Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Ecole Supérieure Polytechnique

Probabilité – Statistique

Chapitre I : Calcul de Probabilité

Année universitaire : 2023 – 2024

Dr. WANE

A la fin de ce cours l'étudiant doit être capable d'identifier et d'appliquer les différentes méthodes de dénombrement et de calcul de probabilité

Plan

Plan

1. Rappels sur l'analyse combinatoire

Rappel sur l'analyse combinatoire

L'analyse combinatoire porte sur le dénombrement d'objets en satisfaisant des conditions données.

De nombreux problèmes de dénombrements se ramènent au nombre de manières de ranger k objets choisis parmi n.

Avant tout dénombrement, il faut s'assurer, dans la manière de ranger les objets, si tous les objets sont pris ou non, si l'ordre est important ou non, si certains objets sont répétés ou non.

Selon les cas, la manière de compter change complètement.

Ainsi, on appellera:

- groupement sans répétition, le rangement qui ne renferme que des objets distincts.
- groupement avec répétition, dans le cas contraire.

Et selon que l'ordre compte ou non, on aura affaire à :

- des permutations ou des arrangements si l'ordre compte (ou si l'ordre est important)
- des combinaisons si on ne tient pas compte de l'ordre (l'ordre n'est pas important).

Rappel sur l’analyse combinatoire

Problème
Est-ce que l’ordre est important ?

- **Oui** → **Permutation Ou Arrangement** → ✓ → **p éléments = n éléments (p = n) ?**
  - **Non** → **Arrangement**
    - **Avec Remise** $\bar{A}_n^p$: $\bar{A}_n^p = n^p$
    - **Sans Remise** A_n^p : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
  - **Oui** → **Permutation**
    - **Avec Remise** $\bar{P}_n$: $\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3! * \cdots * n_p!}$
    - **Sans Remise** P_n : $P_n = n!$
- **Non** → **Combinaison**
  - **Avec Remise** $\bar{C}_n^p$: $\bar{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$
  - **Sans Remise** C_n^p : $C_n^p = \binom{p}{n} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Problème
Si p éléments = n éléments ➔ Permutation

Rappel sur l'analyse combinatoire

Exemple 1 : Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 3 et 5 ?

Exemple 2 : Combien d'anagrammes peut–on former avec les lettres du mot « EXCELLENCE »?

Exemple 3 : Combien de nombres de 6 chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1, 3, 4, 5, 6 et 7, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois ?

Exemple 5 : Combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ?

Exemple 6 : On tire 2 chiffres au hasard dans un ensemble E = {1, 2, 3}. Déterminer le nombre de combinaisons possibles si le tirage est effectué sans remise et avec remise

Lister les différentes combinaisons dans chaque cas

Rappel sur l'analyse combinatoire

Exercice 1 : On considère l'ensemble E= {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. À l'aide des 6 chiffres de cet ensemble, chacun étant pris une seule fois, combien peut-on former de nombres distincts dans chacun des cas suivants :

1) Nombres de 6 chiffres ?
2) Nombres de 4 chiffres ?
3) Nombres de 4 chiffres commençant par le chiffre 3 ?
4) Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 ?
5) Nombres de 4 chiffres contenant les chiffres 3 et 6 ?

Exercice 2 : Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
A	**B**	**C**

1) Combien de codes différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Plan

2 Quelques définitions

Quelques définitions

Théorie des probabilités: Science mathématique étudiant les lois qui régissent les phénomènes aléatoires.

Ensemble fondamental (univers Ω) : l'ensemble des résultats possibles lors d'une épreuve.

Exemple 7 : lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est composé des 6 faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemple 8 : si on lance trois fois une pièce, le référentiel est composé des 2^3 arrangements avec répétition des 2 faces distinctes notées P et F : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.

Quelques définitions

Épreuve: expérience consistant à jeter la pièce et à noter le résultat.

Exemple 9 : Jet d'une pièce au cours de N parties de "Pouf".
Résultat = k "P" et N-k ''F".

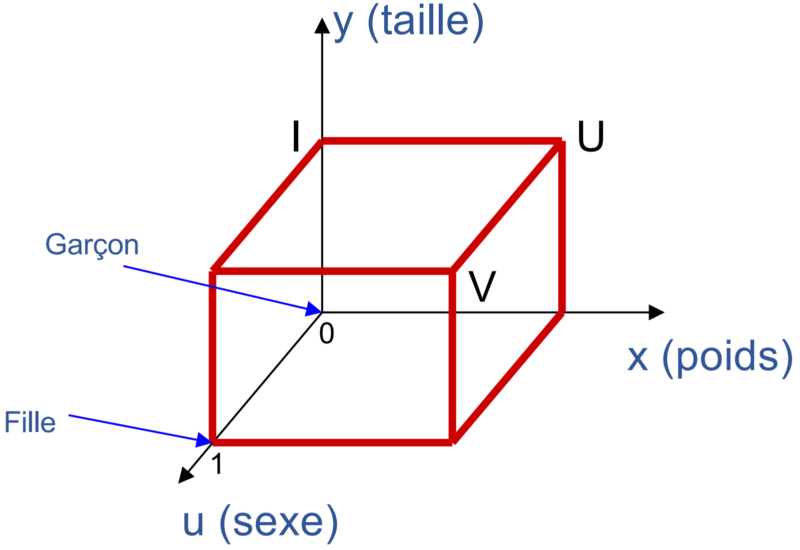
$$F = k/N$$

Événement: l'ensemble des résultats (sous ensemble de l'univers) d'une expérience aléatoire.

Quelques définitions

Description bébé en bonne santé : soit u le sexe du bébé, x son poids et y sa taille. Pour un garçon (u = 0) et une fille (u = 1).

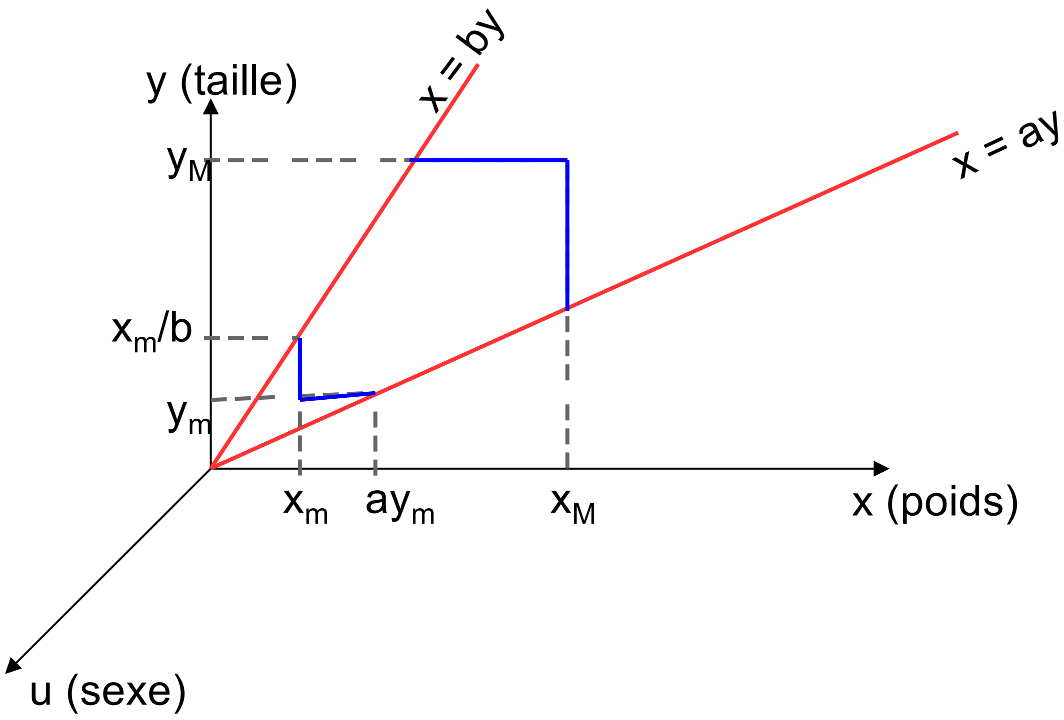
$$\Omega = \{(u, x, y) \;/\; u \in \{0, 1\} \;;\; x \geq 0 \;;\; y \geq 0\}$$



Description de deux bébés

Quelques définitions

Description bébé en bonne santé : L'événement « bébé mâle en bonne santé » est représenté par :



Si Ω est riche, le modèle probabiliste sera apte à décrire les phénomènes aléatoires avec précision.

Plan

3 Calcul de probabilité

Calcul de probabilité

Le calcul de probabilité théorique d'un événement E est donné par :

$$P(E) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ total\ de\ cas}$$

Exemple 10 : On lance deux pièces de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir : 2P, 1P et 0P ?

Le système est formé par un couple de variables {(P,F), (P,F)}.

Première Méthode

A = « événement d'avoir 2P » : 1P (1ère pièce) et 1P (2ème pièce)

Donc P(A) = (1/2)x(1/2) = **1/4**

B = « événement d'avoir 1P » : 1P (1ère pièce) et 1F (2ème pièce) ou 1F (1ère pièce) et 1P (2ème pièce)

Donc P(B) = (1/2)x(1/2) + (1/2)x(1/2) = 1/4 + 1/4 = **1/2**

C = « événement d'avoir 0P » : 1F (1ère pièce) et 1F (2ème pièce)

Donc P(C) = (1/2)x(1/2) = **1/4**

Calcul de probabilité

Exemple 10 : On lance deux pièces de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir : 2P, 1P et 0P ?

Le système est formé par un couple de variables {(P,F), (P,F)}.

Deuxième Méthode: application de la formule

Ω = {PP, PF, FP, FF} ; n (nombre total de cas) = 4.

A = « événement d'avoir 2P » : n(A) = 1 : nombre de cas favorable pour A ; donc P(A) = 1/4

B = « événement d'avoir 1P » : n(B) = 2 : nombre de cas favorable pour B ; donc P(B) = 2/4 = 1/2

C = « événement d'avoir 0P » : : n(C) = 1 : nombre de cas favorable pour B ; donc P(C) = 1/4

Événement	2P	1P	0P	Total
Proba (P)	1/4	1/2	1/4	1

Plan

3 Mesure et probabilité

Mesure et probabilité

Soit E un ensemble donné et X un sous-ensemble de E.

- ❖ Si m(E) fini

$$\forall X \subset E \ \rightarrow \ m(X) \ \geq \ 0$$

- ❖ Si X_1, X_2, ……, X_n n sous ensembles de E avec n un nombre fini.

$$m(X) \ \leq \ m(X_1) + m(X_2) + \ldots\ldots + m(X_n)$$

$$Avec, \ X \ = \ X_1 \cup X_2 \cup \ldots\ldots \cup X_n$$

- ❖ Si les sous ensembles sont disjoints, l'inégalité devient une égalité.

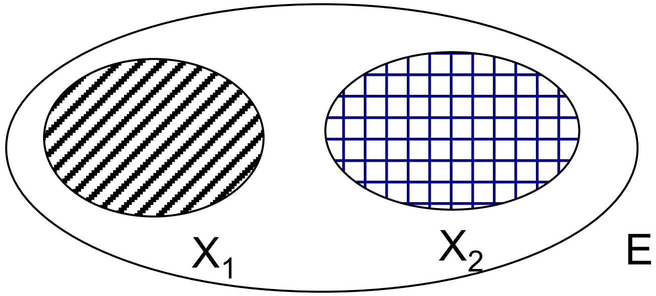
$$Si \ X_i \cap X_j \ = \ \emptyset$$

$$m(X) \ = \ \sum_{i=1}^{n} m\,(X_i)$$

$$Avec, \ X = \coprod_{i=1}^{n} X_i$$

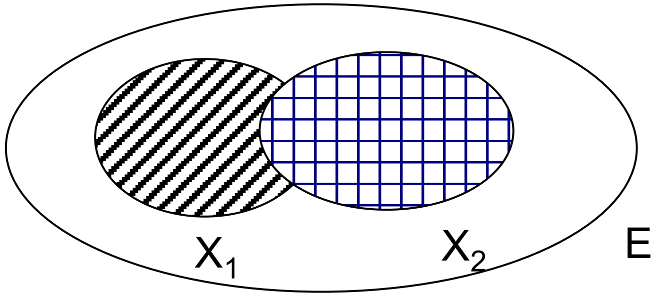
Mesure et probabilité : Propriétés

❖ Si $\int \; E \; sont \; disjoints$:



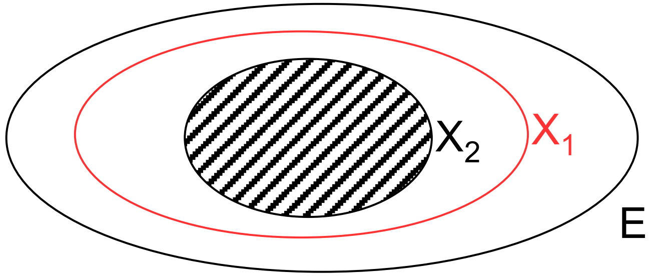
$$m(X_1 \cup X_2) \;=\; m(X_1) + m(X_2)$$

❖ Si $\int \; E \; nesontpasdisjoints$:



$$m(X_1 \cup X_2) \;=\; m(X_1) + m(X_2) - m(X_1 \cap X_2)$$

❖ Inclusion



$$X_2 \;\subset\; X_1$$

$$m(X_2) \;<\; m(X_1)$$

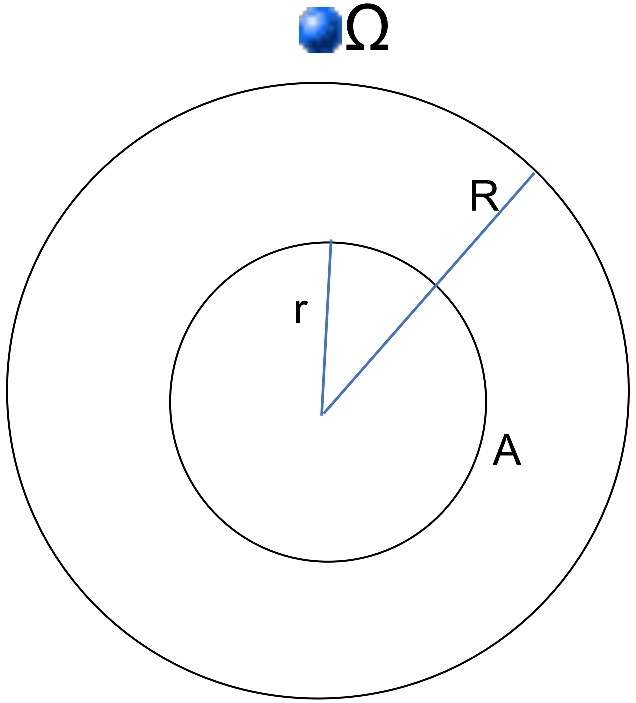
Exemple 11 : tirage d'un nombre pair avec un lancé de dé à 6 faces.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \; ; \; m(\Omega) = card(\Omega) = 6$$

$$A = \{2,4,6\} \; ; \; m(A) = card(A) = 3$$

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La mesure a un *caractère de dénombrement*.



Soit A un point à l'intérieur d'un cercle de rayon R.

Quelle est la probabilité que A soit plus proche du centre que la circonférence ?

$$p = p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$R = 2r \rightarrow p(A) = \frac{1}{4}$$

Pour A plus proche du centre que de la circonférence : $p(A) < \frac{1}{4}$

La mesure a un *caractère de surface*.

Axiomes de Kolmogorov

1. $\forall X \subset \Omega, \ \rightarrow \ 0 \ \leq \ p(X) \ \leq \ 1$

2. $p(\Omega) \ = \ 1 \ et \ p(\emptyset) \ = \ 0$

3. $p(\overline{X}) \ = \ 1 \ - \ p(X)$

4. $p(X \cup Y) \ = \ p(X) \ + \ p(Y) \ - \ p(X \cap Y)$

5. $p(X) \leq p(Y) \ si \ X \ \subset \ Y \ (Inégalité \ de \ Boole)$

6. $p(1 \cup X_i) \ \leq \ \sum_{i}^{n} p\,(X_i)$

Plan

4 Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Considérons la réalisation de deux événements A et B. La probabilité conditionnelle est la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

$$p(A/B) = P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Probabilité de Bayes

Probabilité conditionnelle : Formule de Bayes

Comme $$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \;;$$

On a : $$p(A/B) = \frac{p(B/A).p(A)}{p(B)}$$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(B/A).p(A) + p(B/\overline{A}).p(\overline{A})$$

$$p(A/B) = \frac{p(B/A).p(A)}{p(B/A).p(A) + p(B/\overline{A}).p(\overline{A})}$$

Plus généralement si $\{A_j\}$ est une partition de Ω

Pour tout i, $$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i).p(A_i)}{\sum_j p(B/A_j).p(A_j)}$$

Probabilité conditionnelle : Formule de Bayes

Exemple 12 : Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des souris malades. Des essais prouvent que :

- **96 fois sur 100**, le test donne un **résultat positif quand la souris est effectivement malade**.
- **94 fois sur 100**, le test donne un **résultat négatif quand la souris n'est pas malade**. Dans une **population** de souris comprenant **3% de malades**, on pratique le test sur une **souris choisie au hasard** et on constate que le test donne un **résultat positif**. Quelle est la probabilité que la souris soit malade ?

On pose les évènement **P: le résultat est positif**, **M : la souris est malade** et **N : le résultat est négatif**

L'énoncé nous apprend que **P(P|M) = 0,96** et P(N|M^c) = 0.94, donc P(P|M^c) = 0.06.

Par ailleurs on a **P(M) = 3/100**, la formule de Bayes nous permet de calculer la probabilité qu'une souris soit malade sachant que le test a été positif :

$$P(^{M}/_{P}) = \frac{P(P|M)P(M)}{P(P|M)P(M)+P(P|M^{C})P(M^{C})} = \frac{0{,}96 \times 0{,}03}{0{,}96\times 0{,}03+0{,}06\times 0{,}97} = \frac{288}{870} \simeq 0{,}331$$

Bien que le test semblait efficace, il garantit très peu le caractère malade si il est positif.

Probabilité conditionnelle : Formule des Proba composées

Soient n événements A_1, ……………, A_n tels que : $p(A_1 \cap \ldots\ldots \cap A_n) \neq 0$

$$p(A_1 \cap \ldots\ldots \cap A_n) = p(A_1).p(A_2/A_1).p(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots\ldots p(A_n/A_1 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_{n-1})$$

Exemple 13 : Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire on l'enlève, si on tire une blanche on la retire et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

On note B, l'événement la « iéme boule tirée est blanche » La probabilité recherchée est :

$$p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1).p(B_2/B_1).p(B_3/B_1 \cap B_2)$$

$p(B_1) = 3/10$.

Si B_1 est réalisé avant le 2éme tirage, l'urne contient 8 noires et 2 blanches : $p(B_2/B_1) = 2/10.$

Si B_1 et B_2 sont réalisés avant le 3éme tirage, l'urne contient 9 noires et 1 blanche : $p(B_3/B_1 \cap B_2) = 1/10.$

$$p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{3}{10} * \frac{2}{10} * \frac{1}{10} = \frac{3}{500}$$

Probabilité conditionnelle : Formule des Proba totales

Soit $\{A_n \; ; n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement, alors

$$p(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p\,(A_n).\,p(B/A_n)$$

Cette probabilité permet de calculer celle d'un événement B en le décomposant suivant un système complet d'événements.

Probabilité conditionnelle : Événements indépendants

Soient 2 événements A et B. Ils sont indépendants (incompatibles) si :

- ❖ la réalisation de A n'affecte pas celle de B et inversement.

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{et} \quad p(B/A) = p(B)$$

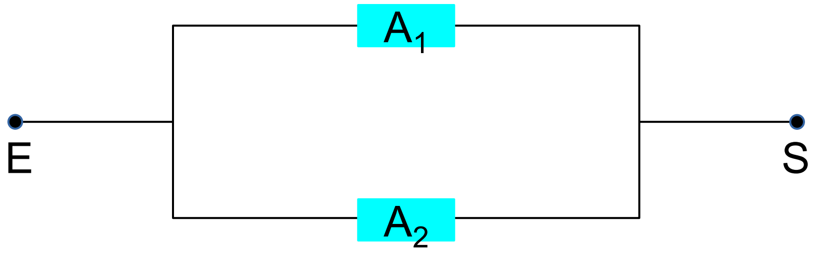
- ❖ la probabilité de réalisation simultanée de ces événements est égale au produit de leurs probabilités individuelles.

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Plus généralement, pour des événements A1, ……, An totalement indépendants.

$$p(1 \cap_i A_i) = \prod_i p\,(A_i)$$

Exemple 14 : Soit le système électrique ci-dessous. Il fonctionne correctement si A_1 ou A_2 fonctionne correctement. Quelle est la probabilité de panne de l'ensemble du système ?



Proba de panne de A1 : p(A1) = 0.8

Proba de panne de A2 : p(A2) = 0.7

Proba de panne de l'ensemble : p = p(A1).p(A2) = 0.8*0.7 = 0.56

Exemple 15 : Une urne contient n boules noires et r boules rouges. On effectue 2 tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire puis une boule rouge ?

A = « obtenir une noire au premier tirage »

B = « obtenir une rouge au second tirage »

$$p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{n}{n+\mathrm{r}}.\frac{r}{n+r} = \frac{nr}{(n+r)^2}$$