Teoria dos Grafos

Henrique do Nascimento Cunha, MSc.

Teoria dos Grafos
Introdução

- O que é um Grafo?
  - Definições informais:
    - "É uma representação gráfica de elementos de dados e das conexões entre alguns desses elementos" (GERSTING, 2004)
    - Conjunto de pontos (vértices) e traços (arestas) que podem modelar aspectos do mundo real (CUNHA, 2017)
    - http://analytics.ufcg.edu.br/cursosufcg/#/blog?post=grafos-pre-requisitos

Teoria dos Grafos
Introdução

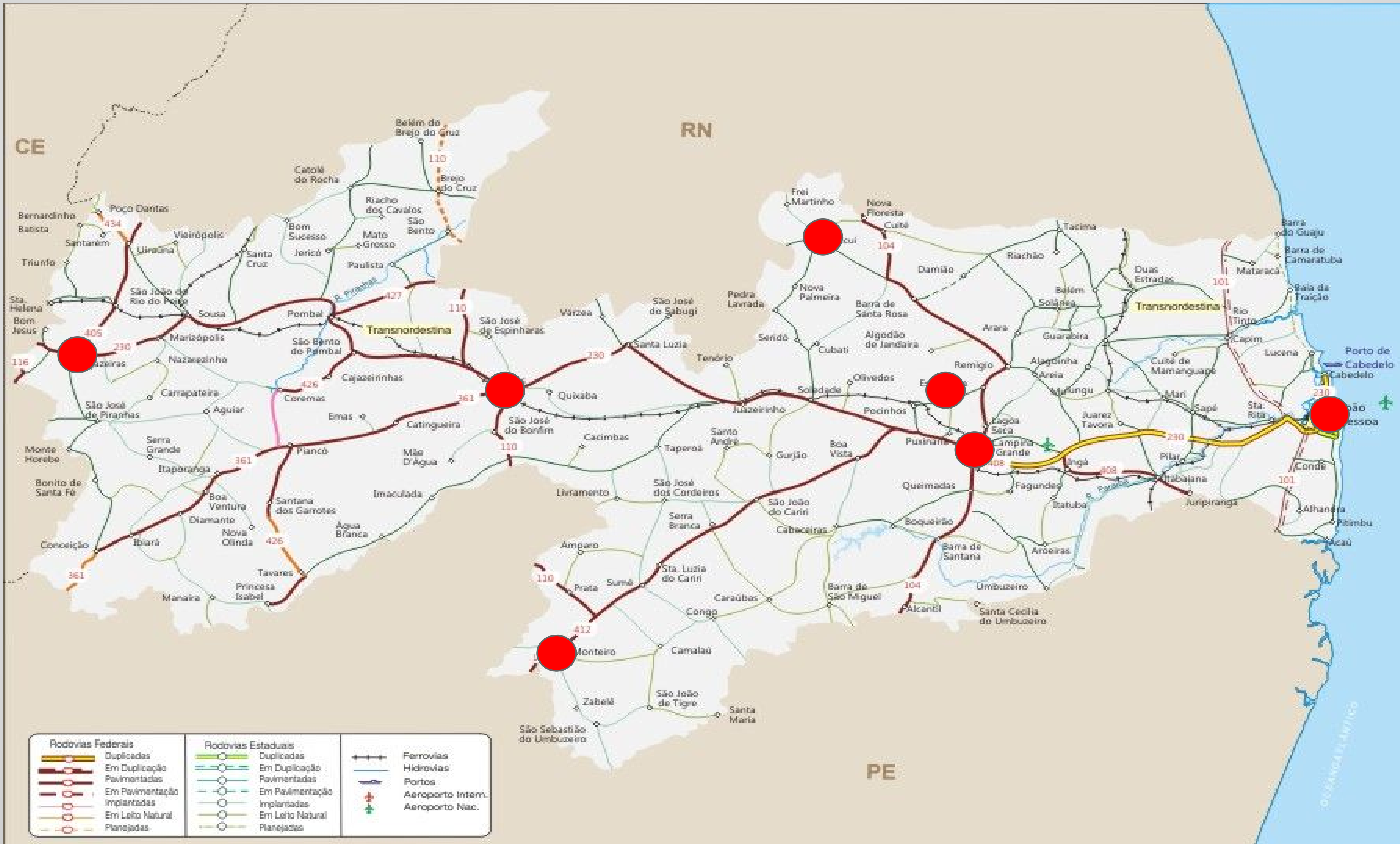
- Grafos são modelos matemáticos

- Ajudam a representar vários problemas do mundo real de uma maneira mais formal, "matematizada"

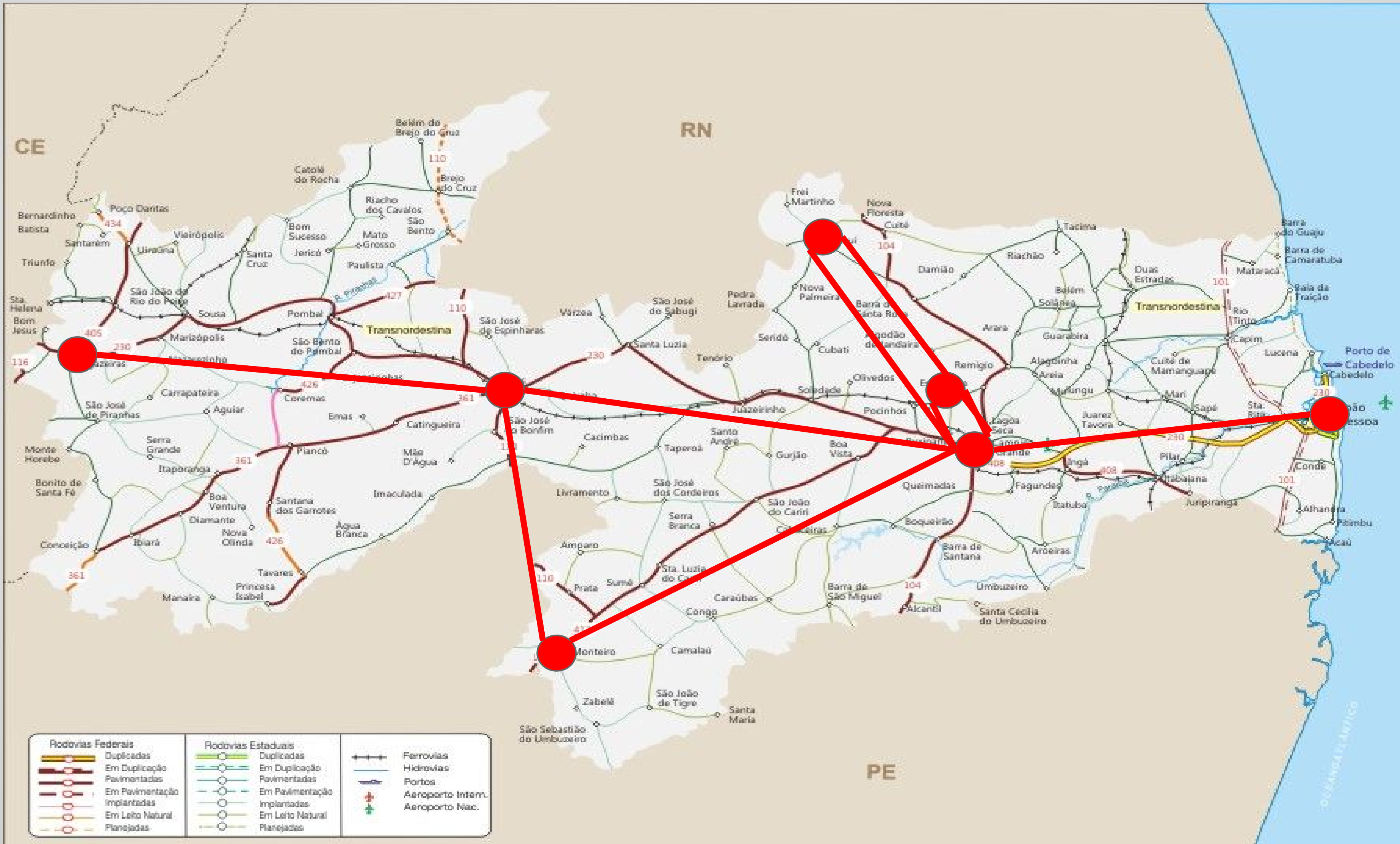
- Por que modelar é importante?

Teoria dos Grafos
Introdução

Teoria dos Grafos
Introdução



Teoria dos Grafos
Introdução



Teoria dos Grafos
Introdução

- Definição formal:
  - Um Grafo é uma tripla ordenada (N, A, g), onde:
    - N é um conjunto arbitrário, não-vazio e finito de **vértices (nós ou nodos)**
    - A é um conjunto finito de subconjuntos de N formados por 2 elementos, chamados **arestas**
    - g é uma função que associa cada aresta a $\in$ A a um par não-ordenado de vértices chamados de extremos de a

Teoria dos Grafos
Introdução

- Conceitos:
  - Suponha um grafo G = (N, A, g), onde:
  - N = {x, y}, ou seja, contém dois vértices x e y
  - A = {a1}, ou seja, contém apenas uma aresta
  - A função g é tal que g(a1) = x-y
  - Podemos denotar a aresta a1 por x-y simplesmente por **xy**
  - Dizemos que essa aresta **incide** em x e em y
  - x e y também são as **pontas ou extremos** da aresta
  - Se xy é uma aresta do grafo, também podemos dizer que x e y são vértices **vizinhos** ou **adjacentes**

Teoria dos Grafos
Introdução

- Conceitos:
  - Um grafo considerado **simples** não pode ter duas arestas com o mesmo par de pontas, ou **arestas coincidentes** (paralelas)
  - Um grafo simples também não pode ter uma aresta com **pontas coincidentes**, ou laços
  - A cardinalidade de um grafo G é o número de vértices que ele contém, e é denotado por **|G|**
  - O **grau** de um vértice é dado pela quantidade de arestas que incidem sobre o vértice

Teoria dos Grafos
Introdução

- Conceitos:
  - Um grafo **completo** é aquele no qual todos os vértices distintos são adjacentes
  - Um **subgrafo** de um grafo consiste em um conjunto de vértices e arestas que são subconjuntos dos vértices e arestas do grafo original.

Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo do mapa da Paraíba:
  - N = {J, C, E, P, M, T, Z}
  - A = {a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9}
  - g(a1) = JC, g(a2) = CE, g(a3) = CE, g(a4) = CP, g(a5) = CP, g(a6) = CM, g(a7) = CT, g(a8) = MT, g(a9) = TZ

Teoria dos Grafos
Introdução

- Subgrafo: Conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas originais, respectivamente, nos quais os extremos de qualquer aresta precisam ser os mesmos que no grafo original.
  - Em outras palavras, é um grafo obtido apagando-se parte do grafo original e deixando o restante sem alterações

Teoria dos Grafos
Introdução

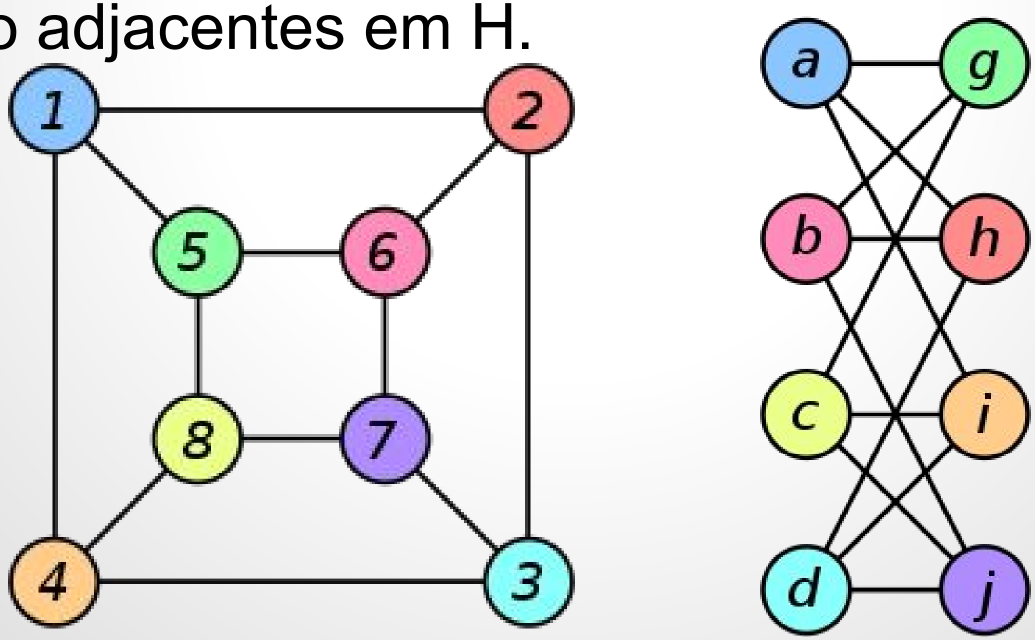
- Um **caminho** de um vértice n_0 a um vértice n_k é uma seqüência:
  - n_0, a_0, n_1,a_1, ...,n_{k-1}, a_{k-1},n_k de vértices e arestas
  - Onde onde, para cada i, os extremos da aresta a_i são n_i— n_{i+1}
- O **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém
- Um grafo é dito conexo (ou conectado) quando há uma caminho entre quaisquer 2 vértices

Teoria dos Grafos
Introdução

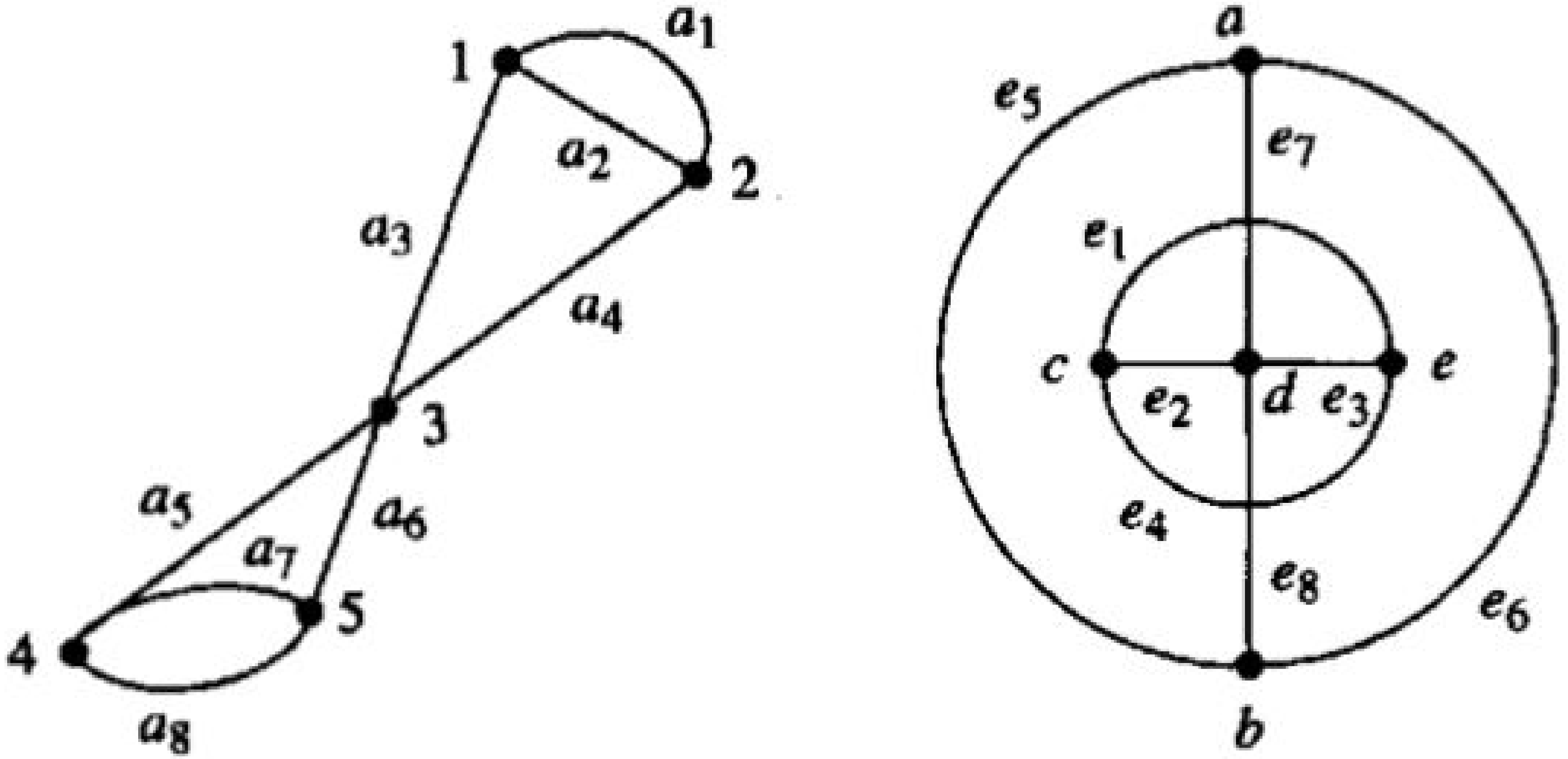
- Um **ciclo** é um caminho de n_0 até n_0 novamente de forma que o único vértice que ocorre mais de uma vez é o n_0
  - Um grafo sem ciclos é dito acíclico
- Exercício: Trace um grafo que tenha os vértices {1, 2, 3, 4, 5}, as arestas {a1, a2, a3, a4, a5, a6} e a função g, onde:
  - g(a1) = 1 - 2
  - g(a2) = 1 - 3
  - g(a3) = 3 - 4,
  - g(a4) = 3 - 4
  - g(a5) = 4 - 5
  - g(a6) = 5 - 5

Teoria dos Grafos
Introdução

- Isomorfismo:
  - Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção f de V (G) em V (H) tal que dois vértices v e w são adjacentes em G se e somente se f(v) e f(w) são adjacentes em H.



Teoria dos Grafos
Introdução

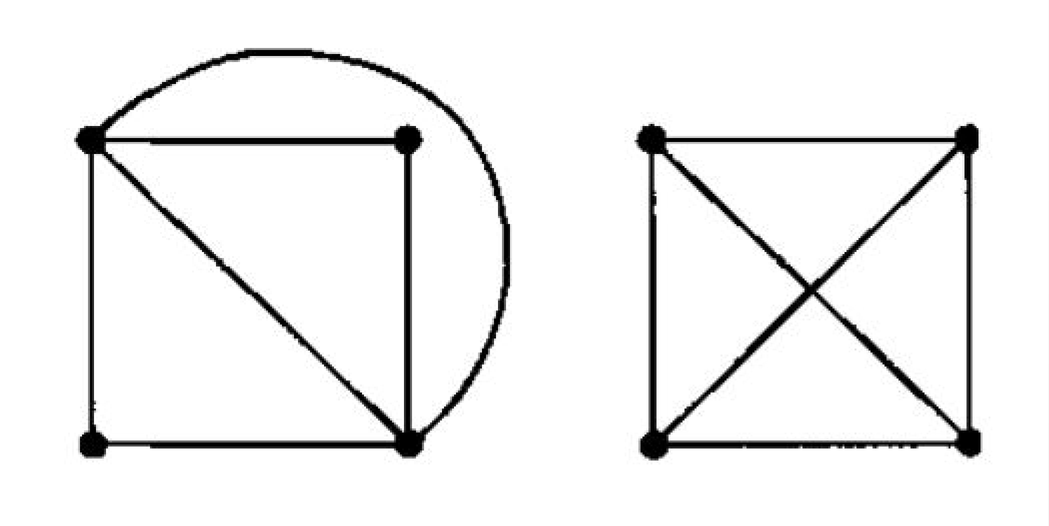


Teoria dos Grafos
Introdução

- Isomorfismo:
  - Quando não é isomorfismo?
    - Um grafo tem mais vértices que o outro.
    - Um grafo tem mais arestas que o outro.
    - Um grafo tem arestas paralelas e o outro não.
    - Um grafo tem um laço e o outro não.
    - Um grafo tem um vértice de grau k e o outro não.
    - Um grafo é conexo e o outro não.
    - Um grafo tem um ciclo e o outro não.

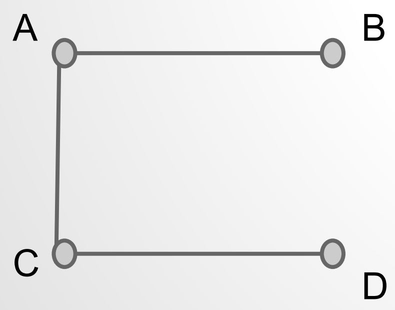
Teoria dos Grafos
Introdução

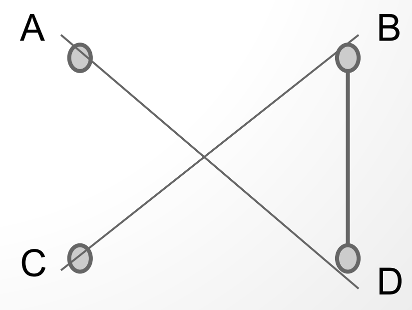
- Isomorfismo:
  - É isomorfo?



Teoria dos Grafos
Introdução

- Complemento de um grafo
  - Se G é um grafo simples, o complemento de G, denotado por G' é o grafo simples com o mesmo conjunto de vértices, onde os vértices x — y são adjacentes em G' se, e somente se, eles não são adjacentes em G.

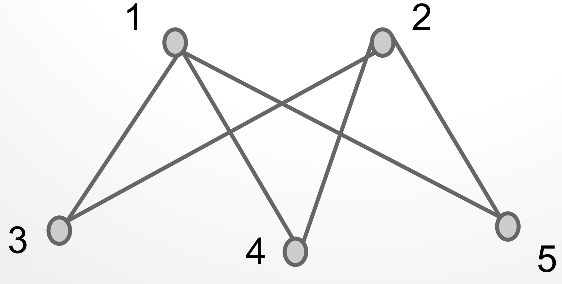




Teoria dos Grafos
Introdução

- Bipartido completo (ou bipartite completo)

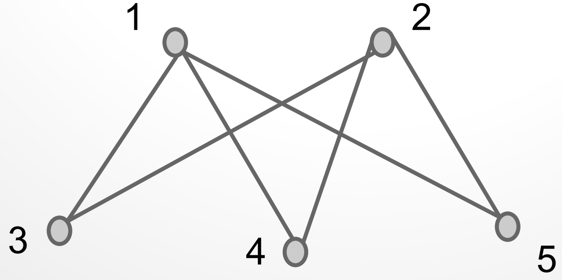
Um grafo é um grafo bipartido completo (ou grafo bipartite completo) se seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos não-vazios N_1 e N_2 tais que dois vértices x e y sejam adjacentes se, e somente se, $x \in N_1$ e $y \in N_2$. Se $|N_1|=m$ e $|N_2|= n$, este grafo é denotado por $K_{m,n}$.



Teoria dos Grafos
Introdução

- Bipartido completo (ou bipartite completo)
  - Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos de tal forma que quaisquer dois vértices tomados no mesmo conjunto não são adjacentes, mas todos dois vértices escolhidos em conjuntos diferentes são adjacentes.

{1,2} e {3,4,5}



Teoria dos Grafos
Introdução

- Representação de Grafos
  - Matriz de adjacências
    - Modo mais "intuitivo"
    - Melhor quando o grafo é **denso**
    - **Grafo denso:** $|A|$ é próximo de $|V|^2$

  - Lista de adjacências
    - Modo compacto de representar grafos **esparsos**
    - **Grafo esparso:** $|A| << |V|^2$
    - Exemplo: {[1,3],[1,4],[1,5],[2,3],[2,4],[2,5]}

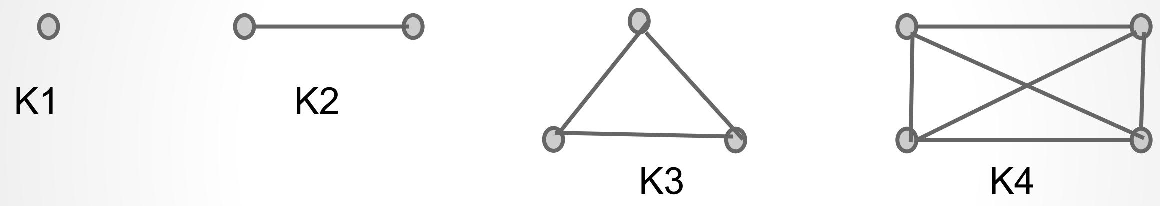
Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo de grafo simples não direcionado:

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	-	0	1	1	1
3	-	-	0	0	0
4	-	-	-	0	1
5	-	-	-	-	0

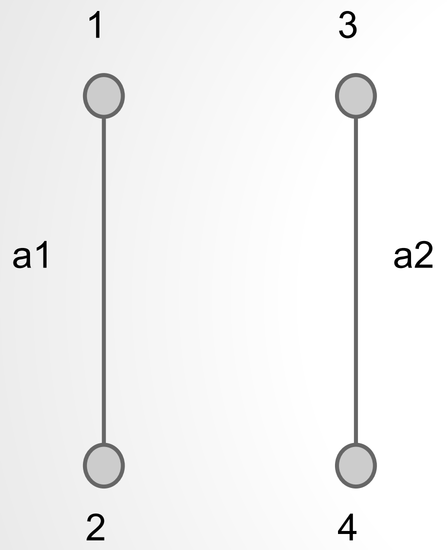
Teoria dos Grafos
Introdução

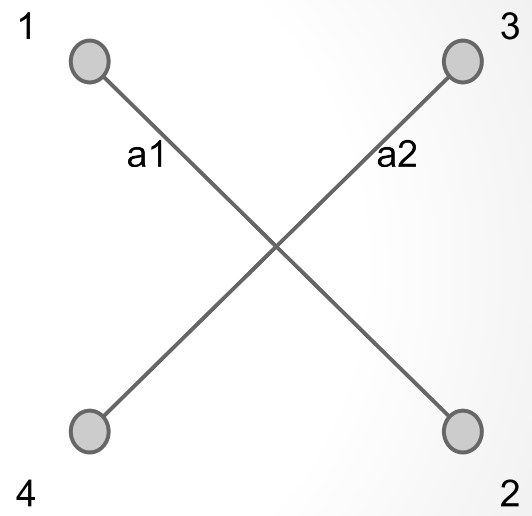
- Grafos completos simples:



- Grafo planar:
  - **Pode** ser desenhado em uma folha de papel
  - Suas arestas só se interceptam nos vértices
  - Ele também é dito planar se tiver um isomorfo planar

Teoria dos Grafos
Introdução





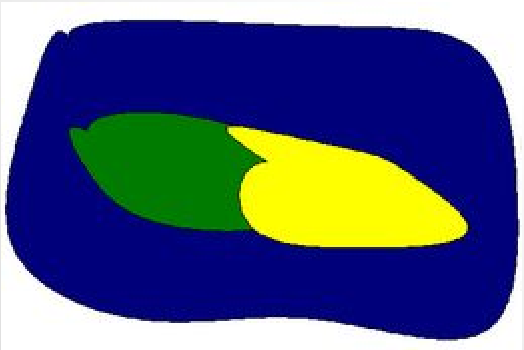
- K_4 é planar? e K_5?

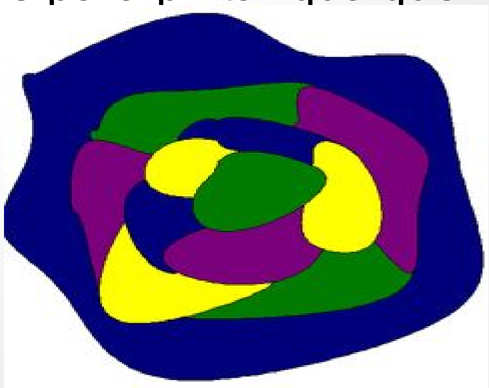
Teoria dos Grafos
Introdução

- Fórmula de Euler:
  - Grafos simples, conexos e planares tem a seguinte característica:
  - n - a + r = 2, onde:
  - n é o número de vértices
  - a é o números de arestas
  - r é o número de regiões fechadas + a região infinita exterior

Teoria dos Grafos
Introdução

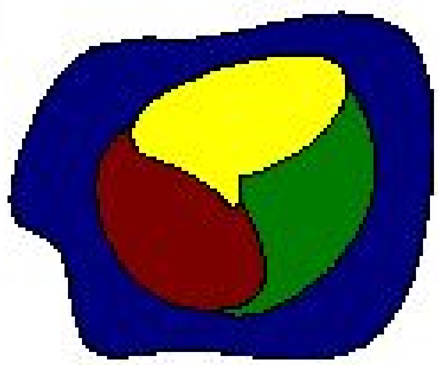
- Problema das 4 cores:
  - Fácil de entender
  - Dificílimo de provar
  - O problema consiste em:
    - Pintar um mapa de vários países desenhado em uma folha de papel
    - Países vizinhos não podem ter a mesma cor
    - Qual o número mínimo de cores para pintar qualquer mapa?

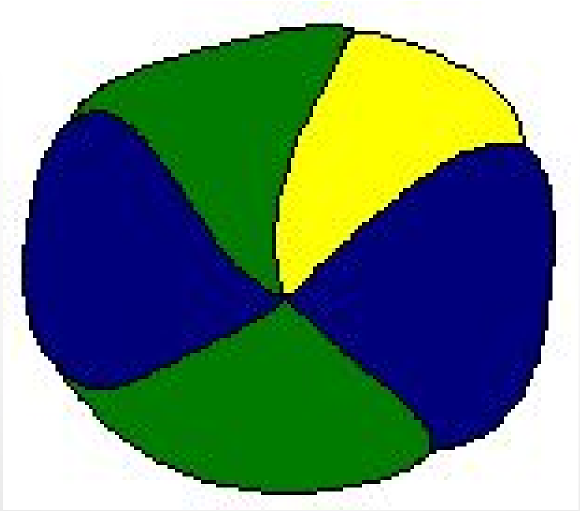




Teoria dos Grafos
Introdução

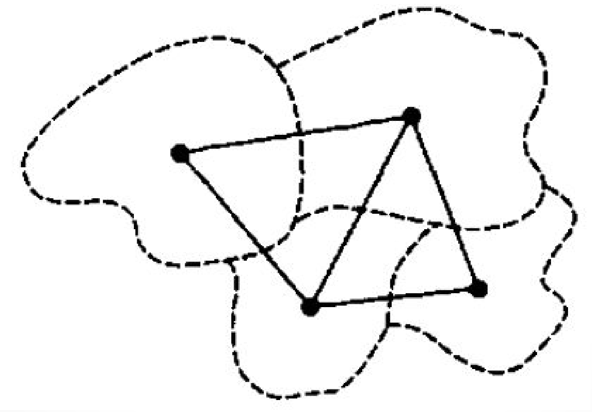
- Países vizinhos





Teoria dos Grafos
Introdução

- O problema das quatro cores é o caso de um problema mais geral na teoria dos grafos.
- Para transformar o mapa em um grafo, criamos o grafo dual do mapa:



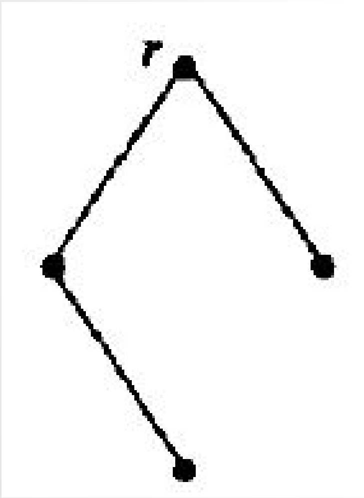
- Então o problema de coloração do mapa torna-se o problema de coloração de vértices de um grafo dual de forma que não haja dois vértices adjacentes que tenham a mesma cor.

Teoria dos Grafos
Introdução

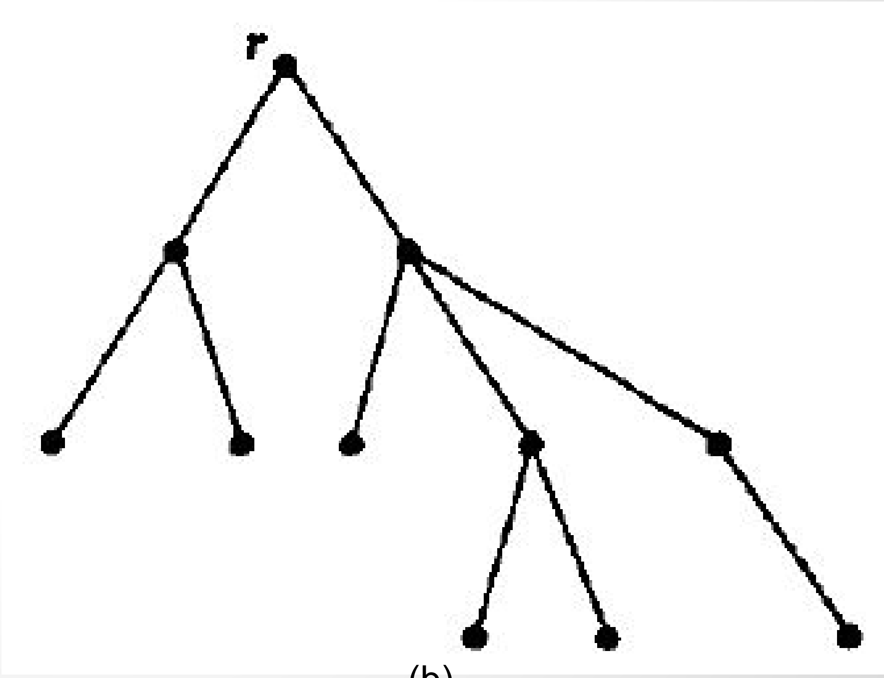
- Coloração:
  - É a atribuição de uma cor a cada vértice do grafo de tal forma que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor.
- Número cromático:
  - É o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração.
- O grafo dual de um mapa é sempre simples, conexo e planar
- Qualquer grafo simples, conexo e planar pode ser entendido como um grafo dual de um mapa
- Assim sendo, o número cromático de um grafo simples, conexo e planar é sempre 4

Teoria dos Grafos
Introdução

- Árvores
  - Grafo acíclico e conexo com um nó designado como a raiz da árvore.



(a)



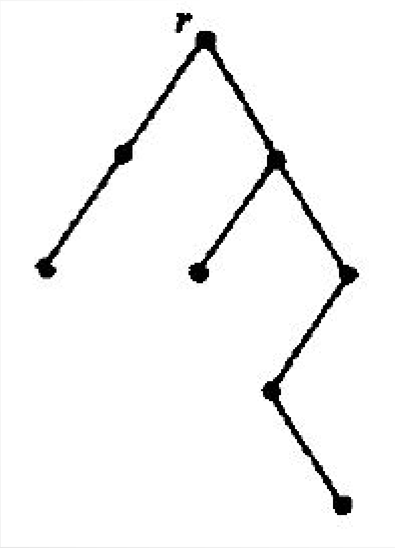
(b)

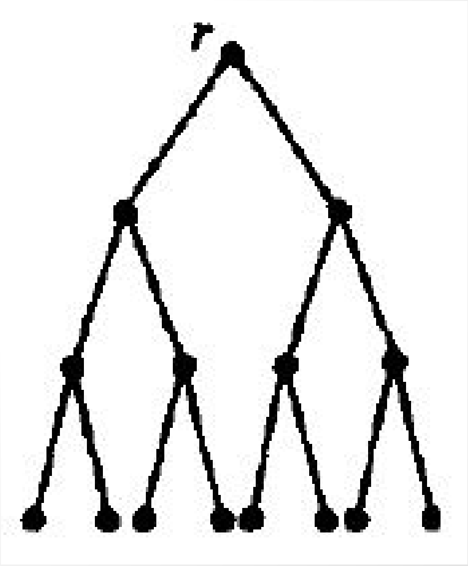
Teoria dos Grafos
Introdução

- Um grafo acíclico e conexo sem a designação de um vértice como raiz é chamado de árvore não-enraizada.
- Por ser um grafo conexo, existe um caminho entre raiz e todos os vértices
    - **Profundidade de um vértice**: É o comprimento do caminho da raiz até o vértice
    - **Altura da árvore:** É a maior profundidade de todos seus vértices
    - Um vértice sem filhos é chamado de **folha**
    - Os vértices que não são folhas são chamados de **vértices internos** ou **nós internos**
    - Uma **floresta** é qualquer grafo acíclico

Teoria dos Grafos
Introdução

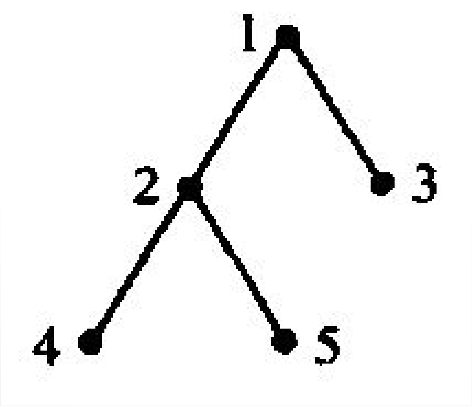
- Árvores binárias:
  - Cada nó tem no máximo **dois** filhos (filho à esquerda e filho à direita)
  - Árvore binária completa: Todos os nós internos têm dois filhos e todas as folhas têm a mesma profundidade





Teoria dos Grafos
Introdução

- Exercício:
  - Qual a altura?
  - Qual o filho à esquerda do nó 2?
  - Qual a profundidade do nó 5?



Teoria dos Grafos Introdução

- Grafo direcionado:
  - É um tripla ordenada (N, A, g), onde:
  - N = Conjunto de vértices
  - A = Conjunto de arestas
  - g = uma função que associe a cada aresta a um par ordenado (x, y) de vértices, onde x é o ponto inicial e y é o ponto final de a.
- Existe agora uma direção associada a cada aresta
- Um caminho do vértice n_0 até o vértice n_k é uma seqüência n_0, a_0, $n_1,a_1,...,n_{k-1},a_{k-1},n_k$ onde, para cada i, n_i é o ponto inicial e n_{i+1} é o ponto final de a_x
- Se existe um caminho do vértice n_0 até o vértice n_k, então n_k é alcançável a partir de n_0

Teoria dos Grafos
Introdução

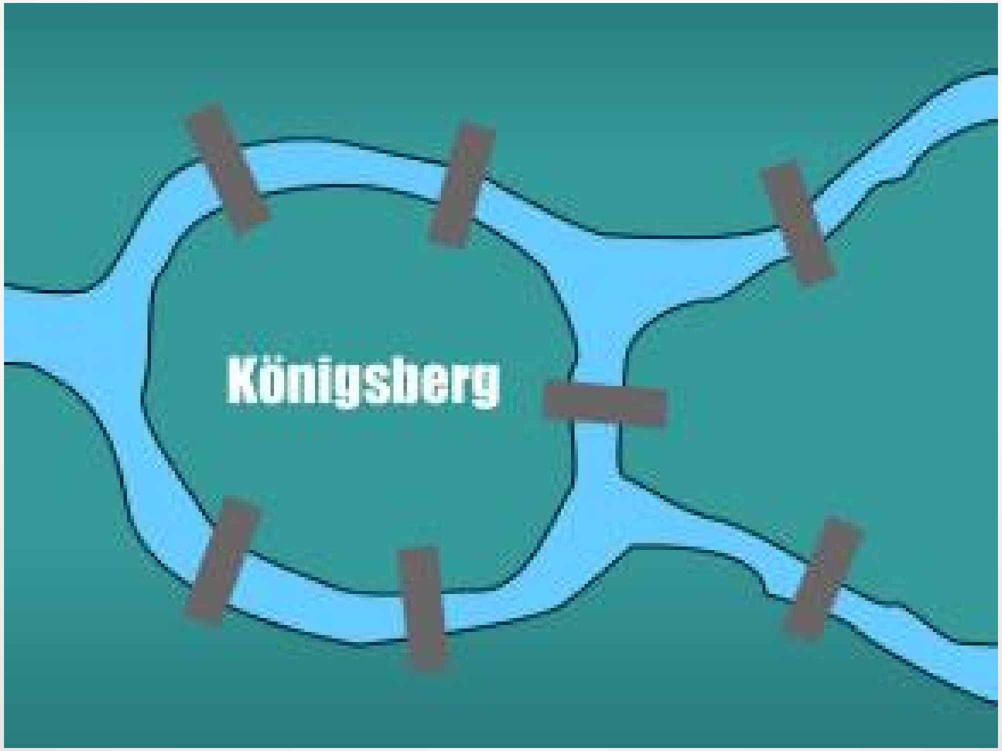
- **Fonte**: Vértice onde não incide nenhuma aresta na direção de chegada
- **Sorvedouro**: Vértice onde não incide nenhuma aresta na direção de saída
- Os grafos que vimos até agora podem ser classificados como **rotulados**
- Podemos adicionar mais características aos grafos, além dos rótulos e direções
- Ao adicionar um peso (numérico), por exemplo, podemos ter um grafo **ponderado**

Teoria dos Grafos
Introdução

- Aplicações de grafos:
  - Diagramas de entidade-relacionamento (ER)
  - Redes de Petri
  - Máquinas de estados
  - Mapas de companhias aéreas
  - Qualquer rede de transporte
  - Árvore genealógica
  - Organograma de uma empresa
  - Representação de átomos
  - Redes neurais artificiais

Teoria dos Grafos
Caminho Euleriano

- Leonhard Euler
- Vilarejo de Kõnisgberg (Kaliningrado)



Teoria dos Grafos
Introdução

- Caminho Euleriano:
  - Em um grafo G (V, A) é um caminho que usa cada aresta de G exatamente uma vez.
  - Só existe para grafos conexos
  - Depende do grau dos vértices
    - Vértices pares e ímpares
- Euler mostrou que Existe um caminho euleriano em um grafo conexo se, e somente se:
  - não houver nenhum; ou
  - existirem exatamente dois vértices de grau ímpar.
- No caso de não haver vértices ímpares, o caminho pode começar em qualquer vértice e terminará neste mesmo vértice; para o caso de haver dois vértices ímpares, o caminho deve começar em um vértice ímpar e terminar no outro.

```
procedure CaminhoEuleriano (A: matriz n X n);
var
    total, grau: integer; {número de vértices ímpares encontrados, grau de um vértice}
    i, j: integer; {índices da matriz)
begin
    total: = 0; i:= 1;
    while (total <= 2) and (i <= n) do begin
        grau : = 0;
        for j := 1 to n do
            grau := grau + A[i ,j];
        if odd(grau) then
            total: = total + 1;
        i:= i + 1;
    end; {while}
    if total > 2 then
        write ('Não existe caminho euleriano')
    else
        write ('Existe um caminho euleriano");
```

Teoria dos Grafos
Introdução

- Ciclo Hamiltoniano
  - Consiste em determinar se existe um ciclo que usa cada vértice do grafo
  - Pode ser resolvido por meio de tentativa e erro:
    - Comece por algum vértice do grafo e tente qualquer caminho escolhendo suas várias arestas.
    - Se o caminho resultante tiver um vértice repetido, ele não é um ciclo; neste caso, descarte-o e tente um caminho diferente.
    - Se o caminho puder ser completado como um ciclo, verifique então se ele visitou todos os vértices; se não, descarte-o e tente um novo caminho.
  - Não existe algoritmo eficiente para determinar um ciclo hamiltoniano, para um grafo arbitrário

Teoria dos Grafos
Introdução

- Algoritmo de Warshall
  - Consiste em determinar a matriz de alcançabilidade (R_{ij}) de um grafo G = (V,E), onde:
    - $r_{ij} = 1$, se G tem um caminho entre i e j
    - $r_{ij} = 0$, caso contrário
  - O algoritmo de Warshall constrói uma série de matrizes $E_1,...,E_n$, onde:
    - Os elementos de E_i são zero ou um
    - $E_i \leq E_{i+1}$ $(i = 0, . . . , n - 1)$
    - E0 é obtido a partir da matriz de adjacência do grafo
      - O grafo não precisa ser simples
      - Também pode ser ponderado
      - Basta trocar o número por 1 (ou True)
    - $E_n = R$

Teoria dos Grafos
Introdução

- Algoritmo de Warshall

```
warshall(M)
    E = M.clone()
    for i = 1 to n:
        for j = 1 to n:
            if E_ji == 1:
                for k = 1 to n:
                    E_jk := max(E_jk,E_ik)
```

Teoria dos Grafos
Introdução

- Algoritmo de Dijkstra para o caminho mais curto (ou menor caminho)
- Problema:
  - Às arestas de um grafo direcionado são dados pesos não negativos
  - O peso de um caminho é a soma dos pesos das arestas que compõem o caminho
  - O objetivo é encontrar o menor caminho (direcionado) no grafo do vértice u ao vértice v (diferente de u) se o caminho existir

Teoria dos Grafos
Introdução

- Algoritmo de Dijkstra para o caminho mais curto (ou menor caminho)
- Solução:
  - Podemos assumir que não há laços ou arestas paralelas
  - Se houver, podemos remover os laços e, no caso de arestas paralelas, removemos aquela de maior peso
  - O algoritmo funciona para grafos não-direcionados também
  - Basta considerar que uma aresta de um grafo direcionado pode ser substituída por duas arestas de direções opostas e mesmo peso

Teoria dos Grafos
Introdução

- Queremos determinar o menor caminho entre *u* e *v*, ambos vértices de um grafo G
- Antes, precisamos definir alguns conceitos:
  - $\boldsymbol{\alpha}$(r,s): peso da aresta r-s
  - O algoritmo marca os vértices como permanentes ou temporários
  - O rótulo de um vértice é denotado por $\boldsymbol{\beta}$(r) e define o peso do menor caminho entre *u* e *r*
  - $\boldsymbol{\varphi}$(r) = 1 se o rótulo é permanente
  - $\boldsymbol{\varphi}$(r) = 0 se o rótulo é temporário
  - $\boldsymbol{\pi}$(r) é o predecessor de r no caminho u-r, se esse caminho existir. Se não existir $\boldsymbol{\pi}$(r) = 0

Teoria dos Grafos
Introdução

- Algoritmo de Dijkstra para o caminho mais curto entre *u* e *v*
- Faça $\boldsymbol{\beta}(u) \leftarrow 0$ e $\boldsymbol{\varphi}(u) \leftarrow 1$
- Para todos os outros vértices $\boldsymbol{\beta}(\mathrm{r}) \leftarrow \infty$, $\boldsymbol{\varphi}(r) \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\pi}(r) \leftarrow 0$ e $w \leftarrow u$
- Para cada arco (w,r), onde $\boldsymbol{\varphi}(r) = 0$ e $\boldsymbol{\beta}(r)>\boldsymbol{\beta}(w)+\boldsymbol{\alpha}(w,r)$
  - $\boldsymbol{\beta}(r) \leftarrow \boldsymbol{\beta}(w)+\boldsymbol{\alpha}(w,r)$ e $\boldsymbol{\pi}(r) \leftarrow w$
- Ache um vértice r* tal que $\boldsymbol{\varphi}(r^*)=0$, $\boldsymbol{\beta}(r^*)<\infty$ e $\boldsymbol{\beta}(r^*)=\min_{\boldsymbol{\varphi}(r) = 0}(\boldsymbol{\beta}(r))$
  - Faça $\boldsymbol{\varphi}(r^*) = 1$ e $\mathrm{w} = r^*$
- Se r* não existe, não há caminho u-v e o algoritmo deve parar
- Caso contrário, se w

Teoria dos Grafos
Introdução

- Caso contrário, se $w \neq v$, voltamos para o passo 2, mas se w=v, paramos e o para achar o caminho, basta pegar cada predecessor a partir de v.

Teoria dos Grafos
Introdução

- Busca em profundidade (altura) e busca em largura
  - Percorrer um grafo em busca de vértices ou arestas de interesse
  - Grafos conectados e sem laços
  - Começaremos pela busca em profundidade
  - O procedimento é um pouco diferente para grafos direcionados ou não-direcionados

Teoria dos Grafos
Introdução

- Busca em profundidade (*Depth-first search - DFS*)
  - Começamos por um vértice r (raiz)
  - Então, percorremos a aresta e = (r,v) até o vértice v
  - Ao mesmo tempo, tornamos a aresta **direcionada**
  - Dizemos que a aresta está examinada e chamamos de **aresta da árvore**
  - O vértice r é chamado **pai** de v
  - A busca continua para o vértice x, então temos 2 casos
    - Se cada aresta incidente em x foi examinada, retorne para o pai de x e continue o processo a partir do pai de x. O vértice é dito “completamente examinado”

Teoria dos Grafos
Introdução

- continuando...
  - Se existe alguma aresta não examinada em x, escolhemos uma aresta e = (x,y) e a direcionamos de x para y. Esta aresta é considerada examinada. Então temos 2 subcasos
    - Se y nunca foi visitado antes, visitamos y e continuamos a busca a partir de y. Neste caso, e é uma aresta da árvore e o pai de y é x
    - Se y já foi visitado antes, selecionamos outra aresta que não foi visitada que incide em x. Neste caso, a aresta e é chamada de **aresta de retorno**

Teoria dos Grafos
Introdução

- Cada vez que encontramos um novo vértice que nunca foi visitado antes, damos a ele um número distinto. O número da raiz é 1. Então escrevemos:

  DFN(x) = é o número de x

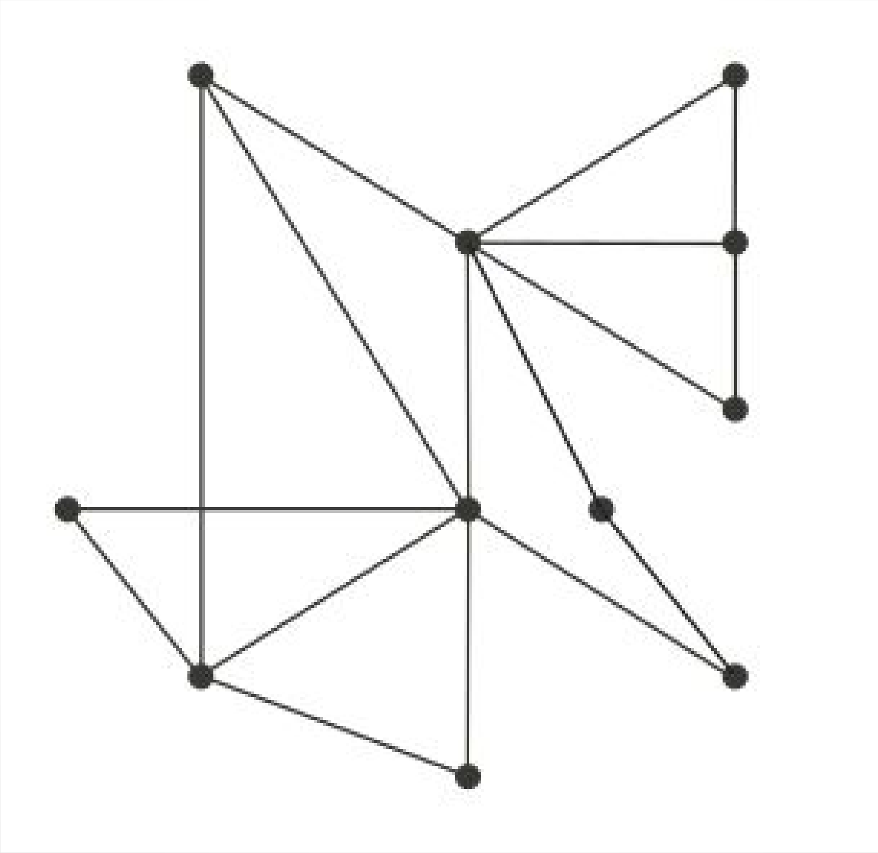
- Uma busca em profundidade termina quando voltamos até a raiz e visitamos todas os vértices ou quando encontramos a aresta ou vértice desejado
- A DFS divide as arestas de G em **arestas de árvore** e **arestas de retorno**
  - Obviamente, as arestas de árvore de um grafo formam um árvore, também conhecida como árvore DFS

Teoria dos Grafos
Introdução

- continuando...
  - Se incluirmos as direções das arestas de árvore, obtemos a árvore DFS direcionada
  - DFS fornece uma direção para cada aresta em G
  - Quando usamos essas direções, obtemos um dígrafo cujo grafo subjacente é G

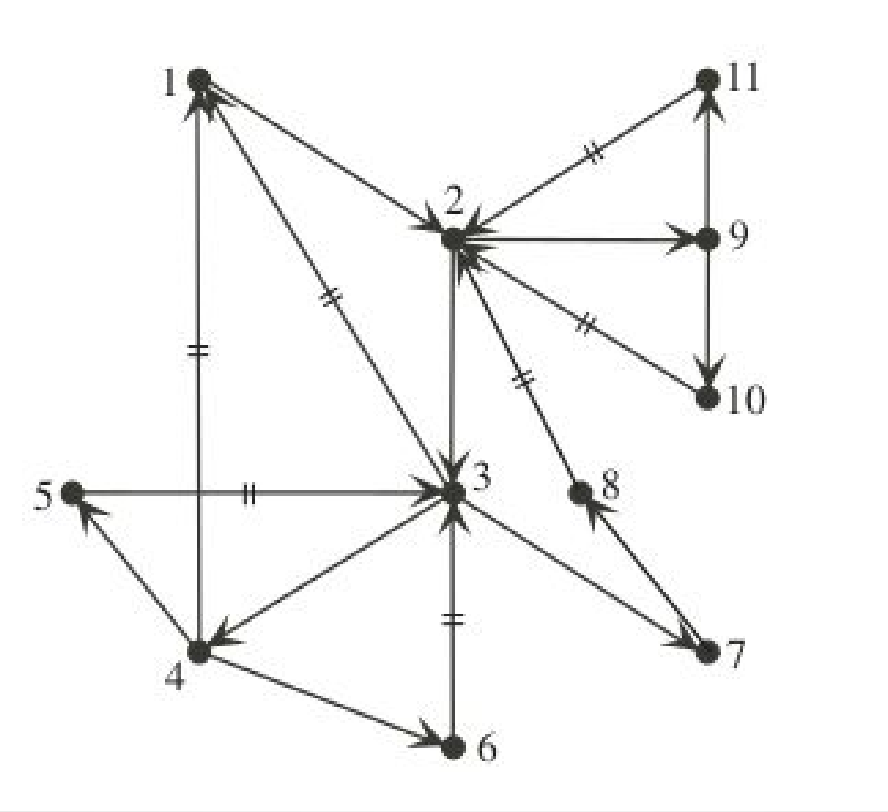
Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo



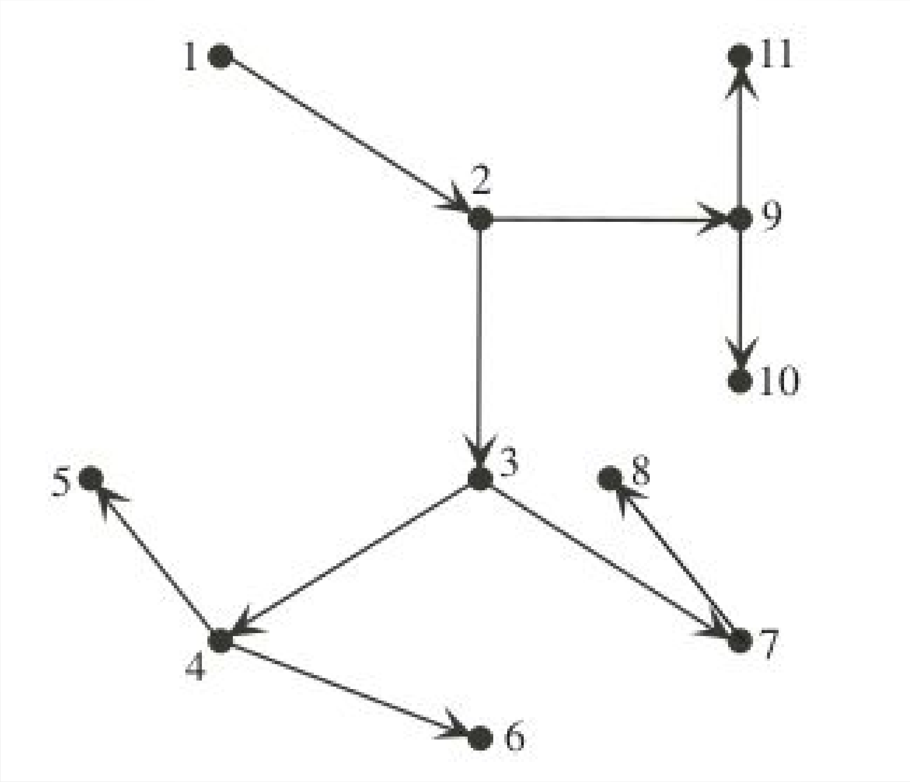
Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo - Grafo percorrido



Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo - Árvore DFS (ou *spanning tree*)



Teoria dos Grafos
Introdução

- Busca em profundidade em dígrafos
  - É similar à busca em grafos não direcionados
  - No que se refere à raiz, o algoritmo é igual
  - Se a busca procede para uma aresta não examinada, então temos 4 casos distintos:
  - Se y não foi visitado, então e é uma aresta de grafo
  - Se y foi visitado, então há 3 casos:
    - y é um descendente de x no subgrafo induzido por arestas de árvore existentes. Então e é uma aresta “para frente” e DFN(y) > DFN(x)
    - x é um descendente de y no subgrafo induzido por arestas de árvore existentes. Então e é uma aresta “para trás” e DFN(y) < DFN(x)

Teoria dos Grafos
Introdução

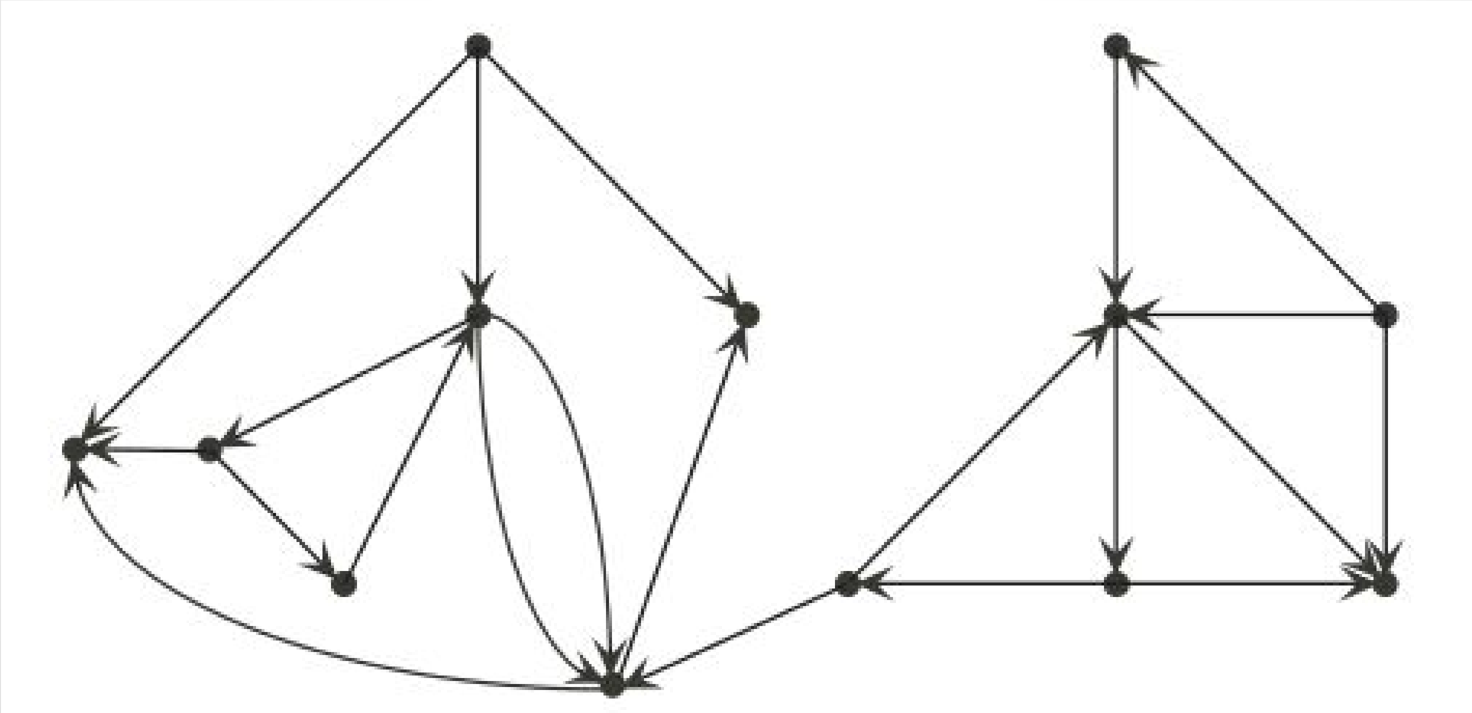
- Continuando...
  - x e y não tem relação no que se refere à arestas de árvore existentes, então e é uma aresta cruzada e DFN(y) < DFN(x)
- O grafo direcionado de G induzido por arestas de ávore é chamado de floresta DFS
- Se DFN(y) > DFN(x) para o arco (x,y) então (x,y) é uma aresta de árvore ou uma aresta “para frente”. Durante a busca é fácil distinguir os 2, pois (x,y) é uma aresta de árvore se y não foi visitado ainda ou uma é uma aresta “para frente” caso contrário

Teoria dos Grafos
Introdução

- Continuando...
  - Se DFN(y) < DFN(x), então (x,y) é uma aresta “para trás” ou uma aresta cruzada. Podemos distingui-las durante a busca pois (x,y) é cruzada se y foi completamente examinada e é uma aresta “para trás” caso contrário

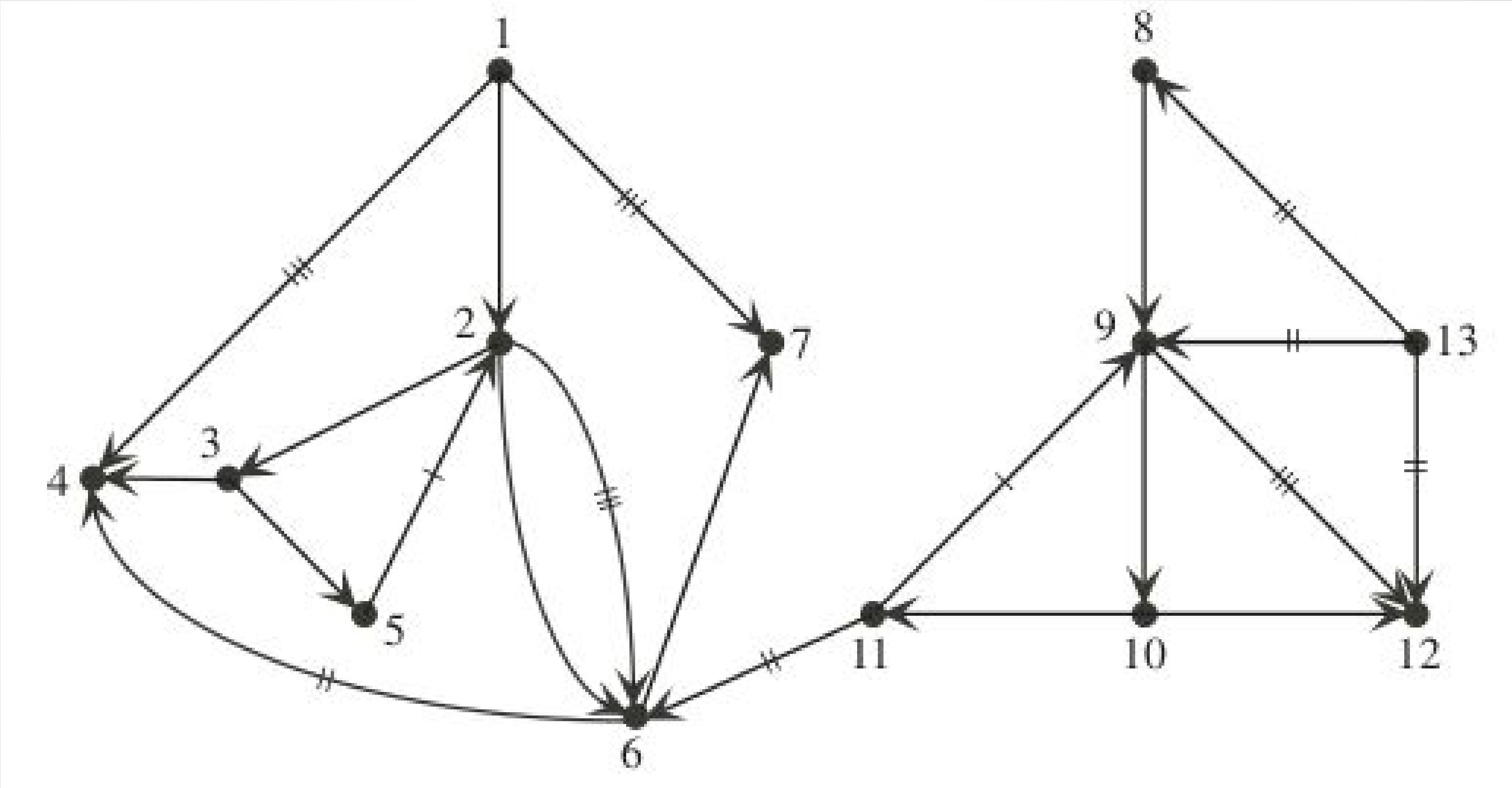
Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo



Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo



Teoria dos Grafos
Introdução

- Exemplo