Imię i nazwisko **Jarosław Bednarczyk**	*Kierunek i grupa* **Informatyka Techniczna lab01**	*Nr indeksu* **404156**
Tytuł projektu **Sprawozdanie z implementacji i zastosowania Metod Elementów Skończonych do rozwiązania problemów 2D**		

AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

1. Część Teoretyczna

Metoda Elementów Skończonych jest sposobem na odwzorowanie kształtu geometrii za pomocą nałożenia siatki obliczeniowej z której przeprowadza się analizę i można dzięki temu uzyskać wartości takie jak naprężenie, odkształcenie, siły i przemieszczenia w badanym przedmiocie. Możliwe jest uzyskanie rozkładu temperatur za pomocą obliczeń cieplnych. Ta część była głównym celem końcowym programu pisanego w trakcie zajęć. Metoda Elementów Skończonych jest metodą przybliżoną i używanie jej wymaga posiadania wystarczającej wiedzy z części teoretycznej.

Metoda ta jest wykorzystywana przez inżynierów do obliczeń w badaniu zjawisk, podczas których zachodzi przepływ ciepła, przepływ cieczy, prężenia, odkształcenia czy też podczas symulacji lub zadań z tej dziedziny.

Głównym zamysłem tej metody jest zamiana modelu nieskończonego na model dyskretny, tj. model o ograniczonej liczbie węzłów, które znajdują się w ograniczonej liczbie elementów skończonych.

2. Ogólny przebieg metody MES

- Przygotowanie geometrii upraszczając ją poprzez usunięcie niepotrzebnych detali i elementów
- Przypisanie właściwości fizycznych i utworzenie siatki obliczeniowej
- Przypisanie warunków brzegowych stwarzając otoczenie badanego fragmentu
- Obliczenia z wykorzystaniem rozwiązania opisującego zjawisko fizyczne badanego obiektu

3. Etapy rozwiązania problemu metodą MES

- Dyskretyzacja, tj. podział obszaru na mniejsze elementy skończone, posiadające wspólne punkty (tzw. węzły) i aproksymujące kształt ośrodka
- Każdemu z utworzonych elementów wyznacza się wielomiany, tj. funkcje kształtu. Jest to robione w taki sposób, aby zachowany został warunek ciągłości szukanej wartości na granicach tych elementów. Na ich podstawie można wyznaczyć szukaną niewiadomą w dowolnym punkcie elementu skończonego o ile posiadamy jej wartości w węzłach elementu.
- Minimalizacja funkcjonału odpowiadająca danemu równaniu różniczkowemu.

4. Implementacja

Przy implementacji metody do programu wykorzystane zostało równanie Fouriera dla procesów cieplnych

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q=0\,,$$

Do rozwiązania tego równania wymagane jest odnalezienie minimum funkcjonału, dla którego równanie to będzie równaniem Eulera. Zakładamy, że badany materiał jest materiałem izotropowym w układzie zamkniętym. Współczynnik przewodzenia k będzie wtedy stały i według rachunku wariacyjnego funkcjonał będzie miał postać

$$J=\int_V \frac{1}{2}\left(k_x(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+k_y(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+k_z(t)\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2-2Qt\right)dV\,.$$

Od funkcji t (x, y, z) wymagane jest spełnienie określonych warunków brzegowych na powierzchni rozpatrywanego obszaru. W problemie badanym tutaj wykorzystany został warunek brzegowy prawa konwekcji. Jest to tzw. Warunek Newtona, czyli trzeci warunek brzegowy. Do przedstawionego funkcjonału dodajemy całkę po powierzchni postaci

$$\int_S \frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2\,dS\,.$$

We wzorze pomijamy część ze stałym strumieniem ciepła, który nie jest uwzględniany.

Po czym wzór przyjmuje postać

$$J = \int_V \left(\frac{k(t)}{2} \left(\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) - Qt \right) dV +$$

$$+ \int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS$$

Następnie przebiega dyskretyzacja problemu polegająca na podziale rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawienie temperatury wewnątrz takiego elementu będącej funkcją wartości węzłowych zgodnie z zależnością

$$t = \sum_{i=1}^{n} N_i t_i = \{N\}^T \{t\}.$$

Po wprowadzeniu tej zależności do funkcjonału otrzymamy układ równań, który po zapisaniu na postać macierzowo wygląda następująco

$$[H]\{t\} + [C]\frac{\partial}{\partial \tau}\{t\} + \{P\} = 0,$$

Gdzie macierz C

$$[C] = \int_V c\rho \{N\}\{N\}^T dV.$$

W przypadku ogólnym wartości temperatury w węzłach t zależą od czasu. Po przyjęciu, że wektor $\{t_0\}$ przedstawia temperatury w chwili τ=0, to dla przedziału Δτ wektor ten będzie można przedstawić równaniem

$$\{t\} = \{N_0, N_1\} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix}.$$

gdzie

$$N_0 = \frac{\Delta\tau - \tau}{\Delta\tau}, \quad N_1 = \frac{\tau}{\Delta\tau}.$$

Po podstawieniu wszystkiego do wzoru i policzeniu pochodnych ułamka ze wzoru, po wstawieniu uzyskanego wyniku otrzymujemy

$$[H]\{t_0\}+[C]\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}+\{P\}=0\,.$$

Z czego następnie możemy ustalić niejawny schemat wyznaczenia temperatury

$$\left([H]+\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0$$

Gdzie macierze H, C i wektor P to po kolei

$$[H]=\int_V k\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right)dV+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS,$$

$$\{P\}=-\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS\,,$$

$$[C]=\int_V c\rho\{N\}\{N\}^T dV\,.$$

5. Wyniki, analiza wyników

- Wstępne dane do programu:

- 100 – initial temperature
- 500 – simulation time [s],
- 50 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [W/m^{2}K],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 4 – N_H,
- 4 – N_B,
- 700 – specific heat [J/(kg°C)],
- 25 – conductivity [W/(m°C)],
- 7800 – density [kg/m3].

- Minimalna i maksymalna temperatura dla każdego kroku

```
minimalna temperatura w siatce(poczatek) : OptionalDouble[100.0]
maksymalna temperatura w siatce(poczatek): OptionalDouble[100.0]
Iteracja: 50.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[110.03797627584362]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[365.81546833509225]
Iteracja: 100.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[168.83701629178367]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[502.59171122183506]
Iteracja: 150.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[242.80085363244493]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[587.3726650238904]
Iteracja: 200.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[318.61459593642365]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[649.3874813298512]
Iteracja: 250.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[391.25579850023115]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[700.0684178779048]
Iteracja: 300.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[459.0369149963903]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[744.0633412641018]
Iteracja: 350.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[521.5862908442494]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[783.3828460480662]
Iteracja: 400.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[579.0344662587191]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[818.9921833030078]
Iteracja: 450.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[631.6892625741264]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[851.4310374575703]
Iteracja: 500.0
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[679.9076230022687]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[881.0576290015757]
```

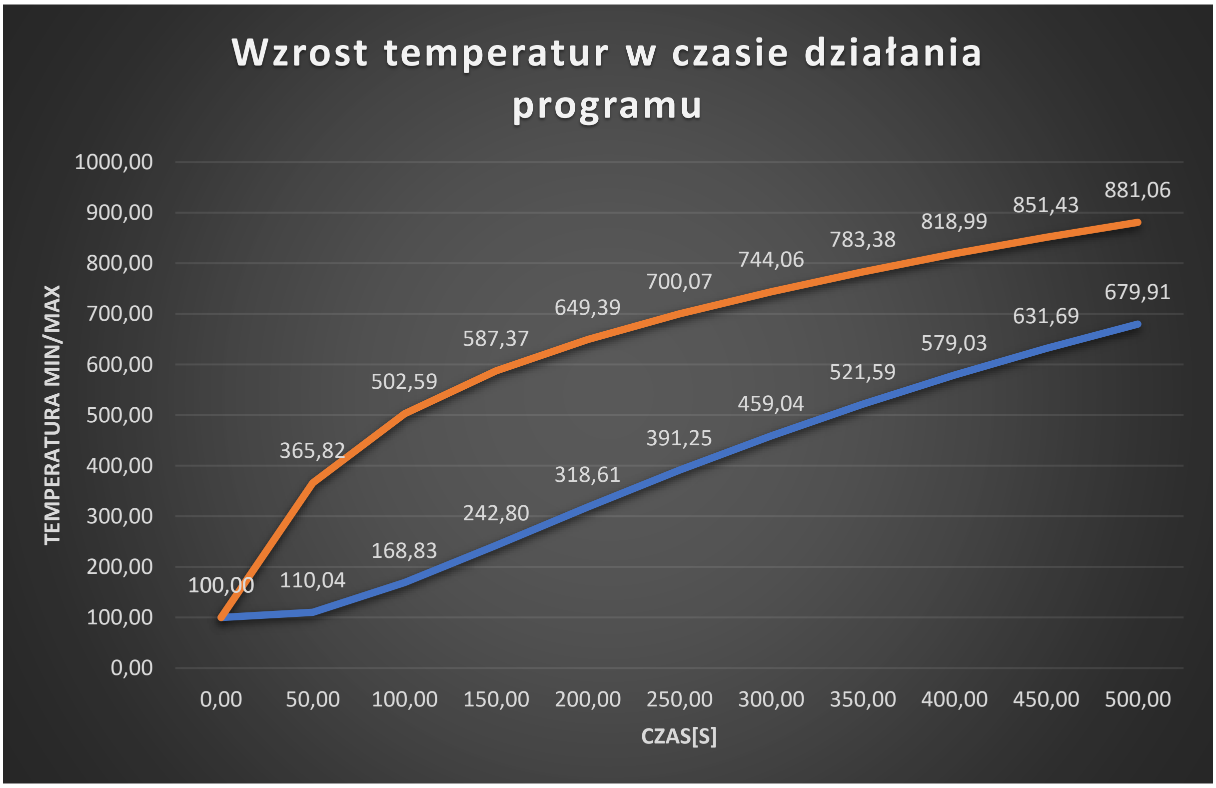
- Temperatury na ostatniej siatce:

```
Iteracja: 500.0
Ostateczna siatka:
[881.0576290015757, 792.7169708721311, 792.7169708721303, 881.0576290015754, 792.7169708721308, 679.9076230022687,
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[679.9076230022687]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[881.0576290015757]
```

```
679.9076230022687, 792.7169708721303, 792.7169708721302, 679.9076230022689, 679.9076230022688,
```

```
, 792.7169708721303, 881.0576290015755, 792.7169708721304, 792.7169708721302, 881.0576290015756]
```

- Wykres temperatur minimalnej i maksymalnej:



Jak widać na przedstawionym wykresie w czasie 500 sekund najwyższa temperatura, która pojawiła się na płytce osiągnęła wartość 881,06 stopni. Wykres (temperatury maksymalnej) pokrywa się z przedstawionym na zajęciach przez prowadzącego. Możemy zatem założyć, że obliczenia wykonane w programie były poprawne. Dla dłuższego czasu w końcu każdy węzeł osiągnąłby temperaturę prawie równą temperaturze otoczenia:

```
Iteracja: 3900.0
Ostateczna siatka:
[1199.2342947867576, 1199.0221480154748, 1199.0221480154737, 1199.2342947867576,
minimalna temperatura w siatce: OptionalDouble[1198.7512237253904]
maksymalna temperatura w siatce: OptionalDouble[1199.2342947867576]
```

6. Wnioski

- Implementując Metodę Elementów Skończonych można było lepiej zrozumieć teorię przedstawioną na wykładach oraz ćwiczeniach projektowych.

- Przeprowadzona symulacja pozwoliła od praktycznej strony zobaczyć, jak przedstawia się rozkład temperaturowy w węzłach siatki, którą objęty został obiekt poddany obróbce termicznej.

- MES jest jednak metodą przybliżoną, a jej wyniki nie zawsze mogą być dokładnym odwzorowaniem rzeczywistych. Aby zwiększyć dokładność może być wymagane zwiększenie gęstości siatki bądź zmniejszenie długości kroku czasowego. Takie zmiany mogą jednak wpłynąć na komplikację obliczeń a co za tym idzie czas i moc obliczeniową wymaganą do nich.

7. Bibliografia

https://home.agh.edu.pl/~milenin/Dydaktyka/mes.htm

https://home.agh.edu.pl/~pkustra/MES.html