to C$, определённое правилом: $c \in H(a)$ тогда и только тогда, когда найдётся $b$, такое что одновременно $c \in G(b)$ и $b \in F(a)$.

**Определение 6.** Пусть $F : A \to B$ – соответствие. *Обратным соответствием* называется соответствие $F^{-1} : B \to A$, определяемое правилом $a \in F^{-1}(b) \Leftrightarrow b \in F(a)$.

4. **Вещественные числа и их основные свойства, связанные с арифметическими операциями и неравенствами.**

Множество вещественных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел. *Рациональным* называется число вида $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ – целые числа. Всякое вещественное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным*. Всякое рациональное число либо является целым, либо предстовляет собой конечную или периодическую бесконечную десятичную дробь. Например, рациональное число $\frac{1}{9}$ можно представить в виде $0,1111...$. Иррациональное число представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь; примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{2} = 1,411421356...; \pi = 3.14159265....$$

**Свойства вещественных чисел.**

Для любой пары вещественных чисел $a$ и $b$ определены единственным образом два вещественных числа $a + b$ и $a \cdot b$, называемые соответственно их *суммой* и *произведением*. Для любых чисел $a, b$ и $c$ имеют место следующие свойства.

1. $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ассоциативность);
3. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность);
4. *Существует единственное число* $0$*, такое, что* $a + 0 = a$ *для* $\forall a$;
5. *Для любого числа* $a$ *существует такое число* $(-a)$*, что* $a + (-a) = 0$;

6. *Существует единственное число* $1 \neq 0$, *такое, что для любого числа* $a$ *имеет место равенство* $a \cdot 1 = a$;
7. *Для любого числа* $a \neq 0$ *существует такое число* $a^{-1}$, *что* $a \cdot a^{-1} = 1$. *Число* $a^{-1}$ *обозначается также символом* $\frac{1}{a}$.

Для любых двух вещественных чисел имеет место одно из трех соотношений: $a = b$ ($a$ равно $b$), $a > b$ ($a$ больше $b$) или $a < b$ ($a$ меньше $b$). Отношение равенства обладает свойством *транзитивности*: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Отношение "больше" обладает следующими свойствами:
1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$;
3. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.

Вместо соотношения $a > b$ употребляют также $b < a$. Запись $a \geq b$ $(b \leq a)$ означает, что либо $a = b$, либо $a > b$. Соотношения со знаками $>, <, \geq$ и $\leq$ называются неравенствами, причем соотношения типа $8 < 10$ – строгими неравенствами.

- *Любое вещественное число можно приблизить рациональными числами с произвольной точностью.*

5. **Свойства непрерывности (полноты) множества $\mathbb{R}$ – действительных чисел.**

Пусть $X$ и $Y$ – два множества вещественных чисел. Тогда, если для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, то существует хотя бы одно число $c$, такое, что для всех $x$ и $y$ выполняются неравенства $x \leq c \leq y$.

Отметим здесь, что свойством непрерывности обладает множество всех вещественных (действительных) чисел, но не обладает множество, состоящее только из рациональных чисел.

- Верхняя (нижняя) грань числового множества;

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху* (*снизу*), если существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq X$. Число $c$ в этом случае называют *верхней* (соответственно *нижней*) *границей* множества $X$ или также *мажорантой* (*минорантой*) множества $X$. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*.

6. **Точные границы (грани) числовых множеств, их существование и свойства.**

Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху, называется *верхней гранью* или *точной верхней границей* множества $X$ и обозначается $\sup X$ (читается "супремум $X$").

Формальная запись этого определения:

$$(s = \sup X) \coloneqq \forall x \in X\ ((x \leq s) \wedge (\forall s' < s\ \exists x' \in X(s' < x'))).$$

(Знак $\coloneqq$ или $\eqqcolon$ используется для равенства по определению; в нем двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.)

Аналогично вводится понятие *нижней грани* (*точной нижней границы*) множества $X$ как наибольшей из нижних границ множества

$$X : (i = \inf X) \coloneqq \forall x \in X\ ((i \leq x) \wedge (\forall i' > i\ \exists x' \in X(x' < i'))).$$

**Лемма.** (принцип верхней грани) *Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.*

Аналогично с принципом нижней грани у ограниченного снизу числового множества: *Всякое неупустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет и притом единственную нижнюю грань.*

Некоторые следствия.

- *Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел неограничено сверху.*
- *В множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел справедлив принцип Архимеда.*
- *Для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется натуральное число $n$, такое что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*
- *В любом, отличном от точки, промежутке действительных чисел имеются рациональные числа.*

7. **Леммы: о вложенных отрезках, о покрытиях, о предельной точке.**

**Лемма.** (принцип вложенных отрезков) *Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.*

*Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок $I_k$, длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то с – единственная общая точка всех отрезков.*

**Лемма.** (принцип выделения конечного покрытия) *В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечноая подсистема, покрывающая этот отрезок.*

Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подномжество множеств $X$. Это условие, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки $p$ есть, по крайней мере одна не совпадающая с $p$ точка множества $X$.

**Лемма.** (принцип предельной точки) *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

8. **Понятие предела последовательности. Общие свойства пределов.**

**Определение.** Пусть $A$ – произвольное множество и пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a \in A$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, ...,$$

которая обозначается также символами $\{a_n\}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

**Определение.** Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$$

При этом пишут $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Например, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Основные свойства:

- Точка $a$ является пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда за пределами любой окрестности этой точки находится **конечное число элементов** последовательности или пустое множество.
- Если число $a$ не является пределом последовательности $\{x_n\}$, то существует такая окрестность точки $a$, за пределами которой находится **бесконечное число элементов последовательности**.
- **Теорема единственности предела числовой последовательности**. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

- Если последовательность имеет конечный предел, то она **ограничена**.
- Если каждый элемент последовательности $\{x_n\}$ **равен одному и томуу же числу** $C$: $x_n = C$, то эта последовательность имеет предел, равный числу $C$.
- Если у последовательности **добавить, отбросить или изменить первые $m$ элементов**, то это не повлияет на её сходимость.

9. **Теоремы о предельном переходе и арифметических операциях над последовальностями.**

**Теорема о предельном переходе.** *Если две варианты $x_n$ и $y_n$ при всех их изменениях равны: $x_n = y_n$, причём каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n = a, \;\; \lim y_n = b,$$

*то равны и эти пределы: $a = b$.*

**Арифметические операции над переменными:**

1. *Если варианты $x_n$ и $y_n$ имеют конечные пределы:*

   $$\lim x_n = a, \;\; \lim y_n = b,$$

   *то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, причем*

   $$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. *Если варианты $x_n$ и $y_n$ имеют конечные пределы*:

   $$\lim x_n = a, \;\; \lim y_n = b,$$

   *то и произведение их также имеет конечный предел, и*

   $$\lim x_n y_n = ab.$$

3. *Если варианты $x_n$ и $y_n$ имеют конечные пределы*:

   $$\lim x_n = a, \;\; \lim y_n = b,$$

   *причём $b$ отлично от* $0$*, то и отношение их также имеет конечный предел, а именно,*

   $$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

10. **Теоремы о предельном переходе в неравенствах для последовательностей.**

**Теорема о предельном переходе в неравенстве.** *Если для двух вариант $x_n$, $y_n$ всегда выполняется неравенство $x_n \geq y_n$, причём каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n = a, \ \ \lim y_n = b,$$

*то равны и $a \geq b$.*

11. **Критерий Коши существования конечного предела последовательности.**

**Теорема.** (критерий Коши) Для того, чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon, \forall m > n_\varepsilon \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

12. **Теорема о пределе монотонной последовательности. Существование числа $e$.**

**Теорема.** *Пусть дана монотонно возрастающая варианта $x_n$. Если она ограничена сверху*:

$$x_n \leq M (M = \text{const}; n = 1, 2, 3, ...),$$

*то необходимо имеет конечный предел, в противном же случае – она стремится к $+\infty$.*

*Точно так же, всегда имеет предел и монотонно убывающая варианта $x_n$. Ее предел конечен, если она ограничена снизу*:

$$x_n \geq m (m = \text{const}; n = 1, 2, 3, ...),$$

*в противном же случае ее пределом служит $-\infty$.*

Рассмотрим варианту $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и попытаемся применить к ней вышенаписанную теорему. Сначала докажем её монотонность с помощью разложения по формуле бинома:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} +$$

$$+ ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 ... k} \cdot \frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1 \cdot 2 ... n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$+ ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).(1)$$

Если от $x_n$ перейти теперь к $x_{n+1}$, т.е. увеличить $n$ на единицу, то, прежде всего, добавится новый, $(n+2)$-й (**положительный**) член, каждый же из написанных $n+1$ членов **увеличится**, ибо любой множитель в скобках вида $1 - \frac{s}{n}$ заменится **бОльшим** множителем $1 - \frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что

$$x_{n+1} > x_n,$$

т.е. варианта $x_n$ оказывается возрастающей.

Теперь покажем, что она к тому же **ограничена сверху**. Опустив в выражении (1) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с 3) числом 2, мы ещё **увеличим** полученное выражение, так что, в свою очередь,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия (начинающаяся членом $\frac{1}{2}$) имеет сумму $< 1$, поэтому $y_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Отсюда уже следует, по теореме, что варианта $x_n$ имеет конечный предел. По примеру Эйлера (L. Euler), его обозначают всегда буквой $e$. Это число

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений.

## 13. Понятие предела функции при $x \to a$. различные формы определения этого понятия.

Рассмотрим числовое множество $X = \{x\}$.

Окрестность точки $a$ – любой открытый промежуток $(a-\delta, a+\delta)$ с центром в точке $a$.

**Определение.** Точка $a$ называется **точкой сгущения** этого множества, если в каждой её окрестности содержатся значения $x$ из $X$.

**Определение.** (предел функции) функция $f(x)$ имеет пределом число $A$ при стремлении $x$ к $a$ (или в точке $a$), если для каждого число $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{лишь только } |x - a| < \delta$$

где ($x$ взято из $X$ и **отлично** от a). обозначают этот факт так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Строгая запись предела функции по Коши:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon].$$

**Определение.** (предел функции по Гейне) предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ равен числу $A$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к $a$, все члены которой не равны $a$, выполняется утверждение: последовательность значений функции $f(x)$ в точках $x_n$ стремится к $A$: $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

Строгая запись предела функции по Гейне:

$$\forall \{x_n\} : \left( (\forall n : x_n \neq a) \wedge \left( \lim_{n \to \infty} x_n = a \right) \right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

14. **Общие свойства предела функции.**

- Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim_{x \to a} c = c$.
- Если при стремлении $x$ к $a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел $A$, и $A > p$ $(A < p)$, то для достаточно близких к $a$ значений $x$ (отличных от $a$) и сама функция удовлетворяет неравенству

$$f(x) > p \; (f(x) < q).$$

- Если при $x \to a$ функциЯ $f(x)$ имеет конечный положительный (отрицательный) предел, то и сама функция положительна (отрицательна), по крайней мере, для значений $x$, достаточно близких к $a$, но отличных от $a$.

- Если при стремлении $x$ к $a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел $A$, то **для значений $x$, достаточно близких к $a$**, функция будет ограниченной:

$$|f(x)| \leq M' \ (M' = \text{const}, \quad |x-a| < \delta).$$

- Функция не может иметь двух различных пределов в одной точке.
- Если функции $f(x), g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки $a$, исключая, может быть, саму точку $a$, и для всех $x$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, при этом $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = a$, где $a$ – некоторое число, то

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = a.$$

15. **Предельный переход и арифметические операции для функций.**

**Теорема.** (о предельном переходе в равенстве). Если две функции принимают одинаковые значения в окрестности некоторой точки, что их пределы в этой точке совпадают:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Свойства пределов, свазанные с арифметическими операциями функций:

- Если каждое слагаемое алгебраической суммы функций имеет предел при $x \to a$, то и алгебраическая сумма имеет предел при $x \to a$, причем предл алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x) - h(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x).$$

- Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то и произведение имеет предел при $x \to a$, причем предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot (g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

  Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

- Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to a$, причем $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, то и их частное имеет предел при $x \to a$, причем предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

16. **Предельный переход и неравенства для функций. Предел $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.**

**Теорема.** (о предельном переходе в неравенстве). Если значения функции $f(x)$ в окрестности некоторой точки не превосходят соответствующих значений функции $g(x)$, то предел фукнции $f(x)$ в этой точке не превосходит предела функции $g(x)$:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Доказательство $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

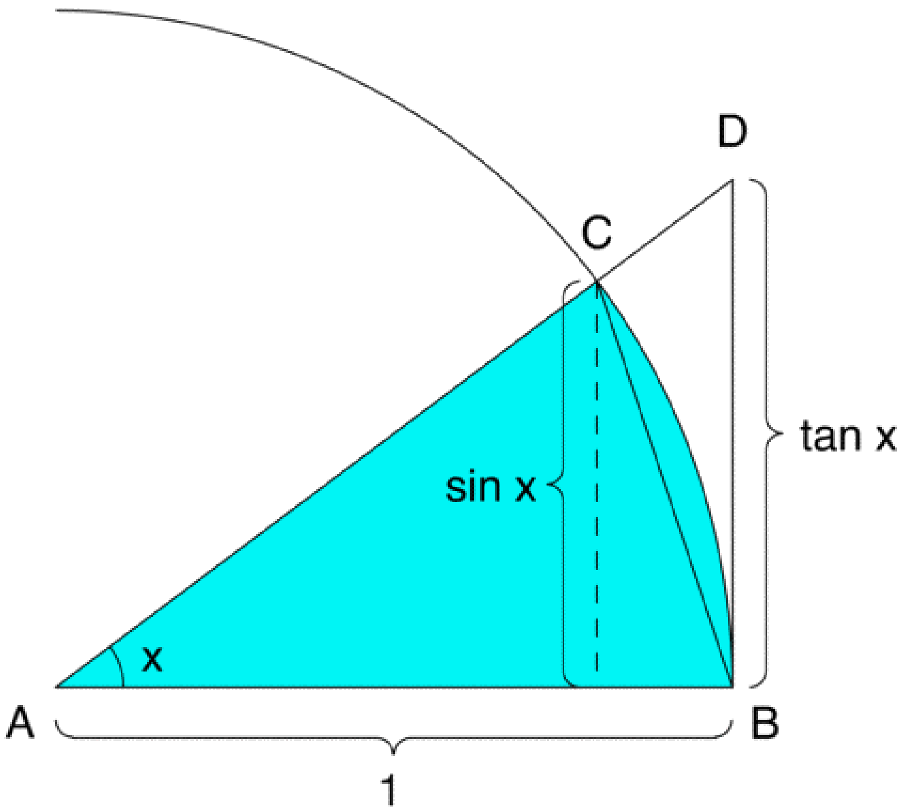


Figure 1: Сектор круга.

Изобразим круг, радиус которого равен 1 (Figure 1). Через $x$ обозначим **радианную меру** угла $\measuredangle$AOB.

Как мы видим на Figure 1, площадь треугольника $\Delta$ABC меньше площади сектора ABC, который, в свою очередь, меньше площади треугольника $\Delta$ABD. В итоге имеем неравенство:

$$\Delta\mathrm{ABC} < \text{сектор ABC} < \Delta\mathrm{ABD}$$

Площадь треугольника $\Delta\mathrm{ABC}$ равна $\frac{1}{2}\mathrm{AB}\sin x = \frac{1}{2}\sin x$. Площадь сектора равна произведению длины дуги сектора на половину радиуса: $\frac{1}{2}R \cdot \breve{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}R * R * x = \frac{1}{2}x$. Площадь треугольника $\Delta\mathrm{ABD}$ равна $\frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{DB} = \frac{1}{2}\tan x$.

Таким образом, имеем неравенство:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

Отсюда – по сокращении на $\frac{1}{2}$ приходим к неравенству:

$$\sin x < x < \tan x \ \left(0 < \sin x < \frac{\pi}{2}\right).$$

В предположении, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенства. Мы получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Так как $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ являются чётными функциями, предыдущее неравенство является верным для всех ненулевых $x$ между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Более того, при стремлении $x$ к 0 $\cos x$ принимает значение равное 1:

$$\cos 0 = 1.$$

Таким образом, $\frac{\sin x}{x}$ окажется заключённым между 1 и 1, отчего его предел обязательно должен быть равен 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Что и требовалось доказать.

17. **Теорема о пределе композиции функций.**

**Теорема.** Пусть функция $f$ задана на множестве $X$, функция $g$ - на множестве $Y$ и $f(X) \subset Y$. Если существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \lim_{y \to y_0} = g(y) = z_0,$$

то при $x \to x_0$ существует предел (конечный или бесконечный) сложной функции $g[f(x)]$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

18. **Критерий Коши существования конечного предела функции.**

**Теорема.** Для того, чтобы функция $f, x \in X$ имела в (конечной или бесконечно удаленной) точке $a$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(a)$ точки $a$, что для любых $x' \in X \cap U(a)$ и $x'' \in X \cap U(a)$ выполнялось бы неравенство

$$f(x'') - f(x') < \varepsilon$$

**Замечание.** Сформулируем критерий Коши существования конечного предела функции в терминах неравенств для случая, когда $a$ - действительное число: функция $f$, $x \in X$, имеет в точке $a \in \mathbb{R}$ конечный предел тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x' \in X$, $x'' \in X$, $|x' - a| < \delta, |x'' - a| < \delta$ , выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

19. **Сравнение асимптотического поведения функций. Символы $o, O, \sim$. Примеры.**

**Определение 1.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$. Говорят, что *на множестве* $G \subset D$

$$f(x) = O(g(x)), x \in G$$

(читается: “о-большое от $g(x)$”), если существует такая постоянная $M$, что при $x \in G$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

**Определение 2.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве $D$, а $a$ - предельная точка этого множества. Говорят, что

$$f(x) = o(g(x)), \text{при } x \to a,$$

(читается: “о-малое от $g(x)$”), если существует такая бесконечно малая при $x \to a$ функция $\alpha(x)$, что

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

для всех $x$ из некоторой проколотой окрестности $U$ точки $a$, $U \subset D$.

**Определение 3.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве $D$, а $a$ - предельная точка этого множества. Эти функции *эквивалентны при* $x \to a$, если в некоторой проколотой окрестности точки $a$

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Данное соотношение кратно записывается следующим образом:

$$f(x) \sim g(x), x \to a(x \in D).$$

Утверждения:

$$\text{Если } \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A, A \neq \infty \Rightarrow f(x) = O(g(x)), x \to a.$$

$$\text{Если } \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x)), x \to a.$$

$$\text{Если } \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f(x) \sim g(x), x \to a.$$

Примеры:

- $\sin x \sim x, x \to 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x), x \to \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
- $\sin x = O(x), x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |\sin x| \leq |x| \ \forall x$. По определению 1 следует $\sin x = O(x), x \in \mathbb{R}$.

20. **Понятие непрерывности функции в точке. Различные формы определения этого понятия.**

**Определение.** Функция $f(x)$ **непрерывна** при значении $x = x_0$ (или в точке $x = x_0$), если выполняется соотношение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если же оно нарушено, то говорят, что при этом значении (или в этой точке) функция имеет **разрыв**.

**Определение.** (на языке $\varepsilon - \delta$). Фукнция $f(x)$ называется **непрерывной в точке $x_0$** если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что

$$\text{если } x \in U(x_0, \delta) \text{ (т.е. } |x - x_0| < \delta),$$

$$\text{то } f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \text{ (т.е. } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

**Определение.** (геометрическое). Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке $x_0$** если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

**Определение.** Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке $x_0$ справа (слева)**, если справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \ \left( \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

**Определение.** (непрерывность на интервале) Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале $(a; b)$**, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Определение.** (непрерывность на отрезке) Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке $[a; b]$**, если она непрерывна на интервале $(a; b)$ и имеет одностороннюю непрерывность в граничных точках (т.е. непрерывна в точке $a$ справа, в точке $b$ – слева).

21. **Точки разрыва, их классификация. Примеры разравных функций.**

**Определение.** Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, но не является непрерывной в этой точке, то **$f(x)$ называют разрывной в точке $x_0$**, а саму точку **$x_0$ называют точкой разрыва** функции $f(x)$.

Пусть $x_0$ – точка разрыва функции $f(x)$.

**Определение.** (точка разрыва первого рода). Точка $x_0$ называется **точкой разрыва I рода**, если функция $f(x)$ имеет в этой точке конечные пределы слева и справа. Если при этом эти пределы равны, то точка $x_0$ называется **точкой устранимого разрыва**, в противном случае – **точкой скачка**.

Для примера возьмём функцию знака $f(x) = \operatorname{sign}(x)$. Данная функция терпит разрыв в точке $x_0 = 0$. Пределы справа и слева относительно этой точки определены:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1.$$

В таком случае, по определению, функция $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ терпит разрыв I рода в точке $x_0 = 0$. Скачок в ней равен:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign}(x) - \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign}(x) = 1 - (-1) = 2.$$

Однако, если рассматривать функцию $f(x) = |\operatorname{sign}(x)|$, то точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва, ибо скачок в ней:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign}(x) - \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign}(x) = 1 - 1 = 0.$$

**Определение.** (точка разрыва второго рода). Точка $x_0$ называется **точкой разрыва II рода**, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в этой точке равен $\infty$ или не существует.

В качестве примера возьмём функцию $f(x) = \frac{1}{x}$. Очевидно, что она имеет разрыв в точке $x = 0$, так как не определена в этой точке. Пределы справа и слева относительно этой точки не определены:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Из этого следует, по определению, что данная функция терпит разрыв II рода в точке $x = 0$.

22. **Локальные свойства непрерывных функций.**

Пусть $X = \{x_0\}$ или $X = (a;b)$ или $X = [a;b]$.

- Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве $X$ функций является функцией непрерывной на $X$.
- Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $X$ и $g(x) \neq 0, \forall x \in X$, то частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ – непрерывная на множестве $X$ функция.
- Пусть $f : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$. Если $f(x)$ непрерывна на $X$, $\varphi(x)$ - непрерывна на $Y$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна на $X$.
- Основные элементарные функции нерерывны всюду в своей области определения.

23. **Теорема Больцано – Коши. Теорема о промежуточных значениях.**

**Теорема Больцано – Коши** (о промежуточных значениях). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $\gamma$ - число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = \gamma$.

**Следствие.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$и на его концах принимает значения разных знаков, то на $(a; b)$ существует хотя бы она точка, в которой функция обращается в ноль.

24. **Теорема Вейерштрасса о максимуме и минимуме.**

**Теорема.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда
1. $f(x)$ – ограничена на [a; b];
2. $f(x)$ принимает на $[a; b]$ свое наибольшее и наименьшее значения (максимумы и минимумы).

**Определение.** Значение функции $m = f(x_1)$ называется **наименьшим** (или минимумом), если $m \leq f(x), \forall x \in D(f)$. Значение функции $M = f(x_2)$ называется **наибольшим** (или максимумом), если $M \geq f(x), \forall x \in D(f)$.

**Замечание.** Наименьшее (наибольшее) значение фукнция может принимать в нескольких точках отрезка.

**Следствие (теорем Больцано–Коши и Вейерштрасса).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то множеством ее значений является отрезок $[m; M]$, где $m$ и $M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функций $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

25. **Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.**

**Определение.** Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**Теорема (Кантора).** Функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, равномерно непрерывна на нем.

26. **Теорема о непрерывности обратной функции.**

**Теорема.** Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) в строгом смысле слова и непрерывна в некотором промежутке $X$. Тогда в соответствующем промежутке $Y$ значений этой функции существует **однозначная** обратная функция $x = f^{-}1(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) в строгом смысле слова и непрерывная.

27. **Непрерывность некоторых элементарных функций.**

1. **Целая** и **дробная рацоинальные функции**. Функция $f(x) = x$, очевидно, непрерывна во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$: если $x_n \to x_0$, то $f(x_n) = x_n \to x_0 = f(x_0)$. Точно так же непрерывна и функция, сводящаяся тождественно к постоянной.

2. **Показательная функция**. Докажем непрерывность показательной функции $a^x$ при любом значении $x = x_0$, иными словами, установим, что

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

(при этом достаточно ограничиться предположением: $a > 1$.)

Проверим непрерывность показательной функции в точке $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1.$$

Отсюда уже легко перейти к любой точке; действительно,

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1),$$

но при $x \to x_0$, очевидно, $x - x_0 \to 1$, так что – по доказанному –

$$a^{x-x_0} \to 1 \text{ и } a^x \to a^{x_0},$$

чтд.

3. **Гиберболические функции**. Их непрерывность непосредственно вытекает из доказанной непрерывности показательной ункции, ибо все они рацоинально выражаются через функцию $e^x$.

4. **Тригонометрические функции**. Остановимся сначала на функции $\sin x$. Она также непрерывна при любом значении $x = x_0$, т.е. имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Для доказательства заметим, что из неравенства

$$\sin x < x,$$

установленного при доказательстве предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, для $0<x<\frac{\pi}{2}$, легко вывести, что неравенство

$$|\sin x| \le |x|$$

справедливо уже для всех значений $x$ (для $|x|\ge\frac{\pi}{2}>1$ это следует из того, что $|\sin x|\le 1$). Далее, имеем

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2},$$

так что

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\cdot|\sin\frac{x-x_0}{2}|\cdot|\cos\frac{x+x_0}{2}| \le 2\cdot|\sin\frac{x-x_0}{2}| \le 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}$$

и, окончательно,

$$|\sin x - \sin x_0| \le |x-x_0|,$$

каковы бы ни были значения $x$ и $x_0$.

Если задано любое $\varepsilon>0$, то положим $\delta=\varepsilon$; при $|x-x_0|<\delta$ будет

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность $\sin x$. Аналогично устанавливается и непрерывность функции $\cos x$ также при любом значении $x$. Отсюда вытекает уже непрерывность функций

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \ \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Исключение представляют для первых двух – значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, обращающие $\cos x$ в 0, для последних двух – значения вида $k\pi$, обращающие $\sin x$ в 0.

5. **Логарифмическая функция**: $y=\log_a x$ $(a>0, a\ne 1)$. Ограничиваясь случаем $a>1$, видим, что эта функция возрастает при изменении $x$ в промежутке $X=(0,+\infty)$. К тому же она, очевидно, принимает любое значение $y$ из промежутка $Y=(-\infty,+\infty)$, именно, для всех $x=a^y$. Отсюда – ее непрерывность.

6. **Степенная функция**: $y = x^{\mu} (\mu \gtrless 0)$, при возрастании $x$ от 0 до $+\infty$ возрастает, если $\mu > 0$, и убывает, если $\mu < 0$. При этом она принимает **любое** положительное значение $y$ (для $x = y^{\frac{1}{\mu}}$), следовательно, и она непрерывна.

7. **Обратные тригонометрические функции**:

$$y = \arcsin x, \;\; y = \arccos x, \;\; y = \operatorname{arctg} x, \;\; y = \operatorname{arcctg} x.$$

   Первые две непрерывны в промежутке $[-1, +1]$, а последние – в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

28. **Дифференцируемые функции. Понятие дифференциала и производной. Связь между ними.**

Определение производной:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $X$. Исходя из некоторого значения $x = x_0$ независимой переменной, придадим ему приращение $\Delta x \gtrless 0$, не выводящее его из промежутка $X$, так что и новое значение $x_0 + \Delta x$ принадлежит этому промежутку. Тогда значение $y = f(x_0)$ функции заменится новым значением $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, т.е. получит приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

*Предел отношения приращения функции $\Delta y$ к вызвавшему его приращению независимой переменной $\Delta x$, при стремлении $\Delta x$ к 0, т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение дифференциала:

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, определенную в некотором промежутке $X$ и непрерывную в рассматриваемой точке $x_0$. Тогда приращению $\Delta x$ аргумента отвечает приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с $\Delta x$. Большую важность имеет вопрос: *существует ли для $\Delta y$ такая линейная относительно $\Delta x$ бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ $(A = const)$, что их разность оказывается, по сравнению с $\Delta x$, бесконечно малой высшего порядка*:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \ (1)$$

*Если это равенство выполняется, то функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой (при данном значении* $x = x_0$*), само же выражение* $A \cdot \Delta x$ *называется дифференциалом функции* и обозначается символом $dy$ или $df(x_0)$.

Связь между дифференциалом и производной:

*Для того, чтобы функция* $y = f(x)$ *в точке* $x_0$ *была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этой точке существовала конечная производная* $y' = f'(x_0)$*. При выполнении этого условия, равенство* (1) *имеет место при значении постоянной* $A$*, равном именно этой производной*:

$$\Delta y = {y_x}' \Delta x + o(\Delta x).$$

**Необходимость**. Если выполняется (1), то отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

так что, устремляя $\Delta x$ к 0, действительно, получаем

$$A = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = {y_x}'.$$

**Достаточность** сразу вытекает из

$$\Delta y = {y_x}' \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

29. **Геометрический и физический смысл производной.**

**Геометрический смысл производной**:

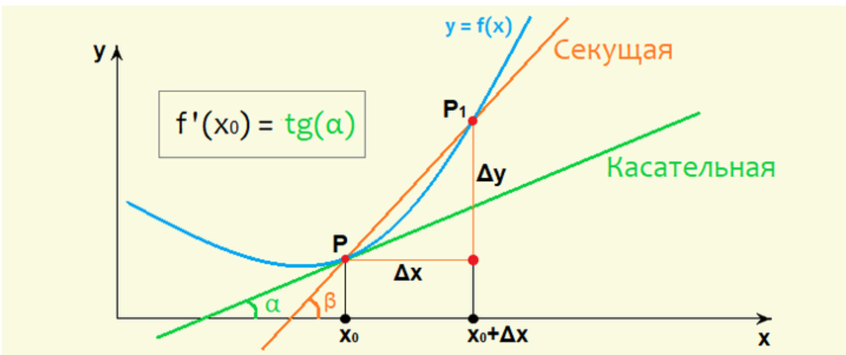


Figure 2: Кривая и касательная.

Обратимся к вышеприведённому схематическому рисунку. На нём изображён график функции $y = f(x)$. Обозначим через $P$ точку, которой соответствует значение функции в точке $x_0$. Проведём некоторкую секущую через точки $P$ и $P_1$. Угол наклона между положительным направлением оси $X$ и этой секущей обозначим через $\beta$.

В результате получится прямоугольный треугольник с катетами $\Delta x$ и $\Delta y$. Здесь $\Delta x$ – это приращение аргумента функции, а $\Delta y$ – приращение самой функции.

Отношение приращения функции к приращению аргумента есть тангенс угла между секущей и положительным направлением оси абцисс:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta.$$

Если устремить $\Delta x \to 0$, то точка $P_1$ на графике будет приближаться к точке $P$, а секущая – менять своё положение относительно графика.

Предельным положением секущей при стремящемся к нулю приращению будет прямая, в которой точки $P$ и $P_1$ совпадут друг с другом. Такая прямая называется **касательной** к графику в точке $P$.

$$\operatorname{tg} \beta \to \operatorname{tg} \alpha \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции в точке численно равно тангенсу угла наклона касательной к функции в этой точке.

Известно, что уравнение любой прямой имеет такой общий вид: $y = k \cdot x + b$. Так вот, в уравнении касательной к функции в точке $P$ коэффициент $k$ как раз равен значению производной в точке $x_0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

**Физический смысл производной**:

Рассмотрим движение точки в пространстве. Представим, что точка движется по какой-то траектории на плоскости и пройденное расстояние, конечно же, зависит от времени $S = S(t)$. При этом средняя скорость за определённый отрезок времени будет равняться растоянию, пройденному точкой за это время, делённому на время: $V_{\text{ср}} = \frac{S}{t}$.

Зафиксируем некоторый момент времени $t_0$ и рассмотрим следующий за ним бесконечно малый временной интервал длительностью $\Delta t$. По сути, мы опять рассматриваем положение точки в два момента времени: $S(t_0)$ и $S(t_0 + \Delta t)$.

Устремим $\Delta t \to 0$. В результате мы получим ни что иное как значение скорости точки в момент времени $t_0$. Другими словами, это мгновенная скорость точки в конкретный момент времени $t_0$: $V(t_0) = S'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$.

Таким образом, физический смысл производной заключается в следующем: если положение точки при её движении по числовой прямой задаётся функцией $S = S(t)$, где $t$ – время движения, то производная функции $S$ – это мгновенная скорость движения в момент времени $t$.

Другими словами, физический смысл производной заключается в определении **скорости изменения** функции.

30. **Производная суммы, произведения, частного функций.**

1. *Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет (в определенной точке $x$) производную $u'$*. Докажем, что и *функция $y = cu$ $(c = const.)$ также имеет производную (в той же точке)*, и вычислим её.

Если независимая переменная $x$ получит приращение $\Delta x$, то функция $u$ получит приращение $\Delta u$, перейдя от исходного значения $u$ к значению $u + \Delta u$. Новое значение функции $y$ будет $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$.

Отсюда $\Delta y = c \cdot \Delta u$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'.$$

Итак, производная существует и равна $y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'$.

Эта формула выражает такое правило: **постоянный множитель может быть вынесен за знак производной**.

2. *Пусть функция $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ имеют (в определеной точке) производные $u', v'$*. Докажем, что *функция $y = u \pm v$ также имеет производную (в той же точке)*, и вычислим ее.

Придадим $x$ приращение $\Delta x$; тогда $u, v$ и $y$ получат, соответственно, приращения $\Delta u, \Delta v$ и $\Delta y$. Их новые значения $u + \Delta u, v + \Delta v$ и $y + \Delta y$ связаны тем же соотношением:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v).$$

Отсюда

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

так что производная $y'$ существует и равна

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Этот результат легко может быть распространен на любое число слагаемых (и притом – тем же методом).

3. *При тех же предположениях относительно функций* $u, v$, докажем, что *функция* $y = u \cdot v$ *тоже имеет производную*, и найдем её.

Приращению $\Delta x$ отвучают, как и выше, приращения $\Delta u, \Delta v$ и $\Delta y$; при этом $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$, так что

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Так как при $\Delta x \to 0$, в силу непрерывности производной, и $\Delta v \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

т.е. существует производная $y'$ и равна

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Если $y = uvw$, причём $u', v', w'$ существуют, то

$$y' = [(uv)\cdot w]' = (uv)'\cdot w + (uv)\cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Легко сообразить, что для случая $n$ сомножителей будем иметь аналогично:

$$\left[\overbrace{uvw...s}^{n}\right]' = u'vw...s + uv'w...s + ... + uvw...s'. \ (1)$$

Для того, чтобы доказать это, воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что формула (1) верна для некоторого числа $n$ сомножителей, и установим ее справедливость для $n+1$ сомножителей:

$$\left[\overbrace{uvw...st}^{n+1}\right]' = \left[\left(\overbrace{uvw...s}^{n}\right)\cdot t\right]' = (uvw...s)'\cdot t + (uvw...s)\cdot t';$$

если производную $(uvw...s)'$ развернуть по формуле (1), то придем к формуле

$$[uvw...st]' = u'vw...st + uv'w...st + uvw...s't + uvw...st',$$

совершенно аналогичной (1). Так как в верности формулы (1) при $n=2$ и 3 мы убедились непосредственно, то это формула верна при любом $n$.

4. Наконец, *если $u, v$ удовлетворяют прежним предположениям и, кроме того, $v$ отлично от нуля, то* мы докажем, что *функция $y = \frac{u}{v}$ также имеет производную*, и найдем её.

При тех же обозначениях, что и выше, имеем

$$y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

так что

$$\Delta y = \frac{\Delta u\cdot v - u\cdot\Delta v}{v\cdot(v+\Delta v)}$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot (v + \Delta v)}.$$

Устремляя здесь $\Delta x$ к нулю (причем одновременно и $\Delta v \to 0$), убеждаемся в существовании производной

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

31. **Производная композиции функций. Инвариантность формы дифференциала.**

**Производная композиции функций**:

*Пусть 1) функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке $x_0$, производную ${u_x}' = \varphi'(x_0)$, 2) функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ производную ${y_u}' = f'(u_0)$. Тогда сложная функция (или композиция функций) $y = f(\varphi(x))$ в упомянутой точке $x_0$ также будет иметь производную, равную произведению производных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$:*

$$[f(\varphi(x))]' = {f_u}'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0),$$

*или, короче,*

$${y_x}' = {y_u}' \cdot {u_x}'.$$

Для доказательства придадим $x_0$ приозвольной приращение $\Delta x$; пусть $\Delta u$ – соответствующее приращение функции $u = \varphi(x)$ и, наконец, $\Delta y$ – приращение функции $y = f(u)$, вызванное приращением $\Delta u$. Воспользуемся соотношением

$$\Delta y = {y_x}' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

которое, заменяя $x$ на $u$, перепишем в виде

$$\Delta y = {y_u}' \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

($\alpha$ зависит от $\Delta u$ и вместе с ним стремится к нулю). Разделив его почленно на $\Delta x$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = {y_u}' \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x$ устремить к нулю, то будет стремиться к нулю и $\Delta u$ (в силу непрерывности производной), а тогда, как мы знаем, будет также стремиться к нулю зависящая от $\Delta u$ величина $\alpha$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = {y_u}' \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = {y_u}' \cdot {u_x}',$$

который и представляет собой искомую производную ${y_x}'$.

**Замечание.** Здесь сказывается полезность замечания “в силу непрерывности функции” относительно величины $\alpha$ при $\Delta x = 0$: покуда $\Delta x$ есть приращение **независимой переменной**, мы могли предполагать его отличным от нуля, но когда $\Delta x$ заменено приращением **функции** $u = \varphi(x)$, то даже при $\Delta x \neq 0$ мы уже не вправе считать, что $\Delta u \neq 0$.

**Инвариантность формы дифференциала**:

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные ${y_x}'$ и ${x_t}'$, то – по правилу “производной композиции функции” – существует и производная

$$ {y_t}' = {y_x}' \cdot {x_t}'. $$

Дифференциал $dy$, если $x$ считать независимой переменной, выразится по формуле $dy = {y_x}'dx$. Перейдем теперь к независимой переменной $t$; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$ dy = {y_t}'dt. $$

Заменяя, однако, производную ${y_t}'$ её выражением и замечая, что ${x_t}' \cdot dt$ есть дифференциал $x$ как функции от $t$, окончательно получим:

$$ dy = {y_x}' \cdot {x_t}'dt = {y_x}'dx, $$

т. е. вернемся к **прежней** форме дифференциала!

Таким образом, мы видим, что **форма дифференциала** *может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная* *заменена новой.* Это свойство и называют **инвариантностью формы дифференциала**.

32. **Производная обратной функции.**

**Теорема.** Пусть 1) функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы "о существовании обратной функции", 2) в точке $x_0$ имеет **конечную и отличную от нуля** производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.

**Доказательство.** Придадим значению $y = y_0$ произвольное приращение $\Delta y$, тогда соответственное приращение $\Delta x$ получит и функция $x = g(y)$. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$, ввиду однозначности самой функции $y = f(x)$, и $\Delta x \neq 0$. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь $\Delta y \to 0$ по любому закону, то – в силу непрерывности функции $x = g(y)$ – и приращение $\Delta x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части написанного равенства стремится к пределу $f(x_0) \neq 0$, следовательно, существует предел для левой части, равный обратной величине $\frac{1}{f'(x_0)}$; он и представляет собой производную $g'(y_0)$.

Итак, имеем простую формулу: ${x_y}' = \frac{1}{{y_x}'}$.

33. **Вычисление табличных производных.**

1. Отметим, прежде всего, очевидные результаты: если $y = c = \text{const.}$, то $\Delta y = 0$, каково бы ни было $\Delta x$, так что $y' = 0$; если же $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$ и $y' = 1$.

2. Пусть теперь $y = x^n$, где $n$ – натуральное число.

Придадим $x$ приращение $\Delta x$; тогда новое значение $y$ будет

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots,$$

так что

$$\Delta y = n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots,$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots$$

Так как при $\Delta x \to 0$ все слагаемые, проме первого, стремятся к нулю, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

3. Если $y = \frac{1}{x}$, то $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$, так что

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

При этом предполагается, конечно, $x \neq 0$.

4. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ (при $x > 0$). Имеем:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

наконец, пользуясь непрерывностью корня, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Все эти результаты содержатся как частные случаи в следующем.

5. **Степенная функция**: $y = x^\mu$ (где $\mu$ – любое вещественное число). Область изменения $x$ зависит от $\mu$. имеем (при $x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu - 1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Если воспользоваться пределом

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1 + \alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu,$$

то получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu - 1}.$$

В частности

$$\text{если} \quad y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \text{то} \quad y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\text{если} \quad y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{то} \quad y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6. **Показательная функция**: $y = a^x$ $(a > 0, -\infty < x < +\infty)$. Здесь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Воспользовавшись пределом

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a,$$

найдём:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

В частности,

$$\text{если} \quad y = e^x, \text{то и} \quad y' = e^x.$$

7. **Логарифмическая функция**: $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1, 0 < x < +\infty)$. В этом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

.

Воспользуемся пределом

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a(1 + \alpha)}{\alpha} = \log_a e,$$

найдём:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x}.$$

.

В частности, для **натурального** логарифма получается исключительно простой результат:

$$\text{при} \quad y = \ln x \quad \text{имеем} \quad y' = \frac{1}{x}.$$

8. **Тригонометрические функции**: Пусть $y = \sin x$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Пользуясь непрерывностью функции $\cos x$ и известным пределом $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Аналогично найдём:

$$\text{если} \quad y = \cos x, \quad \text{то} \quad y' = -\sin x.$$

В случае $y = \operatorname{tg} x$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)\cdot\cos x - \cos(x+\Delta x)\cdot\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}.$$

Отсюда, как и выше,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Аналогично,

$$\text{если}\quad y = \operatorname{ctg} x,\quad\text{то}\quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

9. **Обратные тригонометрические функции**. Рассмотрим функцию $y = \arcsin\ x\ (-1 < x < 1)$, причем $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Она является обратной для функции $x = \sin y$, имеющей для указанных значений $y$ **положительную** производную ${x_y}' = \cos y$. В таком случае существует также производная ${y_x}'$ и равна, по нашей формуле,

$$ {y_x}' = \frac{1}{{x_y}'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

корень мы берем со знаком плюс, так как $\cos y > 0$.

Мы исключили значения $x = \pm 1$, ибо для соответствующих значений $y = \pm\frac{\pi}{2}$ производная ${x_y}' = \cos y = 0$.

Функция $y = \operatorname{arctg}\ x\ (-\infty < x < +\infty)$ служит обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$. По формуле

$$ {y_x}' = \frac{1}{{x_y}'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично можно получить:

$$\text{для}\quad y = \arccos\ x\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1),$$

$$\text{для} \quad y = \operatorname{arcctg} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2} \; (-\infty < x < +\infty).$$

34. **Вычисление производных от функций, заданных параметрически и неявно.**

**Вычислении производных от функций, заданных параметрически:**

Если $x$ и $y$ заданы в функции от параметра $t$:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

то при известных условиях этим определяется и $y$ как функция от $x$: $y = f(x)$. при наличии последовательных производных от $x$ и $y$ по $t$ существуют соответствующие производные от $y$ по $x$ и выражаются выведенными выше формулами.

Их легко получить из дифференциальных выражений, разделив числитель и знаменатель, соответственно, на $dt, dt^3, dt^5, \ldots$ Таким путем придем к формулам:

$$y_x{}' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_t{}'}{x_t{}'}, y_{x^2}{}'' = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x_t{}'y_{t^2}{}'' - x_{t^2}{}''y_t{}'}{\left(x_t{}'\right)^3};$$

аналогично:

$$y_{x^3}{}''' = \frac{x_t{}'(x_t{}'y_{t^3}{}''' - x_{t^3}{}'''y_t{}') - 3x_{t^2}{}''(x_t{}'y_{t^2}{}'' - x_{t^2}{}''y_t{}')}{\left(x_t{}'\right)^5},$$

и т.д.

**Вычислении производных от функций, заданной неявно:**

**Определение.** Если независимая переменная $x$ и функция $y$ связаны уравнение вида $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно $y$, то функция $y$ называется **неявной функцией переменной** $x$.

Пример неявно заданной функции: $x^2 \sin y + xy - 1 = 0$.

Несмотря на то, что уравнение $F(x, y) = 0$ не разрешимо относительно $y$ (иначе говоря, никак не выразить $y$), оказывается возможным найти производную от $y$ по $x$. В этом случае необходимо продифференцировать обе части заданного уравнения, рассматривая функцию $y$ как функцию от $x$, а затем из полученного уравнения найти производную $y'$.

Пример: Найти производную $y'$ неявной функции $x^2 + xy^2 = 1$.

$$(x^2 + xy^2)' = (1)'$$

$$(x^2)' + (xy^2)' = 0$$

$$2x + x' \cdot y^2 + x \cdot (y^2)' = 0$$

$$2x + 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y^2 \cdot y' = 0 \Rightarrow 2x + y^2 + 2xy \cdot y' = 0$$

Из полученного равенства выражаем $y'$:

$$2xy \cdot y' = -(2x + y^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x + y^2}{2xy}$$

35. **Производные высших порядков.**

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в некотором промежутке $X$, так что эта последняя сама прдеставляет новую функцию от $x$, то может случиться, что эта функция в некоторой точке $x_0$ из $X$, в свою очредь, имеет производную, конечную или нет. Ее называют **производной второго порядка** или **второй производной** функции $y = f(x)$ в упомянутой точке, и обозначают одним из символов

$$\frac{d^2y}{dx^2}, y'', D^2y; \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}, f''(x_0), D^2f(x_0).$$

Вспоминая про физический смысл производной, где через путь можно было найти скорость. Однако, если скорость, по прежнему, зависит от времени, то его производная является ускорением. Другими словами, ускорение является **второй производной** от пути по времени: $a = \frac{d^2S}{dt^2}$.

Аналогично, если функция $y = f(x)$ имеет конечную вторую производную в целом промежутке $X$, то ее производная, конечная или нет, в какой-либо точке $x_0 \in X$ называется производной **третьего порядка**.

Подобным же образом от третьей производной переходим к четвертой и т.д. Если предположить, что понятие $(n-1)$-й производной уже определено и что $(n-1)$-я производная существует и конечна в промежутке $X$, то ее производная в некоторой точке $x_0$ этого промежутка называется **производной $n$-го порядка** от исходной функции $y = f(x)$; для обозначения ее применяются символы:

$$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}, D^n y; \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, f^{(n)}(x_0), D^n f(x_0).$$

Иной раз – при ипользовании обозначениями Лагранжа или Коши – может возникнуть надобность в указании переменной, по которой берется производная; тогда ее пишут в виде значка внизу:

$$y_{x^2}{}'', D^3_{x^3} y, f^{(n)}_{x^n}(x_0), \quad \text{и т. п.},$$

причем, $x^2, x^3, \dots$ есть условная сокращенная запись вместо $xx, xxx, \dots$

Таким образом, определили понятие $n$-ой производной, как говорят, **индуктивно**, переходя по порядку от первой производной к последующим. Соотношение, определяющее $n$-ю производную:

$$y^{(n)} = [y^{n-1}]',$$

называют также рекуррентным (или “возвратным”), поскольку оно “возвращает” нас от $n$-й к $(n-1)$-й производной.

36. **Формула Лейбница и ее применение.**

Предположим, что функции $u, v$ от $x$ имеют каждая в отдельности производные до $n$-го порядка включительно: докажем, что тогда их произведение $y = uv$ также имеет $n$-ю производную, и найдём её выражение.

Станем последовательно дифференцировать это произведение; мы найдём:

$$y' = u'v + uv', \; y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \dots$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома: $u + v, (u+v)^2, (u+v)^3, \dots$ лишь вместо степеней $u, v$ стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если в полученных формулах вместо $u, v$ писать $u^{(0)}, v^{(0)}$. Распространяя этот закон на случай любого $n$, придем к общей формуле:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (C_n)^i u^{(n-i)} v^{(i)} =$$

$$= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} n^{(n-2)} v'' + ...$$

$$... + \frac{n(n-1)...(n-i+1)}{1 \cdot 2...i} n^{(n-i)} v^{(i)} + ... + n v^{(n)}.$$

Установленная формула носит название **формулы Лейбница**. Она часто бывает полезна при выводе общих выражений для $n$-й производной.

## 37. Понятие локального экстремума функции. Теоремы Ферма, Ролля и их геометрический смысл.

**Определение 1.** Точка $x_0$ называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех $x$ из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$.

**Определение 2.** Точка $x_0$ называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех $x$ из этой окрестности $f(x) \geq f(x_0)$.

**Замечание.** Точка $x_0$ называется **строго локального максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если для всех $x$ из окрестности $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

**Теорема (необходимое условие экстремума).** Если фукнцияд $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0$, то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

**Теорема (первое достаточное условие экстремума).** Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

1. функция непрерывна в окрестности точки $x_0$;
2. $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует;
3. производная $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет свой знак.

Тогда в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку $x_0$ производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку $x_0$ производная меняет свой знак с плюса на минус.

**Теорема (второе достаточное условие экстремума).** Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

1. она непрерывна в окрестности точки $x_0$;
2. первая производная $f'(x) = 0$ в точке $x_0$;
3. $f''(x) \neq 0$ в точке $x_0$;

Тогда в точке $x_0$ достигается экстремум, причем если $f''(x_0) > 0$, то в тчоке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет минимум; если $f''(x_0) < 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ достигает максимум.

**Теорема Ферма.** Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $X$ и во внутренней точке $c$ этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная $f'(c)$ в этой точке, то необходимо $f'(c) = 0$.

**Геометрический смысл.** Теорема означает, что касательная, проведенная к графику функции в точке $(c; f(c))$ параллельно оси $Ox$.

**Теорема Ролля.** Пусть 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$; 2) существукет конечная производная $f'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(a, b)$; 3) на концах промежутка функция принимает равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда между $a$ и $b$ найдется такая точка, $c$ $(a < c < b)$, что $f'(c) = 0$.

**Геометрический смысл.** Теорема означает, что если функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Ролля, то найдется хотя бы одна точка $(c; f(c))$, где $c$ $(a < c < b)$, такая, что касательная к графику функци, проведенная в этой точке, параллельна оси $Ox$.

38. **Правило Лопиталя раскрытия неопределннойстей.**

**Теорема 1.** Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a, b]$,

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0,$

3) существуют конечные производные $f'(a)$ и $g'(a)$, причем $g'(a) \neq 0$.

Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

**Теорема 2.** Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a, b]$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$,

3) в промежутке $[a, b]$ существуют конечные производные всех порядков до $(n-1)$-го включительно $f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x), g'(x), g''(x), ..., g^{(n-1)}(x)$,

4) при $x = a$ они все обращаются в 0,

5) существуют конечные производные $f^{(n)}(a)$ и $g^{(n)}(a)$, причем $g^{(n)}(a) \neq 0$.

Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

**Теорема 3.** Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(a, b]$,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

3) в промежутке $(a, b]$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ причем $g'(x) \neq 0$, и наконец,

4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

**Теорема 3 (распространение на случай $x \to \pm\infty$).** Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[c, +\infty]$, где $c > 0$,

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$,

3) существуют в промежутке $[c, +\infty]$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$, и, наконец,

4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

**Теорема 4.** Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(a; b]$,

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$,

3) существуют в промежутке $(a, b]$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$, и, наконец,

4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

39. **Теоремы Ланглаража, Коши.**

**Теорема Лагранжа.** Пусть

1) $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$,

2) существует конечная ироизводная $f'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(a, b)$.

Тогда между $a$ и $b$ найдется такая точка $c$ $(a < c < b)$, что для нее выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Теорема Коши.** Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны замкнутом промежутке $[a, b]$;

2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(a, b)$;

3) $g'(x) \neq 0$ в промежутке $(a, b)$.

Тогда **между** $a$ и $b$ найдется такая точка $c$ $(a < c < b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

40. **Формула Тейлора. Представления остаточного члена в различных формах.**

**Определение.** Многочленом Тейлора степени $n$ функции $f(x)$ в точке $c$ называются многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n.$$

**Свойство многочлена Тейлора.** В точке $c$ совпадают значения функции и её многочлена Тейлора, а также значения их первых $n$ производных, т.е. $P_n(c) = f(c), P_n{}'(c) = f'(c), ..., (P_n)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$.

**Теорема (формула Тейлора).** Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a, b)$ и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка $n$ включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора $n$-го порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n,$$

где $r_n$ – остаточный член формулы Тейлора.

**Формы записи остаточного члена**:
1. форма Пеано: $r_n = o\left((x-c)^n\right), x \to c$
2. форма Лагранжа: $r_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n-1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1}, 0 < \theta < 1$

Формулу Тейлора можно переписать в виде: $f(x) = P_n(x) + r_n$.

Отбросив остаточный член, получим $f(x) \approx P_n(x)$.

41. **Разложение функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$.**

Разложение $e^x$:

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \to 0.$$

Разложение $\sin x$:

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x,\ \ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x,\ \ f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x,\ \ f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x,\ \ f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(x) = \cos x,\ \ f^{V}(0) = 1$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ если } m = 2n \\ (-1)^n \text{ если } m = 2n+1 \end{cases} n = 0, 1, 2...$$

Тогда по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$ имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 +$$

$$+\frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + ... + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} +$$

$$+\frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), x \to 0.$$

Разложение $\cos x$:

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x,\ \ f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x,\ \ f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x,\ \ f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = \cos x,\ \ f^{IV}(0) = 1$$

$$f^{V}(x) = -\sin x,\ \ f^{V}(0) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ если } m = 2n+1 \\ (-1)^n \text{ если } m = 2n \end{cases} n = 0, 1, 2 ...$$

Тогда по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$ имеем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o\left(x^{2n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + o\left(x^{2n+1}\right), x \to 0.$$

Разложение $(1+x)^\alpha$:

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + ... +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^n + o(x^n), x \to 0.$$

Разложение $\frac{1}{1+x}$:

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^m m!$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n), x \to 0.$$

Разложение $\ln(1+x)$:

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), x \to 0.$$

42. **Условия монотонности функции.**

**Теорема 1.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $X$ и **внутри** него имеет конечную производную $f'(x)$. Для того чтобы $f(x)$ была в $X$ монотонно возрастающей (убывающей) в широком смысле, необходимо и достаточно условие

$$f'(x) \geq 0 \quad (\leq 0 \text{ внутри } X).$$

**Теорема 2.** При сохранении тех же предоплюжений относительно непрерывности функции $f(x)$ и существования ее производной $f'(x)$, для того чтобы $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) в строгом смысле, необходимы и достаточны условия:

1) $f'(x) \geq 0$ $(\leq 0)$ для $x$ внутри $X$.

2) $f'(x)$ не обращается тождественно в $0$ ни в каком промежутке, составляющем часть $X$.

43. **Достаточные условия монотонности функции.**

**Первое правило.** Предположим, что в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки $x_0$ (по крайней мере, для $x \neq x_0$) существует конечная производная $f'(x)$ и как слева от $x_0$, так и справа от

$x_0$ (в отдельности ) **сохраняет определенный знак**. Подставляя в производную $f'(x)$ сначала $x < x_0$, а затем $x > x_0$, устанавливаем знак производной вблизи от точки $x_0$ слева и справа от неё; если при этом производная $f'(x)$ меняет знак плюс на минус, то налицо максимум, если меняет знак минус на плюс, то – минимум; если же знака не меняет, то экстремума вовсе нет.

**Второе правило.** Пусть функция $f(x)$ не только имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки $x_0$, но и вторую производную в самой точке $x_0$: $f''(x_0)$. Подставляем $x_0$ во вторую производную $f''(x)$; если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет минимум, если же $f''(x_0) < 0$, то – максимум.

**Дополнение ко второму правилу (высшие производные).** Если первая из производных, не обращающихся в точке $x_0$ в нуль, есть производная нечетного порядка, функция не имеет в точках $x_0$ ни максимума, ни минимума. Если такой производной является производная четного порядка, функция в точке $x_0$ имеет максимум или минимум, смотря по тому, будет ли эта производная отрицательна или положительна.

44. **Выпуклость функции. Условия выпуклости.**

**Определение.** Функция $f(x)$, определенная и **непрерывная** в промежутке $X$, называется **выпуклой** (выпуклой **вниз**), если для любых точек $x_1$ и $x_2$ из $X$ ($x_1 \gtrless x_2$) выполняется неравенство

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2), \quad (1)$$

каковы бы ни были положительные числа $q_1$ и $q_2$, в сумме дающие единицу. Функция называется **вогнутой** (выпуклой **вверх**), если – вместо (1) – имеем

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2).$$

**Простейшие предложения о выпуклых функциях**:

1. Произведение выпуклой функции на положительную постоянную есть выпуклая функция.
2. Сумма двух или нескольких выпуклых функций тоже выпукла.

Замечание. Произведение двух выпуклых функций может не оказаться выпуклой функцией.

3. Если $\varphi(u)$ есть выпуклая и притом возрастающая функция, а $u = f(x)$ также выпукла, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет выпуклой.
4. Если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ суть однозначные взаимно обратные функции (в соответствующих промежутказ), то одновременно

| f(x) | f(x) |
|---|---|
| выпукла, возрастает | вогнута, возрастает |
| выпукла, убывает | выпукла, убывает |
| вогнута, убывает | вогнута, убывает |

5. Выпуклая в промежутке $X$ функция $f(x)$, отличная от постоянной, не может достигать **наибольшего** значения **внутри** этого промежутка.
6. Если промежуток $[x_1, x_2]$, где $x_1 < x_2$, содержится в промежутке $X$, в котором функция $f(x)$ выпукла, то соотношение $(1)$ выполняется либо **всегда** со знаком равенства, либо **всегда** со знаком неравенства.

Если для **любого** промежутка $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, содержащегося в $X$, соотношение $(1)$ выполняется со знаком неравенства, будем функцию $f(x)$ называть **строго выпуклой**. Аналогично устанавливается понятие **строго вогнутой** функции.

**Теорема 1.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $X$ и имеет в нем конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ была выпуклой в $X$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ возрастала (в широком смысле).

**Теорема 2.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывная вместе со своей производной $f'(x)$ в промежутке $X$ и имеет **внутри** него конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости функции $f(x)$ в $X$ необходимо и достаточно, чтобы **внутри** $X$ было

$$f''(x) \geq 0.$$

Для вогнутости функции аналогично получается условие

$$f''(x) \leq 0.$$

Таким образом, требование

$$f''(x) > 0 \quad (< 0)$$

заведомо обеспечивает **строгую** выпуклость (вогнутость), ибо исключает возможность для функции $f(x)$ быть линейной в каком бы то ни было промежутке.

**Теорема 3.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $X$ и имеет в нем конечную производную $f'(x)$. Для выпуклости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы ее график всеми точками лежал **над** любой своей касательной (или на ней).

45. **Точки перегиба. Условия перегиба.**

**Определение.** Точку $M(x_0, f(x_0))$ кривой называет ее **точкой перегиба**, если она отделяет участок кривой, где функция $f(x)$ выпукла (выпукла вниз), от участка, где эта функция вогнута (выпукла вверх).

**Условия перегиба**:

(Первое достаточное условие) Пусть в некоторых окрестностях $[x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta]$ слева и справа от $x_0$ производная $f''(x)$ **сохраняет определенный знак**. Тогда для распознавания точки прегиба можно дать такое **правило**: если при переходе через значение $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то налицо перегиб, если же знака не меняет, то перегиба нет.

(Второе достаточное условие) Если первая из производных (выше второго порядка), не обращающихся в точке $x_0$ в нуль, есть производная нечетного порядка, то налицо перегиб; если же такой производной является производная четного порядка, то перегиба нет.

46. **Асимптоты графика функции.**

Пусть имеем кривую, ветвь которой в том или ином направлении удаляется в бесконечность. Если расстояние $\delta$ от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется **асимптотой** кривой.

Существуют 3 вида асимптот:
- вертикальная;
- горизонтальна;
- наклонная.

Вертикальная асимптота графика, как правило, находится **в точке бесконечного разрыва** функции. Другими слвоами, если в точке $x = \alpha$

функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв, то прямая, заданная уравнением $x = \alpha$ является вертикальной асимптотой графика.

**Замечание.** Чтобы установить наличие вертикальной асимптоты $x = \alpha$ в точке $x = \alpha$ достаточно показать, что **хотя бы один** из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to \alpha - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x)$ бесконечен.

Из вышесказанного следует факт: *если функция непрерывна на* $\mathbb{R}$, *то вертикальные асимптоты отсутствуют.*

**Наклонные асимптоты**:

Наклонные (как частный случай – горизонтальные) асимптоты могут проявляться, если аргумент функции $f(x)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. Таким образом, **график функции не может иметь больше двух наклонных асимптот**.

*Общее правило нахождения наклонных асимптот*:

Если существуют два *конечных* предела $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$. Если **хотя бы один** из перечисленных пределов бесконечен, то наклонная асимптота отсутствует.

**Замечание.** Формулы остаются справедливыми, если "икс" стремится только к "плюс бесконечности" или только к "минус бесконечности".

Для нахождения горизонтальной асимптоты можно пользоваться упрощенной формулой: если существует *конечный* предел $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

# Вторая группа вопросов

1. **Понятие первообразной функции, теорема об общем виде первообразных функций. Понятие неопределенного интеграла.**
2. **Основные свойства неопределенного интеграла.**
3. **Вычисление неопределенных интегралов с помощью замены переменной.**
4. **вычисление неопределенных интегралов с помощью интегрирования по частям.**

5. **Интегрирование целой рациональной функции и простейших рациональных дробей.**
6. **Представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших рациональных дробей. Метод неопределенных коэффициентов.**
7. **Теорема об интегрировании рациональных функций.**
8. **Вычисление интегралов типа** $\int R(x,\ \sqrt[n]{\frac{a*x+b}{c*x+d}}dx.$
9. **Вычисление интегралов типа** $\int R(x,\ \sqrt[n]{ax^2+bx+c}dx.$
10. **Вычисление интегралов типа** $\int R(x, \sin(x), \cos(x))dx.$
11. **Интегрирование биномиальных дифференциалов.**
12. **Задачи геометрии и физики, приводящие к понятию определенного интеграла.**
13. **Понятие определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости.**
14. **Суммы Дарбу и их свойства.**
15. **Критерий существования интеграла Римана.**
16. **Некоторые классы интегрируемых функций.**
17. **Интегрируемость суммы, произведения интегрируемых функций, модуля и сужения интегрируемой функции.**
18. **Свойства линейности, аддитивности, ориентированности интеграла Римана.**
19. **Свойство монотонности интеграла. Первая теорема о "среднем".**
20. **Вторая теорема о "среднем".**
21. **Формула Ньютона – Лейбница. Существование первообразных.**
22. **Замена переменных в определенном интеграле.**
23. **Интегрирование по частям в определенном интеграле.**
24. **Формула Тейлора с остаточным членом в форме определенного интеграла.**
25. **Вычисление площадей криволинейной трапеции и криволинейного сектора.**
26. **Вычисление объёмов некоторых тел.**
27. **Длина дуги кривой.**
28. **Площадь поверхности вращения.**

## Третья группа вопросов

1. **Понятие несобственного интеграла, его сходимости и расходимости.**
2. **Свойства несобственных интегралов.**

3. **Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сравнения.**
4. **Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости.**
5. **Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.**
6. **Векторные пространства7 Скалярное произведение, норма, метрика в $\mathbb{R}^n$ и их свойства.**
7. **Сходимость последовальностей точкек из $\mathbb{R}^n$. Полнота пространства $\mathbb{R}^n$.**
8. **Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Их свойства. Понятие окрестности точки в $\mathbb{R}^n$.**
9. **Понятие компактного множества. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.**
10. **Понятие связности. Классификация связных подмножеств числовой оси.**
11. **Отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ и способы их задания.**
12. **Пределы отображений. Повторные пределы. Теорема о повторных пределах.**
13. **Понятие непрерывного отображения. Теорема о композиции непрерывных отображений.**
14. **Непрерывность суммы, произведения, частного и локальное свойство непрерывных функций.**
15. **Теорема об образе компактного множества при непрерывном отображении. Теорема Вейерштрасса о максимуме и минимуме.**
16. **Понятие равномерной непрерывности и теорема Кантора.**
17. **Теорема об образе связного множества при непрерывном отображении. Теорема о промежуточных значениях.**
18. **Дифференцируемость отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Понятия производной и дифференциала.**
19. **Единственность производной. Непрерывность дифференцируемого отображения.**
20. **Теорема о дифференцируемости и о производной композиции отображений.**
21. **Дифференцируемость некоторых элементарных отображений (постоянного, линейного, координантных функций и др.).**
22. **Линейность оператора дифференцирования.**
23. **Теорема о производных суммы, произведения, частного дифференцируемых функций.**

24. **Частные производные первого порядка (определение, геометрический смысл, необходимое условие экстремума функции векторного аргумента).**
25. **Частные производные высших порядков (теорема о смешанных производных).**
26. **Матрица Якоби. Представление дифференциала отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ через его матрицу Якоби.**
27. **Производная по вектору, производная по направлению, градиент.**
28. **Теорема о конечных приращениях для скалярных функций векторного аргумента.**
29. **Теорема о конечных приращениях для векторных функций векторного аргумента.**
30. **Дифференциалы высших порядков для функций векторного аргумента.**
31. **Формула Тейлора для функций векторного аргумента.**
32. **Достаточные условия экстремума функций векторного аргумента.**
33. **Теоремы о неявных функциях, определяемых уравнением $F(x, y) = 0$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.**
34. **Теорема об обратном отображении.**
35. **Теорема о неявном отображении.**
36. **Условный экстремум.**

## Четвертая группа вопросов

1. **Понятие числового ряда, его суммы, сходимости и расходимости. Свойства сходящихся рядов.**
2. **Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Его недостаточность.**
3. **Критерий схгодимости положительных рядов. Признаки сравнения.**
4. **Признаки Коши и Даламбера для положительных рядов.**
5. **Интегральный критерий сходимости ряда.**
6. **Понятие абсолютно сходящегося ряда. Признаки абсолютной сходимости.**
7. **Теорема о перестановках членов абсолютно сходящегося ряда.**
8. **Теорема об умножении рядов.**

9. **Условная сходимость ряда. Признак условной сходимости. Примеры условно сходящихся рядов.**
10. **Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.**
11. **Преобразование Абеля. Признак Дирихле и признак Абеля сходимости числовых рядов.**
12. **Теорема Римана об условно сходящихся рядах.**
13. **Понятие поточечной сходимости функциональных последовальностей и рядов. Область сходимости.**
14. **Основные проблемы теории функциональных последовальностей и рядов. Примеры, где порядок предельных переходов существенен.**
15. **Понятие равномерной сходимости. Критерий равномерной сходимости.**
16. **Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.**
17. **Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов.**
18. **Теорема о непрерывности предела функциональной последовательнсоти (суммы ряда).**
19. **Теорема об интегрируемости предела функциональной последовательности (суммы ряда).**
20. **Теорема о дифференцируемости предела функциональной последовательности (суммы ряда).**
21. **Степенные ряды. Радиус сходимости. Интервал сходимости.**
22. **Теорема о равномерной сходимости стеменного ряда. Теорема о непрерывности суммы степенного ряда.**
23. **Теоремы о дифференцируемости суммы степенного ряда.**
24. **Степенной ряд как ряд Тейлора свой суммы. Разложение функций $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\mu}$ в степенные ряды в корестности точки $x = 0$.**
25. **Разложение функции $e^z$, $\cos(z)$, $\sin(z)$ в степенные ряды. Формула Эйлера.**
26. **Понятие ортогональной и ортонормированной систем функций, ортогональность триготометрических систем.**
27. **Понятие ортогонального ряда. Теорема о равномерной сходимости ортогонального ряда. Понятие ряда Фурье.**
28. **Минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье.**

29. **Неравенство Бесселя. Стремление к нулю коэффициентов ряда Фурье. Равенство Парсеваля и сходимость в среднем.**
30. **Ядро Дирихле. Интеграл Дирихле. Принцип локализации.**
31. **Достаточные признаки поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.**
32. **Теорема о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.**
33. **Ядро Фейера и его свойства. Суммы Фейера.**
34. **Теорема Фейера. Теорема Стоуна – Вейерштрасса.**
35. **Полнота и замкнутость тригонометрической системы.**

# Пятая группа вопросов

1. **Определение собственного интеграла, зависящего от параметра, его непрерывность и интегрирование.**
2. **Дифференцирование собственного интеграла, зависящего от параметра (правило Лейбница).**
3. **Определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.**
4. **Равномерная сходимость несобственного интеграла ,зависящего от параметра. Критерий Коши.**
5. **Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.**
5. **Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.**
7. **Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.**
8. **Интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.**
9. **Дифференцирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.**
10. **Интеграл Дирихле.**
11. **Интеграл Пуассона.**
12. **Бета-функция Эйлера и ее свойства.**
13. **Гамма-функция Эйлера и ее свойства.**
14. **Связь между бета- и гамма-фукнциями.**
15. **Определение $n$-мерной меры множества.**
16. **Множества меры нуль.**
17. **Кубируемые множества.**

18. **Определение кратности интеграла.**
19. **Суммы Дарбу. Критерий существования кратного интеграла.**
20. **Достаточное условие существования кратного интеграла.**
21. **Свойства кратного интеграла.**
22. **Сведение двойного интеграла к повторному.**
23. **Вычисление площади и объема с помощью двойного интеграла.**
24. **Сведение $n$-кратного интеграла к повторному.**
25. **Геометрический смысл модуля якобиана.**
26. **Замена переменных в двойном интеграле.**
27. **Замена переменных в кратном интеграле.**
28. **Криволинейный интеграл 1-го рода.**
29. **Криволинейный интеграл 2-го рода.**
30. **Формула Грина.**
31. **Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования.**
32. **Понятие поверхности.**
33. **Площадь поверхности.**
34. **Ориентация гладкой поверхности.**
35. **Поверхностные интегралы 1-го рода.**
36. **Поверхностные интегралы 2-го рода.**
37. **Определение градиента, дивергенции, ротора.**
38. **Циркуляция и поток векторного поля.**
39. **Формула Остроградского.**
40. **Формула Стокса.**
41. **Соленоидальное и потенциальное векторные поля.**