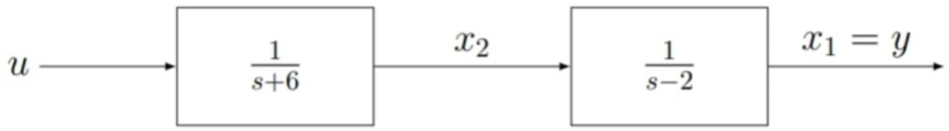
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Profesor
John Alexander Cortés Romero, PhD.

Reto 7: Diseño en espacio de estado

Para este reto TODO el desarrollo debe hacerse de manera analítica

Para la realización del reto se debe tener en cuenta la siguiente representación:

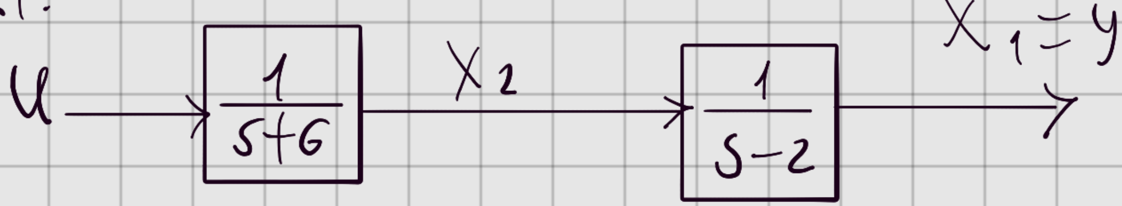


1. (Vale 25%) Determine las matrices de la representación en variiables de estado para x_1 y x_2.
2. (Vale 25%) Determine si el sistema es observable y/o controlable.
3. (Vale 25%) Diseñe un control por realimentación de estados de la forma $u(t) = -\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$ para la representación obtenida en ***a.*** en donde los valores propios de la matriz del sistema controlado sean repetidos e iguales a -10.
4. (Vale 25%) Diseñe un observador de estados para la representación obtenida en ***a.***, donde el error de observación tenga un tiempo de asentamiento de 2 segundos aproximadamente.

Sebastian Jaramillo Verdugo

Solución del reto:

1) Para determinar las matrices en espacios de estado, es necesario identificar 2 momentos, en los cuales, tendremos la salida X_2 y la entrada u y la entrada X_2 y como salida X_1.



$$\frac{X_2}{u} = \frac{1}{s+6} \quad ; \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{s-2} \quad ; \quad X_1 = y$$

$$sX_2 + 6X_2 = u \qquad sX_1 - 2X_1 = X_2$$
$$sX_2 = -6X_2 + u \qquad sX_1 = 2X_1 + X_2$$

Ahora podremos construir la matriz de representación en espacios de estado.

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Podemos ver cuales son las matrices solicitadas:

$$x' = Ax + Bu \quad ; \quad y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; D = 0$$

2) Matriz de controlabilidad (M_c)

$$M_c = \begin{bmatrix} B & BA & BA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{con } n = 2$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_c) = -1 \neq 0$$

al ser el determinante diferente de (0) podemos decir que el sistema es controlable

Matriz de observabilidad (M_o)

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \text{ con } n=2$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_o) = 1 \neq 0$$

al ser el determinante diferente de (0) podemos decir que el sistema es observable.

3) Para determinar las ganancias del vector K a partir de la representación en espacios de estado dadas las matrices A y B

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

por lo tanto sabemos que la matriz de control corresponde a $A_c = A - BK$, de modo que para asegurar que las operaciones tengan las dimensiones necesarias el vector de ganancias K debe de tener una dimensión compatible con B.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

calculando la matriz de control:

$$A_c = A - BK = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -k_1 & -6-k_2 \end{bmatrix}$$

Hallaremos la matriz $sI - A_c$ y luego por medio del determinante de esta, hayaremos una expresión que podamos utilizar para hallar los valores del vector de ganancias.

$$sI - A_c = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -k_1 & -6-k_2 \end{bmatrix}$$

$$sI - A_c = \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ k_1 & s+6+k_2 \end{bmatrix} \quad k_2 = c$$

$$\det(sI - A_c) = s^2 + (4+k_2)s + k_1 - 12 - 2k_2$$

buscando los polos repetidos en (-10)
$(s+10)^2$.

$$s^2 + (4+k_2)s + k_1 - 12 - 2k_2 = s^2 + 20s + 100$$

$$k_1 - 12 - 2k_2 = 100$$

$$\therefore \quad K = [144 \quad 16]$$

$$4 + k_2 = 20$$

se obtiene el vector de ganancias.

4) Para determinar los valores del vector L teniendo en cuenta que los valores propios del sistema realimentado los deseamos ubicar dónde el error de observación tenga un tiempo de asentamiento de 2 segundos aprox.

$$A - LC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = A - LC = \begin{bmatrix} 2-l_1 & 1 \\ -l_2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$P_{deseados}(s) = \det(sI-(A-LC))$$

$$sI-(A-LC) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2-l_1 & 1 \\ -l_2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s-2+l_1 & -1 \\ l_2 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-(A-LC)) = s^2+(4+l_1)s+6l_1+l_2-12$$

polos deseados a partir del denominador de la fórmula canónica de segundo orden

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

Se desea un $t_s \approx 2$ seg.

$$t_s \approx \frac{4{,}5}{\sigma} = \frac{4{,}5}{\xi\omega_n} \longrightarrow \sigma \approx \frac{4{,}5}{2}$$

$$\sigma \approx 2{,}25$$

Considerando un factor de amortiguamiento de 0,7 se tiene $\omega_n = 3{,}21\ \frac{rad}{s}$

$$P_{deseados}(s) = s^2+4{,}5s+10{,}33$$

determinando los valores propios del vector L

- $P_{deseados}(s) = \det(sI-(A-LC))$

$$s^2+4{,}5s+10{,}33 = s^2+(4+l_1)s+6l_1+l_2-12$$

$$4 + l_1 = 4{,}5$$

$$6l_1 + l_2 - 12 = 10{,}332$$

resolviendo se obtienen los siguientes valores par el vector L (vector de ganancias)

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 19{,}332 \end{bmatrix}$$