



Profesor  
*John Alexander Cortés Romero, PhD.*

**Reto 4**  
**Diseño algebraico de**  
**sistemas de control**

## Objetivos del reto

Los objetivos asociados a este reto son:

- Diseñar sistemas de control bajo el método algebraico teniendo en cuenta el principio del modelo interno.
- Comprender e interpretar la ubicación de los polos de un sistema en lazo cerrado para evaluar el transitorio de un sistema por medio del tiempo de asentamiento.

## Entregables:

Se deben entregar de manera independiente en la plataforma classroom (No se aceptan archivos comprimidos):

- Debe incluir el PDF donde se muestre detalladamente todo el procedimiento. Debe incluir diagramas de bloques y respuestas.
- Archivo .m y/o .slx usados para las simulaciones.

## Planteamiento del reto

Para la realización de los puntos 1 , 2 , 3 y 4 se debe tener en cuenta el esquema de control de la Figura 1.

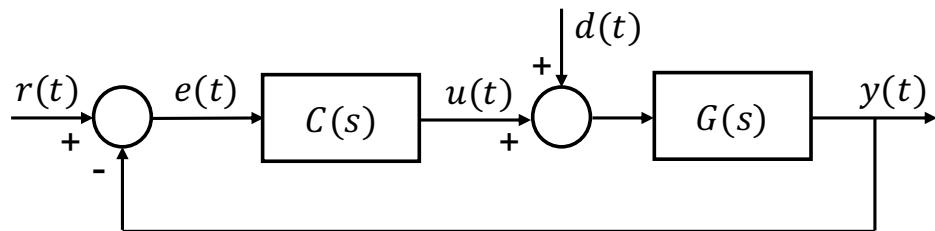


Figure 1: Sistema de control genérico.

- $r(t)$ : Referencia.
- $e(t)$ : Error.
- $u(t)$ : Señal de control.
- $y(t)$ : Respuesta del sistema.
- $d(t)$ : Perturbación



1. (Vale 25%) Se tiene una planta asociada a un sistema  $G(s)$ , cuya dinámica está expresada por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+1},$$

diseñe los siguientes de controladores:

- Siga asintóticamente la referencia  $r(t) = (1 + \sin(2t) + \cos(2t + 6) + t^2), t \geq 0$ . Se desea que el tiempo de asentamiento del sistema sea aproximadamente 10seg.
  - Usando el controlador de del inciso a., determine el comportamiento en estado estacionario del sistema ante la perturbación igual a  $d(t) = a\mu(t), a \in \mathbf{R}$ .
2. (Vale 25%) Se considera el modelo de un sistema definido por la función de transferencia:

$$G := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

Se propone un control basado en la estructura GPI robusto:

$$C(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2}, \quad \{k_2, k_1, k_0\} \in \mathbf{R},$$

y se considera la función de costo dada por:

$$J = \int_0^{20} (G_1 u(t)^2 + G_2 e(t)^2) dt \quad \{G_1, G_2\} \in \mathbf{R}^+$$

Nota: Simulaciones se deben hacer usando el paso unitario.

3. (Vale 25%) Se tiene el sistema definido por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^3}$$

- Diseñe un controlador que permita el seguimiento de la señal de referencia  $r(t) = 1, t \geq 0$  y rechace la perturbación  $d(t) = \sin(t + \pi), t \geq 0$  donde todos los polos del sistema en lazo cerrado se ubiquen  $-10$  (repetidos).
  - Diseñe un controlador que permita el seguimiento de la señal de referencia  $r(t) = 2, t \geq 0$  y rechace la perturbación  $d(t) = 50, t \geq 0$  donde el tiempo de asentamiento asociado al sistema en lazo cerrado sea aproximadamente 10seg.
4. (Vale 25%) Se tiene el sistema definido por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s+2},$$

- Diseñe un controlador  $C(s)$  que permita el rechazo de una señal de perturbación igual a  $d(t) = t^5, t > 0$ . Los polos del sistema en lazo cerrado deben ubicarse en  $-10$  (Repetidos).
- Usando el controlador del inciso a. determine  $G_O(s)$  y concluya sobre los errores de velocidad y posición y porcentaje.



Estudiante  
*Sebastian Jaramillo Verdugo*

**Reto 4**  
**Diseño algebraico de**  
**sistemas de control**

## Solución del reto

1. Se tiene una planta asociada a un sistema  $G(s)$ , cuya dinámica está expresada por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

- a) Teniendo en cuenta la referencia  $r(t) = (1 + \sin(2t) + \cos(2t+6) + t^2)$ ,  $t \geq 0$  y buscando que se realice un seguimiento por parte del controlador para la señal de referencia, podemos establecer la estructura del controlador inicialmente utilizando el principio del modelo interno para cumplir con los requerimientos de la señal de referencia compuesta de un escalón unitario, ondas seno y coseno y una señal cuadrática obteniendo la siguiente estructura:

$$G(s) = \frac{N_C(s)}{s^3(s^2 + 4)\bar{D}_C(s)},$$

Dado que las señales  $\sin(2t)$  y  $\cos(2t + 6)$  comparten la misma frecuencia, se requiere únicamente un controlador de la forma  $s^2 + 4$  para garantizar el seguimiento de estas componentes armónicas. Por otro lado, para las señales polinómicas de referencia, como 1 y  $t^2$ , basta con diseñar el controlador para la componente de mayor grado, en este caso,  $t^2$ . Esto se traduce en la necesidad de incluir un término de control correspondiente a  $s^3$  en el polinomio característico. De acuerdo con el principio del modelo interno, los polos asignados al controlador no requieren que  $\bar{D}_C(s)$  sea diferente de 1 en este caso. Por lo tanto, se establece:

$$\bar{D}_C(s) = 1$$

De esta forma, el orden total del sistema corresponde a la suma del orden del controlador y el de la planta, lo que da como resultado un sistema de orden 6. Así, la solución propuesta para  $N_C(s)$  se representa de la siguiente manera:

$$C(s) = \frac{k_5s^5 + k_4s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0}{s^3(s^2 + 4)}$$

Por otro lado, dado que queremos revisar el seguimiento de la señal de referencia, debemos calcular la respuesta del sistema ( $G_o$ ), la cual quedará expresada de la siguiente manera:

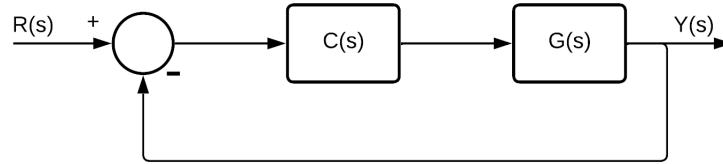


Figura 2: Diagrama de bloques resultante para  $G_{yr}(s)$

$$G_o(s) = \frac{N_C(s) \cdot N_G(s)}{D_C(s) \cdot D_G(s) + N_C(s) \cdot N_G(s)}$$
$$G_o(s) = \frac{(k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0) \cdot (1)}{s^3(s^2 + 4) \cdot (s + 1) + (k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0) \cdot (1)}$$
$$G_o(s) = \frac{k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^6 + (k_5 + 1)s^5 + (k_4 + 4)s^4 + (k_3 + 4)s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}$$

Considerando un tiempo de asentamiento de aproximadamente 10 segundos, aplicaremos el criterio aproximado del 2-5 %. Este criterio establece la siguiente relación:

$$t_s \approx \frac{4,5}{\zeta \omega_n} = \frac{4,5}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 0,45$$

Por lo tanto, tomaremos este valor como referencia para el valor de la parte real de ambos polos dominantes, con un  $\omega_n = 2$ , de este modo, los polos serán  $(s + 0,45 \pm 1,949i)$ , por otro lado, considerando que el sistema debe tener dos polos dominantes, los 4 polos restantes se ubicarán a un valor significativamente más rápido (3 veces el valor de la parte real del polo dominante) para asegurar que no afecten el tiempo de asentamiento deseado. Por lo tanto, asignaremos cuatro polos repetidos con un valor de  $(s + 1,35)^4$ .

A partir de estos resultados, el polinomio característico deseado se define como:

$$p(s_c) = (s^2 + 2 \cdot 0,45s + 4) \cdot (s + 1,35)^4$$
$$p(s_c) = s^6 + 6,3s^5 + 19,795s^4 + 41,283s^3 + 55,919s^2 + 42,355s + 13,286$$

De este polinomio, podemos determinar los coeficientes  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4$  y  $k_5$  mediante las siguientes relaciones:

$$s^6 = s^6$$

$$(k_5 + 1)s^5 = 6,3s^5 \quad \Rightarrow \quad k_5 = 5,3$$

$$(k_4 + 4)s^4 = 19,795s^4 \quad \Rightarrow \quad k_4 = 15,795$$

$$(k_3 + 4)s^3 = 41,283s^3 \quad \Rightarrow \quad k_3 = 37,283$$



$$k_2 s^2 = 2,355 s^2 \implies k_2 = 55,9189$$

$$k_1 s = 42,3554 s \implies k_1 = 42,3554$$

$$k_0 = 13,286$$

Teniendo en cuenta los valores encontrados anteriormente, podemos reescribir la función de transferencia de nuestro controlador, que realiza el seguimiento asintótico de la señal de referencia, como se muestra a continuación:

$$C(s) = \frac{5,3s^5 + 15,795s^4 + 37,283s^3 + 55,9189s^2 + 42,3554s + 13,286}{s^3(s^2 + 4)}$$

Después de diseñar el controlador que sigue asintóticamente la referencia  $r(t) = 1 + \sin(2t) + \cos(2t + 6) + t^2$ , con  $t \geq 0$ , se presenta la señal de error  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Se observa que el error converge aproximadamente a 0 en 10 segundos, lo que indica que el tiempo de asentamiento del sistema es de 10 segundos. Esto se ilustra en la gráfica siguiente.

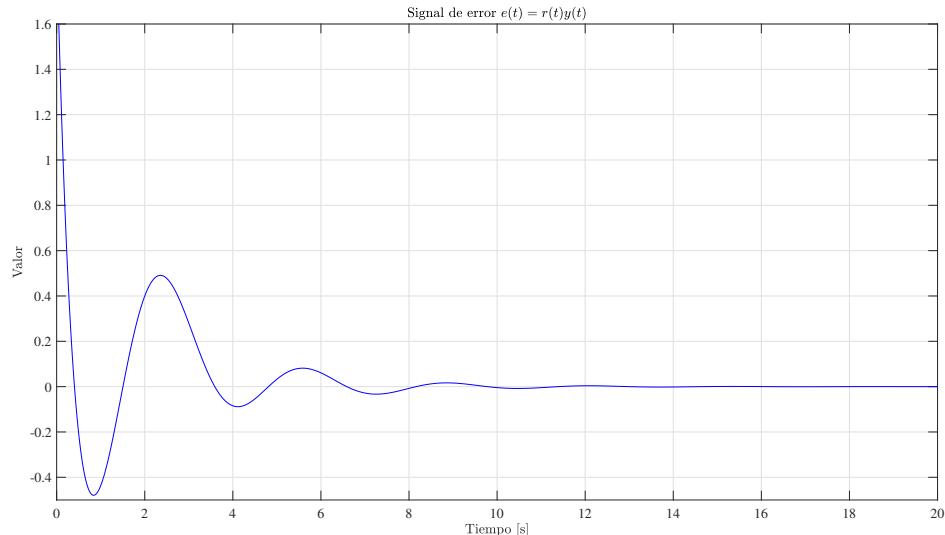


Figura 3: Evolución del error del sistema: tiempo de asentamiento en 10 segundos

- b) Por otro lado, a partir de la misma función de transferencia del punto anterior asociada a la respuesta del sistema, se comprueba que el sistema es estable por medio del comando `roots` de Matlab, teniendo como resultado los siguientes polos:  $-0,4500 + 1,9487i$ ,  $-0,4500 - 1,9487i$ ,  $-1,3502 + 0,0002i$ ,  $-1,3502 - 0,0002i$ ,  $-1,3498 + 0,0002i$ , y  $-1,3498 - 0,0002i$  con lo cual se comprueba que el sistema es estable dado que todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo del eje imaginario.



Usando el controlador de del inciso a. Se determinará el comportamiento en estado estacionario del sistema ante la perturbación igual a  $d(t) = a\mu(t)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Debemos calcular la respuesta del sistema ante la perturbación ( $G_{yd}(s)$ ).

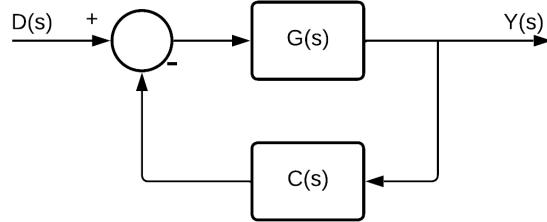


Figura 4: Diagrama de bloques resultante para  $G_{yd}(s)$

$$G_{yd}(s) = \frac{D_C(s) \cdot N_G(s)}{D_C(s) \cdot D_G(s) + N_C(s) \cdot N_G(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{s^3(s^2 + 4)}{s^6 + (k_5 + 1)s^5 + (k_4 + 4)s^4 + (k_3 + 4)s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}$$

Para determinar el rechazo de la señal de perturbación  $d(t) = a\mu(t)$ , utilizaremos la función de transferencia de la respuesta del sistema ante la perturbación  $G_{yd}(s)$  para comprobar su respuesta en estado estacionario:

$$y_{ss}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} |s \cdot Y(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{a}{s} \cdot G_{yd}(s) = a \cdot \frac{0}{k_0} = 0$$

Por lo anterior, podemos decir que se realiza un rechazo de perturbaciones del tipo  $d(t) = a\mu(t)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dado que el valor en estado estacionario es igual a 0.

2. Se considera el modelo de un sistema definido por la función de transferencia:

$$G := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

Se propone un control basado en la estructura GPI robusto:

$$C(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2}, \quad \{k_2, k_1, k_0\} \in \mathbb{R},$$

y se considera la función de costo dada por:

$$J = \int_0^{20} (G_1 u(t)^2 + G_2 e(t)^2) dt, \quad \{G_1, G_2\} \in \mathbb{R}^+.$$



- a) El objetivo es disminuir el costo  $J$  bajo la condición  $G_1 = G_2$ , utilizando simulaciones para ajustar los parámetros del controlador. Este procedimiento de sintonización se realizará una única vez.

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado  $G_o(s)$  está dada por:

$$G_o(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{k_2s^2 + k_1s + k_0}{s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0}.$$

De acuerdo con los requisitos de diseño, los polos del sistema en lazo cerrado deben ubicarse en  $s = -10$ . Dado que  $G_o(s)$  es un sistema de tercer orden, esto implica que tendrá tres polos repetidos en  $s = -10$ . El polinomio característico deseado se define como:

$$p(s) = (s + 10)^3 = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000.$$

A partir de este polinomio, los coeficientes del controlador se determinan como:

$$k_2 = 30, \quad k_1 = 300, \quad k_0 = 1000.$$

Reemplazando estos valores en el controlador, se tiene:

$$C(s) = \frac{30s^2 + 300s + 1000}{s^2}.$$

Y la función de transferencia en lazo cerrado del sistema resulta ser:

$$G_o(s) = \frac{30s^2 + 300s + 1000}{s^3 + 30s^2 + 300s + 1000}.$$

El procedimiento de sintonización fue iterado cuatro veces más utilizando diferentes ubicaciones para los polos del sistema en lazo cerrado:  $s = -0,1$ ,  $s = -1$ ,  $s = -3$  y  $s = -7$ . Para cada caso, se ajustaron los parámetros  $k_2$ ,  $k_1$  y  $k_0$  del controlador, y se calculó el costo  $J$  correspondiente.

Los resultados de las simulaciones aplicando el escalón unitario a la referencia y  $G_1 = G_2 = 1$ , para cada caso se resumen en la siguiente tabla, donde se muestran los valores de los polos, los coeficientes del controlador y el costo obtenido:

Polos	$k_2$	$k_1$	$k_0$	$J$
$s = -10$	30	300	1000	20,64
$s = -7$	21	147	343	14,46
$s = -3$	9	27	27	6,25
$s = -1$	3	3	1	2,25
$s = -0,1$	0,03	0,003	0,0001	2

A medida que los polos se alejan del origen, el sistema responde más rápido, pero esto aumenta la magnitud de la señal de control y, por ende, el costo  $J$ . Por el contrario, acercar los polos al origen reduce  $J$ , aunque el sistema se vuelve más lento. Esta dualidad entre rapidez y eficiencia debe evaluarse según las especificaciones del diseño.

- b) Cuando se establece  $G_1 = 0$  y aplicando el paso unitario a la referencia, el costo  $J$  disminuye notablemente debido a que el término asociado a la penalización de la señal de control se elimina de la función de costo. En este caso, la simulación arroja los siguientes resultados:



Polos	$k_2$	$k_1$	$k_0$	$J$
$s = -10$	30	300	1000	0,01875
$s = -7$	21	147	343	0,02679
$s = -3$	9	27	27	0,0625
$s = -1$	3	3	1	0,1875
$s = -0,1$	0,03	0,003	0,0001	1,795

De los resultados obtenidos, se observa que los valores de  $J$  son significativamente menores cuando los polos del sistema están más alejados del origen, como en  $s = -10$ , donde el costo alcanza su valor mínimo ( $J = 0,01875$ ). Sin embargo, al acercar los polos al origen,  $J$  aumenta debido al impacto de los términos proporcionales al error en la función de costo. Es importante destacar que, aunque el costo mínimo se obtiene para  $s = -10$ , esto podría implicar un sistema más rápido pero con mayores requerimientos de control. Por otro lado, a medida que los polos se acercan al origen, como en  $s = -1$ , el sistema se hace más lento, pero el costo es más elevado en comparación con los casos anteriores ( $J = 0,1875$ ).

En  $s = -0,1$ , el costo crece drásticamente a  $J = 1,795$ , lo cual indica que esta elección de polos genera un comportamiento del sistema demasiado lento y poco eficiente.

- c) Bajo los parámetros encontrados, se analiza el seguimiento de la referencia  $r(t) = (1 + t)\mu(t)$ . Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

Polos	$k_2$	$k_1$	$k_0$	$J$
$s = -10$	30	300	1000	41,66
$s = -7$	21	147	343	35,49
$s = -3$	9	27	27	27,31
$s = -1$	3	3	1	23,5
$s = -0,3$	0,9	0,27	0,027	25,33
$s = -0,1$	0,03	0,003	0,0001	72,7

De los resultados, se observa un comportamiento particular del costo  $J$ . Inicialmente,  $J$  disminuye al acercar los polos al origen, alcanzando un valor mínimo en  $s = -1$  con  $J = 23,5$ . Este descenso puede justificarse por el hecho de que al acercar los polos, el sistema tiende a responder más lentamente, lo que reduce los esfuerzos del controlador y, en consecuencia, el costo.

Sin embargo, al continuar moviendo los polos aún más cerca del origen, como en  $s = -0,3$  y  $s = -0,1$ ,  $J$  comienza a incrementarse nuevamente. Este aumento puede explicarse porque, aunque los esfuerzos del controlador son menores, el sistema se vuelve demasiado lento, lo que genera un mayor error en el seguimiento de la referencia  $r(t) = (1 + t)\mu(t)$ . En particular, para  $s = -0,1$ , el costo alcanza su valor máximo ( $J = 72,7$ ), evidenciando que el sistema no es capaz de seguir adecuadamente la referencia en un tiempo razonable.

En resumen, este comportamiento refleja que existe un compromiso entre la velocidad del sistema y el costo total. Polos cercanos al origen reducen los esfuerzos del controlador, pero a costa de un peor desempeño dinámico, mientras que polos más alejados permiten un mejor seguimiento de la referencia, aunque a un costo mayor.

3. Se tiene el sistema definido por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^3}$$



- a) Considerando la perturbación  $d(t) = \sin(t + \pi)$  y la referencia  $r(t) = 1$ , se busca diseñar un controlador que permita realizar tanto el seguimiento de la señal de referencia como el rechazo de la señal de perturbación. Para ello, aplicamos el principio del modelo interno, que garantiza el cumplimiento de los requisitos para señales sinusoidales y polinómicas, obteniendo la siguiente estructura inicial del controlador:

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{(s^2 + 1)\bar{D}_C(s)}$$

La planta  $G(s)$  es capaz de garantizar el seguimiento de un escalón unitario, pero no puede rechazar la perturbación de manera adecuada. Por esta razón, no es necesario incorporar un controlador proporcional con término  $(s)$ , ya que este no aporta beneficios adicionales en este contexto específico. Teniendo en cuenta que los polos asignados al controlador son definidos mediante el principio del modelo interno, inicialmente se obtiene un sistema de orden 5. Sin embargo, dado que el numerador de la función de transferencia del controlador  $N_C(s)$  tendría solo 3 coeficientes ( $k_0, k_1$  y  $k_2$ ), se necesita asignar dos polos adicionales. Estos polos adicionales aseguran que existan suficientes grados de libertad para determinar los coeficientes del controlador. Por lo tanto, asignamos:

$$\bar{D}_C(s) = (s + k_5)(s + k_6),$$

lo que introduce dos parámetros adicionales  $k_5$  y  $k_6$  que permiten sintonizar el sistema. Con estas consideraciones, las expresiones finales para  $N_C(s)$  y  $\bar{D}_C(s)$  son las siguientes:

$$C(s) = \frac{k_4s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0}{(s^2 + 1)(s + k_5)(s + k_6)}.$$

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado ( $G_o(s)$ ) será de orden 7. Para analizar tanto el rechazo de la señal de perturbación como el seguimiento de la señal de referencia, se deben calcular la función de transferencia en lazo cerrado  $G_o(s)$  y la respuesta del sistema ante perturbaciones  $G_{yd}(s)$ , las cuales están definidas como sigue:

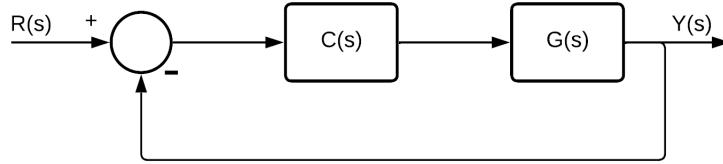


Figura 5: Diagrama de bloques resultante para  $G_o(s)$

$$G_o(s) = \frac{N_C(s) \cdot N_G(s)}{D_C(s) \cdot D_G(s) + N_C(s) \cdot N_G(s)},$$

donde:

$$G_o(s) = \frac{k_4s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0}{(s^2 + 1)(s + k_5)(s + k_6) \cdot (s^3) + (k_4s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0)}.$$



$$G_o(s) = \frac{k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^7 + (k_5 + k_6)s^6 + (k_5 \cdot k_6 + 1)s^5 + (k_4 + k_5 + k_6)s^4 + (k_5 \cdot k_6 + k_3)s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}$$

La función de transferencia del sistema ante la perturbación  $G_{yd}(s)$  se define como:

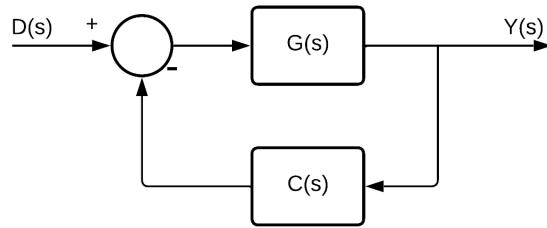


Figura 6: Diagrama de bloques resultante para  $G_{yd}(s)$

$$G_{yd}(s) = \frac{N_G \cdot D_C}{D_C \cdot D_G + N_C \cdot N_G}$$

Reemplazando las expresiones:

$$G_{yd}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s + k_5)(s + k_6)}{s^7 + (k_5 + k_6)s^6 + (k_5 \cdot k_6 + 1)s^5 + (k_4 + k_5 + k_6)s^4 + (k_5 \cdot k_6 + k_3)s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}$$

Para determinar los coeficientes  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ , utilizamos la ubicación de los polos repetidos en  $-10$ , lo que nos lleva al polinomio deseado:

$$p(s_c) = (s + 10)^7 = s^7 + 70s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2100000s^2 + 7000000s + 10000000$$

De aquí, se obtienen las siguientes relaciones y valores:

$$\begin{aligned} s^7 &= s^7 \\ (k_5 + k_6)s^6 &= 70s^6 \\ (k_5 \cdot k_6 + 1)s^5 &= 2100s^5 \\ (k_4 + k_5 + k_6)s^4 &= 35000s^4 \\ (k_5 \cdot k_6 + k_3)s^3 &= 350000s^3 \\ k_2 s^2 &= 2100000s^2 \\ k_1 s &= 7000000s \\ k_0 &= 10000000 \quad \rightarrow \end{aligned}$$



Soluciones

$$\begin{aligned}k_6 &= 35 \pm \sqrt{874}i, \\k_5 &= 35 \mp \sqrt{874}i, \\k_4 &= 34930, \\k_3 &= 347901, \\k_2 &= 2100000, \\k_1 &= 7000000, \\k_0 &= 10000000.\end{aligned}$$

Con estos valores, el controlador se expresa como:

$$C(s) = \frac{34930s^4 + 347901s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7}{(s^2 + 1)(s + 35 \mp \sqrt{874}i)(s + 35 \pm \sqrt{874}i)}$$

Las expresiones finales para las funciones de transferencia son:

$$\begin{aligned}G_o(s) &= \frac{34930s^4 + 347901s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7}{s^7 + 70s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7} \\G_{yd}(s) &= \frac{(s^2 + 1)(s + 35 \mp \sqrt{874}i)(s + 35 \pm \sqrt{874}i)}{s^7 + 70s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7}\end{aligned}$$

En el desarrollo del sistema de control, se diseñó un controlador capaz de realizar el seguimiento asintótico de la referencia  $r(t)$  y el rechazo efectivo de la perturbación  $d(t)$ . Para cumplir con estos requerimientos, los polos del sistema fueron ubicados en  $-10$  repetidos, garantizando estabilidad. Este diseño fue implementado y simulado en Simulink.

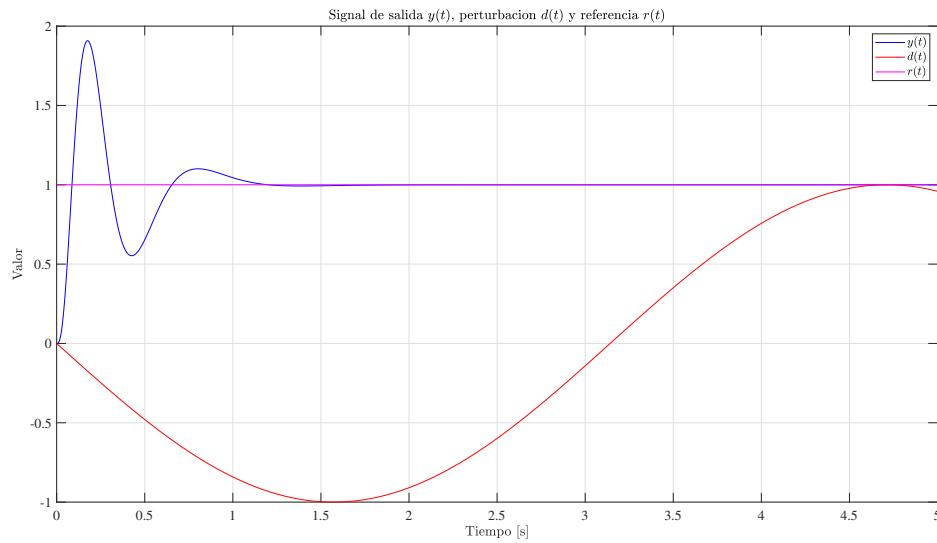


Figura 7: Respuesta del sistema con rechazo de perturbación y seguimiento de referencia

La gráfica obtenida a partir de la simulación evidencia el desempeño del sistema controlado. La salida  $y(t)$  sigue asintóticamente la referencia  $r(t) = \mu(t)$ , cumpliendo con el objetivo de seguimiento deseado. Además, la perturbación  $d(t) = \sin(t + \pi)$  es rechazada, como se observa en la respuesta en estado estacionario.

- b) Para diseñar un controlador que permita el seguimiento de una referencia  $r(t) = 2\mu(t)$  y el rechazo de una perturbación  $d(t) = 50\mu(t)$ , aplicamos el principio del modelo interno. La estructura inicial del controlador se define como:

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{(s)\bar{D}_C(s)},$$

donde:

$$\bar{D}_C(s) = (s + k_4)(s + k_5),$$

introduciendo polos adicionales que proporcionen grados de libertad suficientes.

$$C(s) = \frac{k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{(s)(s + k_4)(s + k_5)}.$$

El sistema en lazo cerrado es de orden 6, con las funciones de transferencia definidas como:

Lazo cerrado ( $G_o(s)$ )

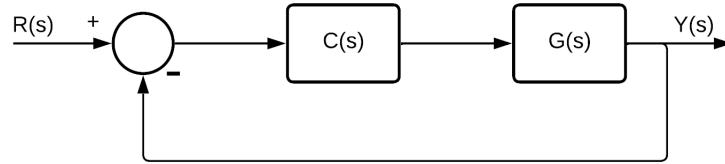


Figura 8: Diagrama de bloques resultante para  $G_{yr}(s)$

$$G_o(s) = \frac{k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^6 + (k_4 + k_5)s^5 + (k_4 \cdot k_5)s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}.$$

Respuesta ante perturbación ( $G_{yd}(s)$ )

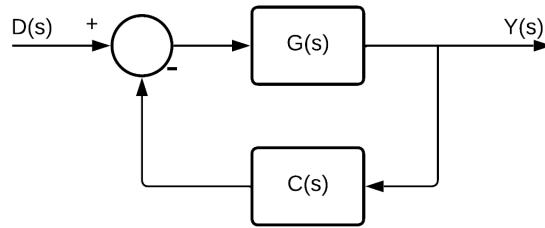


Figura 9: Diagrama de bloques resultante para  $G_{yd}(s)$

$$G_{yd}(s) = \frac{(s)(s + k_4)(s + k_5)}{s^6 + (k_4 + k_5)s^5 + (k_4 \cdot k_5)s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}.$$

Para un tiempo de asentamiento de aproximadamente 10 segundos, también aplicamos el criterio del 2-5 %, que establece:

$$t_s \approx \frac{4,5}{\zeta \omega_n} = \frac{4,5}{\sigma}, \quad \text{por lo que } \sigma \approx 0,45.$$

Con  $\omega_n = 2$ , los polos dominantes se ubican en  $s = -0,45 \pm 1,949i$ . Los polos restantes, situados significativamente más rápido (a  $s = -1,35$ ), se asignan como  $(s + 1,35)^4$ . El polinomio característico deseado es:

$$p(s_c) = (s^2 + 0,9s + 4)(s + 1,35)^4 = s^6 + 6,3s^5 + 19,795s^4 + 41,283s^3 + 55,919s^2 + 42,355s + 13,286.$$

De este polinomio, determinamos los coeficientes del controlador:

$$k_5 = 3,15 \mp 3,142i, \quad k_4 = 3,15 \pm 3,142i, \quad k_3 = 41,283, \quad k_2 = 55,919, \quad k_1 = 42,355, \quad k_0 = 13,286.$$

La función de transferencia del controlador es:



$$C(s) = \frac{41,28s^3 + 55,92s^2 + 42,36s + 13,29}{(s)(s + 3,15 \mp 3,142i)(s + 3,15 \pm 3,142i)}.$$

Se diseñó un controlador para realizar el seguimiento asintótico de la referencia  $r(t)$  y rechazar efectivamente la perturbación  $d(t)$ . Para garantizar estabilidad y un tiempo de asentamiento aproximado de 10 segundos. Las expresiones finales de las funciones de transferencia obtenidas son:

$$G_o(s) = \frac{41,28s^3 + 55,92s^2 + 42,36s + 13,29}{s^6 + 6,3s^5 + 19,795s^4 + 41,283s^3 + 55,919s^2 + 42,355s + 13,286},$$

$$G_{yd}(s) = \frac{(s)(s + 3,15 \mp 3,142i)(s + 3,15 \pm 3,142i)}{s^6 + 6,3s^5 + 19,795s^4 + 41,283s^3 + 55,919s^2 + 42,355s + 13,286}.$$

La simulación del sistema implementado en Simulink evidencia el desempeño del controlador. En la figura 10, se observa cómo la salida  $y(t)$  sigue asintóticamente la referencia  $r(t) = 2\mu(t)$ , cumpliendo con el objetivo de seguimiento. Además, la perturbación  $d(t) = 50\mu(t)$  es rechazada, asegurando estabilidad en estado estacionario.

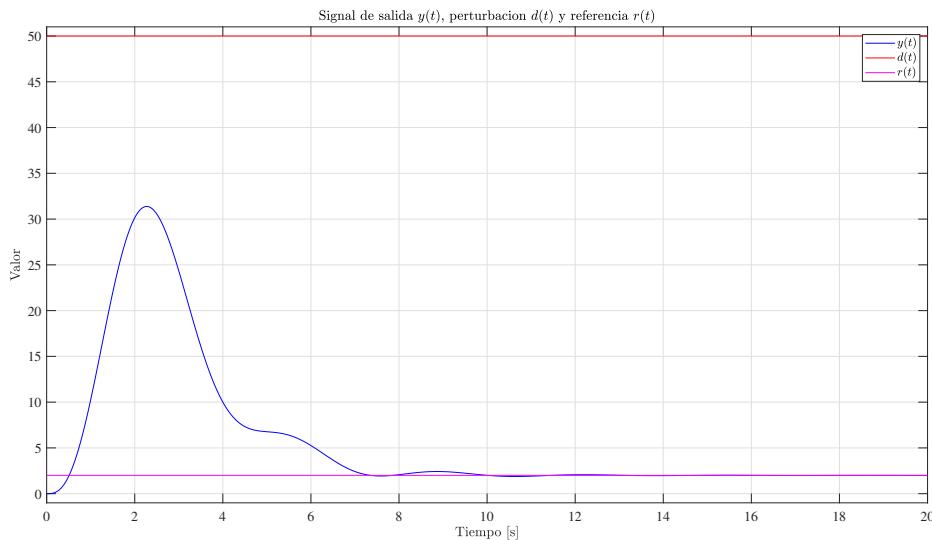


Figura 10: Respuesta del sistema con rechazo de perturbación y seguimiento de referencia.

4. Se tiene el sistema definido por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s + 2}$$

- a) Considerando la perturbación  $d(t) = t^5$ , se busca diseñar un controlador que logre rechazar la señal de perturbación y estabilizar el comportamiento de la planta. Utilizando el principio del modelo interno, el controlador se estructura para cumplir con estos requerimientos en presencia de una rampa unitaria, resultando en la siguiente forma inicial:



$$C(s) = \frac{N_C(s)}{s^6 \bar{D}_C(s)}.$$

En este caso, los polos asignados al controlador mediante el principio del modelo interno no requieren que  $\bar{D}_C(s)$  sea distinto de 1. Por lo tanto, se toma  $\bar{D}_C(s) = 1$ , lo que determina que el orden del sistema, dado por la suma de los órdenes del controlador y la planta, será 7. Bajo estas condiciones, la expresión para  $N_C(s)$  queda definida como:

$$C(s) = \frac{k_6 s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^6}.$$

Para analizar el rechazo de la señal de perturbación, se calcula la respuesta del sistema frente a  $d(t)$  mediante la función de transferencia  $G_{yd}(s)$ , que queda expresada como:

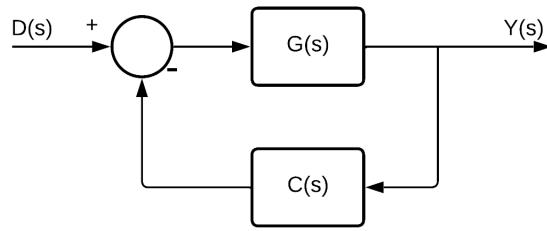


Figura 11: Diagrama de bloques resultante para  $G_{yd}(s)$

$$G_{yd}(s) = \frac{N_G \cdot D_C}{D_C \cdot D_G + N_G \cdot N_G}.$$

Reemplazando las expresiones correspondientes:

$$G_{yd}(s) = \frac{s^6}{(s^6) \cdot (s+2) + (k_6 s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0) \cdot (1)}.$$

Simplificando, se obtiene:

$$G_{yd}(s) = \frac{s^6}{s^7 + (k_6 + 2)s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}.$$

Para determinar los coeficientes  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  y  $k_6$ , utilizamos la ubicación de los polos repetidos en  $-10$ , lo que nos lleva al polinomio deseado:

$$p(s_c) = (s+10)^7 = s^7 + 70s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2100000s^2 + 7000000s + 10000000$$

De este polinomio, determinamos los coeficientes del controlador:

$$k_6 = 68, \quad k_5 = 2100, \quad k_4 = 35000, \quad k_3 = 350000, \quad k_2 = 2100000, \quad k_1 = 7000000, \quad k_0 = 10000000.$$



Teniendo en cuenta los valores encontrados anteriormente, podemos reescribir la función de transferencia de nuestro controlador que realice el rechazo a la señal de perturbación solicitada con sus polos ubicados en  $(-10)$  repetidos, como se muestra a continuación:

$$C(s) = \frac{68s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7}{s^6}$$

Comprobando los resultados con Simulink siendo la única entrada del sistema la referencia  $d(t)$ .

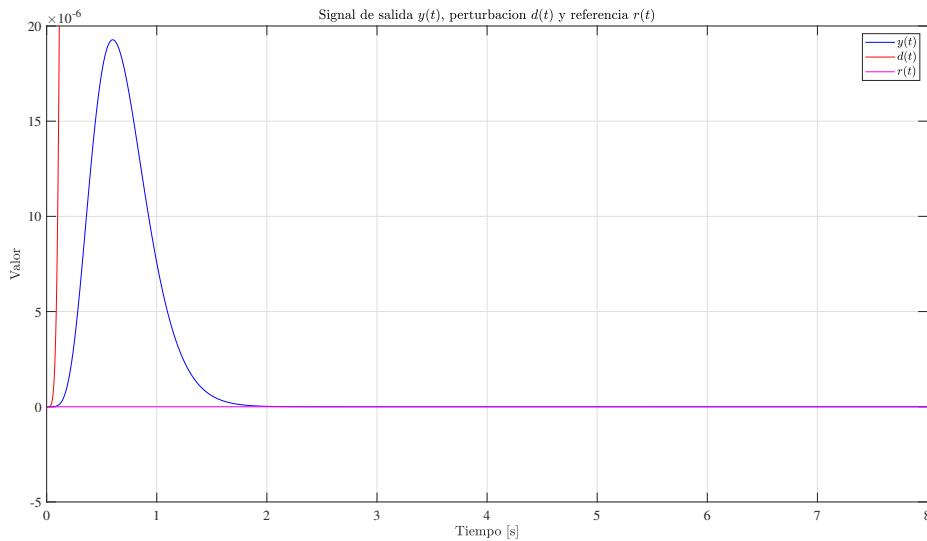


Figura 12: Respuesta del sistema con rechazo de perturbación teniendo  $r(t) = 0$

- b) Usando el controlador del inciso a. determine  $G_o(s)$  y concluya sobre los errores de velocidad y posición y aceleración.

Calculando la función de transferencia  $G_o(s)$ .

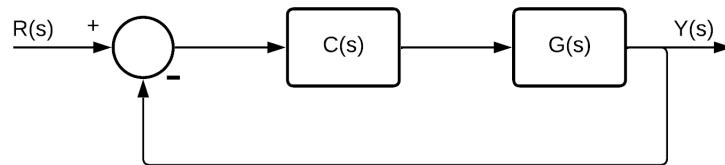


Figura 13: Diagrama de bloques resultante para  $G_o(s)$

$$G_o(s) = \frac{N_C(s) \cdot N_G(s)}{D_C(s) \cdot D_G(s) + N_C(s) \cdot N_G(s)},$$

donde:



$$G_o(s) = \frac{k_6 s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \cdot 1}{s^6 \cdot (s+2) + (k_6 s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0) \cdot 1}$$

Reemplazando los parámetros encontrados en el inciso a.

$$G_o(s) = \frac{68s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7}{s^7 + 70s^6 + 2100s^5 + 35000s^4 + 350000s^3 + 2,1 \times 10^6s^2 + 7 \times 10^6s + 10^7}$$

Una vez hallado  $G_o(s)$  podemos determinar el error de posición y de velocidad en porcentaje.

A partir de la misma función de transferencia del punto anterior asociada a la respuesta del sistema, se comprueba que el sistema es estable por medio del comando *roots* de Matlab, teniendo como resultado los siguientes polos:  $-10,0945 + 0,0000i$ ,  $-10,0587 + 0,0739i$ ,  $-10,0587 - 0,0739i$ ,  $-9,9788 + 0,0918i$ ,  $-9,9788 - 0,0918i$ ,  $-9,9153 + 0,0407i$  y  $-9,9153 - 0,0407i$  con lo cual se comprueba que el sistema es estable dado que todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo del eje imaginario.

**Cálculo del error de posición:**  $R(s) = \frac{1}{s}$ . Usamos el teorema del valor final:

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left( \frac{1}{s} \cdot G_o(s) \right) = 1.$$

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)| = 1 - 1 = 0.$$

$$\%e_p = 0\%$$

**Cálculo del error de velocidad:** Dado que el error de posición es igual a cero ( $e_p(t) = 0$ ), tiene sentido calcular un error de velocidad cambiando la referencia a una referencia de tipo rampa unitaria asociada a la siguiente expresión:

$$r(t) = t \quad \rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Teniendo en cuenta que el sistema es estable, se puede realizar el siguiente análisis para la salida del sistema, representada como  $Y(s)$ :

$$Y(s) = G_o(s) \cdot R(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s} + \text{Términos adicionales de } G_o(s).$$

$$G_o(s) = \frac{\beta_6 s^6 + \beta_5 s^5 + \beta_4 s^4 + \beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_7 s^7 + \alpha_6 s^6 + \alpha_5 s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace para determinar la respuesta en estado estacionario  $y_{ss}(t)$ , y considerando las características de las exponenciales decrecientes debido a la estabilidad del sistema, obtenemos:

$$y_{ss}(t) = c_1 \cdot t + c_2 = G_o(0) \cdot t - G'_o(0).$$

En este contexto, los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan mediante el proceso de descomposición en fracciones parciales, tal como fue explicado durante la clase magistral.



$$c_2 = G_o(0) = \frac{68(0)^6 + 2100(0)^5 + 35000(0)^4 + 350000(0)^3 + 2,1 \times 10^6(0)^2 + 7 \times 10^6(0) + 10^7}{0^7 + 70(0)^6 + 2100(0)^5 + 35000(0)^4 + 350000(0)^3 + 2,1 \times 10^6(0)^2 + 7 \times 10^6(0) + 10^7} = 1$$
$$c_1 = G_o'(0) = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_0} \cdot 1!$$
$$c_1 = G_o'(0) = \frac{7 \times 10^6 - 7 \times 10^6}{10^7} = 0$$

A continuación, calculamos el error de velocidad ( $e_v(t)$ ) utilizando un procedimiento similar al realizado para el error de posición ( $e_p(t)$ ):

$$e_v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)|.$$

Dado que la referencia es una rampa unitaria  $r(t) = t$ , sustituimos la expresión de la salida  $y(t)$ .

$$e_v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - (G_o(0) \cdot t + G'_o(0))).$$

Simplificando, el error de velocidad se reduce a:

$$e_v(t) = -G'_o(0).$$

Finalmente, evaluando  $G'_o(0)$ :

$$e_v = 0$$

$$\%e_v = 0 \%$$