



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* MORADA NOVA
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

JARDESON LEITÃO MONTEIRO

**IMPLEMENTAÇÃO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
VERIFICAÇÃO DE TENSÕES EM VIGAS CONTÍNUAS PROTENDIDAS**

MORADA NOVA

2024

JARDESON LEITÃO MONTEIRO

IMPLEMENTAÇÃO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
VERIFICAÇÃO DE TENSÕES EM VIGAS CONTÍNUAS PROTENDIDAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Bacharelado em Engenharia Civil, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Morada Nova, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel. Área de concentração: Engenharias I.

Orientador: Prof. Me. Mauricio Alves de Melo.

MORADA NOVA

2024

Página reservada para a ficha catalográfica, que você pode elaborar por meio do [Gerador de Ficha Catalográfica](#) *on-line* do IFCE.

JARDESON LEITÃO MONTEIRO

IMPLEMENTAÇÃO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
VERIFICAÇÃO DE TENSÕES EM VIGAS CONTÍNUAS PROTENDIDAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso Bacharelado em Engenharia Civil, do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Morada
Nova, como requisito parcial para obtenção do
Título de Bacharel. Área de concentração:
Engenharias I.

Orientador: Prof. Me. Mauricio Alves de Melo.

Aprovado (a) em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Mauricio Alves de Melo (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Morada Nova

Prof. Me. Carlos Valbson dos Santos Araújo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Morada Nova

Prof. Me. Luiz Antônio Taumaturgo Mororó

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza

A Deus.

A meus pais.

A meu irmão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, João Batista e Maria Deuzimar, pelo incentivo, confiança, amor incondicional e apoio em todas as fases da minha vida. Vocês são a base de todas as minhas conquistas e me ensinaram o valor da dedicação e perseverança.

Ao meu irmão, Darlyson Monteiro, pela ajuda, inspiração e por sempre acreditar em mim. Sua presença constante e suas palavras de encorajamento foram fundamentais durante todo este período.

Aos amigos que me acompanharam durante a graduação, que presenciaram comigo os desafios, e que deram apoio, o acolhimento e paciência.

Aos professores que contribuíram significativamente para a minha formação acadêmica, meu especial agradecimento aos professores Leonardo Sousa, Luiz Antônio e Udinart Rabelo pelos ensinamentos e orientações. Por fim, expresso minha gratidão ao Professor Mauricio Melo, tanto pelo brilhantismo com que transmitiu seus conhecimentos em sala de aula, quanto pela enorme contribuição no desenvolvimento deste trabalho, que se mostrou o mais desafiador e, ao mesmo tempo, o mais divertido de todo o período da graduação.

“O futuro pertence àqueles que acreditam na
beleza de seus sonhos.”
(ELEONOR ROOSEVELT).

RESUMO

O concreto protendido é uma técnica construtiva notável em projetos estruturais, oferecendo uma série de vantagens, como maior resistência, durabilidade e redução na seção transversal quando comparado ao concreto armado. Atualmente, diversos softwares estão disponíveis para simplificar e acelerar o processo de projeto de estruturas protendidas. Em geral, os softwares gratuitos, consolidados no meio técnico, não realizam o cálculo automático do hiperestático de protensão, a exemplo do RLF-SecPro. Esse cálculo automático está presente em ferramentas comerciais mais robustas, como TQS (através do V-PRO) e Eberick, entre outros. Assim, para contribuir a preencher essa lacuna, este trabalho buscou desenvolver uma ferramenta computacional *open-source* denominada *PSContBeam*, utilizando a linguagem de programação Python, focada na verificação das tensões normais nos estados limites ELS-F, ELS-D e ELU-ATO em vigas contínuas protendidas nível 2 (protensão limitada), seguindo as diretrizes de projeto presentes na NBR 6118:2023. Após uma revisão da literatura, optou-se por adotar o método das forças nodais, conforme descrito por Silva e Sanchez Filho (2018), para calcular o momento hiperestático de protensão. Essa abordagem permite que a ferramenta incorpore devidamente os efeitos hiperestáticos em seus cálculos. Para o traçado de cabos de protensão o *PSContBeam* permite traçados com trechos retilíneos, parabólicos (2º grau) e concordância suave de parábolas do 2º grau com inflexão, dando abrangência e flexibilidade ao uso da protensão na viga. Além disso, é possível considerar as perdas de protensão desde que já estejam atribuídas à força de protensão como dado de entrada. Quanto à geometria da seção transversal da viga, permitem-se quaisquer seções desde que haja simetria em torno do eixo vertical que passa pelo centroide. Em conclusão, os resultados obtidos com o *PSContBeam* demonstraram uma alta proximidade em relação aos resultados apresentados pelo V-PRO e à planilha eletrônica, comprovando a eficácia da ferramenta proposta.

Palavras-chave: Protensão, Vigas Contínuas, Python, *Open-Source*, Tensão Normal.

ABSTRACT

Prestressed concrete is a notable construction technique in structural projects, offering a series of advantages, such as higher resistance, higher durability and reduction in cross-section compared to reinforced concrete. Nowadays, much software is available to simplify and accelerate the design of prestressed structures. In general, free software, consolidated in the technical community, does not perform automatic calculation of prestressing hyperstatic such as RLF-SecPro. This automatic calculation is present in more robust commercial tools such as TQS (through V-PRO) and Eberick, among others. Therefore, to contribute to filling this gap, this work aimed to develop an open-source computational tool called *PSContBeam*, using the Python programming language, focused on verification of normal stresses in serviceability limit states (SLS) of descompression and formation of cracks, and ultimate limit state (ULS) at prestressing application on continuous prestressed beams level 2 (limited prestressing), following design guidelines present in Brazilian standard NBR 6118:2023 from ABNT. After a literature review, the nodal forces method, as described by Silva and Sanchez Filho (2018), was chosen to calculate the hyperstatic prestressing moment. This approach allows the tool to properly incorporate the hyperstatic effects into its calculations. For tendon layout of prestressing, *PSContBeam* allows profiles with straight sections, parabolic sections (2nd degree) and smooth transition of 2nd degree parabolas with inflection, giving comprehensiveness and flexibility in the use of prestressing in the beam. Furthermore, it is possible to consider the prestressing losses as long as they are already assigned to the prestressing force as input data. Regarding the geometry of the beam's cross-section, any sections are permitted as long as there is symmetry around the vertical axis that passes through the centroid. In conclusion, the results obtained with *PSContBeam* demonstrated high proximity to the results presented by V-PRO and the electronic spreadsheet, proving the effectiveness of the proposed tool.

Keywords: Prestressing, Continuous Beams, Python, Open-Source, Normal Stress.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 — Efeitos isostáticos em vigas protendidas.....	16
Figura 2 — Momento hiperestático de protensão.....	18
Figura 3 — Elemento de barra bi engastado protendido.....	19
Figura 4 — Viga contínua protendida.....	20
Figura 5 — Principais linguagens de programação.....	23
Figura 6 — Diagrama UML da classe Pessoa.....	24
Figura 7 — Diagrama UML das classes implementas no código.....	25
Figura 8 — Fluxograma da Estrutura básica do <i>PSContBeam</i>	27
Figura 9 — Fluxograma do particionamento do traçado.....	28
Figura 10 — Viga hiperestática protendida com traçado retilíneo.....	33
Figura 11 — Momento hiperestático de protensão do exemplo 01.....	33
Figura 12 — Tensões normais no ELS-F para o exemplo 01.....	34
Figura 13 — Tensões normais no ELS-D para o exemplo 01.....	35
Figura 14 — Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 01.....	36
Figura 15 — Viga hiperestática protendida com traçado parabólico.....	37
Figura 16 — Momento hiperestático de protensão do exemplo 02.....	37
Figura 17 — Tensões normais no ELS-F para o exemplo 02.....	38
Figura 18 — Tensões normais no ELS-D para o exemplo 02.....	39
Figura 19 — Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 02.....	40
Figura 20 — Viga hiperestática protendida com traçado variável.....	42
Figura 21 — Força de protensão ao longo da viga.....	42
Figura 22 — Momento hiperestático de protensão do exemplo 03.....	43
Figura 23 — Tensões normais no ELS-F para o exemplo 03.....	43
Figura 24 — Tensões normais no ELS-D para o exemplo 03.....	45
Figura 25 — Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 03.....	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	— Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura em função da classe de agressividade ambiental.....	21
Tabela 2	— Posição de pontos de Gauss e pesos correspondentes.....	30
Tabela 3	— Tensões normais no ELS-F para o exemplo 01.....	34
Tabela 4	— Tensões normais no ELS-D para o exemplo 01.....	35
Tabela 5	— Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 01.....	36
Tabela 6	— Tensões normais no ELS-F para o exemplo 02.....	38
Tabela 7	— Tensões normais no ELS-D para o exemplo 02.....	39
Tabela 8	— Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 02.....	40
Tabela 9	— Tensões normais no ELS-F para o exemplo 03.....	44
Tabela 10	— Tensões normais no ELS-D para o exemplo 03.....	45
Tabela 11	— Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 03.....	47

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PSContBeam	<i>Prestressed Continuous Beam</i>
TQS-VPRO	<i>Calculadora de Vigas Protendidas</i>
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
RLF-SecPro	<i>Calculadora de Seções Protendidas</i>
NBR	Norma Brasileira
POO	Programação Orientada a Objetos
UML	Linguagem Unificada de Modelagem
JSON	<i>JavaScript Object Notation</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
1.1	Objetivo.....	16
2	REVISÃO DA LITERATURA.....	16
2.1	Efeitos isostáticos.....	16
2.2	Hiperestático de protensão.....	17
2.3	Método das forças nodais.....	19
2.4	Estados Limites.....	21
2.4.1	<i>Estado limite de serviço de formação de fissuras (ELS-F).....</i>	<i>21</i>
2.4.2	<i>Estado limite de serviço de descompressão (ELS-D).....</i>	<i>22</i>
2.4.3	<i>Estado limite último no ato da protensão (ELU-ATO)</i>	<i>22</i>
3	DESENVOLVIMENTO.....	23
3.1	Python.....	23
3.1.1	<i>Programação orientada a objeto (POO)</i>	<i>24</i>
3.2	Estrutura do PSContBeam.....	26
3.3	Dados de entrada.....	27

3.4	Obtenção dos momentos nodais.....	28
3.4.1	<i>Discretização do traçado do cabo de protensão.....</i>	28
3.4.2	<i>Tipos de traçados para cabos de protensão.....</i>	29
3.4.3	<i>Quadratura de Gauss.....</i>	29
3.4.4	<i>Aplicação do método das forças nodais.....</i>	31
3.5	Cálculo das tensões normais.....	31
3.6	Apresentação dos resultados.....	32
4	APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	32
4.1	Exemplo 01.....	33
4.2	Exemplo 02.....	37
4.3	Exemplo 03.....	41
5	CONCLUSÃO.....	48
	REFERÊNCIAS.....	49

1 INTRODUÇÃO

Em projetos estruturais lajes e vigas sofrem predominantemente esforço de flexão, que dependendo da situação tornam o concreto armado inviável por limitações arquitetônicas ou por elevar demais os preços da estrutura, com aumento da seção transversal e acréscimo de aço na armadura longitudinal nos elementos fletidos. Então uma das técnicas construtivas que pode ser utilizada é o concreto protendido nesses elementos fletidos. Essa técnica consiste em adicionar uma armadura ativa constituída de aço de alta resistência (cordoalhas ou barras de aço) onde ela será pré-alongada por meio de um macaco hidráulico, fazendo a região da seção transversal que posteriormente será tracionada pelo carregamento externo em uma região inicialmente comprimida. Essa técnica construtiva apresenta várias vantagens em relação ao concreto armado, como apresentar maior resistência e durabilidade, redução na seção transversal, maior facilidade em vencer vãos livres, etc.

O item 3.1.4 da NBR 6118:2023 especifica que elementos de concreto protendido são aqueles nos quais parte das armaduras é previamente alongada por equipamentos especiais de protensão, como a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os deslocamentos da estrutura, bem como proporcionar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no estado-limite último (ELU). (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TECNICAS, 2023, p. 03).

Atualmente para facilitar e agilizar a fase de elaboração do projeto estrutural, existem alguns softwares que fazem análise de vigas protendidas, como software TQS com sua ferramenta de extensão comercial V-PRO, que auxilia o engenheiro na análise, verificação e projeto de viga protendidas com pré ou pós-tração, aderente ou não aderente (TQS, 2024). Outro software conhecido é o RLF-SecPro software para fins acadêmicos desenvolvido pelo Eng. M.Sc. Reginaldo Lopes Ferreira. O RLF-SecPro calcula as tensões normais nas bordas de uma seção transversal solicitada por um momento fletor e pela ação da protensão, também faz o dimensionamento da armadura de flexão no ELU (RLF-SecPro, 2024).

O V-PRO não é uma ferramenta de fácil acesso para engenheiros civis devido ser uma extensão comercial, entretanto, ele possui uma versão gratuita que permite somente análise de vigas biapoiadas, excluindo a possibilidade para análise de vigas contínuas. Já RLF-SecPro é pouco produtivo para uma análise completa de vigas protendida, pois restringe a verificação para uma única seção por processamento, além de não calcular o momento hiperestático de protensão, o exigindo como dado de entrada. Assim, este trabalho buscou suprir a necessidade

de realizar verificações completas dos estados limites de serviço e último, em vigas contínuas protendidas de forma gratuita por meio da criação de uma ferramenta computacional *open-source*.

1.1 Objetivo

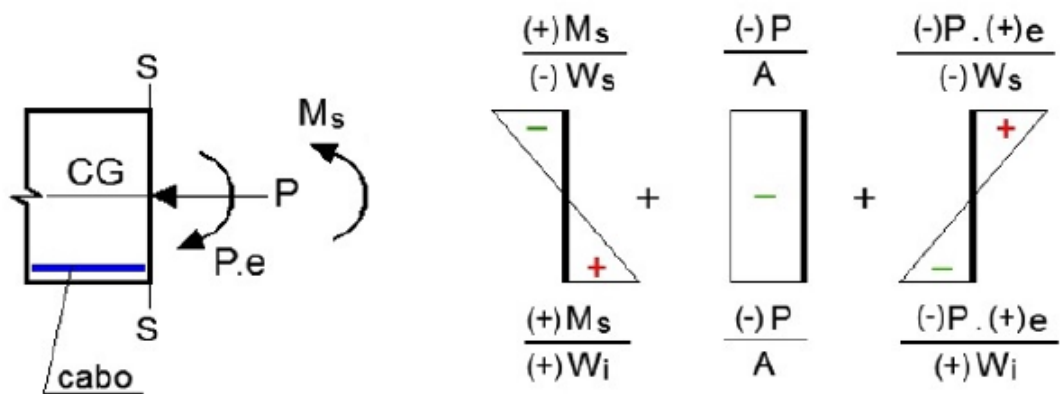
O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver uma ferramenta computacional utilizando a linguagem de programação Python e o paradigma de programação orientada a objeto (POO) denominada *PSContBeam* (*Prestressed Continuous Beam*), capaz de efetuar verificações nos estados limites ELS-F, ELS-D e ELU-ATO em vigas contínuas protendidas nível 2 (protensão limitada), seguindo as diretrizes de projeto presentes na NBR 6118:2023 para fins não lucrativos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Efeitos isostáticos

Os efeitos isostáticos presentes na seção transversal das vigas protendidas, se dão pelo somatório das tensões normais, devido ao esforço de flexão causado pelo carregamento externo e os esforços de compressão e flexão provenientes da aplicação da protensão com cabo excêntrico ao centro de gravidade da viga como ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Efeitos isostáticos em vigas protendidas.



Fonte: Adaptado de RLF-SecPro 4.0.

Logo a tensão normal total é descrita pela Equação 1.

$$\sigma = \frac{Ms}{W} + \frac{P}{A} + \frac{P * e}{W} \quad (1)$$

Onde:

σ = Tensão normal total;

P = Força de protensão;

Ms = Momento solicitante;

W = Módulo resistente elástico;

e = Excentricidade do cabo de protensão;

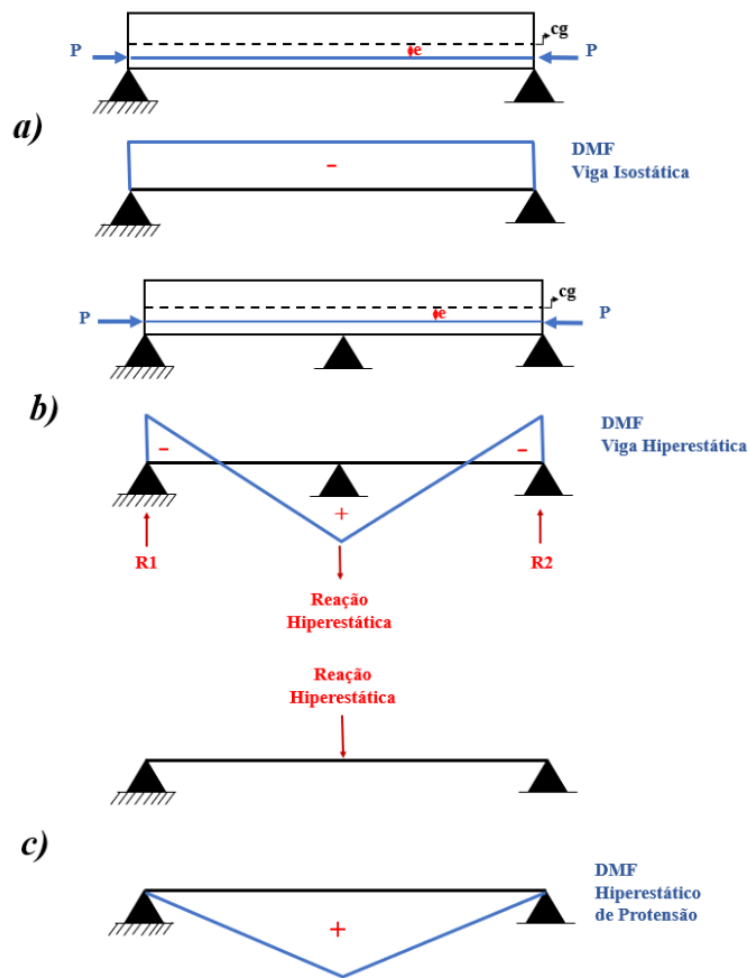
A = Área da seção transversal.

2.2 Hiperestático de protensão

Nas estruturas hiperestáticas, a continuidade da estrutura se opõe à livre deformação de cada tramo, sob o efeito das solicitações de protensão, dando origem a momentos fletores denominados momentos hiperestáticos de protensão (PFEIL, 1984, p.180).

A Figura 2 ilustra como a continuidade da estrutura protendida ocasiona o momento hiperestático de protensão. No caso A), encontramos uma viga isostática protendida com o cabo posicionado abaixo do centro de gravidade, e com uma força P aplicada nas extremidades, resultando em um momento fletor negativo e uniforme. Na situação B), ao introduzir uma restrição no caso A, o que torna a viga hiperestática protendida, surgem as reações de apoio, juntamente com a reação hiperestática (reação central), resultando em um momento fletor triangular devido ao surgimento dessas reações. O caso C) demonstra exclusivamente momento fletor proveniente da adição da reação hiperestática apresentada no caso B, está por sua vez oriunda da oposição à livre deformação da estrutura, este momento é o momento hiperestático de protensão.

Figura 2: Momento hiperestático de protensão.



Fonte: Autor (2024).

Então o momento fletor em uma viga hiperestática protendida pode ser descrito pela Equação 2.

$$M_{hiper} = M_{iso} + M_{p\ hiper} \quad (2)$$

Onde:

M_{hiper} = Momento fletor na viga hiperestática;

M_{iso} = Momento fletor na viga isostática;

$M_{p\ hiper}$ = Momento hiperestático de protensão.

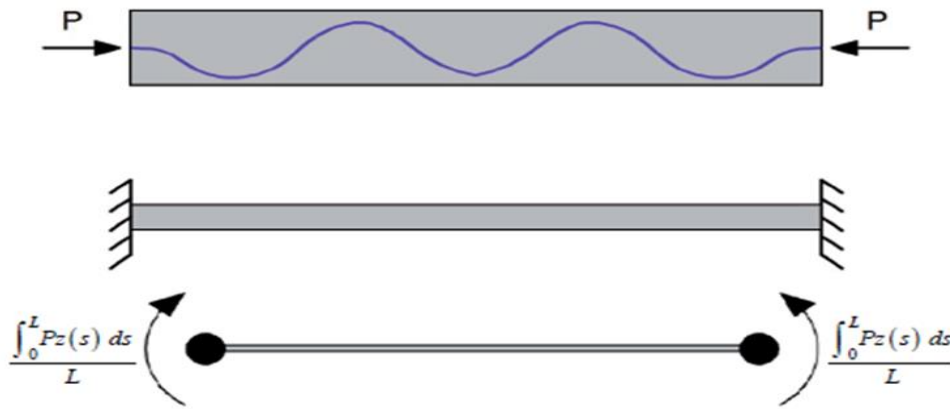
A tensão de análise em viga hiperestática protendida deve levar em consideração os efeitos isostáticos e hiperestáticos, assim a equação que descreve a tensão normal total na seção transversal da viga é.

$$\sigma = \frac{M_s}{W} + \frac{P}{A} + \frac{P * e}{W} + \frac{M_{p \text{ hiper}}}{W} \quad (3)$$

2.3 Método das forças nodais

Método das forças nodais é um método proposto por Silva e Sanchez Filho (2018), que simplifica obtenção do momento hiperestático de protensão e de fácil implementação computacional, ele é deduzido pelo método da flexibilidade aplicado em um elemento de barra bi engastada protendida. A Figura 3 ilustra o elemento de barra e o valor do momento nodal equivalente a aplicação da protensão descrito pelo método da flexibilidade.

Figura 3: Elemento de barra bi engastado protendido.



Fonte: Adaptado de Silva e Sanchez Filho (2018).

O momento nodal equivalente deduzido pelo método da flexibilidade é descrito pela Equação 4.

$$F_{nodal} = - \frac{\int_0^L Pz(s) ds}{L} \quad (4)$$

Onde:

F_{nodal} = Momento nodal descrito pelo método da flexibilidade;

P = força de protensão;

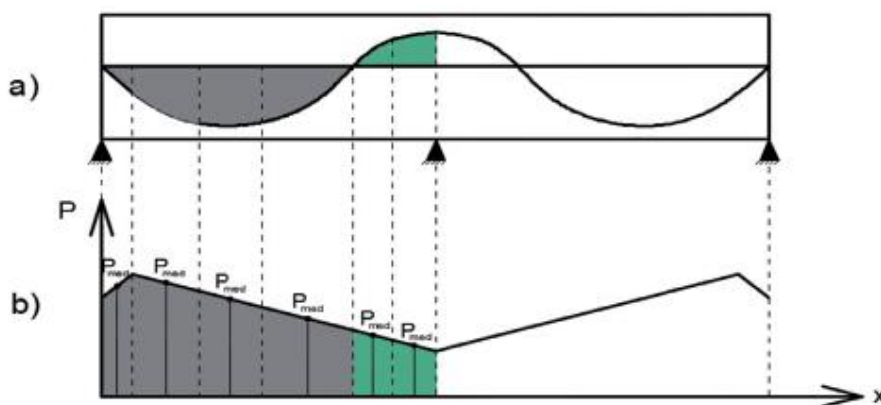
L = comprimento do vão livre;

$z(s)$ = cota do cabo de protensão.

A estratégia para utilizar o método das forças nodais consiste em dividir a viga em seções, calcular a área compreendida entre o cabo de protensão e o centroide da viga em cada seção e multiplicar pela força de protensão média da seção. (SILVA e SANCHEZ FILHO, 2018).

A Figura 4 ilustra como funciona essa estratégia numa viga contínua protendida, no caso A) temos que área do traçado do cabo em relação ao centroide é discretizada em trechos de pequenas áreas, já no caso B) temos a força média de protensão correspondente ao trecho de área. As áreas dos trechos que tiverem com o cabo acima do centroide (trechos verdes) devem ser consideradas como valores negativos, já em trechos que o cabo passar abaixo do centroide (trechos cinza) os valores para as áreas serão considerados positivos.

Figura 4: Viga contínua protendida.



Fonte: Adaptado de Silva e Sanchez Filho (2018).

Para obtenção do momento hiperestático de protensão utiliza-se o método das forças nodais na viga contínua hiperestática e calcula as reações hiperestáticas da viga, depois retira-se os vínculos centrais da viga tornando-a isostática e aplica-se forças pontuais com intensidade das reações hiperestáticas, por fim calcula o momento hiperestático de protensão. Quanto maior for a discretização do traçado do cabo mais preciso será o valor do momento hiperestático de protensão.

2.4 Estados Limites

As vigas que são analisadas neste trabalho são vigas contínuas de concreto protendido nível 2 (protensão limitada) ou seja a estrutura não fissura em serviço (estádio I), garantindo os benefícios estruturais, como maior longevidade e consideração absoluta da seção transversal. Os níveis de protensão e os estado limite de serviço que cada nível de protensão deve atender, estão descritos Tabela 13.4 da NBR 6118 (2023, p.80).

Tabela 1: Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura em função da classe de agressividade ambiental.

Tipo de concreto estrutural	Tipo de protensão	Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto simples	–	CAA I a CAA IV	Não há	–
Concreto armado	–	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente
	–	CAA II e CAA III	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm	
	–	CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I e CAA II		
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração	CAA I e CAA II	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D ^a	Combinação quase permanente
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração	CAA I a CAA IV	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação rara
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D ^a	Combinação frequente
Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens. No caso de pré-tração em estruturas de concreto pré-fabricado, devem ser atendidos os requisitos da ABNT NBR 9062. NOTA 1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2. NOTA 2 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.				
^a A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p = 50$ mm (ver Figura 3.1).				

Autor: Adaptado de NBR 6118 (2023, p.80).

2.4.1 Estado limite de serviço de formação de fissuras (ELS-F)

O item 3.2.2 da NBR 6118 (2023) descreve o ELS-F como o estado em que se inicia a formação de fissuras. Admite-se que este estado-limite é atingido quando a tensão de tração máxima na seção transversal for igual a $f_{ct,f}$.

$$f_{ct,f} = \alpha * f_{ct} \quad (5)$$

Onde:

f_{ct} = resistência a tração direta do concreto;

α = é o fator que relaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com resistência à tração direta.

A NBR 6118 (2023) ainda traz no item 17.3.1 que f_{ct} deve ser substituído pelo $f_{ctk,inf}$ como tensão máxima de tração no ELS-F. Então alterando o valor de f_{ct} por $f_{ctk,inf}$ a Equação 5 fica descrita como.

$$f_{ct,f} = \alpha * f_{ctk,inf} \quad (6)$$

Para o limite de tensão de compressão no ELS-F (combinação frequente) o item 17.2.4.4.1 da NBR 6118 (2023) estabelece que a tensão de compressão não deve ultrapassar $0,6f_{ck}$.

2.4.2 Estado limite de serviço de descompressão (ELS-D)

O item 3.2.5 da NBR 6118 (2023) descreve o ELS-D como estado no qual, em um ou mais pontos da seção transversal, a tensão normal é nula, não havendo tração no restante da seção. Verificação usual no caso do concreto protendido.

Para o limite de tensão de compressão no ELS-D (combinação quase permanente) o item 17.2.4.4.1 da NBR 6118 (2023) estabelece que a tensão de compressão não deve ultrapassar $0,45f_{ck}$.

2.4.3 Estado limite último no ato da protensão (ELU-ATO)

O ELU-ATO é uma verificação simplificada usual no caso do concreto protendido na ocasião da aplicação da protensão, para o estado limite de serviço de compressão excessiva (ELS-CE) estado em que as tensões de compressão atingem o limite convencional.

Para os limites do ELU-ATO o item 17.2.4.3.2 da NBR 6118 (2023) traz:

- a) A tensão máxima de compressão na seção de concreto, obtida das solicitações ponderadas de $\gamma_p = 1,1$ e $\gamma_f = 1$, não pode ultrapassar 70% da resistência característica f_{ckj} prevista para a idade de aplicação da protensão.
- b) A tensão máxima de tração do concreto não pode ultrapassar 1,2 vezes a resistência à tração f_{ctm} correspondente ao valor f_{ckj} especificado.

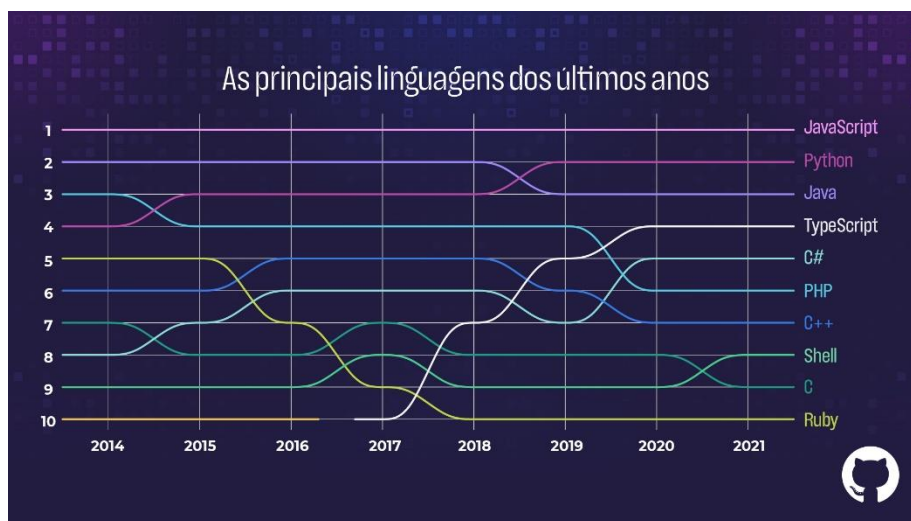
3 DESENVOLVIMENTO

3.1 Python

A linguagem de programação Python foi escolhida para o desenvolvimento desta ferramenta computacional por ser uma linguagem multiparadigma possibilitando a implementação do código utilizando o paradigma de programação orientada a objetos (POO), e pelos inúmeros pacotes Python para plotagem de gráficos, funções matemáticas e leituras de arquivos.

O Python foi desenvolvido no início da década de 1990 por Guido van Rossum, ele é uma linguagem fortemente tipada e de alto nível que facilita na aprendizagem e implementação. O Python vem ganhando popularidade entre programadores, desde iniciantes até profissionais experientes por ter inúmeras APIs e frameworks já disponíveis para uso, sendo a segunda linguagem mais utilizada em 2021 como mostrou o relatório anual Octoverse, do GitHub.

Figura 5: Principais linguagens de programação.

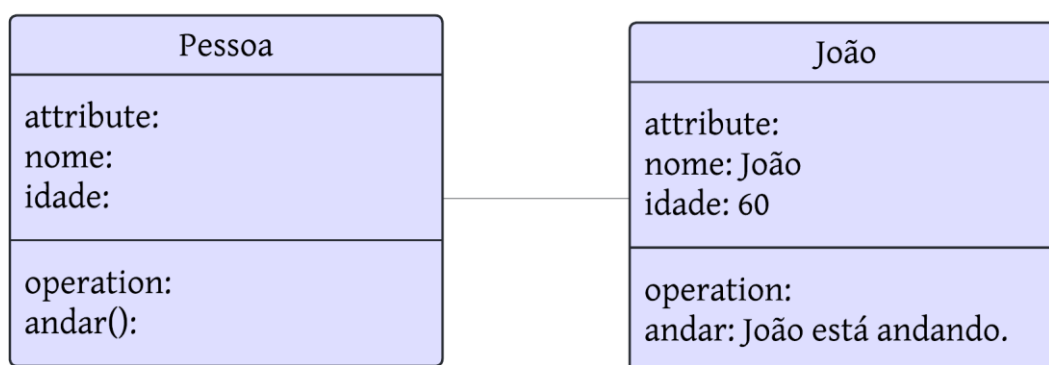


Fonte: Adaptado GitHub (2021).

3.1.1 Programação orientada a objeto (POO)

Python foi projetado desde o início como uma linguagem de programação multiparadigma. Isso significa que ele suporta diferentes estilos de programação, permitindo que os desenvolvedores escrevam código de forma imperativa, funcional e orientada a objetos (POO). O POO é baseado nos conceitos de classes e objetos, onde as classes são moldes/modelos que contêm atributos de classes e métodos, já os objetos são instâncias das classes e podem simular entidades de problemas reais. A Figura 6 demonstra por meio do diagrama UML como o objeto *João* é instância da classe *Pessoa* e como *João* possui os atributos e métodos implementados na classe *Pessoa*. A UML (*Linguagem Unificada de Modelagem*), é uma linguagem gráfica para visualização, especificação, e documentação de componentes num sistema de software. Ela proporciona uma forma-padrão para a preparação de planos de arquitetura em projetos (BOOCH, RUMBAUCH e JACOBSON, 2012).

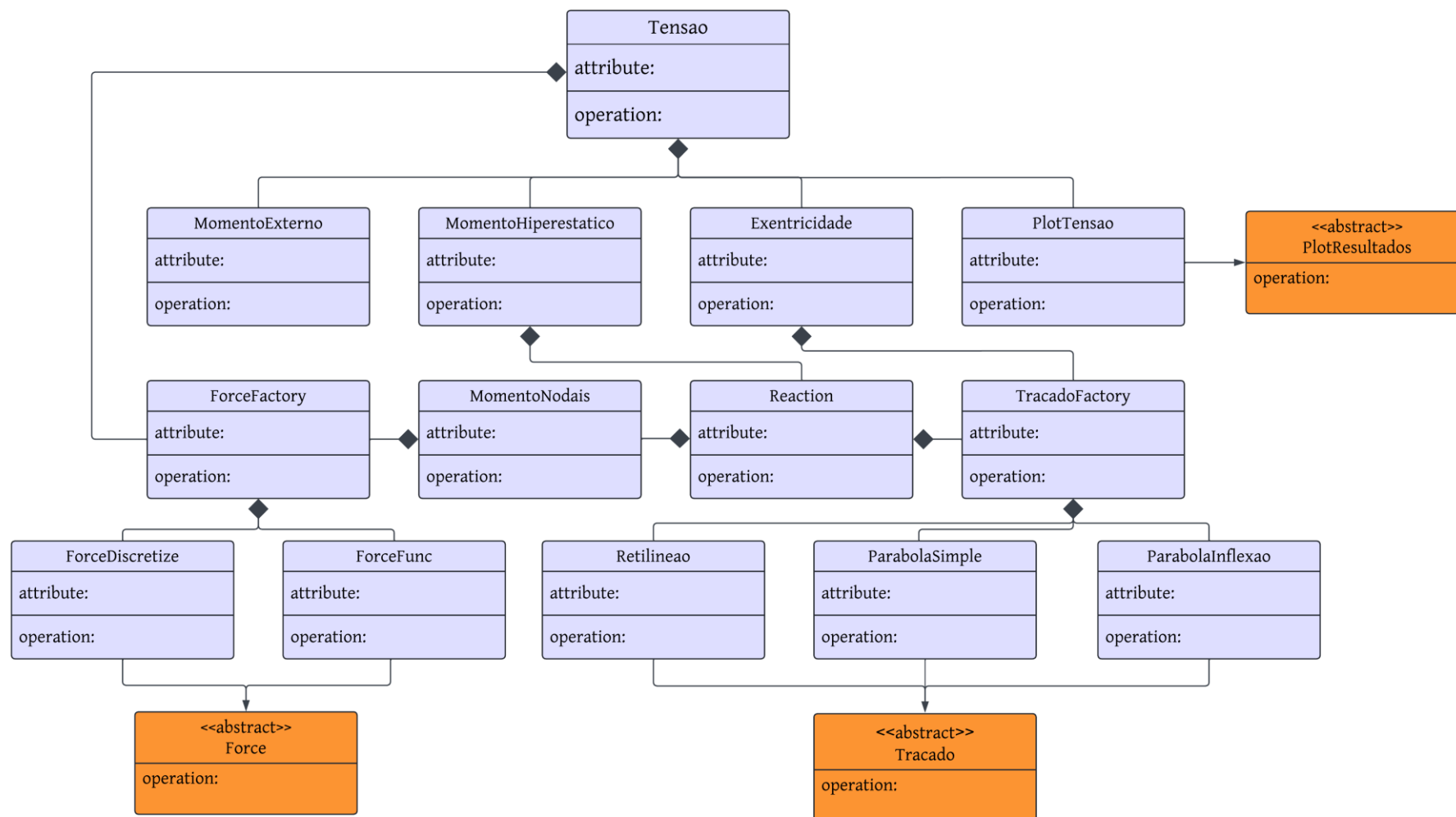
Figura 6: Diagrama UML da classe Pessoa.



Fonte: Autor (2024).

O *PSContBeam* utilizou-se do paradigma POO, que facilitou na organização e flexibilidade do código, abordando a resolução do problema das verificações das tensões normais nas vigas de forma mais realista, com objetos que representam as entidades do problema. A Figura 7 descreve o diagrama UML das principais classes e relacionamentos implementados no código.

Figura 7: Diagrama UML das principais classes implementas no código.



Fonte: Autor (2024).

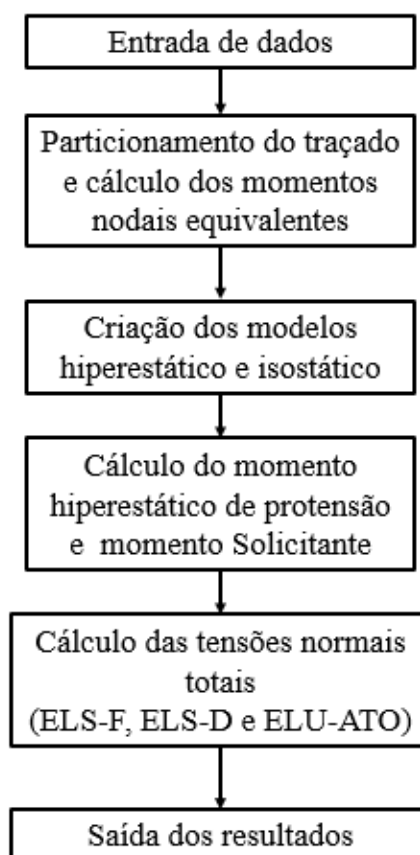
Neste diagrama a seta representa a relação de herança, que é o relacionamento entre classes em que uma classe chamada de subclasse (classe filha, classe derivada) é uma extensão, um subtipo, de outra classe chamada de superclasse (classe pai, classe mãe, classe base). Devido a isto, a subclasse consegue reaproveitar os atributos e métodos dela. Além dos que venham a ser herdados, a subclasse pode definir seus próprios membros. (CARVALHO, 2016, p.80)

O losango preenchido representa a relação de composição. onde a classe agregada só pode ser criada dentro da classe agregadora. Isso significa que, se o objeto agregador for destruído, o objeto agregado também será eliminado.

3.2 Estrutura do *PSContBeam*

A execução do *PSContBeam* ocorre mediante o código *main.py* presente na raiz do software. O *main.py* solicita os dados de entrada da viga contínua protendida, que são passados por meio de um arquivo com extensão *json* (*JavaScript Object Notation*). Este tipo de arquivo foi escolhido pois é de fácil manipulação utilizando o pacote *json* já presente no Python 3.10.11, versão onde esta ferramenta foi desenvolvida. O código foi concebido com base em uma estrutura fundamental de ações descrita pelo fluxograma mostrado na Figura 8. Essa estrutura serve como o núcleo do programa e, embora o código seja *open-source* e possa ser modificado para adotar diferentes configurações de classes e relações, é essencial que qualquer nova configuração mantenha a essência da estrutura básica descrita neste trabalho.

Figura 8: Fluxograma da estrutura básica do *PSContBeam*.



Fonte: Autor (2024).

3.3 Dados de entrada

Os dados de entrada que são repassados pelo *arquivo.json* são interpretados pelo código *main.py* como um dicionário Python. Dentro deste dicionário os dados são divididos em cinco grupos sendo eles.

- Estrutura: Contém os dados dos nós, elementos de barras e vinculações.
- Propriedades: Contém dados das propriedades físicas e geométricas da viga.
- Traçado: Contém o tipo de traçado, suas coordenadas iniciais e finais tanto na posição horizontal quanto na vertical.
- Carregamento: Compreende o valor do carregamento uniformemente distribuído sobre a viga, e o tipo da carga de utilização de edificações.
- Concreto: Engloba o f_{ck} do concreto e o tipo do cimento, além da idade do concreto no momento da aplicação da força de protensão na viga.

- Força de protensão: Contém a coordenada horizontal e a magnitude das forças no $t = 0$ para análise do ELU-ATO e $t = \infty$ para os ELS-D e ELS-F.

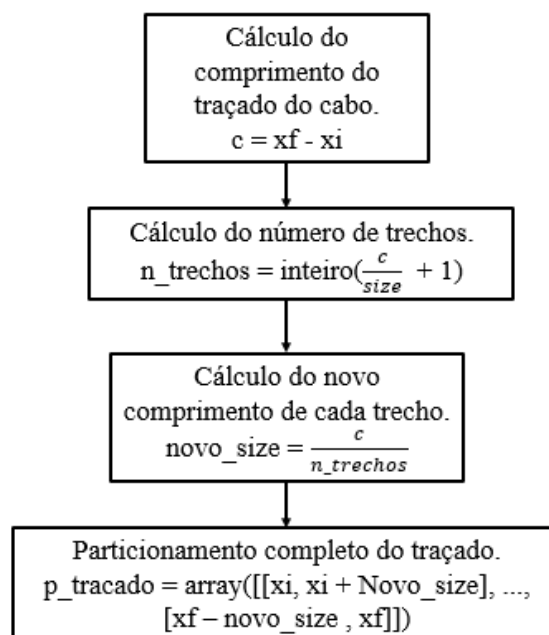
3.4 Obtenção dos momentos nodais

Para obtenção dos momentos nodais é necessário discretizar o traçado, calcular as áreas dos trechos discretizados e por fim aplicar o método das forças nodais. Todos esses passos são feitos pela classe *MomentosNodais*. Esta classe recebe os dados do Traçado e Força de protensão.

3.4.1 Discretização do traçado do cabo de protensão

O método *discretize* da classe *MomentosNodais* se encarrega de particionar o traçado em pequenos trechos. O método adota um valor padrão para os comprimentos dos trechos (*size* = 0,5 metros), no entanto, o usuário tem a flexibilidade de ajustar esse valor caso identifique que o particionamento deve ser maior para uma melhor aproximação do momento hiperestático de protensão. A partir do valor de *size* o código executa o processo descrito na Figura 9 para particionar o traçado.

Figura 9: Fluxograma do particionamento do traçado.



Fonte: Autor (2024).

3.4.2 Tipos de traçados para cabos de protensão

O usuário tem acesso a alguns tipos de traçados para cabos de protensão. São eles os traçados de cabos retilíneos, parabólicos (2º grau) e concordância suave de parábolas do 2º grau com inflexão. Eles foram implementados nas classes *Retilineo*, *ParabolaSimples* e *ParabolaInflexao* utilizando as Equações 7, 8 e 9 respectivamente.

$$f_{ret}(x) = a * x + b \quad (7)$$

$$f_{curvo}(x) = c * x^2 + d * x + e \quad (8)$$

$$f_{inf}(x) = \begin{cases} f * x^2 + f_{inf}(x_i), & \text{se } x_i \leq x < k * (x_f - x_i) \\ g * (x_f - x)^2 + f_{inf}(x_f), & \text{se } k * (x_f - x_i) \leq x \leq x_f \end{cases} \quad (9)$$

Onde:

f_{ret} = Função para o traçado retilíneo;

f_{curvo} = Função para o traçado parabólico;

f_{inf} = Função para o traçado parabólico com inflexão;

k = Ponto de inflexão;

x_i = Ponto do início do traçado;

x_f = Ponto final do traçado;

a, b, c, f, g = Constantes da função.

3.4.3 Quadratura de Gauss

Para cálculo das áreas entre o traçado discretizado e o centro de gravidade da viga foi criada a classe *Gauss*, classe essa que implementa a técnica de quadratura de Gauss para calcular integrais numéricas, essa técnica é muito eficiente para funções polinomiais ou aproximadamente polinomiais. As fórmulas da quadratura de Gauss são sempre dadas sobre um domínio de referência $(-1, 1)$ (FISH e BELYTCHKO, 2009, p.67). Por isso, deve-se achar um $\xi = g(x)$ tal que para $a \leq x \leq b$, $-1 \leq \xi \leq 1$ Dessa maneira, tem-se:

$$\int_a^b P(x)dx = \int_{-1}^1 P(\xi)d\xi \quad (10)$$

A ideia central deste método para n pontos é obter a solução da integral de uma função $P(\xi)$ no domínio $(-1, 1)$ em termos de uma soma.

$$\int_{-1}^1 P(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n w_i P_n(\xi_i) \quad (11)$$

Onde:

$P(z)$ = função para integração no domínio $(-1, 1)$;

w_i = Pesos de Gauss-Legendre.

Como as funções do traçado do cabo são funções polinomiais do 2º grau ou do 1º grau, foram utilizados somente 2 pontos de Gauss para a resolução da integral numérica. O Número de pontos e os pesos correspondentes são demonstrados na Tabela 2.

Tabela 2: Posição de pontos de Gauss e pesos correspondentes.

n_{gp}	Localização, ξ_i	Pesos, W_i
1	0,0	2,0
2	$\pm 0,577350292$	1,0
3	$\pm 0,577350292$	0,555555556
	0,0	0,888888889
4	$\pm 0,8611363116$	0,347854845
	$\pm 0,3399810436$	0,652145155
5	$\pm 0,9061798459$	0,236926885
	$\pm 0,5384693101$	0,478628671
	$\pm 0,0$	0,568888889
6	$\pm 0,9324695142$	0,171324492
	$\pm 0,6612093865$	0,360761573
	$\pm 0,2386191861$	0,467913935

Fonte: Adaptado de Fish e Belytschko (2009).

3.4.4 Aplicação do método das forças nodais

Com o cálculo das áreas completo a instância da classe *ForceFactory* calcula automaticamente a força de protensão média entre as áreas, e por fim aplica-se o método das forças nodais demonstrada no capítulo 3 e descrita pela Equação 12. Os valores dos momentos nodais e suas posições são guardados em um atributo de classe acessado pela *property m*.

$$M = -\frac{f_{méd} * A}{L} \quad (12)$$

Onde:

M = momento nodal equivalente;

$f_{méd}$ = Força média de protensão;

A = Área do trecho do traçado;

L = Comprimento do trecho.

3.5 Cálculo das tensões normais

Depois da obtenção dos momentos nodais, as classes *MomentoHiperestatico* e *MomentoExterno* criam os modelos de viga hiperestática com os momentos nodais aplicados, viga isostática com força pontual aplicada de intensidade igual a reação hiperestática e a viga hiperestática com o carregamento externo, utilizando os dados informados no *arquivo.json*. Para realizar essa tarefa e para obtenção dos diagramas de momentos fletores dessas vigas a classe utiliza o pacote *anaStruct* desenvolvido por Ritchie Vink. O *anaStruct* é uma implementação Python do método de elementos finitos 2D para calcular as forças e deslocamentos nos elementos estruturais. São implementados no *anaStruct* o elemento de treliça e o elemento de pórtico plano seguindo as hipóteses de viga clássica de Euler-Bernoulli-Navier. Além de cálculos lineares, também há suporte para cálculos não lineares (VINK, 2020).

Utilizando este diagrama do momento hiperestático de protensão e o diagrama do momento fletor devido o carregamento externo, a classe *Tensao* executa os cálculos de tensões normais totais para o ELS-F, ELS-D e ELU-ATO utilizando a equação 03.

3.6 Apresentação dos resultados

Os resultados das tensões na seção transversal da viga hiperestática protendida são exibidos por meio de uma janela de visualização interativa, implementada pela classe *PlotTensao* com a utilização do pacote Matplotlib criado por John D. Hunter em 2003.

O Matplotlib é uma biblioteca para fazer gráficos 2D de arrays em Python. Embora tenha origem na emulação dos comandos gráficos do MATLAB, é independente do MATLAB e pode ser usado de forma Pythonica, orientada a objetos. Embora Matplotlib seja escrito principalmente em Python puro, ele faz uso intenso de NumPy e outros códigos de extensão para fornecer bom desempenho mesmo para grandes arrays (HUNTER, 2008).

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Foram elaborados três exemplos de vigas hiperestáticas protendidas para validar a eficácia do *PSContBeam*. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados fornecidos pelo V-PRO do TQS, para exemplos 02 e 03, e resultados calculados com auxílio de planilha eletrônica para o exemplo 01.

Para calcular o erro percentual do *PSContBeam* em relação às outras ferramentas mencionadas anteriormente, os dados foram normalizados com base no maior valor absoluto da tensão analisada. Esse procedimento foi adotado para evitar que, em valores onde as tensões estivessem entre 0 e 1, o cálculo do erro relativo resultasse em um valor exageradamente elevado, o que não corresponderia, na prática, a uma diferença tão significativa quanto à proposta pelo erro relativo. Assim, para o cálculo do erro percentual é dado pela Equação 13.

$$Erro(\%) = Abs\left(\frac{ve - vp}{N} \cdot 100\right) \quad (13)$$

Onde:

Erro = Erro percentual da tensão;

N = Valor máximo absoluto da tensão calculado pela ferramenta de comparação;

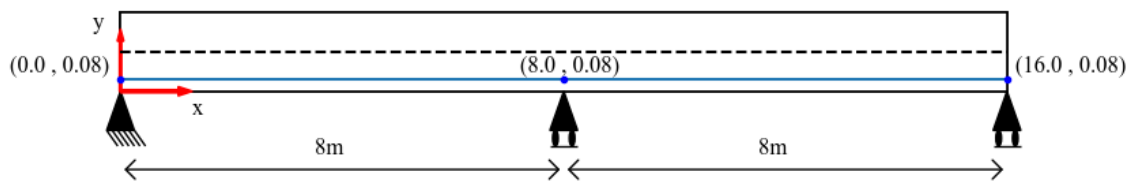
ve = Valor de tensão calculado pela ferramenta de comparação;

vp = Valor de tensão calculado pelo *PSContBeam*.

4.1 Exemplo 01

O exemplo 01 se trata de uma viga hiperestática protendida, com o módulo de elasticidade de 30 GPa e seção transversal retangular de 20 x 50 cm, resultando nas seguintes propriedades geométricas, área de $0,1 \text{ m}^2$, momento de inércia de $2,083 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ e módulo resistente elástico de $8,333 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. O cabo de protensão apresenta um traçado retilíneo, passando abaixo do centro de gravidade da viga. As coordenadas x e y dos pontos notáveis do cabo de protensão, utilizados para determinação do traçado são indicados na Figura 10 em metros.

Figura 10: Viga hiperestática protendida com traçado retilíneo.

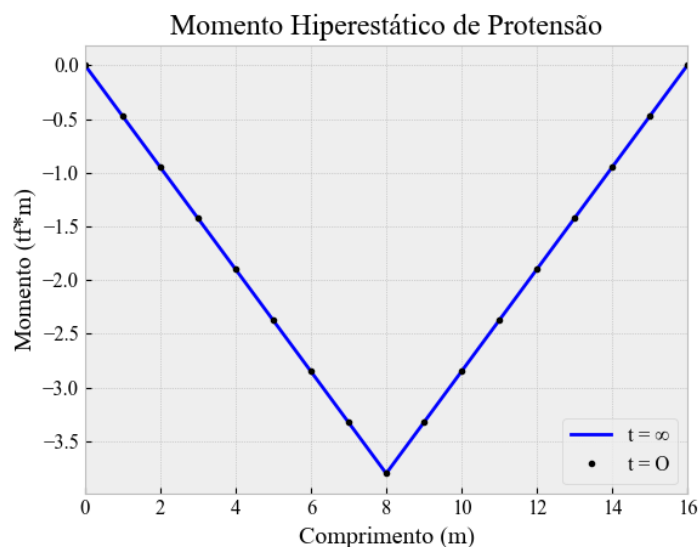


Fonte: Autor (2024).

Para este exemplo a força de protensão em $t = 0$ e $t = \infty$ permanece constante ao longo da viga com intensidade de 14,9 tf.

A Figura 11 demonstra o momento hiperestático de protensão, calculado pelo *PSContBeam*, para força de protensão em $t = 0$ e $t = \infty$.

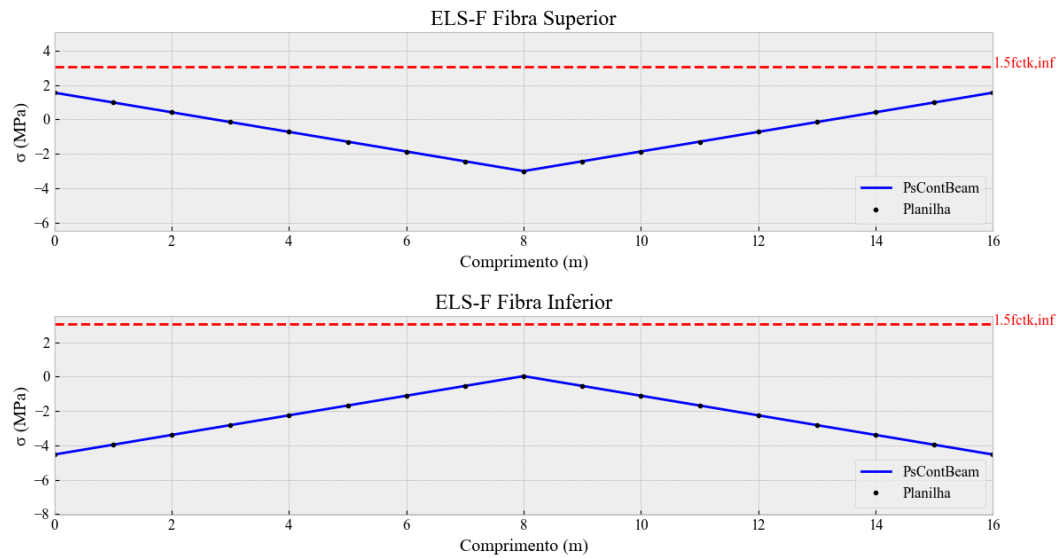
Figura 11: Momento hiperestático de protensão do exemplo 01.



Fonte: Autor (2024).

As Figuras 12, 13 e 14 e as Tabelas 3, 4 e 5 apresentam de forma gráfica e numérica, os resultados das tensões normais calculados pelo *PSContBeam* e por meio de uma planilha eletrônica, para verificação dos estados limites de serviço ELS-F e ELS-D, além do estado limite último ELU-ATO.

Figura 12: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 01.



Fonte: Autor (2024).

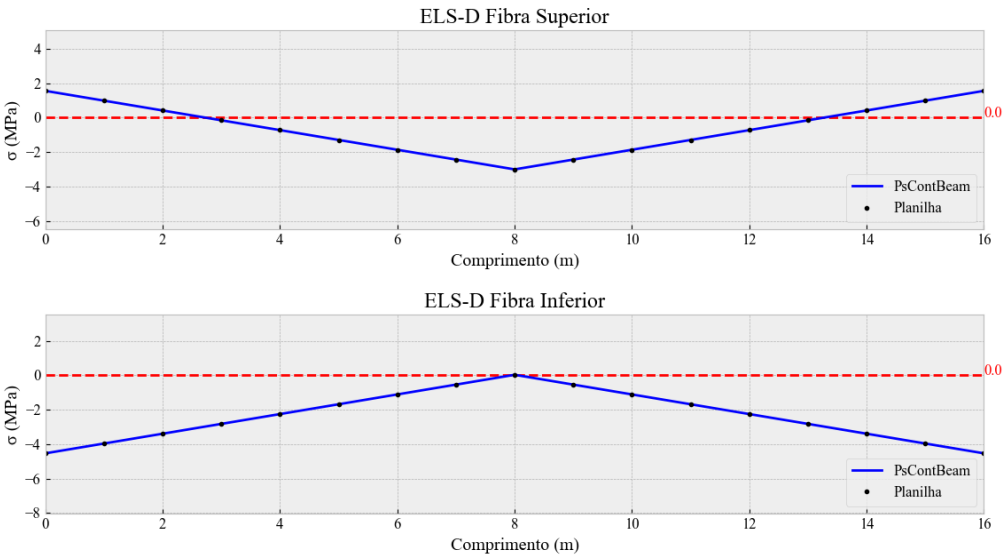
Tabela 3: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 01.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	Planilha Eletrônica (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	Planilha Eletrônica (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	1,550	1,550	0,00	-4,530	-4,530	0,001
1,0	0,980	0,980	0,00	-3,960	-3,960	0,003
2,0	0,410	0,410	0,01	-3,390	-3,390	0,004
3,0	-0,160	-0,160	0,01	-2,820	-2,820	0,005
4,0	-0,730	-0,730	0,01	-2,250	-2,250	0,007
5,0	-1,300	-1,300	0,01	-1,680	-1,680	0,008
6,0	-1,870	-1,870	0,01	-1,110	-1,110	0,010
7,0	-2,440	-2,440	0,02	-0,540	-0,540	0,011
8,0	-3,010	-3,010	0,02	0,030	0,030	0,013
9,0	-2,440	-2,440	0,02	-0,540	-0,540	0,011
10,0	-1,870	-1,870	0,01	-1,110	-1,110	0,010
11,0	-1,300	-1,300	0,01	-1,680	-1,680	0,008
12,0	-0,730	-0,730	0,01	-2,250	-2,250	0,007
13,0	-0,160	-0,160	0,01	-2,820	-2,820	0,005
14,0	0,410	0,410	0,01	-3,390	-3,390	0,004

15,0	0,980	0,980	0,00	-3,960	-3,960	0,003
16,0	1,550	1,550	0,00	-4,530	-4,530	0,001

Fonte: Autor (2024).

Figura 13: Tensões normais no ELS-D para o exemplo 01.



Fonte: Autor (2024).

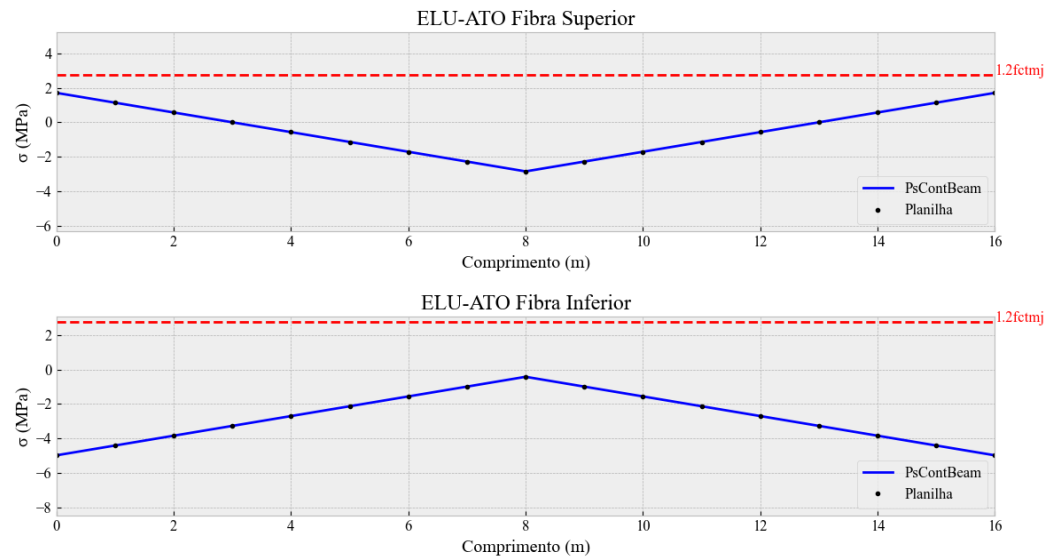
Tabela 4: Tensões normais no ELS-D para o exemplo 01.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	Planilha Eletrônica (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	Planilha Eletrônica (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	1,550	1,550	0,00	-4,530	-4,530	0,001
1,0	0,980	0,980	0,00	-3,960	-3,960	0,003
2,0	0,410	0,410	0,01	-3,390	-3,390	0,004
3,0	-0,160	-0,160	0,01	-2,820	-2,820	0,005
4,0	-0,730	-0,730	0,01	-2,250	-2,250	0,007
5,0	-1,300	-1,300	0,01	-1,680	-1,680	0,008
6,0	-1,870	-1,870	0,01	-1,110	-1,110	0,010
7,0	-2,440	-2,440	0,02	-0,540	-0,540	0,011
8,0	-3,010	-3,010	0,02	0,030	0,030	0,013
9,0	-2,440	-2,440	0,02	-0,540	-0,540	0,011
10,0	-1,870	-1,870	0,01	-1,110	-1,110	0,010
11,0	-1,300	-1,300	0,01	-1,680	-1,680	0,008
12,0	-0,730	-0,730	0,01	-2,250	-2,250	0,007
13,0	-0,160	-0,160	0,01	-2,820	-2,820	0,005
14,0	0,410	0,410	0,01	-3,390	-3,390	0,004
15,0	0,980	0,980	0,00	-3,960	-3,960	0,003

16,0	1,550	1,550	0,00	-4,530	-4,530	0,001
------	-------	-------	------	--------	--------	-------

Fonte: Autor (2024).

Figura 14: Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 01.



Fonte: Autor (2024).

Tabela 5: Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 01.

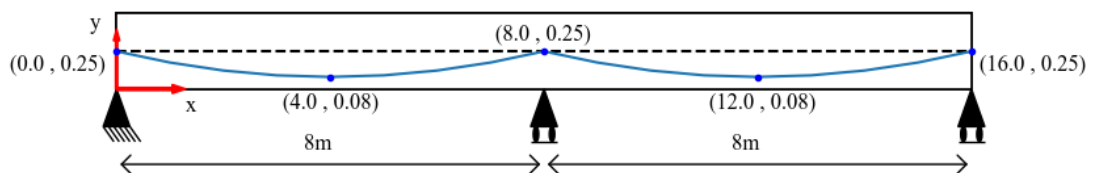
x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	Planilha Eletrônica (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	Planilha Eletrônica (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	1,705	1,705	0,002	-4,983	-4,983	0,001
1,0	1,135	1,135	0,004	-4,413	-4,413	0,002
2,0	0,565	0,565	0,006	-3,843	-3,843	0,004
3,0	-0,005	-0,005	0,009	-3,273	-3,273	0,005
4,0	-0,575	-0,575	0,011	-2,703	-2,703	0,006
5,0	-1,145	-1,145	0,013	-2,133	-2,133	0,008
6,0	-1,715	-1,715	0,016	-1,563	-1,563	0,009
7,0	-2,285	-2,285	0,018	-0,993	-0,993	0,010
8,0	-2,855	-2,855	0,020	-0,423	-0,423	0,012
9,0	-2,285	-2,285	0,018	-0,993	-0,993	0,010
10,0	-1,715	-1,715	0,016	-1,563	-1,563	0,009
11,0	-1,145	-1,145	0,013	-2,133	-2,133	0,008
12,0	-0,575	-0,575	0,011	-2,703	-2,703	0,006
13,0	-0,005	-0,005	0,009	-3,273	-3,273	0,005
14,0	0,565	0,565	0,006	-3,843	-3,843	0,004
15,0	1,135	1,135	0,004	-4,413	-4,413	0,002
16,0	1,705	1,705	0,002	-4,983	-4,983	0,001

Fonte: Autor (2024).

4.2 Exemplo 02

O exemplo 02 se trata de uma viga hiperestática protendida, com as mesmas propriedades físicas e geométricas do exemplo anterior. O cabo de protensão para este exemplo apresenta dois traçados parabólicos, saindo do centro de gravidade nos apoios e passando abaixo dele nos vãos livres, tendo valores mínimos para as alturas localizados nos centros desses vãos. As coordenadas x e y dos pontos notáveis do cabo de protensão, utilizados para determinação do traçado são indicados na Figura 15 em metros.

Figura 15: Viga hiperestática protendida com traçado curvo.

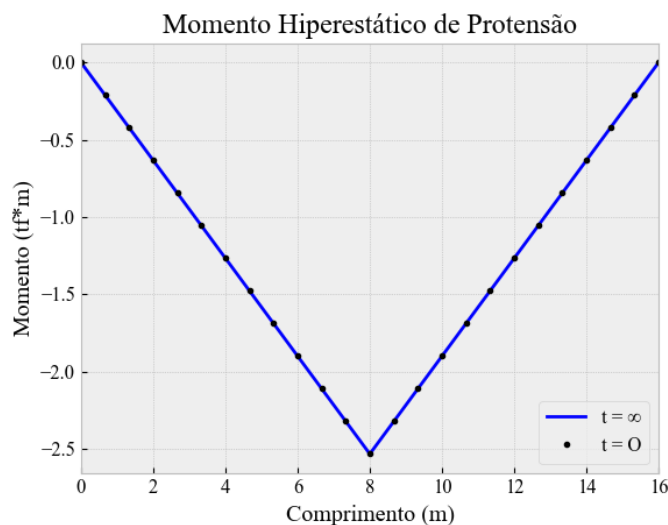


Fonte: Autor (2024).

Para o exemplo 02 a força de protensão em $t = 0$ e $t = \infty$ permanece constante ao longo da viga com intensidade de 14,9 tf.

A Figura 16 demonstra o momento hiperestático de protensão, calculado pelo *PSContBeam*, para força de protensão em $t = 0$ e $t = \infty$.

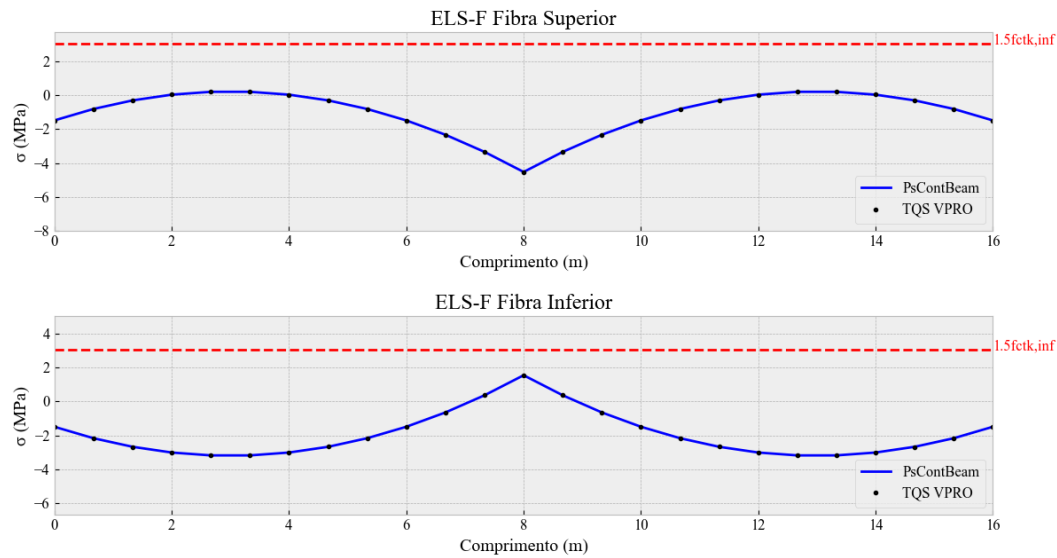
Figura 16: Momento hiperestático de protensão do exemplo 02.



Fonte: Autor (2024).

As Figuras 17, 18 e 19 e as Tabelas 6, 7 e 8 apresentam de forma gráfica e numérica, os resultados das tensões normais calculados pelo *PSContBeam* e pela extensão VPRO do TQS, para verificação dos estados limites de serviço ELS-F e ELS-D, além do estado limite último ELU-ATO.

Figura 17: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 02.



Fonte: Autor (2024).

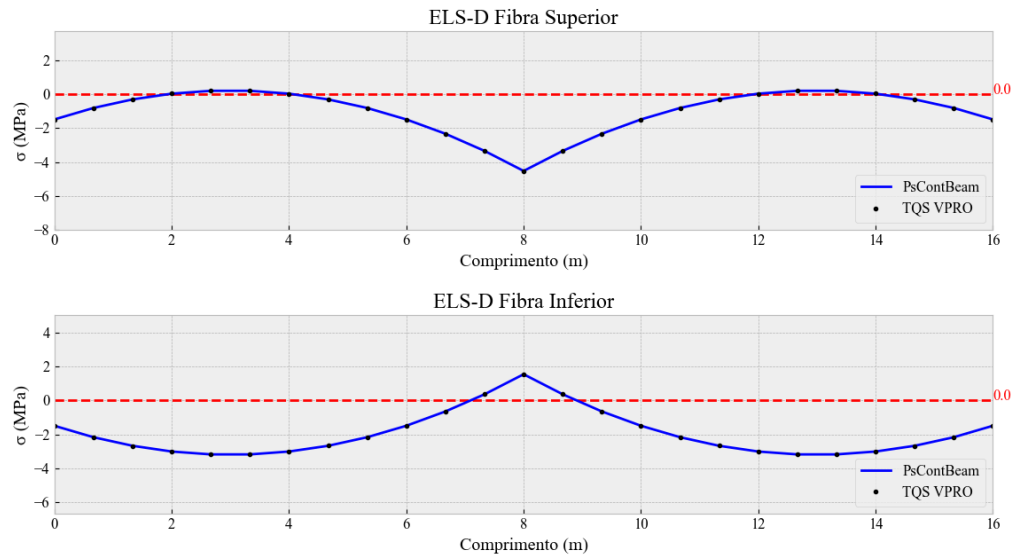
Tabela 6: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 02.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	-1,490	-1,490	0,00	-1,490	-1,490	0,00
0,7	-0,810	-0,814	0,08	-2,170	-2,166	0,11
1,3	-0,300	-0,309	0,19	-2,680	-2,671	0,27
2,0	0,040	0,030	0,22	-3,020	-3,010	0,32
2,7	0,210	0,198	0,26	-3,190	-3,178	0,36
3,3	0,210	0,199	0,24	-3,190	-3,179	0,34
4,0	0,030	0,030	0,00	-3,010	-3,010	0,01
4,7	-0,320	-0,308	0,27	-2,660	-2,672	0,39
5,3	-0,830	-0,815	0,34	-2,150	-2,165	0,48
6,0	-1,500	-1,490	0,22	-1,480	-1,490	0,31
6,7	-2,340	-2,335	0,10	-0,640	-0,645	0,15
7,3	-3,350	-3,346	0,08	0,370	0,366	0,11
8,0	-4,530	-4,530	0,01	1,550	1,550	0,01
8,7	-3,350	-3,346	0,08	0,370	0,366	0,11

9,3	-2,340	-2,335	0,10	-0,640	-0,645	0,15
10,0	-1,500	-1,490	0,22	-1,480	-1,490	0,31
10,7	-0,830	-0,815	0,34	-2,150	-2,165	0,48
11,3	-0,300	-0,308	0,17	-2,660	-2,672	0,39
12,0	0,030	0,030	0,00	-3,010	-3,010	0,01
12,7	0,210	0,199	0,24	-3,190	-3,179	0,34
13,3	0,210	0,198	0,26	-3,190	-3,178	0,36
14,0	0,040	0,030	0,22	-3,020	-3,010	0,32
14,7	-0,300	-0,309	0,19	-2,680	-2,671	0,27
15,3	-0,810	-0,814	0,08	-2,170	-2,166	0,11
16,0	-1,490	-1,490	0,00	-1,490	-1,490	0,00

Fonte: Autor (2024).

Figura 18: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 02.



Fonte: Autor (2024).

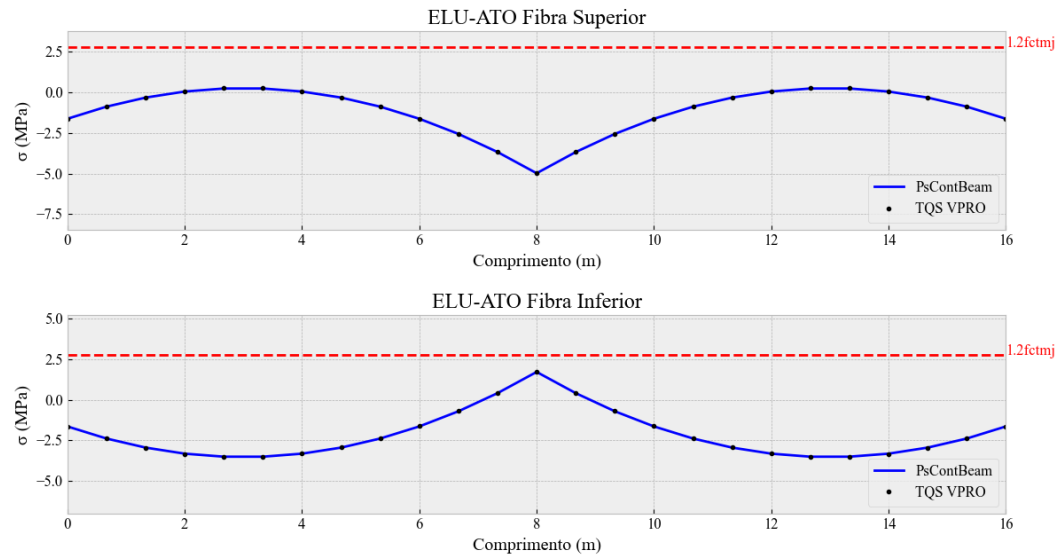
Tabela 7: Tensões normais no ELS-D para o exemplo 02.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	-1,490	-1,490	0,00	-1,490	-1,490	0,00
0,7	-0,810	-0,814	0,08	-2,170	-2,166	0,11
1,3	-0,300	-0,309	0,19	-2,680	-2,671	0,27
2,0	0,040	0,030	0,22	-3,020	-3,010	0,32
2,7	0,210	0,198	0,26	-3,190	-3,178	0,36
3,3	0,210	0,199	0,24	-3,190	-3,179	0,34
4,0	0,030	0,030	0,00	-3,010	-3,010	0,01

4,7	-0,320	-0,308	0,27	-2,660	-2,672	0,39
5,3	-0,830	-0,815	0,34	-2,150	-2,165	0,48
6,0	-1,500	-1,490	0,22	-1,480	-1,490	0,31
6,7	-2,340	-2,335	0,10	-0,640	-0,645	0,15
7,3	-3,350	-3,346	0,08	0,370	0,366	0,11
8,0	-4,530	-4,530	0,01	1,550	1,550	0,01
8,7	-3,350	-3,346	0,08	0,370	0,366	0,11
9,3	-2,340	-2,335	0,10	-0,640	-0,645	0,15
10,0	-1,500	-1,490	0,22	-1,480	-1,490	0,31
10,7	-0,830	-0,815	0,34	-2,150	-2,165	0,48
11,3	-0,320	-0,308	0,27	-2,660	-2,672	0,39
12,0	0,030	0,030	0,00	-3,010	-3,010	0,01
12,7	0,210	0,199	0,24	-3,190	-3,179	0,34
13,3	0,210	0,198	0,26	-3,190	-3,178	0,36
14,0	0,040	0,030	0,22	-3,020	-3,010	0,32
14,7	-0,300	-0,309	0,19	-2,680	-2,671	0,27
15,3	-0,810	-0,814	0,08	-2,170	-2,166	0,11
16,0	-1,490	-1,490	0,00	-1,490	-1,490	0,00

Fonte: Autor (2024).

Figura 19: Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 02.



Fonte: Autor (2024).

Tabela 8: Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 02.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)

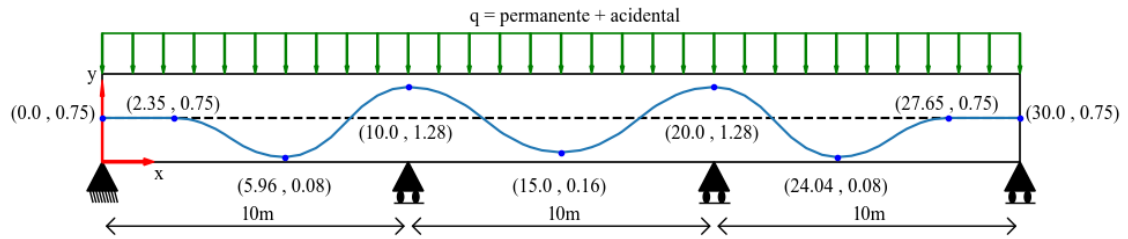
0,0	-1,640	-1,639	0,02	-1,640	-1,639	0,03
0,7	-0,890	-0,895	0,10	-2,390	-2,383	0,20
1,3	-0,330	-0,339	0,19	-2,950	-2,939	0,33
2,0	0,040	0,033	0,14	-3,320	-3,311	0,26
2,7	0,230	0,218	0,24	-3,510	-3,496	0,39
3,3	0,230	0,219	0,22	-3,510	-3,497	0,37
4,0	0,030	0,033	0,06	-3,310	-3,311	0,02
4,7	-0,350	-0,338	0,23	-2,930	-2,940	0,27
5,3	-0,910	-0,896	0,28	-2,370	-2,382	0,34
6,0	-1,650	-1,639	0,22	-1,630	-1,639	0,26
6,7	-2,570	-2,569	0,02	-0,700	-0,709	0,26
7,3	-3,690	-3,681	0,18	0,410	0,403	0,20
8,0	-4,980	-4,983	0,05	1,710	1,705	0,15
8,7	-3,690	-3,681	0,18	0,410	0,403	0,20
9,3	-2,570	-2,569	0,02	-0,700	-0,709	0,26
10,0	-1,650	-1,639	0,22	-1,630	-1,639	0,26
10,7	-0,910	-0,896	0,28	-2,370	-2,382	0,34
11,3	-0,350	-0,338	0,23	-2,930	-2,940	0,27
12,0	0,030	0,033	0,06	-3,310	-3,311	0,02
12,7	0,230	0,219	0,22	-3,510	-3,497	0,37
13,3	0,230	0,218	0,24	-3,510	-3,496	0,39
14,0	0,040	0,033	0,14	-3,320	-3,311	0,26
14,7	-0,330	-0,339	0,19	-2,950	-2,939	0,33
15,3	-0,890	-0,895	0,10	-2,390	-2,383	0,20
16,0	-1,640	-1,639	0,02	-1,640	-1,639	0,03

Fonte: Autor (2024).

4.3 Exemplo 03

O exemplo 03 traz uma viga hiperestática protendida, com o módulo de elasticidade de 30 GPa e seção transversal retangular de 60 x 150 cm, resultando nas seguintes propriedades geométricas, área de 0,9 m², momento de inércia de $1,69 \cdot 10^{-1} \text{ m}^4$ e módulo resistente elástico de $2,25 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$. A viga recebe um carregamento externo, sendo o somatório da sobrecarga permanente de 0,5 tf/m e uma sobrecarga acidental de 0,3 tf/m. Já cabo de protensão tem um traçado variado e simétrico, com partes retilíneas e partes parabólicas com inflexões, aonde o ponto de inflexão está localizado na metade do comprimento horizontal da curva ($k = 0,5$). As coordenadas x e y dos pontos notáveis do cabo de protensão, utilizados para determinação do traçado são indicados na Figura 20 em metros.

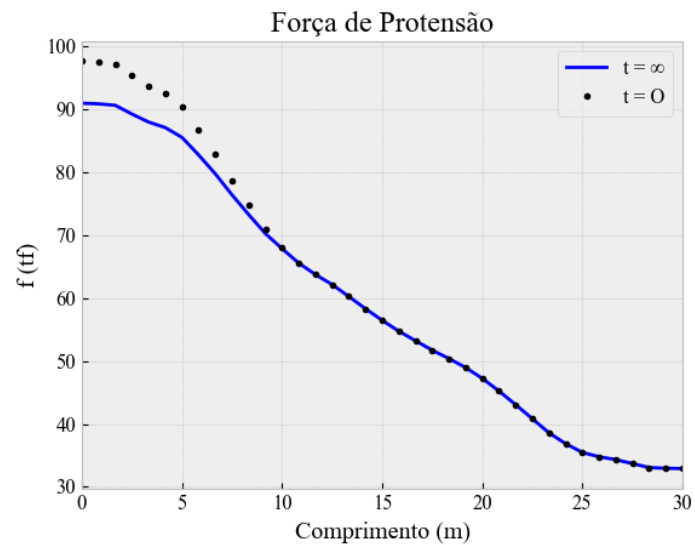
Figura 20: Viga hiperestática protendida com traçado variável.



Fonte: Autor (2024).

Para este exemplo as força de protensão em $t = 0$ e $t = \infty$ sofre perdas de protensão, fazendo com que seu valor decaia ao longo do comprimento da viga, conforme demonstrado na Figura 21.

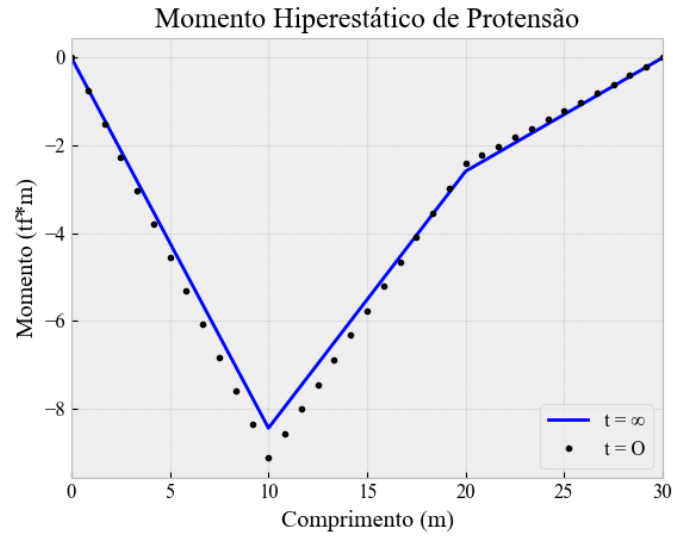
Figura 21: Força de protensão ao longo da viga.



Fonte: Autor (2024).

A Figura 22 demonstra o momento hiperestático de protensão, calculado pelo *PSContBeam*, para força de protensão em $t = 0$ e $t = \infty$.

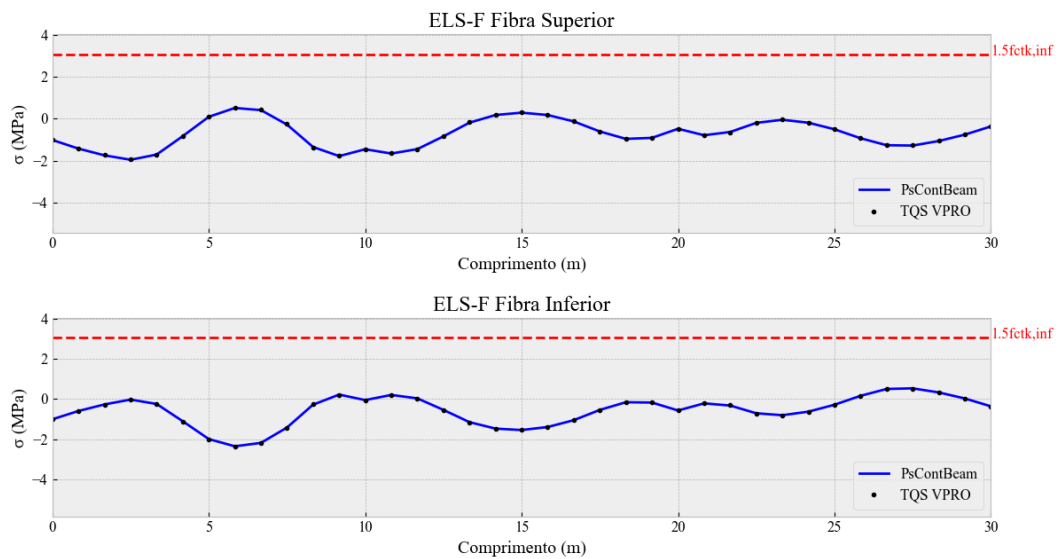
Figura 22: Momento hiperestático de protensão do exemplo 03.



Fonte: Autor (2024).

As Figuras 23, 24 e 25 e as Tabelas 9, 10 e 11 apresentam de forma gráfica e numérica, os resultados das tensões normais calculados pelo *PsContBeam* e pela extensão VPRO do TQS, para verificação dos estados limites de serviço ELS-F e ELS-D, além do estado limite último ELU-ATO.

Figura 23: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 03.



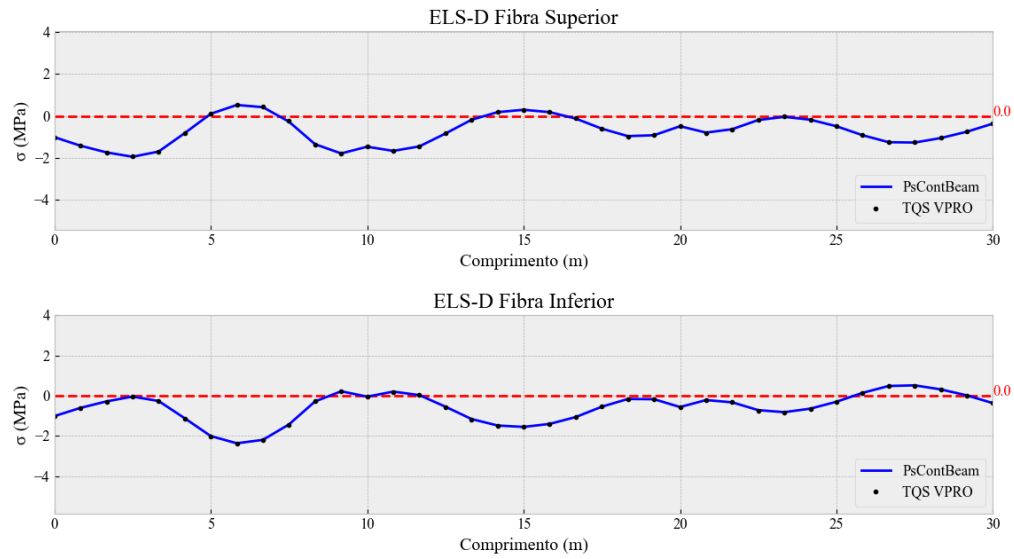
Fonte: Autor (2024).

Tabela 9: Tensões normais no ELS-F para o exemplo 03.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	-1,010	-1,011	0,05	-1,010	-1,011	0,04
0,8	-1,420	-1,422	0,09	-0,600	-0,598	0,09
1,7	-1,730	-1,743	0,67	-0,280	-0,271	0,36
2,5	-1,940	-1,953	0,69	-0,040	-0,030	0,41
3,3	-1,700	-1,706	0,31	-0,260	-0,249	0,45
4,2	-0,820	-0,829	0,45	-1,120	-1,107	0,55
5,0	0,110	0,092	0,91	-2,010	-1,993	0,70
5,8	0,530	0,514	0,84	-2,370	-2,353	0,72
6,7	0,430	0,411	0,96	-2,200	-2,184	0,69
7,5	-0,240	-0,278	1,97	-1,460	-1,420	1,70
8,3	-1,370	-1,345	1,29	-0,260	-0,283	0,99
9,2	-1,770	-1,779	0,44	0,210	0,217	0,30
10,0	-1,450	-1,452	0,11	-0,060	-0,056	0,17
10,8	-1,650	-1,656	0,32	0,200	0,199	0,03
11,7	-1,450	-1,446	0,18	0,030	0,030	0,01
12,5	-0,830	-0,838	0,41	-0,550	-0,543	0,28
13,3	-0,170	-0,186	0,84	-1,170	-1,153	0,72
14,2	0,190	0,179	0,58	-1,480	-1,474	0,23
15,0	0,300	0,289	0,54	-1,550	-1,544	0,24
15,8	0,180	0,178	0,11	-1,400	-1,394	0,24
16,7	-0,120	-0,128	0,41	-1,060	-1,055	0,23
17,5	-0,600	-0,606	0,31	-0,540	-0,543	0,14
18,3	-0,970	-0,958	0,61	-0,150	-0,162	0,50
19,2	-0,920	-0,910	0,51	-0,170	-0,178	0,34
20,0	-0,480	-0,477	0,15	-0,570	-0,573	0,11
20,8	-0,790	-0,786	0,20	-0,210	-0,219	0,38
21,7	-0,650	-0,630	1,05	-0,310	-0,327	0,73
22,5	-0,180	-0,196	0,83	-0,730	-0,711	0,79
23,3	-0,040	-0,049	0,48	-0,820	-0,808	0,51
24,2	-0,180	-0,188	0,42	-0,640	-0,631	0,39
25,0	-0,490	-0,502	0,59	-0,300	-0,287	0,56
25,8	-0,920	-0,928	0,43	0,150	0,156	0,23
26,7	-1,250	-1,260	0,52	0,490	0,497	0,31
27,5	-1,270	-1,277	0,35	0,520	0,528	0,33
28,3	-1,050	-1,060	0,51	0,320	0,325	0,21
29,2	-0,750	-0,756	0,33	0,020	0,024	0,18
30,0	-0,370	-0,366	0,23	-0,370	-0,366	0,19

Fonte: Autor (2024).

Figura 24: Tensões normais no ELS-D para o exemplo 03.



Fonte: Autor (2024).

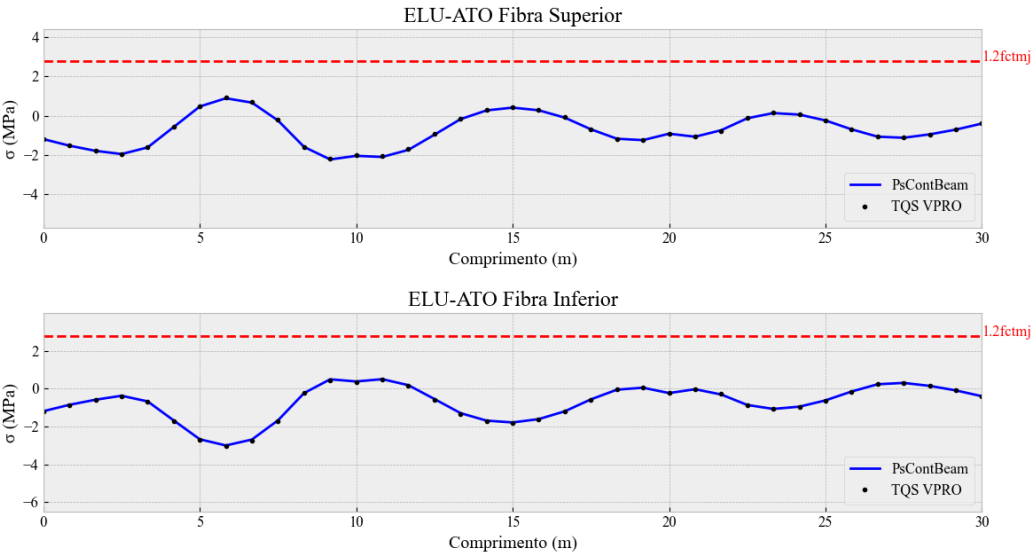
Tabela 10: Tensões normais no ELS-D para o exemplo 03.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	-1,010	-1,011	0,05	-1,010	-1,011	0,04
0,8	-1,410	-1,418	0,40	-0,610	-0,602	0,35
1,7	-1,730	-1,736	0,31	-0,290	-0,278	0,49
2,5	-1,930	-1,944	0,73	-0,050	-0,039	0,45
3,3	-1,690	-1,696	0,29	-0,270	-0,260	0,43
4,2	-0,810	-0,818	0,42	-1,130	-1,118	0,52
5,0	0,120	0,102	0,91	-2,020	-2,003	0,69
5,8	0,540	0,522	0,92	-2,380	-2,361	0,79
6,7	0,440	0,417	1,17	-2,210	-2,190	0,86
7,5	-0,240	-0,276	1,85	-1,460	-1,422	1,58
8,3	-1,370	-1,347	1,20	-0,260	-0,282	0,91
9,2	-1,780	-1,786	0,29	0,220	0,224	0,18
10,0	-1,460	-1,466	0,29	-0,040	-0,043	0,11
10,8	-1,660	-1,664	0,23	0,200	0,208	0,32
11,7	-1,450	-1,451	0,03	0,040	0,034	0,26
12,5	-0,830	-0,839	0,46	-0,550	-0,543	0,31
13,3	-0,170	-0,185	0,76	-1,170	-1,154	0,66
14,2	0,190	0,182	0,44	-1,480	-1,477	0,11
15,0	0,300	0,293	0,37	-1,550	-1,548	0,10
15,8	0,190	0,181	0,48	-1,400	-1,397	0,12
16,7	-0,120	-0,127	0,34	-1,060	-1,056	0,16

17,5	-0,610	-0,607	0,17	-0,540	-0,543	0,11
18,3	-0,970	-0,962	0,40	-0,150	-0,158	0,33
19,2	-0,920	-0,918	0,09	-0,160	-0,170	0,41
20,0	-0,500	-0,490	0,50	-0,550	-0,559	0,39
20,8	-0,800	-0,793	0,35	-0,210	-0,212	0,08
21,7	-0,650	-0,631	0,96	-0,300	-0,325	1,07
22,5	-0,180	-0,194	0,70	-0,730	-0,714	0,68
23,3	-0,030	-0,043	0,70	-0,820	-0,814	0,26
24,2	-0,170	-0,180	0,50	-0,650	-0,639	0,46
25,0	-0,480	-0,492	0,60	-0,310	-0,297	0,56
25,8	-0,910	-0,918	0,40	0,140	0,145	0,20
26,7	-1,240	-1,250	0,51	0,480	0,487	0,29
27,5	-1,260	-1,268	0,39	0,510	0,519	0,36
28,3	-1,050	-1,053	0,15	0,310	0,318	0,34
29,2	-0,750	-0,752	0,13	0,020	0,020	0,01
30,0	-0,370	-0,366	0,23	-0,370	-0,366	0,19

Fonte: Autor (2024).

Figura 25: Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 03.



Fonte: Autor (2024).

Tabela 11: Tensões normais no ELU-ATO para o exemplo 03.

x (m)	Fibra Superior			Fibra Inferior		
	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)	V-PRO (Mpa)	<i>PSContBeam</i> (Mpa)	Erro Percentual (%)
0,0	-1,190	-1,194	0,17	-1,190	-1,194	0,12
0,8	-1,520	-1,528	0,34	-0,860	-0,856	0,12
1,7	-1,780	-1,790	0,48	-0,600	-0,586	0,46
2,5	-1,940	-1,954	0,65	-0,390	-0,378	0,40
3,3	-1,610	-1,617	0,30	-0,690	-0,675	0,49
4,2	-0,570	-0,580	0,44	-1,700	-1,683	0,55
5,0	0,490	0,465	1,12	-2,700	-2,677	0,76
5,8	0,910	0,883	1,25	-3,030	-3,004	0,86
6,7	0,700	0,663	1,68	-2,730	-2,690	1,32
7,5	-0,190	-0,248	2,63	-1,740	-1,676	2,10
8,3	-1,590	-1,590	0,02	-0,230	-0,237	0,24
9,2	-2,190	-2,228	1,76	0,450	0,492	1,38
10,0	-2,000	-2,044	2,02	0,340	0,379	1,27
10,8	-2,060	-2,101	1,87	0,460	0,498	1,27
11,7	-1,710	-1,741	1,40	0,150	0,182	1,07
12,5	-0,930	-0,970	1,82	-0,580	-0,550	1,01
13,3	-0,140	-0,180	1,81	-1,330	-1,293	1,21
14,2	0,290	0,267	1,03	-1,720	-1,693	0,90
15,0	0,430	0,407	1,06	-1,810	-1,787	0,76
15,8	0,290	0,273	0,76	-1,630	-1,612	0,61
16,7	-0,080	-0,102	0,99	-1,220	-1,199	0,68
17,5	-0,690	-0,694	0,17	-0,580	-0,570	0,32
18,3	-1,180	-1,176	0,20	-0,050	-0,056	0,21
19,2	-1,250	-1,245	0,21	0,060	0,049	0,38
20,0	-0,930	-0,920	0,48	-0,230	-0,235	0,17
20,8	-1,080	-1,073	0,34	-0,030	-0,033	0,10
21,7	-0,770	-0,742	1,30	-0,290	-0,311	0,69
22,5	-0,120	-0,134	0,63	-0,880	-0,864	0,52
23,3	0,140	0,130	0,44	-1,080	-1,073	0,21
24,2	0,060	0,053	0,33	-0,960	-0,953	0,22
25,0	-0,240	-0,245	0,24	-0,630	-0,622	0,27
25,8	-0,690	-0,696	0,27	-0,160	-0,154	0,19
26,7	-1,070	-1,070	0,00	0,230	0,231	0,02
27,5	-1,120	-1,125	0,23	0,300	0,301	0,04
28,3	-0,950	-0,952	0,08	0,140	0,143	0,11
29,2	-0,710	-0,711	0,05	-0,100	-0,094	0,19
30,0	-0,400	-0,402	0,10	-0,400	-0,402	0,07

Fonte: Autor (2024).

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho buscou-se desenvolver uma ferramenta Python *open-source* (*PsContBeam*) utilizando o paradigma de programação orientada a objetos (POO), para a verificação de tensões normais nos estados limites ELS-F, ELS-D e ELU-ATO em vigas contínuas protendidas. Os resultados da ferramenta foram comparados com TQS VPRO e com planilha eletrônica para demonstrar a precisão dos resultados.

No Capítulo 4, foram desenvolvidos alguns exemplos de vigas contínuas protendidas calculadas pelo *PsContBeam*. Estes exemplos abrangeram todos os tipos de traçados de cabos de protensão implementados, também foi apresentado a viabilidade do uso de forças de protensão sujeitas a perdas de protensão ao longo da viga. Vale ressaltar que o *PsContBeam* também inclui a opção de engaste como tipo de vinculação nas extremidades de vigas, embora não tenha sido empregado nos exemplos.

Os resultados expostos no Capítulo 4 indicaram que o *PsContBeam* produz resultados muito próximos aos das ferramentas de verificação empregadas neste trabalho, tendo o maior valor de erro percentual entre todos os exemplos de 2,63%, evidenciando sua capacidade de ser utilizado para o cálculo de tensões normais em vigas contínuas protendidas sem comprometer a precisão em relação a outras ferramentas disponíveis no mercado.

O *PSContBeam* apresenta uma solução prática para a inclusão dos efeitos hiperestáticos, executando automaticamente o cálculo do momento hiperestático de protensão. Além disso, a ferramenta oferece uma flexibilidade considerável na definição do traçado dos cabos de protensão e na configuração da seção transversal da viga. Ele permite a análise de qualquer gráfico de forças de protensão, o que possibilita consideração das perdas de protensão imediatas e progressivas. Com o uso da linguagem de programação Python, o *PSContBeam* aproveita as ferramentas presentes na linguagem que facilitaram o desenvolvimento. No entanto, é importante destacar algumas restrições: o *PSContBeam* não realiza automaticamente o cálculo das perdas de protensão, só lida com carregamentos externos que sejam uniformemente distribuídos, não possui uma interface gráfica além de não permitir a manipulação interativa do traçado dos cabos.

Para futuros trabalhos, propõe-se as seguintes implementações: cálculo automático das perdas de protensão ao longo da viga, a inclusão de outros tipos de carregamentos externos, como carregamentos pontuais e linear triangular, a manipulação do traçado do cabo de protensão de forma interativa e o desenvolvimento de uma interface gráfica.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2023.
- PFEIL, W. **Concreto protendido**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1984.
- SILVA, T.; SÁNCHEZ FILHO, E. **Hiperestático de protensão em vigas contínuas por meio do método das cargas nodais equivalentes**. Engenharia Estudo e Pesquisa. ABPE, v. 18, p. 31-37, 2018, São Paulo.
- BOOCH, G.; RUMBAUGH, J.; JACOBSON. **UML guia do usuário**. 1. Ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda., 2012.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um primeiro curso em elementos finitos**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- CARVALHO, L, T. **Orientação a Objetos Aprenda seus conceitos e suas aplicabilidades de forma efetiva**. 1. ed. São Paulo: Casa do Código, 2016.
- FORSGREN, N.; KALLIAMVAKOU, E.; NOLAND, A. **Octaverse** In: **Github**. Disponível em: <https://octoverse.github.com/2021>. Acesso em: 15/12/2023.
- VINK, R. **anaStruct** - Release 1.0. Disponível em: <https://anastruct.readthedocs.io>. Acesso em: 06/01/2024.
- DALE, D.; DROETTBOOM, M.; FIRING, E.; HUNTER, E. **Matplotlib** - Release 3.9. Disponível em: <https://matplotlib.org>. Acesso em 08/01/2024.
- RLF-SecPro. In: **RLF Engenharia de Estruturas**. Versão 4.0: Eng. M.Sc. Reginaldo Lopes Ferreira, 2024. Disponível em: <https://www.rlf.com.br>. Acesso em: 12/04/2024.
- V-PRO. In: **TQS**. Versão 21. Disponível em: <https://www.tqs.com.br>. Acesso em: 13/04/2024