

# 1. Levitador neumático

## 1.1 Sistema de levitación neumática

La figura 1.1 muestra el modelo virtual, las variables mecánicas y el diagrama de cuerpo libre del sistema de levitación neumática de este proyecto.

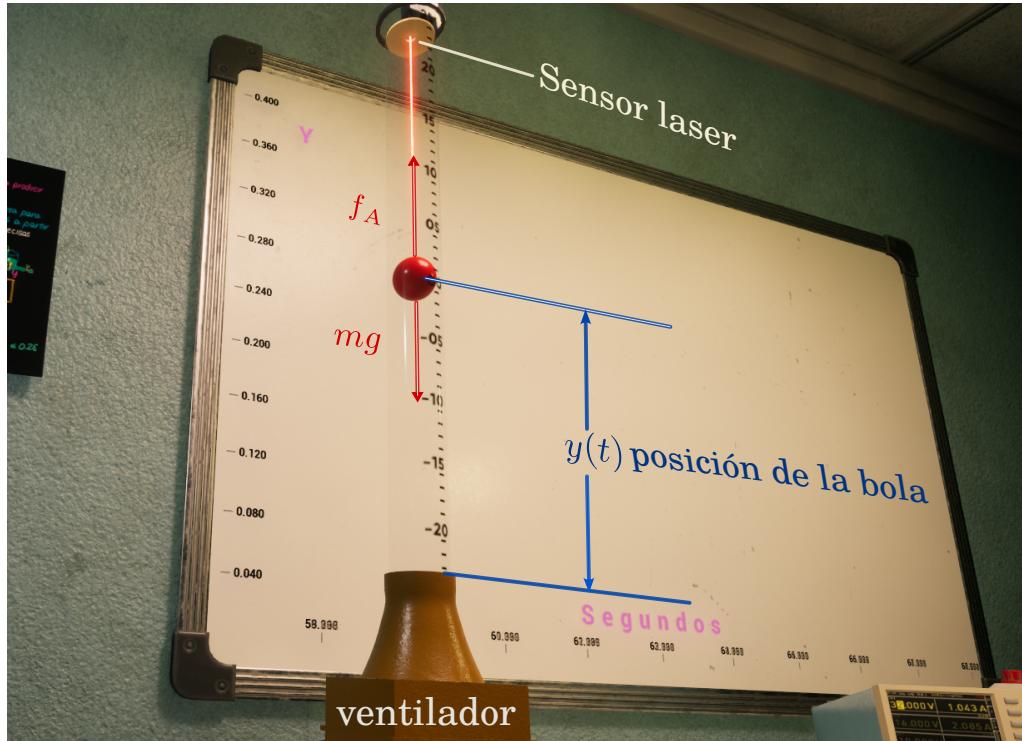


Figura 1.1: Modelo virtual y variables mecánicas del levitador.

El levitador neumático es un sistema de balance. Los sistemas de balance aparecen en

varias áreas de la ingeniería, desde la regulación en un conversor DC-DC hasta el control de aviones y drones [2].

Desde una perspectiva conceptual dentro del ámbito del control y los sistemas dinámicos, el levitador neumático constituye un ejemplo de *sistema de tercer orden con un polo inestable*. Este comportamiento es representativo de muchos sistemas de balance más complejos, tales como el control del ángulo de cabeceo de un avión [3].

### 1.1.1 Modelo matemático

Consideremos la figura 1.1. Las variables mecánicas del levitador son las siguientes:

- $u(t)$  : Tensión de entrada (V).
- $y(t)$  : Salida – posición de la bola levitante (m).
- $x_1(t) = y(t)$  : Variable de estado de la posición (m).
- $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$  : Velocidad de la bola levitante (m/s). (1.1)
- $x_3(t)$  : Velocidad del aire al interior del tubo (m/s).

Consideremos ahora el diagrama de cuerpo libre (en rojo) de la bola levitante de la figura 1.1. Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_2 &= f_A - mg, \\ &= \alpha(x_3 - x_2)^2 - mg, \end{aligned} \quad (1.2)$$

en que  $m$  es la masa de la bola levitante y  $\alpha$  es un coeficiente aerodinámico.

Podemos asumir que la velocidad del aire al interior del tubo está relacionada con la tensión de entrada al ventilador, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau_2}x_3 + \frac{b}{\tau_2}u, \quad (1.3)$$

en que  $u(t)$  es la entrada en voltios al motor del ventilador;  $b$  es su constante de ganancia y  $\tau_2$  su constante de tiempo.

Combinando las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) y definiendo  $\bar{\alpha} = \alpha/m$ , obtenemos las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \bar{\alpha}(x_3 - x_2)^2 - g, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{\tau_2}x_3 + \frac{b}{\tau_2}u. \end{aligned}$$

### Modelo linealizado

Vamos a obtener un modelo lineal del levitador. El punto de operación es la bola levitante en la posición  $x_{1eq} = 0.5m$  (en la mitad del tubo). Resolviendo las ecuaciones

(1.1), (1.2) y (1.3) para este punto de operación, obtenemos:

$$\begin{aligned}x_{2eq} &= 0, \\x_{3eq} &= \sqrt{\frac{g}{\alpha}}, \\u_{eq} &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{g}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Ahora definimos las variables de desviación en torno del punto de operación:

$$\begin{aligned}x_{D,1} &= x_1 - 0.5, \\x_{D,2} &= x_2, \\x_{D,3} &= x_3 - x_{3eq}, \\u_D &= u - u_{eq}.\end{aligned}$$

A continuación calculamos las matrices  $A$  y  $B$  del sistema linealizado calculando las siguientes jacobianas:

$$\begin{aligned}A &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{array} \right] \Big|_{x=x_{OP}, u=u_{OP}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\alpha g} & -2\sqrt{\alpha g} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \\B &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{array} \right]^T \Big|_{x=x_{OP}, u=u_{OP}} = [0 \ 0 \ \frac{b}{\tau}].\end{aligned}$$

### Modelo en espacio de estados

Definamos  $\tau_1 = 1/2\sqrt{\alpha g}$ . El modelo en espacio de estados para el levitador está dado por:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_{D,1} \\ \dot{x}_{D,2} \\ \dot{x}_{D,3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{D,1} \\ x_{D,2} \\ x_{D,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{\tau} \end{bmatrix} u_D, \\y_D &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_{D,1} \\ x_{D,2} \\ x_{D,3} \end{bmatrix}. \quad (1.4)\end{aligned}$$

En que la matriz es  $C = [1 \ 0 \ 0]$ , puesto que la salida es la misma desviación de la posición de la bola respecto del punto de operación  $x_{1eq}$ .

**Resultado 1.1.1 — Función de transferencia del levitador.** Usando la ecuación

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  con las matrices  $A, B, C$  y  $D$  dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{\tau} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0,$$

obtenemos la siguiente función de transferencia que relaciona la desviación de entrada  $U_D(s)$  con la desviación de salida  $Y_D(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y_D(s)}{U_D(s)} = \frac{b}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (1.5)$$

- Notemos que la función de transferencia (1.5) modela el cambio de la desviación en la salida con respecto al cambio en la tensión de entrada, una vez la bola levitante ha alcanzado el equilibrio.
- Notemos también que el levitador es un sistema de tercer orden con un polo integrador inestable y dos polos estables.

## 1.2 Método “pragmático” de identificación

El levitador es un sistema inestable, por consiguiente debemos identificarlo en lazo cerrado. Una de las opciones es usar un control proporcional con baja ganancia y sumarle a la señal de control una onda típica de identificación como la PRBS.

Dadas las limitaciones de tiempo que tenemos para este proyecto, vamos a proponer un método de identificación alternativo en el cual realizamos un experimento muy simple, por medio del relevo de Åstrom. El método será descrito a continuación.

### 1.2.1 Modelo alternativo

Partiendo del modelo matemático de la ecuación (1.5), vamos a proponer un modelo alternativo para la función de transferencia del levitador. Este modelo, denotado  $G_a(s)$ , está dado por la siguiente ecuación:

$$G_a(s) = \frac{b}{s(\tau_1 s + 1)} e^{-Ls}. \quad (1.6)$$

Notemos que el retraso de fase producido por el polo con constante de tiempo  $\tau_2$  se está representando con el retraso en el tiempo  $e^{-Ls}$  en la ecuación (1.6). Este factor también incluye el retraso producido por el control digital. Este modelo es mucho más fácil de identificar que el modelo de la ecuación (1.6) y capta, de forma general, la dinámica del sistema, bien sea para sintonizar un PID o para diseñar otro tipo de controlador.

### 1.2.2 Relevó de Åstrom

El relevó de Åstrom es una prueba de control en lazo cerrado de control ON-OFF con histéresis que permite determinar la ganancia última de un sistema  $K_u$  (la ganancia crítica que hace el sistema inestable) y la frecuencia última  $\omega_u$ .

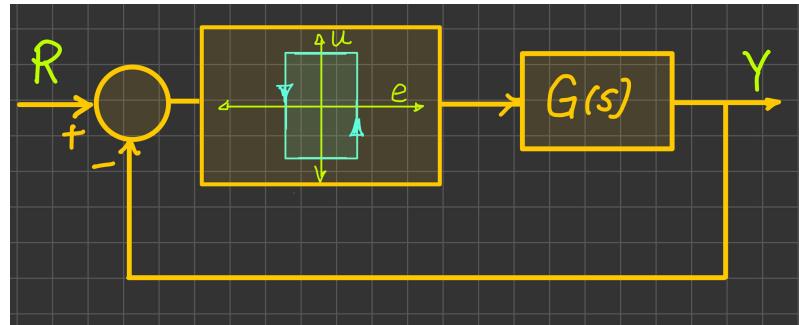


Figura 1.2: Relevo de Åstrom .

Este es un controlador ON-OFF con histéresis, cuya señal de control  $u(t)$  está definida por la siguiente ecuación:

$$u(t) = \begin{cases} u_{off}, & \text{si } y(t) > r + e_h, \\ u_{on}, & \text{si } y(t) < r - e_h \\ u_{on}, & \text{si } y(t) < r + e_h \text{ y } u(t^-) = u_{on}, \\ u_{off}, & \text{si } y(t) < r - e_h \text{ y } u(t^-) = u_{off}. \end{cases} \quad (1.7)$$

La figura 1.4 muestra el funcionamiento típico del relevo de Åstrom. El valor  $e_h$  de

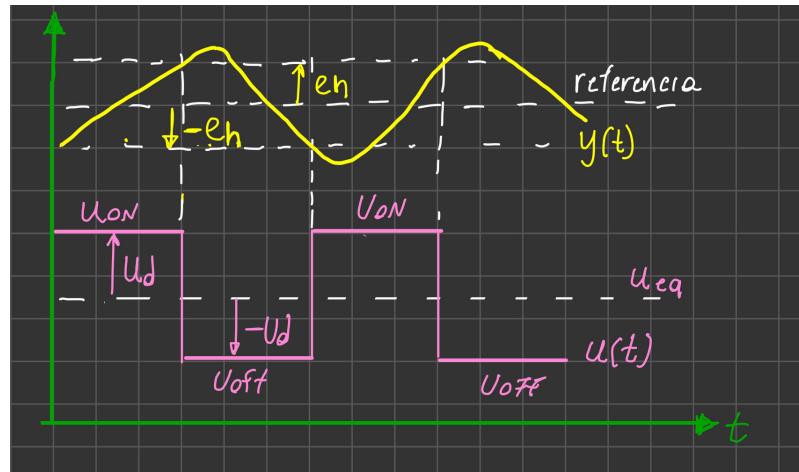


Figura 1.3: Relevo de Åstrom.

la ecuación (1.7) es el valor de la histéresis, esto es, el umbral de error del controlador. La señal de control cambiará de valor solamente cuando el umbral de error ha sido superado. Los valores de encendido y apagado que asume la señal de control, denotados respectivamente por  $u_{on}$  y  $u_{off}$ , son los siguientes:

$$u_{on} = u_{eq} + u_d, \quad (1.8)$$

$$u_{off} = u_{eq} - u_d. \quad (1.9)$$

En que  $u_{eq}$  representa el valor de señal de control que sostiene el punto de operación (o equilibrio) y  $u_d$  es la desviación de la señal de control elegida por el diseñador.

### 1.3 Pasos de identificación del sistema

Vamos a estimar los parámetros del modelo alternativo para el sistema de levitación definido por la ecuación 1.6. Para ello debemos realizar los siguientes pasos.

#### Paso 1: estimación de $u_{eq}$

- Estimación cruda:* Para detectar el voltaje de equilibrio de levitación del sistema, en lazo abierto pruebe varios valores de voltaje hasta encontrar uno que hace subir lentamente el objeto levitante. Use para ello la función `voltsToFan(voltios)` con un valor en voltios fijo. No es necesario que sea refinado en esto, use un valor que encontró rápidamente.
- Estimación en lazo cerrado:* Con el  $u_{eq}$  que encontró en el paso a), ponga a funcionar un control proporcional, variando el valor de  $k_p$  hasta que el objeto se estabilice en un punto. Puede usar para ello el archivo `control_proporcional.ino` provisto en el curso. En el monitor serial usted podrá ver la señal de control filtrada que usa el controlador para estabilizar la bola y ese es el valor exacto de  $u_{eq}$ .

#### Paso 2: experimento del relevo de Åstrom

Para esta parte puede usar el archivo `levitador_histeresis` provisto en con esta guía. Establezca el valor de  $u_{eq}$  con el valor encontrado en el primer paso. Establezca la referencia en la mitad del tubo ( $r = L/2$ ). Seleccione un valor de histéresis  $e_d$  de algunos centímetros (por ejemplo entre 2 y 5cm). Seleccione una desviación de la señal de control  $u_d$  pequeña (por ejemplo entre 0.25 y 2V).

La finalidad es ajustar el experimento del relevo de Åstrom para que el objeto levitante realice una oscilación programada mediante el valor de histéresis  $e_h$  y el cambio en la señal de control  $u_d$  con una excursión total de unos 5cm alrededor del punto de operación y con forma de onda aproximadamente simétrica, conforme se muestra en la figura 1.4. Pruebe

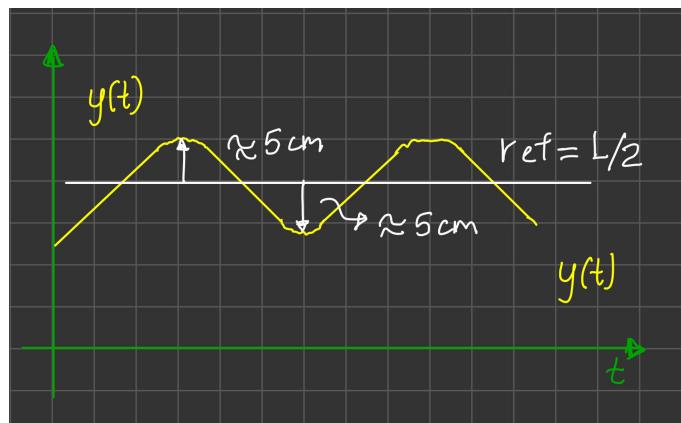


Figura 1.4: Experimento con el relevo de Åstrom.

varios valores de  $u_d$  y  $e_h$  hasta lograr un experimento en el cual el objeto levitante realiza este *ciclo de oscilación* suavemente y con forma aproximadamente simétrica. Es posible que tenga que también ajustar  $u_{eq}$  para lograr simetría. Registre unos 120 segundos del experimento.

### Estimación de $K_u$ y $\omega_u$

Una vez logrado el experimento del paso 2, guarde los datos en un archivo de texto y ábralos en su programa de análisis de datos preferido. Grafique los datos teniendo con la escala de tiempo apropiada.

Medimos el valor pico a pico de la salida  $y(t)$  (curva amarilla de la figura 1.5) de uno de los últimos ciclos del experimento para encontrar la amplitud  $a$  definida como:

$$a = \frac{y_{pp}}{2} \quad (1.10)$$

m Asimismo, medimos el periodo  $T_u$  de la oscilación de la señal de control  $u(t)$ , tal como

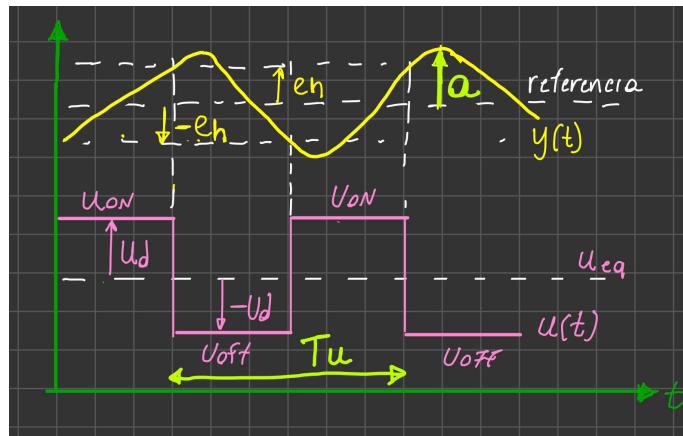


Figura 1.5: Experimento para determinar  $K_u$ ,  $\omega_u$   $\tau_1$  y  $L$ .

se muestra en la curva rosada de la figura 1.5.

Con estos valores, obtenemos los siguientes parámetros:

- Ganancia última del sistema  $K_u$  (margen de ganancia del sistema):

$$K_u = \frac{4u_d}{\pi \sqrt{a^2 - e_h^2}} \quad (1.11)$$

- Frecuencia última del sistema  $\omega_u$  (frecuencia de cruce de fase):

$$\omega_u = \frac{2\pi}{T_u} \quad (1.12)$$

*Nota: Con estos parámetros ya puede hacer una sintonía preliminar de un PID usando las reglas de Ziegler-Nichols en la frecuencia ( $k_p = 0.6K_u$ ,  $k_i = k_p/(0.5 T_u)$  y  $k_d = 0.125 T_u k_p$ ).*

### Determinación de $b$ , $\tau_1$ y $L$

Aumente el error de histéresis  $e_h$  en el relevo de Åstrom para que el objeto levitante recorra casi completamente la extensión del tubo, pero sin pegar con la parte inferior ni la parte superior. Ajuste el valor de  $u_d$ , la desviación de control para que el recorrido de subida sea “lento” (aproximadamente de unos 5cm/s en la subida). No se preocupe por que

la onda sea simétrica.

Capture el resultado del experimento y en uno de los ciclos finales puede medir el parámetro  $b$  como se ilustra en la figura 1.6. Durante un ciclo ascendente elija los puntos

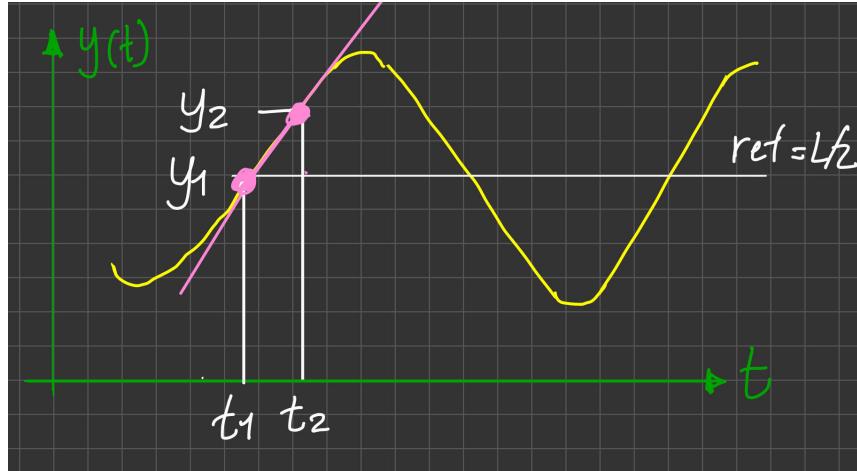


Figura 1.6: Experimento para determinar  $b$ .

$y_1 \approx y_{pp}/2$  y  $y_2 \approx y_{pp}/2 + e_h$ , encuentre, además, en la gráfica los puntos de tiempo tales que  $y(t_1) = y_1$  y  $y(t_2) = y_2$ .

Con estos valores experimentales ya podemos calcular los siguientes parámetros:

- Ganancia del sistema  $b$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{(t_2 - t_1) u_d} \quad (1.13)$$

- constante de tiempo  $\tau_1$ :

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{K_u^2 b^2 - \omega_u^2}{\omega_u^4}} \quad (1.14)$$

- Retardo del sistema  $L$ :

$$L = \frac{\pi/2 - \arctan \tau_1 \omega_u}{\omega_u} \quad (1.15)$$

Con estos parámetros tenemos un sistema aproximado con el cual:

- Podemos realizar una aproximación de Pade de primer orden del retardo para poder diseñar por alguno de los métodos vistos en la teoría. Para esto podemos usar el comando `pade(G, 1)` en MATLAB o Julia.
- Podemos sintonizar un PID, siguiendo las reglas de Åstrom y Hagglund [1]:

$$k_p = \frac{0.37}{bL} + 0.02 \frac{\tau_1}{bL^2}, \quad (1.16)$$

$$k_i = \frac{0.03}{bL^2} + 0.0012 \frac{\tau_1}{bL^3}, \quad (1.17)$$

$$k_d = \frac{0.16}{b} + 0.28 \frac{\tau_1}{bL}. \quad (1.18)$$

# Bibliografía

## Libros

- [ÅH06] K.J. Åström y T. Hägglund. *Advanced PID Control*. ISA-The Instrumentation, Systems, y Automation Society, 2006. ISBN: 9781556179426. URL: <https://books.google.com.co/books?id=XcseAQAAIAAJ> (véase página 8).
- [ÅM21] Karl Johan Åström y Richard M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2.<sup>a</sup> edición. Princeton University Press, 2021. ISBN: 978-0-691-19398-4. URL: <http://press.princeton.edu/> (véase página 2).

## Artículos

### Online

- [MS24] Control Tutorials for MATLAB y University of Michigan Simulink. *Aircraft Pitch: System Modeling*. Accedido: 2024-07-05. 2024 (véase página 2).

