Profesor
John Alexander Cortés Romero, PhD.

Reto 3
Estudio del transitorio
Errores en estado estacionario

Entregables (Archivos de manera independiente)

- Archivo PDF del informe siguiendo los lineamientos del primer anuncio.
- Archivos de simulación de simulink y/o matlab.
- Toda respuesta de simulación debe estar en el respectivo informe, incluyendo diagramas de bloques elaborados. De lo contrario el punto no será considerado.

Planteamiento del reto

Para la realización de los puntos 1 , 2 , 3 y 4 se debe tener en cuenta el esquema de control de la Figura 1.

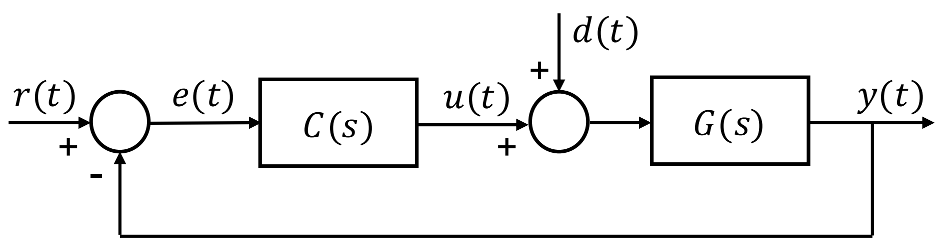

Figure 1: Sistema de control genérico.

- $r(t)$: Referencia.
- $e(t)$: Error.
- $u(t)$: Señal de control.
- $y(t)$: Respuesta del sistema.
- $d(t)$: Perturbación

1. (Vale 25%) Se tiene una planta asociada a un sistema $G(s)$, cuya dinámica está expresada por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+3},$$

   a. Sea $C(s) = 5$, determine los errores de posición y velocidad en porcentaje para el sistema de control.
   b. Sea $C(s) = \frac{2s+5}{s}$, determine los errores de posición y velocidad en porcentaje para el sistema de control.

2. (Vale 25%) Se tiene una planta asociada a un sistema $G(s)$, cuya dinámica está expresada por la siguiente función de transferencia

$$G_o(s) = \frac{a}{s+b},$$

donde $\{a, b\} \in \mathbf{R}$. Se obtiene la siguiente señal de error ante la referencia rampa unitaria.

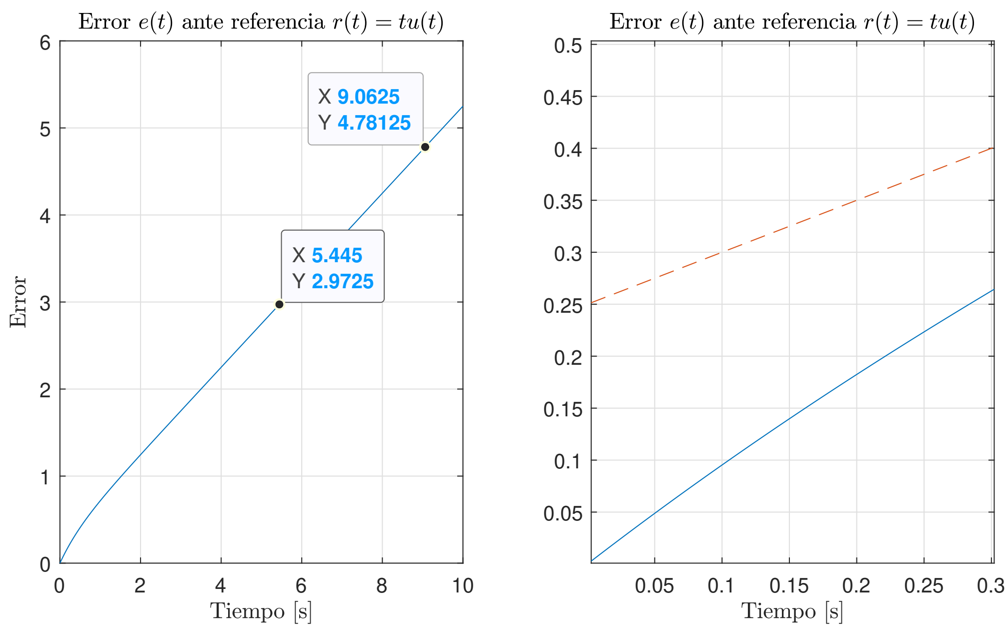

Figure 2: Error de seguimiento

Determine valores de a y b, sabiendo que la línea roja punteada describe la tendencia del comportamiento del error de seguimiento en estado estacionario.

3. (Vale 25%) Se tiene una planta asociada a un sistema $G(s)$, cuya dinámica está expresada por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^4 + ds^3 + es^2 + fs + g},$$

donde $\{a, b, c, d, e, f, g\} \in \mathbf{R}$. Se obtienen los resultados del error del sistema ante una referencia igual a $r(t) = t^2u(t)$ y la respuesta del sistema ante la referencia $r(t) = tu(t)$

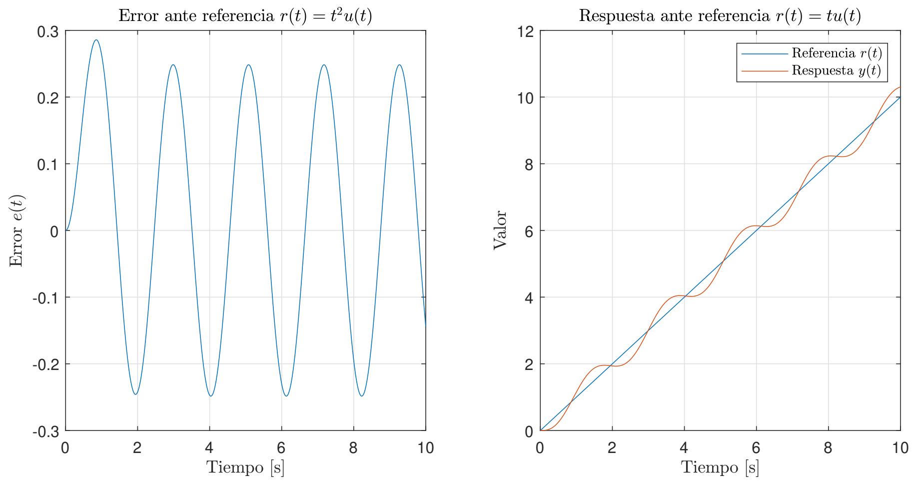

Figure 3: Respuestas del sistema

Determine los valores de a, b ,c ,d ,e, f y g sabiendo que:

- Todos los polos poseen la misma magnitud.
- La frecuencia de oscilacion del error en estado estacionario del sistema es igual a $3\frac{rad}{s}$

4. (Vale 25%) **(Punto Requiere de simulación de ambos incisos)**
Un sistema puede describirse por medio de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

a. Ante el controlador $C(s) = k_p$, verifique el comportamiento en estado estacionario del sistema de control en lazo cerrado, ante una referencia y perturbación constante.

b. Diseñe un controlador que permita el seguimiento de señales constantes y el rechazo de perturbaciones tipo rampa. Debe ubicar los polos del sistema de control en lazo cerrado en -10 (repetidos) .

c. Concluya respecto al seguimiento y rechazo de señales polinómicas teniendo en cuenta las estructuras de controlador y planta.

Estudiante
Sebastian Jaramillo Verdugo

Reto 3
Estudio del transitorio
Errores en estado estacionario

Solución del reto

1. A continuación, se presenta el procedimiento correspondiente a los subpuntos del Punto No. 1, considerando los siguientes aspectos:

   - Evaluación de la estabilidad del sistema.
   - Cálculo de la respuesta del sistema ($G_o(s)$).
   - Determinación de la respuesta en estado estacionario.
   - Cálculo de errores de posición y velocidad según corresponda.

   a) La planta está definida por la función de transferencia:

   $$G(s) = \frac{1}{s+3},$$

   y el controlador está definido como:

   $$C(s) = 5$$

   La planta es estable porque todos los términos del denominador de su función de transferencia son positivos. Del mismo modo, el controlador es estable, ya que no contiene polos en el semiplano derecho ni sobre el eje imaginario.
   Calculando la función de transferencia en lazo cerrado.

   $$G_o(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}.$$

   Sustituyendo $C(s)$ y $G(s)$:

   $$G_o(s) = \frac{\frac{5}{s+3}}{1 + \frac{5}{s+3}} = \frac{5}{s+8}.$$

   Dado que $G_o(s)$ es de primer orden con su polo ubicado en (-8), concluimos que el sistema es estable.
   Para una entrada tipo escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$. Usamos el teorema del valor final:

   $$y_{ss} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s),$$

   donde $Y(s) = R(s) \cdot G_o(s)$. Sustituyendo:

   $$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{5}{s+8} \right) = \frac{5}{8}.$$

Cálculo del error de posición: El error de posición se define como:

$$e_p = \lim_{t\to\infty} \frac{r(t) - y(t)}{r(t)},$$

donde $r(t) = 1$ y $y(t) = y_{ss}$. Entonces:

$$e_p = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$
$$\%e_p = 37{,}5\,\%.$$

Como $e_p \neq 0$, no tiene sentido calcular el error de velocidad, ya que este diverge debido al comportamiento exponencial del sistema.

b) La planta sigue siendo:

$$G(s) = \frac{1}{s+3},$$

pero el controlador cambia a:

$$C(s) = \frac{2s+5}{s}.$$

La planta es estable bajo los mismos criterios anteriores. El controlador es marginalmente estable porque su polo está sobre el eje imaginario. La respuesta del sistema debe analizarse con precaución. Cálculo de $G_o(s)$:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ &= \frac{N_C(s)N_G(s)}{D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)} \\ &= \frac{2s+5}{s^2 + 3s + 2s + 5} \\ &= \frac{2s+5}{s^2 + 5s + 5} \end{aligned}$$

Verificamos la estabilidad calculando los polos con MATLAB, obteniendo:

$$p_1 = -1{,}38197, \quad p_2 = -3{,}61803$$

Ambos polos están en el semiplano izquierdo, confirmando la estabilidad. Para una entrada tipo escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$. Usamos el teorema del valor final:

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{2s+5}{s^2+5s+5} \right) = 1.$$

Cálculo del error de posición:

$$e_p = \lim_{t\to\infty} \frac{r(t) - y(t)}{r(t)} = 1 - 1 = 0.$$

$$\%e_p = 0\,\%$$

Cálculo del error de velocidad: Dado que el error de posición es igual a cero($e_p(t) = 0$), tiene sentido calcular un error de velocidad cambiando la referencia a una referencia de tipo rampa unitaria asociada a la siguiente expresión:

$$r(t) = t \quad \rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Teniendo en cuenta que el sistema es estable, se puede realizar el siguiente análisis para la salida del sistema, representada como $Y(s)$:

$$Y(s) = G_o(s) \cdot R(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s} + \text{Términos adicionales de } G_o(s).$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace para determinar la respuesta en estado estacionario $y_{ss}(t)$, y considerando las características de las exponenciales decrecientes debido a la estabilidad del sistema, obtenemos:

$$y_{ss}(t) = c_1 \cdot t + c_2 = G_o(0) \cdot t - G_o'(0).$$

En este contexto, los coeficientes c_1 y c_2 se determinan mediante el proceso de descomposición en fracciones parciales, tal como fue explicado durante la clase magistral.

$$c_2 = G_o(0) = \frac{2(0)+5}{(0)^2+5(0)+5} = 1$$
$$c_1 = {G_o}'(0) = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_0} \cdot 1!$$
$$c_1 = {G_o}'(0) = \frac{2-5}{5} = \frac{-3}{5}$$

A continuación, calculamos el error de velocidad ($e_v(t)$) utilizando un procedimiento similar al realizado para el error de posición ($e_p(t)$):

$$e_v(t) = \lim_{t\to\infty} |r(t) - y(t)|.$$

Dado que la referencia es una rampa unitaria $r(t) = t$, sustituimos la expresión de la salida $y(t)$.

$$e_v(t) = \lim_{t\to\infty} \left(t - (G_o(0) \cdot t + G_o'(0))\right).$$

Simplificando, el error de velocidad se reduce a:

$$e_v(t) = -G_o'(0).$$

Finalmente, evaluando $G_o'(0)$.

$$e_v = \frac{3}{5}$$
$$\%e_v = 60\,\%$$

2. tenemos una función de transferencia $G_o(s) = \frac{a}{s+b}$ a la cual se le aplicará la referencia $tu(t)$, se espera determinar los valores de a y b de tal manera que describan las gráficas de la figura 2.

   La función de transferencia correspondiente a la respuesta del sistema ($G_o(s)$) es de primer orden, por lo tanto, también debemos garantizar la estabilidad de este sistema para continuar con los cálculos.

$$b > 0$$

   Dado que la referencia es una rampa unitaria, de acuerdo con lo indicado en el ejercicio y las imágenes, podemos expresar el error en estado estacionario de forma similar a los procedimientos realizados en el punto 1.

$$e_{ss}(t) = r(t) - y_{ss}(t) \implies e_{ss}(t) = t - G_o(0) \cdot t - G_o'(0).$$

   Donde $G_o(0)$ y $G_o'(0)$ están definidos como:

$$G_o(0) = \frac{a}{0+b} = \frac{a}{b},$$

$$G_o'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{a}{s+b}\right) = \frac{-a}{(s+b)^2}$$

$$G_o'(0) = -\frac{a}{b^2}$$

   Dado que la referencia es una rampa unitaria, consideramos que el valor de t será igual a 1. Sin embargo, observando el comportamiento mostrado en la Figura 2, el error presenta un comportamiento lineal. Por lo tanto, se puede encontrar una ecuación que describa esta recta a partir de los puntos dados en la gráfica de la izquierda en la figura 2:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4{,}78125 - 2{,}9725}{9{,}0625 - 5{,}445} = 0{,}5$$

   De la línea roja punteada que describe la tendencia del comportamiento del error de seguimiento en estado estacionario podemos ver un offset que indica el valor asociado a $G_o'(s)$.

$$e_{ss}(t) = 0{,}5t + 0{,}25.$$

   Con base en este resultado, podemos establecer las siguientes relaciones. Utilizando la definición del error de estado estacionario e_{ss} para una rampa unitaria, obtenemos:

$$0{,}5t = t - G_o(0)t \implies 1 - G_o(0) = 0{,}5 \implies 1 - \frac{a}{b} = 0{,}5$$

$$0{,}25 = -G_o'(0) \implies \frac{a}{b^2} = 0{,}25.$$

   A partir de este sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, resolvemos para encontrar los valores de a y b, obteniendo:

$$a = 1 \quad \text{y} \quad b = 2.$$

De manera que nuestra respuesta del sistema ($G_o(s)$) nos quedara de la siguiente forma:

$$G_o(s) = \frac{1}{s+2}$$

Se puede ver que se cumplen todas la condiciones mencionadas anteriormente y que el sistema será estable.

3. Se tiene una planta asociada a un sistema $G(s)$, cuya dinámica está expresada por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^4 + ds^3 + es^2 + fs + g},$$

donde $\{a, b, c, d, e, f, g\} \in \mathbb{R}$.

Se obtienen los resultados del error del sistema ante una referencia igual a $r(t) = t^2u(t)$ y la respuesta del sistema ante la referencia $r(t) = tu(t)$.

Para analizar el comportamiento mostrado en la Figura 3, observamos una oscilación sostenida en estado estacionario. Esto nos lleva a modelar el sistema como un sistema de segundo orden descrito por la siguiente función de transferencia:

$$G_o(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{con} \quad \zeta = 0$$

Dado que el error tiene una frecuencia de 3 rad/s y se mantiene oscilando de manera sostenida, podemos concluir que la frecuencia natural es $\omega_n = 3$. En estas condiciones, al no existir un término de amortiguamiento ($\zeta = 0$), el sistema nunca alcanzará un estado estable.

Para diseñar un controlador de cuarto orden que incorpore este comportamiento, definimos la siguiente función de transferencia para el sistema:

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{(s^2 + \omega_n^2)(s + k_0)(s + k_1)} = \frac{as^2 + bs + c}{(s^2 + 9)(s + k_0)(s + k_1)}$$

De acuerdo con las condiciones del problema, se establece que todos los polos tienen la misma magnitud. En este caso, los dos primeros polos del denominador están ubicados en $\pm 3j$, con una magnitud igual a 3. Por lo tanto, para cumplir con las condiciones dadas, la magnitud del tercer y cuarto polo también debe ser igual a 3.

Además, dado que en el estado transitorio no se observa una frecuencia adicional que perturbe la señal, podemos concluir que k_0 y k_1 no pueden ser complejos conjugados. Si k_0 y k_1 fuesen iguales a -3, el sistema de control tendría una dinámica exponencial que lo llevaría a la inestabilidad. Por esta razón, la única opción válida es que k_0 y k_1 sean iguales a 3.

Bajo estas consideraciones, la función de transferencia que modela la planta queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{(s^2 + 9)(s + 3)(s + 3)},$$

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 54s + 81},$$

De manera gráfica, utilizando las curvas de la Figura 3, podemos analizar el comportamiento del error de aceleración. Observamos que no existe ningún desplazamiento entre la respuesta del sistema y la referencia. Esto implica que el error de aceleración (e_a) está centrado en 0. De manera similar, podemos deducir que el error de velocidad también estará centrado en 0, y que el error de posición presenta el mismo comportamiento. Estas observaciones nos llevan a las siguientes igualdades:

$$a = e, \quad b = f, \quad c = g,$$

A partir de los resultados anteriores, obtenemos nuestra función de transferencia asociada a nuestra planta $G(s)$ de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{18s^2 + 54s + 81}{s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 54s + 81},$$

Por lo tanto, los valores de los coeficientes faltantes serán:

$$\begin{aligned} a = e &= 18 \\ b = f &= 54 \\ c = g &= 81 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Donde todos los coeficientes pertenecen a los números reales.

A partir de las gráficas generadas por el diagrama de bloques de Simulink, que corresponde a la función de transferencia previamente determinada, podemos confirmar que los parámetros obtenidos son correctos.

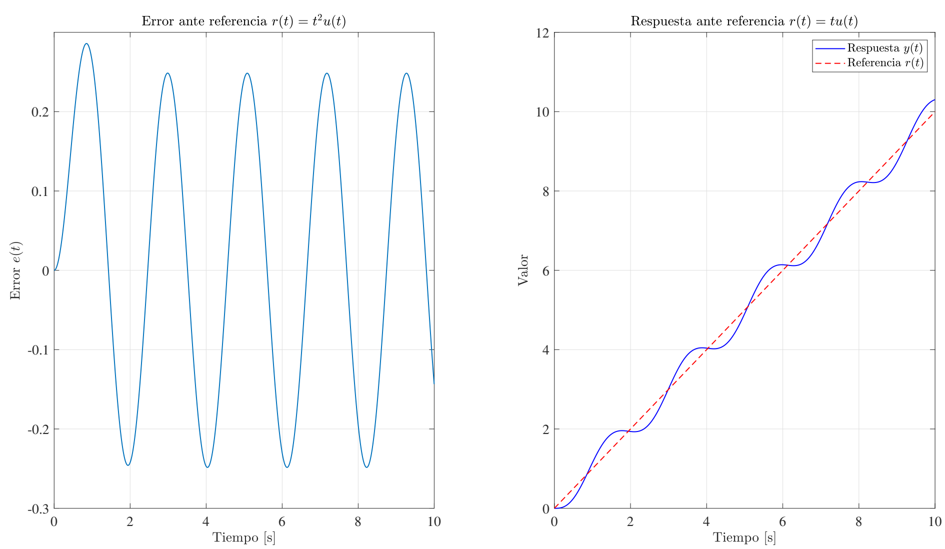

Figura 4: Comprobación respuestas del sistema

4. Un sistema puede describirse por medio de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

a. Ante el controlador $C(s) = k_p$, verifique el comportamiento en estado estacionario del sistema de control en lazo cerrado, ante una referencia y perturbación constante.

De acuerdo con lo estudiado en clase, el principio del modelo interno establece que, al emplear un controlador proporcional (k_p) junto con una planta que incluye un integrador, la señal de salida podrá seguir la referencia. Sin embargo, este sistema no será capaz de rechazar perturbaciones de ningún tipo. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, donde se utiliza $k_p = 2$, la entrada paso unitario y una perturbación constante siendo esta el paso unitario.

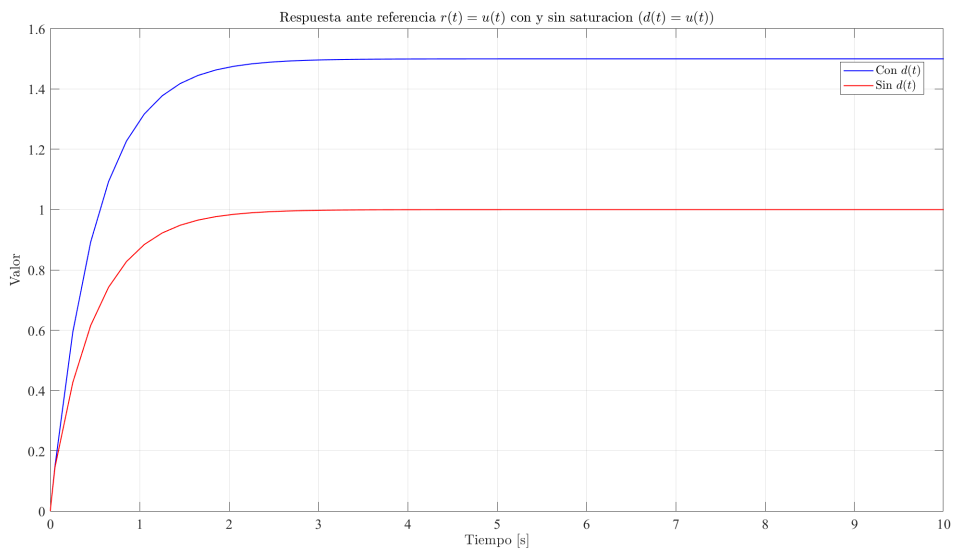

Figura 5: Respuesta ante referencia $r(t) = u(t)$ con y sin saturación $(d(t) = u(t))$

La gráfica muestra que un controlador proporcional (k_p) puede hacer que el sistema siga una referencia, pero no elimina completamente el error estacionario causado por una perturbación constante.

b. Diseñe un controlador que permita el seguimiento de señales constantes y el rechazo de perturbaciones tipo rampa. Debe ubicar los polos del sistema de control en lazo cerrado en $s = -10$ (repetidos).

De acuerdo con el principio del modelo interno, para lograr el seguimiento de una señal de entrada constante y el rechazo de perturbaciones tipo rampa, es necesario incluir un doble integrador en el controlador. Además, para garantizar que el controlador sea bipropio, el grado del numerador debe ser igual al grado del denominador. El controlador propuesto que satisface estos requisitos es el siguiente:

$$C(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2}$$

También llamado controlador GPI robusto.

La función de transferencia $G_o(s)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ &= \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0} \end{aligned}$$

Según los requisitos del diseño, los polos del sistema de control en lazo cerrado deben ubicarse en $s = -10$. Dado que $G_o(s)$ es un sistema de tercer orden, esto implica que tendrá tres polos repetidos en $s = -10$.

$$p(s) = (s + 10)^3$$
$$p(s) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000$$

De este modo, hallamos que:

$$k_2 = 30, \quad k_1 = 300, \quad k_0 = 1000.$$

Reemplazando estos coeficientes en $G_o(s)$ y en nuestro controlador.

$$C(s) = \frac{30s^2 + 300s + 1000}{s^2}$$
$$G_o(s) == \frac{30s^2 + 300s + 1000}{s^3 + 30s^2 + 300s + 1000}$$

A partir del controlador diseñado, realizaremos una simulación utilizando una referencia constante, $r(t) = u(t)$, y una perturbación tipo rampa, $d(t) = t \cdot u(t)$.

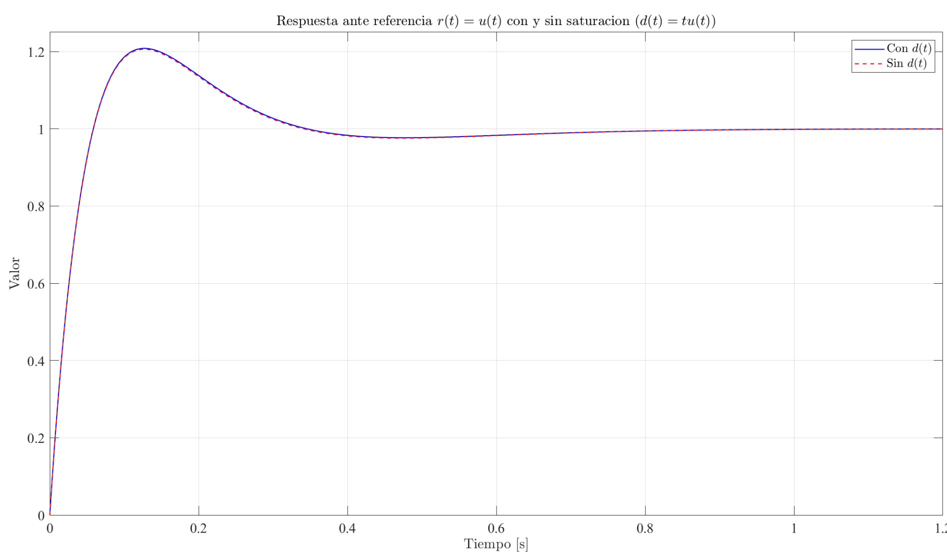

Figura 6: Respuesta ante referencia $r(t) = u(t)$ con y sin saturación ($d(t) = t \cdot u(t)$)

Se observa que, independientemente de la presencia o ausencia de la perturbación tipo rampa $d(t) = tu(t)$, ambas respuestas convergen asintóticamente hacia la referencia $r(t) = u(t)$ en estado estacionario. Aunque la perturbación afecta transitoriamente el sistema, no altera el seguimiento asintótico de la salida respecto a la entrada. Este comportamiento confirma la robustez del controlador diseñado frente a perturbaciones externas.

c. Concluya respecto al seguimiento y rechazo de señales polinómicas teniendo en cuenta las estructuras de controlador y planta.

El desempeño en el seguimiento y rechazo de señales polinómicas depende del principio de modelo interno y de las estructuras del controlador y la planta. Un controlador robusto, diseñado con independencia de la planta, garantiza un seguimiento adecuado de referencias (constantes o rampas) y un rechazo eficaz de perturbaciones similares, proporcionando flexibilidad y confiabilidad frente a incertidumbres y variaciones en donde la robustez es clave.