Profesor
John Alexander Cortés Romero, PhD.

Reto 1
Análisis de estabilidad
Manejo de sistemas y señales
Errores en estado estacionario

Objetivos del reto

Los objetivos asociados a este reto son:

- Determinar las funciones de transferencia asociadas a un sistema de control.
- Reconocer y aplicar criterios de estabilidad en sistemas de control.
- Comprender el manejo de señales y bloques para determinar el comportamiento de las señales asociadas a un sistema de control.

Entregables (Archivos de manera independiente)

- Archivo PDF del informe siguiendo los lineamientos del primer anuncio.
- Archivos de simulación de simulink y/o matlab.
- Toda respuesta de simulación debe estar en el respectivo informe, incluyendo diagramas de bloques elaborados. De lo contrario el punto no será considerado.

Planteamiento del reto

Para la realización de los puntos 1 , 2 y 3 se debe tener en cuenta el esquema de control de la Figura 1.

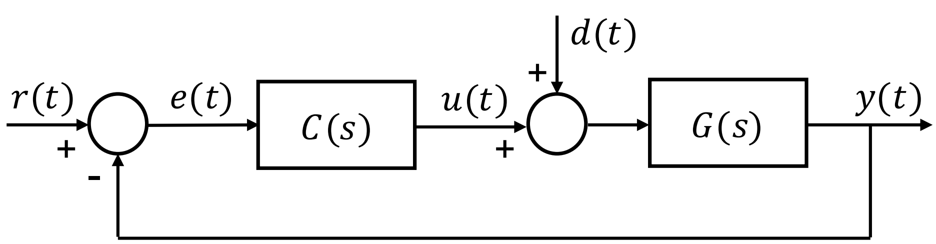

Figure 1: Sistema de control genérico.

- $r(t)$: Referencia.
- $e(t)$: Error.
- $u(t)$: Señal de control.
- $y(t)$: Respuesta del sistema.

- $d(t)$: Perturbación

1. (Vale 34%) Se tiene una planta asociada a un sistema $G(s)$, cuya dinámica está expresada por la siguiente función de tranferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

Se propone el controlador proporcional $C(s) = k_p$ donde $k_p \in \mathbf{R}$ y la referencia $r(t) = \mu(t)$. Entonces:

a. Determine la función de transferencia del sistema de control $G_o(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ y determine si el sistema de control es estable, considerando $C(s) = 10$.

b. Se detecta una falla en el sistema, lo que genera que exista la restricción $|u(t)| \leq 1$, bajo estas condiciones simule el sistema considerando $C(s) = 10$. Adicionalmente, determine un valor adecuado de k_p que impida que el sistema se sature ante la restricción $|u(t)| < a$, $a > 1$ manteniendo la estabilidad.

c. Considere la planta $G(s) = \frac{1}{s+1}$, determine un valor adecuado de $k_p > 0$ que impida que el sistema se sature ante la restricción $|u(t)| < a$, $a \in \mathbf{R}^+$ manteniendo la estabilidad. Concluya sobre los efectos de saturación y estabilidad.

2. (Vale 33%) Un sistema eléctrico posee la siguiente función de tranferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Para que el sistema tenga un seguimiento de señales constantes se propone el controlador PI, dado por la ecuación $C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}$, $\{k_p, k_i\} \in \mathbf{R}$. Entonces:

a. Bajo el criterio de Routh Hurtwitz determine las condiciones de k_p y k_i para que el sistema sea estable.

b. Use los valores de $k_p = 5$ y de $k_i = 10$ en simulación verifique el comportamiento de $y(t)$ ante la referencia $r(t) = u(t)$ y perturbación $d(t) = 3u(t) + 5u(t-3)$. Concluya sobre los beneficios del controlador empleado.

3. (Vale 33%) Considere un sistema descrito por la función de transferencia $G(s)$ que es controlado por un controlador $C(s)$. Las funciones de transferencia asociadas vienen dadas por:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad C(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2}$$

a. Bajo el criterio de Routh Hurtwitz determine si el sistema es estable.

b. Determine las funciones de transferencia $G_{yd}(s) := \frac{Y(s)}{D(s)}$ y $G_{yr}(s) := \frac{Y(s)}{R(s)}$, determine las ganacias DC para cada una de las funciones de tranferencia encontradas. Interprete los resultados respecto al seguimiento y rechazo de señales constantes.

Estudiante
Sebastian Jaramillo Verdugo

Reto 1
Análisis de estabilidad
Manejo de sistemas y señales
Errores en estado estacionario

Solución del reto

1. Se propone el controlador proporcional $C(s) = k_p$ donde $k_p \in \mathbb{R}$ y la referencia $r(t) = \mu(t)$.

   a) Se pide hallar la función de transferencia del sistema de control $G_o(s)$ y determinar si el sistema de control es estable, considerando $C(s) = 10$.

   Por superposición se tiene que $d(t) = 0$, resultando así el siguiente diagrama de bloques:

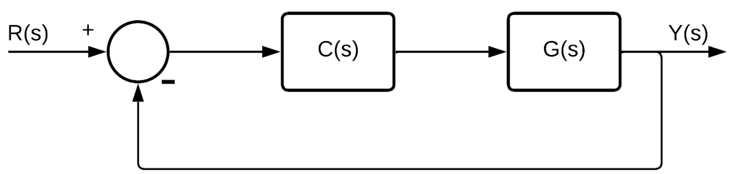

Figura 2: Diagrama de bloques resultante para $G_{yr}(s)$

Con $G(s) = \frac{1}{s-1}$ y $C(s) = k_p$, se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado.

$$
\begin{aligned}
G_o(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\
&= \frac{N_C(s)N_G(s)}{D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)} \\
&= \frac{k_p}{s - 1 + k_p}
\end{aligned}
$$

Para garantizar la estabilidad del sistema, es necesario que la parte real de los polos de la función de transferencia de G_o se ubiquen en el semiplano izquierdo del plano complejo. Esto significa que todos los polos deben tener una parte real estrictamente negativa.

$$
\begin{aligned}
-1 + k_p &> 0 \\
k_p &> 1
\end{aligned}
$$

Con $k_p > 1$, se garantiza la estabilidad del sistema, ya que este valor representa un control proporcional que estabiliza $G_o(s)$. Inicialmente, el sistema posee un polo en el semiplano derecho, lo cual lo hace inestable. Sin embargo, al considerar $C(s) = 10$, el sistema de control se vuelve estable. La función de transferencia resultante del sistema de control $G_o(s)$ es la siguiente:

$$G_o(s) = \frac{10}{s+9}$$

b) ▪ Se detecta una falla en el sistema, lo que genera que exista la restricción $|u(t)| \leq 1$, bajo estas condiciones simule el sistema considerando $C(s) = 10$.

En este caso, se propone que el sistema opere bajo condiciones de saturación, donde la señal de control $u(t)$ está restringida entre 1 y -1. El diagrama de bloques que representa este sistema de control, incluyendo el bloque de saturación, se muestra a continuación:

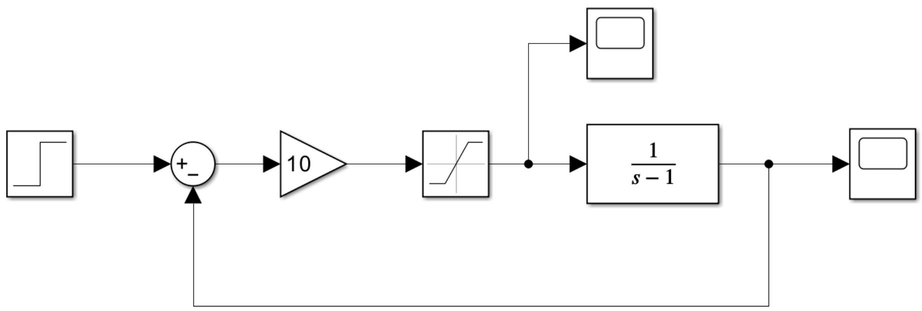

Figura 3: Diagrama de bloques del sistema de control con saturación

Las señales resultantes de la simulación, que incluyen la salida $y(t)$, la referencia $r(t)$, y la señal de control $u(t)$, obtenidas a partir de los scopes en Simulink, se presentan en la siguiente gráfica.

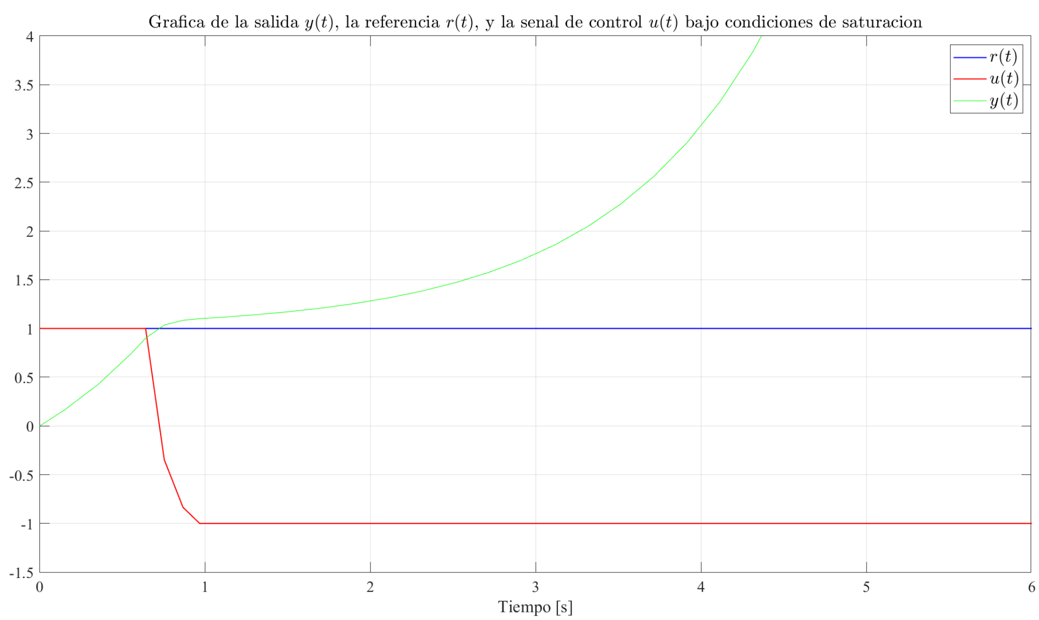

Figura 4: Gráfica $y(t)$, $r(t)$, $u(t)$ bajo condiciones de saturación con $C(s) = 10$

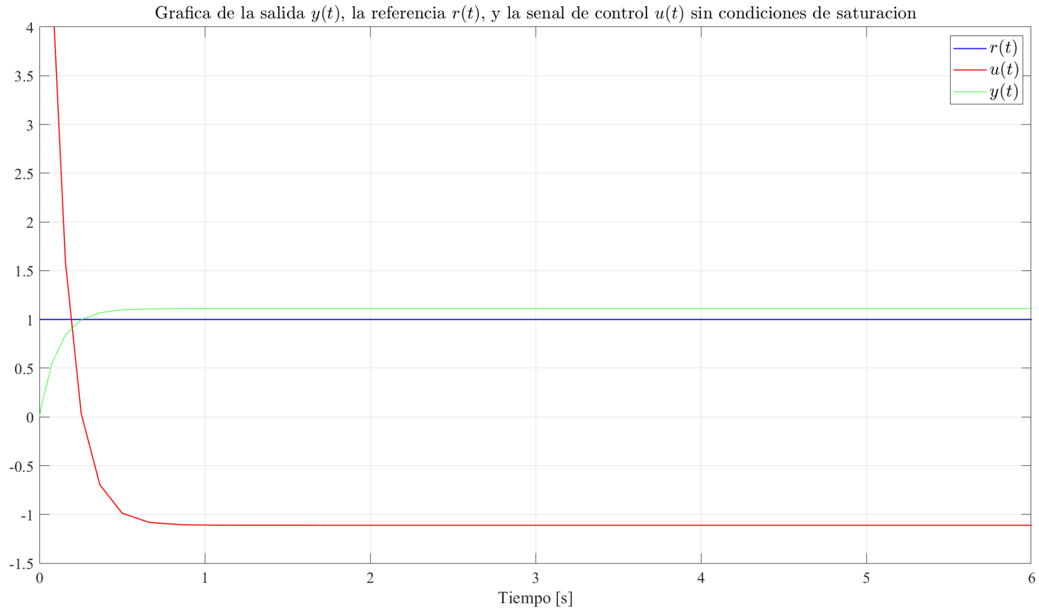

Figura 5: Gráfica $y(t)$, $r(t)$, $u(t)$ **sin** condiciones de saturación con $C(s) = 10$

Como se puede ver al comparar ambas gráficas, la saturación impuesta sobre $u(t)$ restringe la capacidad del sistema para corregir errores, lo que resulta en un desempeño subóptimo. Aunque el controlador tiene una ganancia alta ($C(s) = 10$), la limitación de la acción de control introduce errores en estado estacionario y limita la capacidad del sistema para seguir la referencia de manera precisa.

- Adicionalmente, determine un valor adecuado de k_p que impida que el sistema se sature ante la restricción $|u(t)| < a$, $a > 1$ manteniendo la estabilidad.

Se considera que la entrada del sistema corresponde a la referencia $R(s)$, mientras que la salida del sistema es la señal de control $U(s)$. Esta relación se describe mediante el siguiente diagrama de bloques:

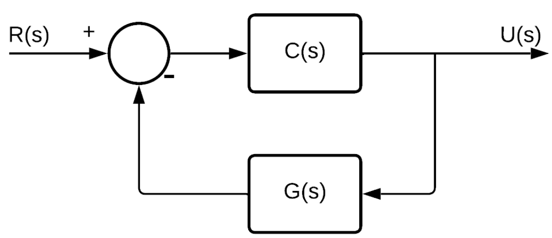

Figura 6: Diagrama de bloques del sistema de control para G_{ur}

A partir del diagrama, se obtiene la función de transferencia que relaciona $U(s)$ y $R(s)$, definida como $G_{ur}(s) := \frac{U(s)}{R(s)}$. Su desarrollo es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1+C(s)G(s)} \\
&= \frac{k_p}{1+\frac{k_p}{s-1}} \\
&= \frac{k_p s - k_p}{s-1+k_p}.
\end{aligned}
$$

Para analizar la respuesta del sistema, se evaluará la señal de control $u(t)$ en sus límites temporal mínimo y máximo mediante el Teorema del Valor Inicial (TVI) y el Teorema del Valor Final (TVF), respectivamente:

$$
\begin{gathered}
TVI \Rightarrow u(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{k_p s - k_p}{s-1+k_p} \\
u(0^+) = k_p \\
TVF \Rightarrow u(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{k_p s - k_p}{s-1+k_p} \\
u(\infty) = \frac{k_p}{1-k_p}
\end{gathered}
$$

En el caso del TVF, el análisis solo es válido si el sistema es estable, es decir, si $k_p > 1$. A partir de los valores calculados de $u(0^+)$ y $u(\infty)$, estos se deben acotar dentro de los límites impuestos por la saturación:

$$
\begin{gathered}
k_p < a, \qquad \frac{k_p}{1-k_p} > -a, \\
k_p < a, \qquad k_p > \frac{a}{a-1}.
\end{gathered}
$$

Por lo tanto, el intervalo de valores de k_p que garantiza que el sistema no se sature ante la restricción impuesta es:

$$
\frac{a}{a-1} < k_p < a, \quad a > 1.
$$

Con este rango de k_p, el sistema evita la saturación y mantiene su estabilidad.

A continuación se presenta un ejemplo puntual con $a = 5$ y $k_p = 3$:

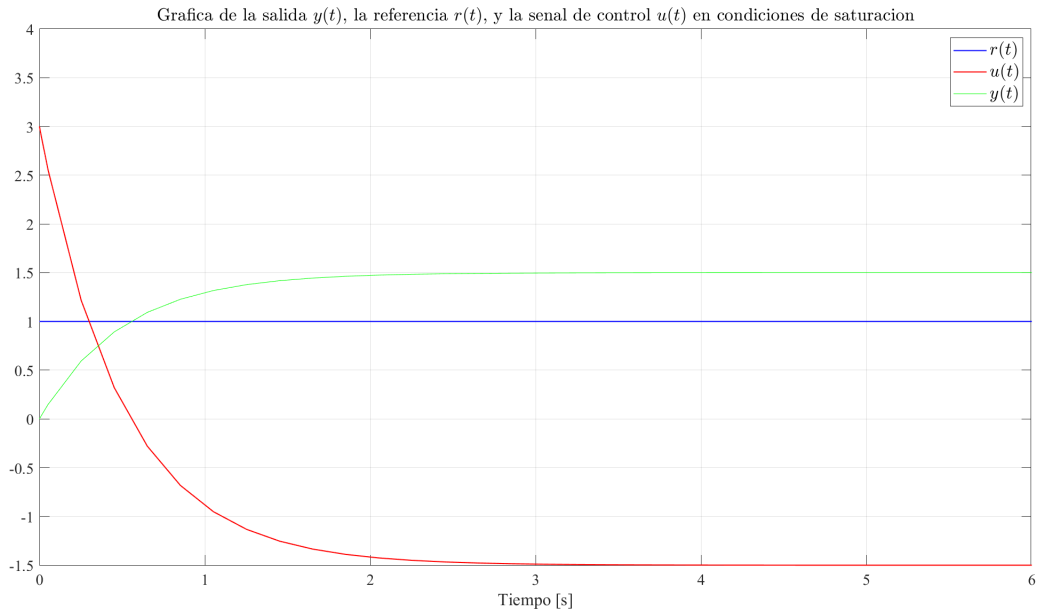

Figura 7: Gráfica de $y(t)$, $r(t)$, $u(t)$ en condiciones de saturación con $C(s) = 3$ y $a = 5$.

c) Considere la planta $G(s) = \frac{1}{s+1}$, determine un valor adecuado de $k_p > 0$ que impida que el sistema se sature ante la restricción $|u(t)| < a$, $a \in \mathbb{R}^+$ manteniendo la estabilidad. Concluya sobre los efectos de saturación y estabilidad.

Se llevará a cabo un procedimiento similar al del ejercicio anterior, modificando únicamente la planta del sistema al ajustar su polo, lo que la transformará en una planta estable.
A partir del diagrama de la figura 6, se obtiene la función de transferencia que relaciona $U(s)$ y $R(s)$, definida como $G_{ur}(s) := \frac{U(s)}{R(s)}$. Su desarrollo es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} \\
&= \frac{k_p}{1 + \frac{k_p}{s+1}} \\
&= \frac{k_p s + k_p}{s + 1 + k_p}.
\end{aligned}
$$

Para analizar la respuesta del sistema, se evaluará la señal de control $u(t)$ en sus límites temporal, mínimo y máximo mediante el Teorema del Valor Inicial (TVI) y el Teorema del Valor Final (TVF), respectivamente:

$$
\begin{aligned}
TVI \Rightarrow u(0^+) &= \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{k_p s + k_p}{s+1+k_p} \\
u(0^+) &= k_p \\
TVF \Rightarrow u(\infty) &= \lim_{s\to} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{k_p s + k_p}{s+1+k_p} \\
u(\infty) &= \frac{k_p}{1+k_p}
\end{aligned}
$$

A partir de los valores calculados de $u(0^+)$ y $u(\infty)$, estos se deben acotar dentro de los límites impuestos por la saturación:

$$
\begin{aligned}
k_p < a, &\qquad \frac{k_p}{1+k_p} > -a, \\
k_p < a, &\qquad k_p > \frac{-a}{a+1}.
\end{aligned}
$$

La segunda condición k_p siempre la cumplirá, puesto que este valor debe ser superior a 0. Por lo tanto, el intervalo de valores de k_p que garantiza que el sistema no se sature ante la restricción impuesta es:

$$0 < k_p < a, \quad a > 0.$$

El análisis demuestra que la saturación afecta directamente la señal de control $u(t)$, limitando su magnitud dentro de los valores especificados por $|u(t)| < a$. Sin embargo, al seleccionar un valor de k_p dentro del intervalo calculado, el sistema puede evitar la saturación, garantizar un comportamiento estable y mantener una respuesta adecuada ante la referencia $R(s)$. Esto asegura que la planta permanezca dentro de las restricciones dinámicas y evite problemas de inestabilidad.

2. Un sistema eléctrico posee la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Para que el sistema tenga un seguimiento de señales constantes, se propone un controlador PI dado por la ecuación:

$$C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad \{k_p, k_i\} \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

a) Bajo el criterio de Routh Hurtwitz determine las condiciones de k_p y k_i para que el sistema sea estable.

El denominador común de las funciones de transferencia en lazo cerrado de este sistema eléctrico está dado por la siguiente expresión:

$$p(s) = D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)$$
$$p(s) = s(s+2) + k_p s + k_i$$
$$p(s) = s^2 + s(k_p+2) + k_i$$

Aplicando el criterio de Routh Hurtwitz.

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k_i \\ s^1 & k_p+2 & 0 \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

A continuación, se hallará el valor que toma el coeficiente b_1:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & k_i \\ k_p+2 & 0 \end{vmatrix}}{k_p+2} = k_i$$

Teniendo en cuenta que para garantizar la estabilidad del sistema, el criterio de Routh Hurwitz nos dice que no debe haber ningún cambio de signo en la primera columna, por lo que se debe asegurar que los coeficientes b_1 y a_{n-1} sean mayores que 0:

$$b_1 = k_p + 2 > 0 \qquad a_{n-1} = k_i > 0$$
$$k_p > -2 \qquad k_i > 0$$

Para garantizar la estabilidad del sistema eléctrico a partir de las constantes k_p y k_i, estas deben cumplir con las siguientes condiciones: $k_p > -2$ y $k_i > 0$.

b) Use los valores de $k_p = 5$ y $k_i = 10$ en simulación para verificar el comportamiento de $y(t)$ ante la referencia $r(t) = \mu(t)$ y la perturbación $d(t) = 3\mu(t) + 5\mu(t-3)$. Concluya sobre los beneficios del controlador empleado.

Reemplazando los valores de k_p y k_i en el diagrama de bloques junto a la perturbación $d(t)$ se obtiene el siguiente diagrama de bloques:

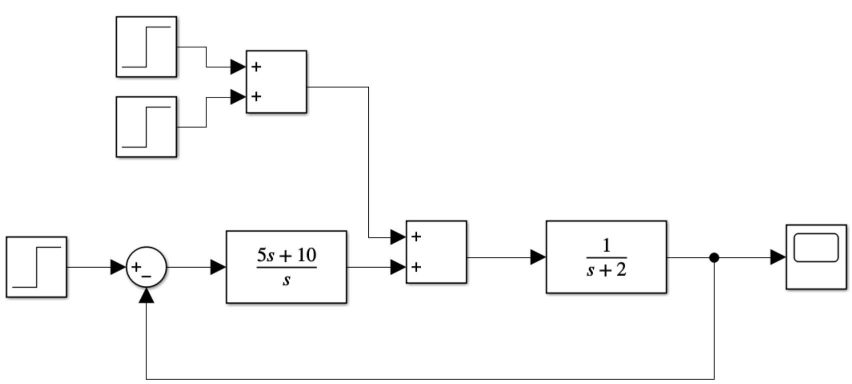

Figura 8: Diagrama de bloques del sistema de control con saturación

Las señales resultantes de la simulación, que incluyen la salida $y(t)$, la referencia $r(t)$, la señal de control $u(t)$ y la perturbación $d(t)$, obtenidas a partir de los scopes en Simulink, se presentan en la siguiente gráfica.

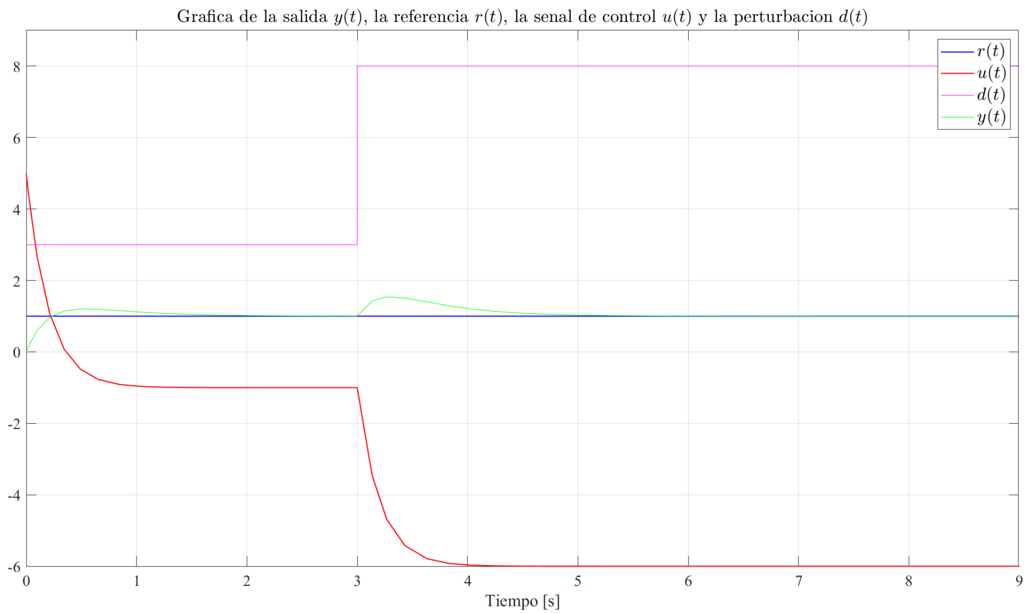

Figura 9: Gráfica de $y(t)$, $r(t)$, $u(t)$, $d(t)$ en condiciones de saturación con $k_p = 5$ y $k_i = 10$.

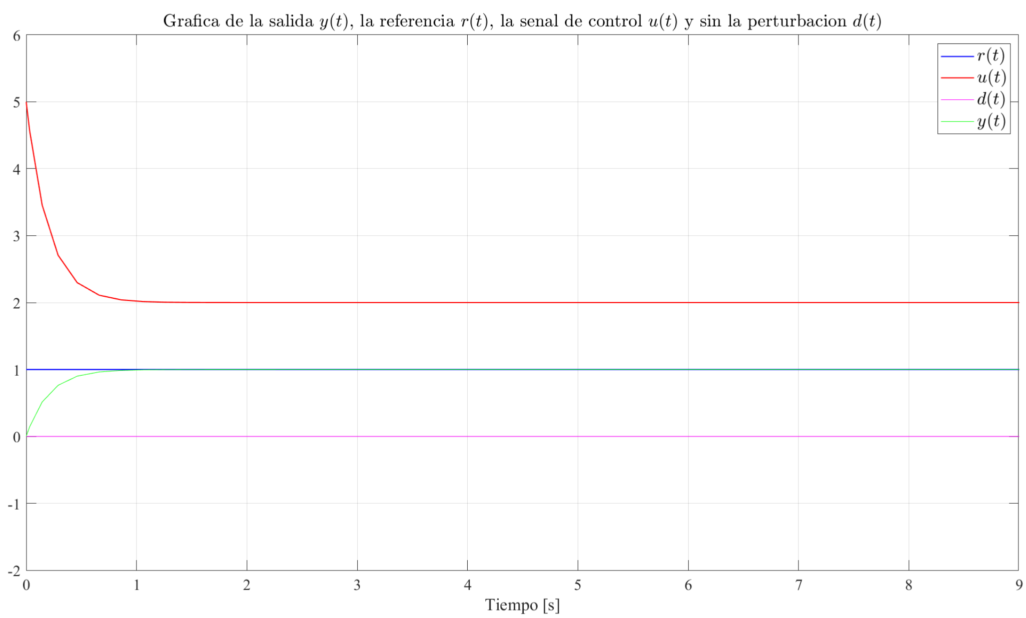

Figura 10: Gráfica de $y(t)$, $r(t)$, $u(t)$, **sin** condiciones de saturación con $k_p = 5$ y $k_i = 10$.

La salida $y(t)$ del sistema converge hacia la referencia $r(t)$, asegurando que $y_{ss} = r_{ss}$ (seguimiento de referencia). Esto indica que el controlador PI logra mantener el sistema en un estado deseado a pesar de las perturbaciones. El controlador PI utilizado no solo garantiza el seguimiento de la referencia constante, sino que también muestra un desempeño robusto frente a perturbaciones externas.

3. Considere un sistema descrito por la función de transferencia $G(s)$ que es controlado por un controlador $C(s)$. Las funciones de transferencia asociadas vienen dadas por:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad C(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2}.$$

a) Bajo el criterio de Routh Hurtwitz determine si el sistema es estable.

Se hallará la función de transferencia del sistema como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} \\ &= \frac{N_C(s)N_G(s)}{D_C(s)D_G(s)+N_C(s)N_G(s)} \\ &= \frac{s^2+2s+1}{(s+1)s^2+s^2+2s+1} \\ &= \frac{s^2+2s+1}{s^3+2s^2+2s+1} \end{aligned}$$

Se aplica el criterio de Routh Hurtwitz al denominador de $G_o(s)$.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & 1 \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = 1{,}5 \qquad c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1{,}5 & 0 \end{vmatrix}}{1{,}5} = 1$$

Al reemplazar los valores hallados de b_1 y c_1 se puede ver que no hay cambios de signo en la primera columna y por ende se entiende que el sistema es estable.

b) Determine las funciones de transferencia $G_{yd}(s) := \frac{Y(s)}{D(s)}$ y $G_{yr}(s) := \frac{Y(s)}{R(s)}$. Calcule las ganancias DC para cada una de las funciones de transferencia encontradas. Interprete los resultados respecto al seguimiento y rechazo de señales constantes.

Por superposición se redibuja el diagrama de bloques que describe a la función de transferencia de $G_{yd}(s) := \frac{Y(s)}{D(s)}$.

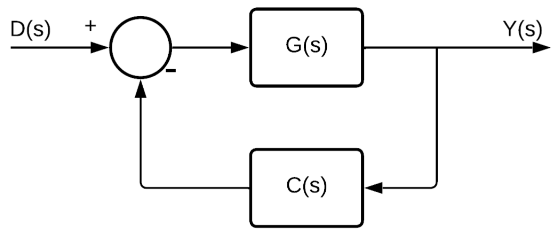

Figura 11: Diagrama de bloques resultante para $G_{yd}(s)$

Recordando que:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad C(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, podemos denotar que la planta $G(s)$ es estable dado que su polo se encuentra en el semiplano izquierdo con ($p = 1$). Por otro lado, se puede decir que nuestro controlador es marginalmente estable dado que sus dos polos se encuentra ubicados en el origen ($p = 0$). De este modo, podemos decir que nuestro sistema será un sistema de tercer orden estable.

Se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado.

$$\begin{aligned} G_{yd}(s) &= \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s+1}\frac{s^2+2s+1}{s^2}} \\ &= \frac{s^2}{s^3+2s^2+2s+1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la función G_{yd} es de segundo orden, y que todos los coeficientes del polinomio característico son positivos, se dice que el sistema es estable.

La salida en estado estacionario de la función de transferencia, cuando se aplica un escalón unitario, refleja directamente la ganancia DC del sistema. Esto significa que el valor final de la salida, obtenido mediante el teorema del valor final, coincide con la magnitud de la ganancia en estado estacionario del sistema para esa entrada específica.

$$y_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} sD(s)G_{yd}$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2}{s^3+2s^2+2s+1}\right) = 0$$

La ganancia DC de la función de transferencia G_{yd} representa la capacidad del sistema para rechazar o atenuar perturbaciones externas que afecten su funcionamiento. Un valor de ganancia DC igual a cero indica que el sistema es capaz de eliminar por completo cualquier perturbación externa $d(t)$, garantizando un rechazo total de dichas interferencias.

Teniendo en cuenta el diagrama del sistema de control de la figura 2, se obtuvo la expresión de la función de transferencia de $G_{yr} = G_o$ en el punto 3.a. Ahora se calculará la ganancia DC de esta F.T.

$$y_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} sR(s)G_{yr}$$
$$y(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{s^2+2s+1}{s^3+2s^2+2s+1}\right) = 1$$

Este resultado de la ganancia DC para la función de transferencia $G_{yr}(s)$ se interpreta como la capacidad del sistema para seguir fielmente la entrada o referencia aplicada. En particular, cuando este valor es igual a uno (1), se garantiza que el sistema no presenta error asociado a perturbaciones o ruidos externos. Por lo tanto, el sistema logra reproducir la referencia con precisión, minimizando el error a cero (0). En consecuencia, se concluye que la salida del sistema $y(t)$ tiende a coincidir con la referencia $r(t)$.