



Profesor

John Alexander Cortés Romero, PhD.

Reto 5

Lugar geométrico de las raíces

Para la realización del reto se debe tener en cuenta el esquema de control de la Figura 1.

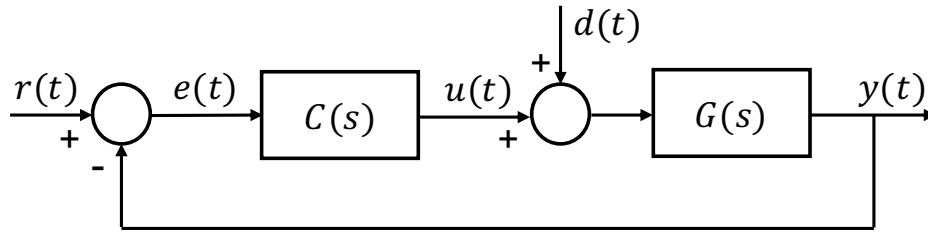


Figure 1: Sistema de control genérico.

- $r(t)$: Referencia.
- $e(t)$: Error.
- $u(t)$: Señal de control.
- $y(t)$: Respuesta del sistema.
- $d(t)$: Perturbación

1. (Vale 25%) Considere la siguiente planta y controlador:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 10}, \quad C(s) = k_p$$

Usando el lugar geométrico de las raíces determine el valor de k_p que permite el menor tiempo de asentamiento considerando el menor valor de sobrepico posible.

2. (Vale 40%) Considere la siguiente planta y controladores propuestos:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0.8)}, \quad C_1(s) = \frac{s + a}{s + 5}, \quad C_2(s) = \frac{s + 5}{s + b}$$

- Determine los sistemas auxiliares que permiten la sintonización de los valores de a y b para los controladores $C_1(s)$ y $C_2(s)$.
- Teniendo en cuenta los sistemas auxiliares encontrados en el inciso anterior, determine los valores de a y b que permiten que el sistema de control en lazo cerrado posea el menor sobrepico y tiempo de asentamiento posibles.
- Evalúe de manera analítica para ambos sistemas el desempeño ante perturbaciones de tipo constante.



3. (Vale 35%) Considere la siguiente planta y controladores propuestos:

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.5}, \quad C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

- a. Sintonice los valores de k_p y k_i , en donde uno de ellos debe ser sintonizado por medio del lugar geométrico de las raíces usando su correspondiente sistema auxiliar, por lo que se debe proponer una condición de diseño para sintonizar el otro valor. La sintonización del valor basado en el lugar geométrico de las raíces debe estar basado en obtener los menores valores de sobrepico y tiempo de asentamiento.
- b. Evalúe de manera analítica la respuesta del sistema ante referencia tipo constante y verifique los valores de sobrepico y tiempo de asentamiento en simulación ante la entrada particular del paso unitario.
- c. Determine la respuesta del sistema en estado estacionario ante la referencia $r(t) = t, \quad t \geq 0$.



Estudiante
Sebastian Jaramillo Verdugo

Reto 5 Lugar geométrico de las raíces

Solución del reto

Considere la siguiente planta y controlador:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 10}, \quad C(s) = k_p$$

Usando el lugar geométrico de las raíces determine el valor de k_p que permite el menor tiempo de asentamiento considerando el menor valor de sobrepico posible.

Aplicando la función de rootlocus.^{en} Matlab a la planta $G(s)$, se obtiene la siguiente gráfica:

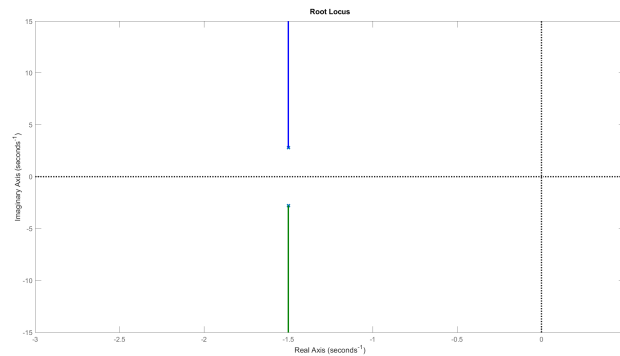


Figura 2: Lugar geométrico de las raíces del sistema $G(s)$.

De la gráfica en la Figura 2, podemos observar que el tiempo de asentamiento siempre permanece constante. Para minimizar el sobrepico, es necesario acercar las raíces lo más posible al eje real. Sin embargo, al elegir una ganancia asociada a $k_p = 0$, la salida del sistema será nula, lo que indica la ausencia de control. Como el propósito es diseñar un controlador que permita seguir la referencia, seleccionaremos valores de k_p cercanos a cero para evaluar su desempeño. A continuación, analizaremos el comportamiento del sistema para dos valores de k_p : $k_p = 1$ y $k_p = 68$. Estos valores corresponden a un par de polos complejos conjugados más alejados del eje real. La respuesta al escalón del sistema con estas ganancias se muestra en la siguiente gráfica:

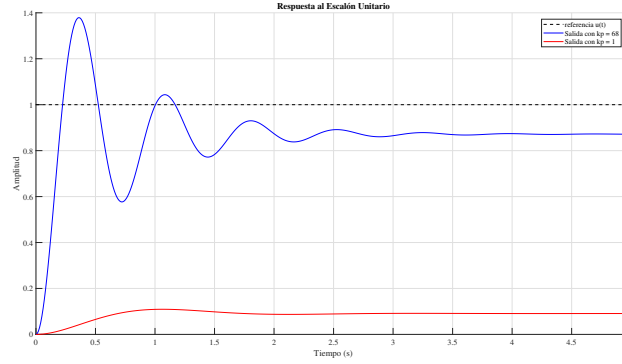


Figura 3: Respuesta al escalón del sistema G_{o1} para diferentes valores de k_p .

En la Figura 3, se puede observar que a medida que las raíces del sistema se alejan del eje real (ganancias mayores), el sistema se aproxima más a la referencia. Sin embargo, este comportamiento implica un aumento significativo en el sobrepico y el tiempo de subida. Aunque los tiempos de establecimiento no son exactamente iguales, son muy similares entre ambos casos. En este caso, un controlador proporcional no es lo más óptimo para seguir asintóticamente a la referencia.

2. Se considera la siguiente planta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0,8)}$$

y los siguientes controladores propuestos:

$$C_1(s) = \frac{s+a}{s+5}, \quad C_2(s) = \frac{s+5}{s+b}$$

- a) Los sistemas auxiliares son importantes para la sintonización de a y b , estos nos permiten analizar de manera independiente la influencia de los parámetros en la ubicación de los polos del sistema.

La función de transferencia en lazo cerrado para el primer controlador es:

$$G_{o1} = \frac{G(s)C_1(s)}{1 + G(s)C_1(s)} = \frac{s+a}{s^3 + 5,8s^2 + 5s + a}$$

Donde el polinomio del denominador es:

$$p_1(s) = s^3 + 5,8s^2 + 5s + a$$

$$p_1(s) = s^3 + 5,8s^2 + 5s + (1)a$$

La parte en azul formará el **denominador** de la función auxiliar ($D_{G_{aux1}}$). La parte en rojo formará el **numerador** de la función auxiliar ($N_{G_{aux1}}$).

Por lo tanto, la función auxiliar correspondiente es:



$$G_{aux1}(s) = \frac{1}{s^3 + 5,8s^2 + 5s}, \quad C_{aux1}(s) = a$$

$$G_{oaux1}(s) = \frac{a}{s^3 + 5,8s^2 + 5s + a}$$

En dónde coinciden los denominadores de G_{o1} y $G_{oaux1}(s)$.

Para el controlador $C_2(s)$:

$$G_{o2}(s) = \frac{G(s)C_2(s)}{1 + G(s)C_2(s)} = \frac{s + 5}{s^3 + bs^2 + 0,8s^2 + 0,8bs + s + 5}$$

Tomando el denominador de la función de transferencia $G_{o2}(s)$:

$$p_2(s) = s^3 + bs^2 + 0,8s^2 + 0,8bs + s + 5$$

$$p_2(s) = s^3 + 0,8s^2 + s + 5 + b(s^2 + 0,8s)$$

La parte en azul formará el **denominador** de la función auxiliar ($D_{G_{aux2}}$). La parte en rojo formará el **numerador** de la función auxiliar ($N_{G_{aux2}}$).

Por lo tanto, la función auxiliar correspondiente es:

$$G_{aux2}(s) = \frac{s^2 + 0,8s}{s^3 + 0,8s^2 + s + 5}, \quad C_{aux2}(s) = b$$

$$G_{oaux2}(s) = \frac{bs^2 + 0,8bs}{s^3 + bs^2 + 0,8s^2 + 0,8bs + s + 5}$$

Al igual que en el apartado anterior coinciden los denominadores de G_{o2} y $G_{oaux2}(s)$.

- b) Teniendo en cuenta los sistemas auxiliares encontrados en el inciso anterior, determine los valores de a y b que permiten que el sistema de control en lazo cerrado posea el menor sobrepico y tiempo de asentamiento posibles.

Teniendo en cuenta los sistemas auxiliares encontrados en el inciso anterior, es necesario determinar los valores de a y b que permitan que el sistema de control en lazo cerrado posea el menor sobrepico y el menor tiempo de asentamiento posible.

Para el análisis de estabilidad y desempeño, el método del Lugar Geométrico de las Raíces (Root Locus) nos permite visualizar cómo cambian los polos del sistema en función de un parámetro variable.

En este caso, comenzaremos con el sistema auxiliar $G_{aux1}(s)$ y el controlador auxiliar para la sintonización del valor de a :

$$C_{aux1}(s) = a$$

De acuerdo con los criterios de diseño establecidos:

- Para obtener un menor sobrepico, es necesario que la ganancia obtenida mantenga los polos sobre el eje real.
- Para minimizar el tiempo de asentamiento, la parte real del polo dominante debe estar lo más alejada posible del origen, según la ecuación:

$$\sigma \approx \frac{4,5}{t_s}$$

La Figura 4 muestra que el polo dominante debe repetirse en la intersección de las dos trayectorias, ya que esta posición es la más alejada del origen y se encuentra sobre el eje real. Teóricamente, esta es la mejor opción para reducir el tiempo de asentamiento t_s y garantizar que no haya sobrepico.

Sin embargo, en las Figuras 5 y 6, se optó por mover los polos complejos conjugados sobre el eje imaginario a lo largo de sus respectivas trayectorias, obteniendo diferentes valores para a .

A continuación, se presentan los gráficos de Root Locus obtenidos en 'rltool' para distintas ganancias, permitiendo la asignación del valor óptimo de a .

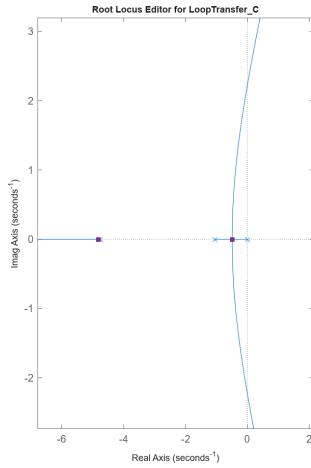


Figura 4: $C_{aux1}(s) = 1,175$

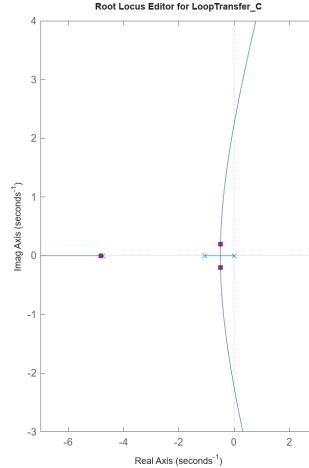


Figura 5: $C_{aux1}(s) = 1,35$

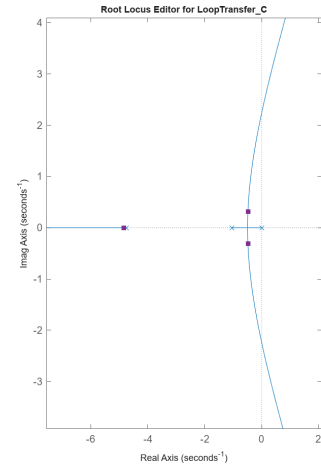


Figura 6: $C_{aux1}(s) = 1,6$

La respuesta al escalón del sistema $G_{o1}(s)$ para distintas ganancias sintonizadas y evaluándolas en el sistema real, se muestra en la siguiente figura.

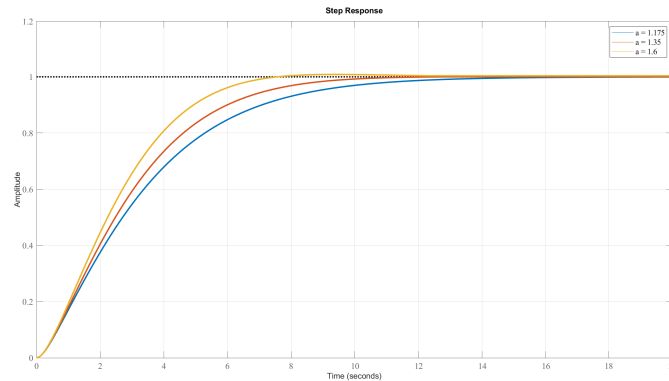


Figura 7: Respuesta al escalón del sistema G_{o1} para diferentes valores de a .



A partir de esta gráfica, se ha elaborado la siguiente tabla, donde se comparan los valores obtenidos de sobrepico ($SP\%$) y tiempo de asentamiento (t_s):

Valor de a	$SP\ [\%]$	$t_s\ [s]$
1.175	0	11.00
1.35	0.054	8.69
1.6	0.856	6.53

Tabla 1: Comparación del sobrepico y tiempo de asentamiento para diferentes valores de a .

A partir de estos resultados, se puede observar que, teóricamente, el valor de $a = 1,175$ es la opción óptima, ya que garantiza un sobrepico nulo ($SP = 0\%$). Sin embargo, los valores de $a = 1,35$ y $a = 1,6$ ofrecen tiempos de asentamiento más cortos a costa de la introducción de un pequeño sobrepico.

La selección del valor de a depende de las necesidades específicas del sistema de control. Si la prioridad es evitar cualquier tipo de sobrepico, $a = 1,175$ es la mejor opción. En cambio, si el objetivo es reducir el tiempo de asentamiento, puede ser conveniente seleccionar valores más altos de a , aceptando la presencia de un sobrepico pequeño.

De manera análoga al análisis realizado para a , se ha aplicado el mismo procedimiento para determinar el valor óptimo de b , utilizando el método del Lugar Geométrico de las Raíces.

$$C_{aux2}(s) = b$$

Los valores seleccionados para la evaluación fueron $b = 29,112$ (valor teórico óptimo), junto con $b = 23$ y $b = 18$, los cuales permitieron comparar su impacto en el desempeño del sistema.

A continuación, se presenta la tabla con los valores obtenidos de sobrepico ($SP\%$) y tiempo de asentamiento (t_s) para cada caso:

Valor de b	$SP\ [\%]$	$t_s\ [s]$
29.112	0	13.9
23	0.183	9.79
18	1.57	6.93

Tabla 2: Comparación del sobrepico y tiempo de asentamiento para diferentes valores de b .

Al igual que en el caso de a , el valor teórico $b = 29,112$ proporciona un sobrepico nulo, pero tiempos de asentamiento mayores. Por otro lado, valores más bajos de b reducen significativamente t_s , aunque a costa de la introducción de sobrepico. La elección entre estos valores dependerá de la prioridad del diseño: estabilidad sin sobrepico o rapidez en la respuesta.

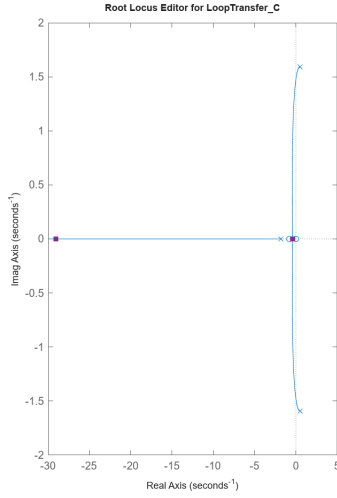


Figura 8: $C_{aux2}(s) = 29,112$

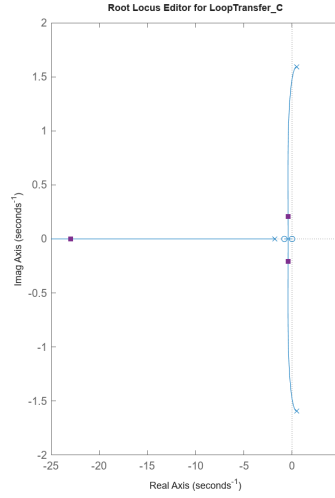


Figura 9: $C_{aux2}(s) = 23$

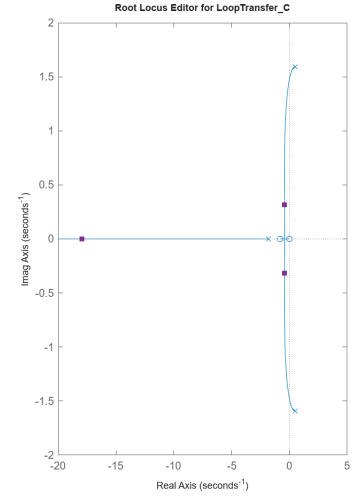


Figura 10: $C_{aux2}(s) = 18$

Finalmente, se presenta la respuesta al escalón del sistema G_{o2} para los valores de b considerados. En la siguiente figura se pueden visualizar las diferencias en la respuesta dinámica del sistema, reflejando el impacto de la variación de b en el sobrepico y tiempo de asentamiento:

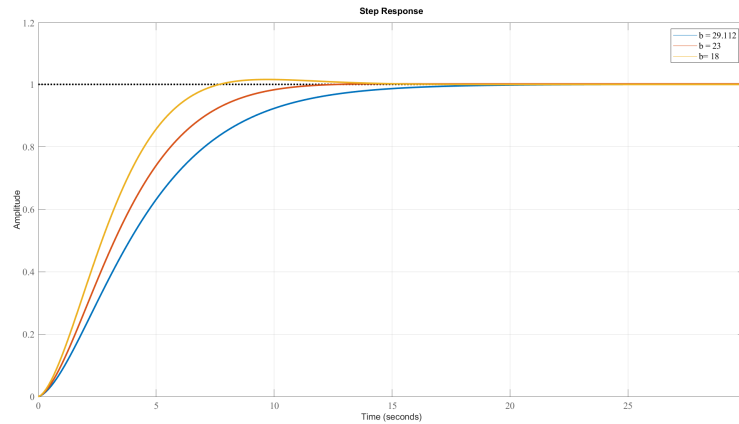


Figura 11: Respuesta al escalón del sistema G_{o2} para diferentes valores de b .

Es importante destacar que el método del Lugar Geométrico de las Raíces (Root Locus) no proporciona un valor exacto para la sintonización de a y b , sino que sirve como una herramienta guía para la selección de parámetros.

- c) Evalúe de manera analítica para ambos sistemas el desempeño ante perturbaciones de tipo constante.

Usando los controladores del inciso a, se determinará el comportamiento en estado estacionario de los sistemas ante una perturbación definida como $d(t) = K\mu(t)$, $K \in \mathbb{R}$.



Debemos calcular la respuesta del sistema ante la perturbación para $G_{yd1}(s)$ y $G_{yd2}(s)$.

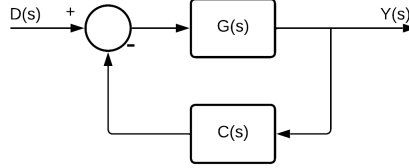


Figura 12: Diagrama de bloques resultante para $G_{yd1}(s)$ y $G_{yd2}(s)$

– Con $a = 1,175$.

La función de transferencia $G_{yd1}(s)$ relaciona la perturbación $d(t)$ con la salida $y(t)$. Para el sistema con $C_1(s)$, esta función de transferencia es:

$$G_{yd1}(s) = \frac{D_{C1}(s) \cdot N_G(s)}{D_{C1}(s) \cdot D_G(s) + N_{C1}(s) \cdot N_G(s)}$$

$$G_{yd1}(s) = \frac{s + 5}{s^3 + 5,8s^2 + 5s + 1,175}$$

Para determinar la respuesta en estado estacionario del sistema ante una perturbación constante $d(t) = K\mu(t)$, utilizamos el teorema del valor final:

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} |s \cdot Y(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s} \cdot G_{yd1}(s) = K \cdot G_{yd1}(0)$$

Calculamos $G_{yd1}(0)$:

$$G_{yd1}(0) = \frac{0 + 5}{0 + 0 + 0 + 1,175} = \frac{5}{1,175} \approx 4,2553$$

Por lo tanto, la respuesta en estado estacionario es:

$$y_{ss} = K \cdot 4,26$$

El valor $y_{ss} = 4,26K$ indica que, en estado estacionario, la salida del sistema es aproximadamente 4.26 veces la magnitud de la perturbación constante K . Esto significa que el sistema no rechaza completamente la perturbación, sino que la amplifica en un factor de 4.26.

– Con $b = 29,112$.

$$G_{yd2}(s) = \frac{D_{C2}(s) \cdot N_G(s)}{D_{C2}(s) \cdot D_G(s) + N_{C2}(s) \cdot N_G(s)}$$

$$G_{yd2}(s) = \frac{s + 29,112}{s^3 + 29,912s^2 + 24,3s + 5}$$

Para determinar el rechazo de la señal de perturbación $d(t) = K\mu(t)$, utilizaremos la función de transferencia de la respuesta del sistema ante la perturbación $G_{yd2}(s)$ para comprobar su comportamiento en estado estacionario:



$$y_{ss}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} |s \cdot Y(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s} \cdot G_{yd2}(s)$$

$$y_{ss}(s) = K \cdot \frac{29,112}{5} = 5,8K$$

Por lo anterior, podemos decir que no se realiza un rechazo de perturbaciones del tipo $d(t) = K\mu(t)$, $K \in \mathbb{R}$, dado que el valor en estado estacionario no es igual a 0. Ambos controladores no rechazaron perturbaciones de tipo constante, ya que no poseían un integrador como lo indica el principio de modelo interno.

3. Considere la siguiente planta y controladores propuestos:

$$G(s) = \frac{1}{s + 0,5}, \quad C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}.$$

- a) Sintonicen los valores de k_p y k_i , en donde uno de ellos debe ser sintonizado por medio del lugar geométrico de las raíces usando su correspondiente sistema auxiliar, por lo que se debe proponer una condición de diseño para sintonizar el otro valor. La sintonización del valor basado en el lugar geométrico de las raíces debe estar basado en obtener los menores valores de sobrepico y tiempo de asentamiento.

La función de transferencia en lazo cerrado $G_o(s)$ del sistema con realimentación unitaria es:

$$G_o(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

Sustituyendo $G(s)$ y $C(s)$:

$$G_o(s) = \frac{\left(\frac{1}{s+0,5}\right) \left(\frac{k_p s + k_i}{s}\right)}{1 + \left(\frac{1}{s+0,5}\right) \left(\frac{k_p s + k_i}{s}\right)}$$

Simplificando:

$$G_o(s) = \frac{k_p s + k_i}{s^2 + (0,5 + k_p)s + k_i}$$

Necesitamos expresar el denominador de $G_o(s)$ en términos de un parámetro variable para aplicar el root locus. Supongamos que sintonizamos k_i usando el LGR y luego k_p mediante una condición de diseño.

El denominador de $G_o(s)$ es:

$$p(s) = s^2 + (0,5 + k_p)s + k_i$$

Si deseamos aplicar el LGR, consideramos k_i como el parámetro variable y k_p como una constante inicial. La ecuación característica es:

$$1 + k_i \cdot \frac{1}{s(s + (0,5 + k_p))} = 0$$

El sistema auxiliar para el root locus es:

$$G_{aux}(s) = \frac{1}{s(s + (0,5 + k_p))}, \quad C_{aux} = k_i$$

Para sintonizar k_p , proponemos un tiempo de asentamiento menor o igual a 2 segundos ($t_s \leq 2$), un valor realista que se puede lograr en diferentes aplicaciones sin requerir grandes ganancias.

Se calculará la parte real del polo para $t_s = 2$, obteniendo:

$$\sigma = \frac{4,5}{t_s} \Rightarrow \sigma = 2,25 \quad (1)$$

A partir de este valor, proponemos $k_p = 4,5$, dado que los polos del sistema auxiliar estarán en 0 y 5, permitiendo que los dos polos del sistema en lazo cerrado puedan ser ajustados mediante rltool y se ubiquen dentro de la región de diseño. Esto generará puntos en el plano complejo que son de interés para el análisis del sistema.

Ubicamos el polo dominante en el límite de la región de diseño, donde se espera obtener un tiempo de asentamiento t_s cercano a 2 segundos. Dado que este polo se encuentra sobre el eje real, teóricamente el sobrepico será igual a cero.

A continuación, se presenta la gráfica utilizada para la sintonización del parámetro k_i a partir del Lugar Geométrico de las Raíces.

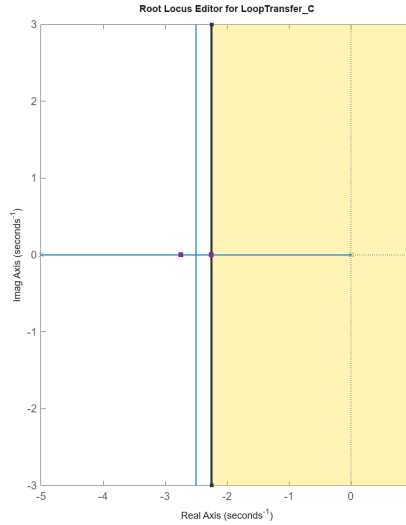


Figura 13: Polo dominante sobre límite de tiempo de asentamiento

El valor de k_i obtenido a partir del sistema auxiliar es $C_{aux} = 6,19$. Por lo tanto, los valores sintonizados utilizando el Lugar Geométrico de las Raíces y considerando el criterio de un tiempo de asentamiento menor o igual a 2 segundos son:

$$k_p = 4,5, \quad k_i = 6,19$$



- b) Evalúe de manera analítica la respuesta del sistema ante referencia tipo constante y verifique los valores de sobrepico y tiempo de asentamiento en simulación ante la entrada particular del paso unitario.

Recordando $G_o(s)$.

$$G_o(s) = \frac{k_p s + k_i}{s^2 + (0,5 + k_p)s + k_i}$$

Reemplazando con los valores ya sintonizados.

$$G_o(s) = \frac{4,5s + 6,19}{s^2 + 5s + 6,19}$$

Se determinará el comportamiento en estado estacionario del sistema ante una referencia definida como $r(t) = K\mu(t)$, $K \in \mathbb{R}$.

$$y_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} |s \cdot Y(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s} \cdot G_o(s) = K \cdot G_o(0)$$

$$y_{ss}(t) = K \cdot \frac{6,19}{6,19} = K$$

Al analizar la respuesta en estado estacionario del sistema, el valor de K garantiza que la salida siga asintóticamente las referencias de tipo constante.

Al simular la respuesta al escalón de $G_o(s)$, obtenemos el comportamiento mostrado en la figura siguiente:

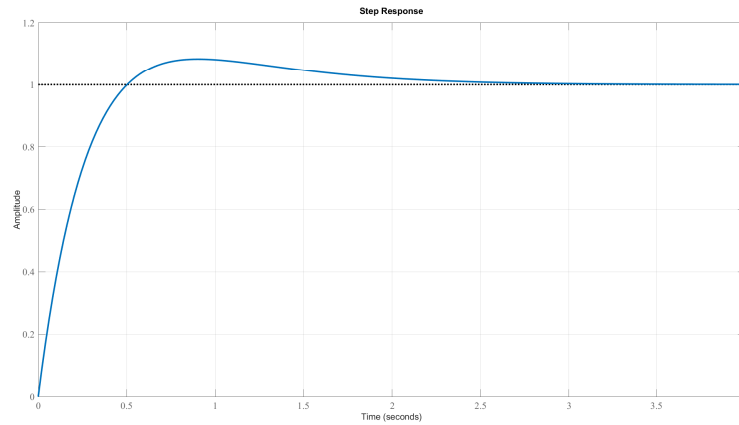


Figura 14: Respuesta al escalón de $G_o(s)$

En esta simulación, se observa que el tiempo de asentamiento es de 2 segundos, y el sobrepico alcanza un valor de 8,33 %.

Aunque el diseño basado en el Lugar Geométrico de las Raíces permitió ubicar los polos en una región que teóricamente garantiza un tiempo de asentamiento de 2 segundos y un sobrepico nulo, la presencia



de un cero en la función de transferencia y la posible agresividad de la señal de control generaron un sobrepico en la respuesta del sistema. Esto resalta la importancia de considerar no solo la ubicación de los polos, sino también el efecto de los ceros y la dinámica de la señal de control en el diseño de controladores.

- c) Se determinará el comportamiento en estado estacionario del sistema ante una referencia tipo rampa, definida como $r(t) = t$, $t \geq 0$.

Teniendo en cuenta que el sistema es estable, se puede realizar el siguiente análisis para la salida del sistema, representada como $Y(s)$:

$$Y(s) = G_o(s) \cdot R(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s} + \text{Términos adicionales de } G_o(s).$$

$$G_o(s) = \frac{\beta_6 s^6 + \beta_5 s^5 + \beta_4 s^4 + \beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_7 s^7 + \alpha_6 s^6 + \alpha_5 s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace para determinar la respuesta en estado estacionario $y_{ss}(t)$, y considerando las características de las exponenciales decrecientes debido a la estabilidad del sistema, obtenemos:

$$y_{ss}(t) = c_2 \cdot t + c_1 = G_o(0) \cdot t + G_o'(0).$$

En este contexto, los coeficientes c_1 y c_2 se determinan mediante el proceso de descomposición en fracciones parciales, tal como fue explicado durante la clase magistral.

$$c_2 = G_o(0) = \frac{4,5(0) + 6,19}{(0)^2 + 5(0) + 6,19} = 1$$

$$c_1 = G_o'(0) = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_0} \cdot 1!$$

$$c_1 = G_o'(0) = \frac{4,5 - 5}{6,19} = -80,8 \cdot 10^{-3}$$

El comportamiento del sistema en estado estacionario ante una referencia tipo rampa es el siguiente:

$$y_{ss}(t) = t - 80,8 \cdot 10^{-3}.$$