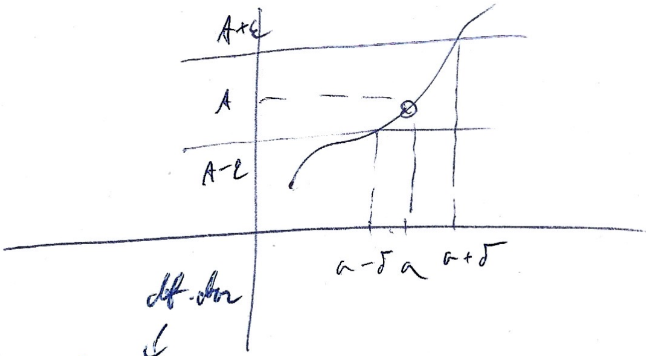
$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$



$\Updownarrow$

def. obor

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: x\in P(a,\delta)\cap M \Rightarrow f(x)\in U(L,\varepsilon)$$

NPK

pokud $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

Limita posl.: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0: a_n \in U(L,\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$|a_n - L| < \varepsilon$

limita funkce: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: x\in P(a,\delta)\cap M \Rightarrow f(x)\in U(L,\varepsilon)$

spojitost fce v bodě: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: x\in U(a,\delta)\cap M \Rightarrow f(x)\in U(f(a),\varepsilon)$

definice tečny (v bodě $(a,f(a))$)*: $l: y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$

– přímka se sklonem (směrnicí) $f'(a)$ procházející bodem $(a,f(a))$

* nebo $\lim s((a,f(a)), x_n, f(x_n)) = l$, kde $\forall (x_n) \subset M\setminus\{a\}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Důkazy – Analýza

1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

a je sudé $\Rightarrow$ a^2 je sudé
a je liché $\Rightarrow$ a^2 je liché
chceme dokázat i opačnou implikaci

sporem: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Pokud $x \in \mathbb{Q}$, pak $x = \frac{p}{q}$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad /^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad / \cdot q^2$$

$2q^2 = p^2 \Longrightarrow p^2$ je sudé $\Longrightarrow$ p je sudé

$\downarrow$

$p = 2k$

$$2q^2 = (2k)^2$$

$q^2 = 2k^2 \Longrightarrow q$ je sudé

$\frac{p}{q}$ nemůže být zlomek v základním tvaru ↯

2) Cantorova věta:

Neexistuje surjekce $\varphi: X \to P(X)$ (injekce ano)

<u>Sporem</u>: nechť $\exists$ bijekce $\varphi: X \to P(X)$ (chceme dokázat, že $X \approx P(X)$)

Uvažme $A = \{x \in X \; ; \; x \notin \varphi(x)\}$ ... množina prvků, které neleží ve svém obrazu

vyplývá z vlastností

φ ... bijekce $\Rightarrow \exists a \in X : \underbrace{\varphi(a) = A}$ ... množina

ke každé podmnožině musí existovat prvek, který se na ni zobrazí

Spor: a) $a \in A \overset{\text{def. } A}{\Rightarrow} a \notin \varphi(a) = A$ ↯
b) $a \notin A \overset{\text{def. } A}{\Rightarrow} a \in \varphi(a) = A$ ↯ } ↯

není prvek, že neleží ve svém obrazu

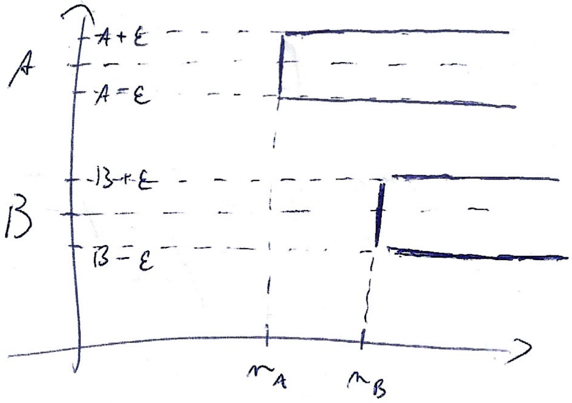
3) Jednoznačnost limity (def. limity posloupnosti: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : a_n \in U(L, \varepsilon)$)

Každá posloupnost má nejvýše ~~1~~ jednu limitu

Dk Sporem, limita posloupnosti je A a B $\left(\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A \wedge \lim\limits_{n \to \infty} a_n = B\right)$

BÚNO $A > B$

Zvolme $\varepsilon = \frac{A - B}{3}$ (třetina vzdálenosti mezi A a B)



Z def. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ k zvolenému $\varepsilon = \frac{A - B}{3}$

existuje $n_A \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_A : \underbrace{|a_n - A|} < \varepsilon$

Z def. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = B$ k zvolenému $\varepsilon = \frac{A - B}{3}$

$\exists \; n_B \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_B : \underbrace{|a_n - B|} < \varepsilon$

Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Z trojúhelníkové nerovnosti ($|x + y| \leq |x| + |y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$)

$$|A - B| = |(A - a_n) + (a_n - B)| \leq \underbrace{|A - a_n|} + \underbrace{|a_n - B|} < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|A - B|$$

$$|A - B| < \frac{2}{3}|A - B|$$

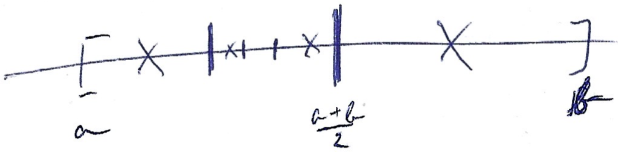
$$\lightning$$

4) Bolzano – Weierstrassova věta

Omezená posloupnost reálných čísel má vždy konvergentní podposloupnost

Mějme nekonečnou omezenou posloupnost (a_n) na uzavřeném intervalu $[a, b]$

Budeme rozdělovat interval rekurzivně na poloviny, vždy musí existovat alespoň 1 polovina, která má ∞ mnoho prvků, vybereme ji a půlíme dál – rekurzivně-krát.



↓

Získáme posloupnost vnořených intervalů $[a_n, b_n]$, každý interval je vždy polovinou předchozího a obsahuje nekonečně mnoho prvků → délka intervalů půlením klesá k nule

Podle věty o vnořených intervalech $\exists$ právě jedno číslo obsažené ve všech intervalech. Toto číslo označíme jako A.

Důležitým faktem je, že každý prvek posloupnosti (a_n) musí být obsažený alespoň v jednom z těchto intervalů, protože jsme vybírali interval, ve kterém je nekonečně mnoho prvků. Proto A je limitou nějaké podposloupnosti (a_n) (všechny prvky podposloupnosti musí konvergovat k A) → každá omezená posloupnost reálných čísel obsahuje konverg. podp.

5) Cauchyho podmínka: Posloupnost reálných čísel (a_n) je konvergentní $\iff$ (a_n) je Cauchyho

(cauchyovskost: $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská $\iff \forall \varepsilon \, \exists n_0 \, (m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$)

($\Rightarrow$) Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno ε, pak $\exists$ $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \underset{\uparrow \, \Delta\text{-nerovnost}}{\leq} |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

($\Leftarrow$) Nechť (a_n) je Cauchyova → a_n je omezená, podle B-W věty má konv. podp. (a_{m_n}) s limitou a. Pro dané ε lze najít n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vždy $m_n \geq n$, takže $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓ tedy $\boxed{a_n \to a}$

6) Limita a uspořádání

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

i) Jestliže $A < B$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ $a_n < b_n$

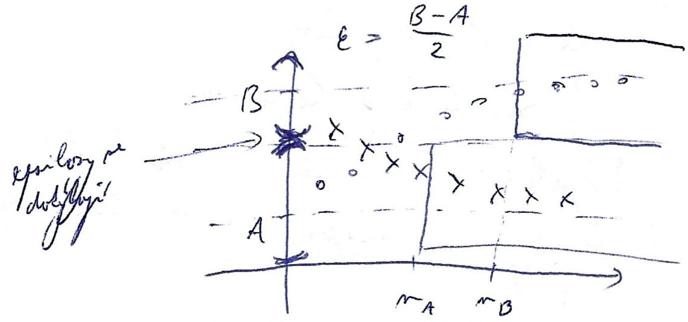
ii) Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \geq b_n$, pak $A \geq B$

Dk i) Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$

Z $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ $\exists n_A$ $\forall n > n_A$:

$|a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow a_n < A + \varepsilon =$

$= A + \frac{B-A}{2} = \underbrace{\frac{A+B}{2}}$



Z $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ $\exists n_B \forall n \geq n_B$: $|b_n - B| < \varepsilon \Rightarrow b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \overbrace{\frac{A+B}{2}}$

Zvolme $n_0 = \max\{\underbrace{n_A}, \overbrace{n_B}\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí

$b_n > \frac{A+B}{2} > a_n$

ii) Sporem: nechť $A < B$. Pak podle části i) $\exists$ index n_1 $\forall n \geq n_1$: $a_n < b_n$

Zároveň z předpokladu $\forall n \geq n_0$ $a_n \geq b_n$

Pak pro libovolné $n \geq n_1$ ~~[illegible]~~ a $n \geq n_0$ platí $(a_n < b_n) \wedge (a_n \geq b_n)$ ↯

7) Nutná podmínka konvergence řady: Když řada $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$

Dk. Když $\sum a_n$ konverguje, pak $S := \lim s_n \in \mathbb{R}$ $\left(s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$

$\lim a_n = \lim(\underbrace{s_n - s_{n-1}}_{\text{věta o limitě podposloupnosti}}) \underbrace{=}_{\text{aritmetika limit}} \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$

8) Harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{S_2} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{2}$

$\frac{1}{3}$ ↓ pokud bychom zmenšili na $\frac{1}{4}$

$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{2}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2}$

↓ $\frac{1}{8}$ ↓ $\frac{1}{8}$ ↓ $\frac{1}{8}$

Pokud bychom vzali: $S_{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$

↓

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$ ... i původní součet, jejíž součty jsou vyšší, musí divergovat

↓

$\sum \frac{1}{n} = \infty$

9) Heineho definice

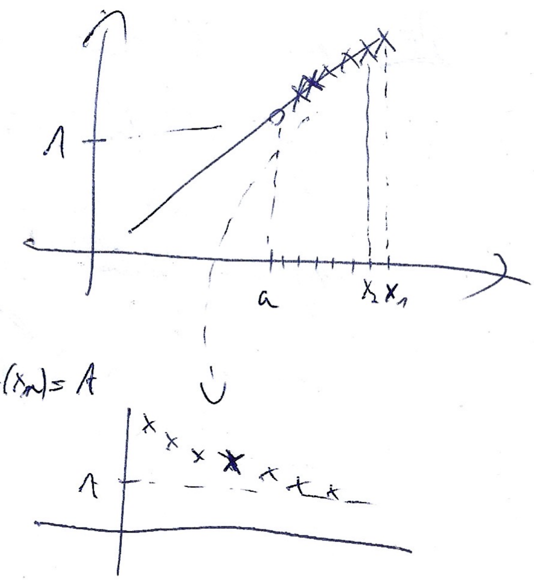
(Limitu fce dokážu převést podle limity posloupnosti)

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f: M \to \mathbb{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$

Následující tvrzení jsou ekvivalentní (NPJE):

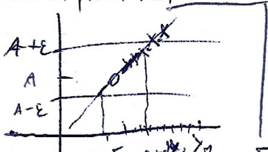
i) $\lim_{x \to a} f(x) = A$

ii) pro $\forall$ posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$



Dk ($\Rightarrow$) Mějme posloupnost (x_n) splňující $x_n \in M$, $x_n \neq a$, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

(chceme ukázat $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$, tedy že $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0: f(x_n) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$)



Nechť $\varepsilon > 0$. Podle def. limity i) $\exists \delta > 0\ \underline{\forall x \in P(a,\delta): f(x) \in U(A,\varepsilon)} = (*)$

$\lim x_n = a$, tedy k danému $\delta > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ x_n \in U(a,\delta)$, $x_n \neq a$, tedy $\underline{x_n \in P(a,\delta)}$

Tedy z $(*)$ dostaneme $f(x_n) \in U(A,\varepsilon)$

(To je def. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$)

(Heine – pokračování)

(i) $\Leftarrow$ (ii) : dokážeme, $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii)

$\neg$(i) : $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in P(a,\delta) : \neg\,(f(x) \in U(A,\varepsilon))$

Toto použijeme pro $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

dostaneme $\exists\, x_n \in P(a, \frac{1}{n}) : \underline{f(x_n) \notin U(A,\varepsilon)}$

Potom $x_n \to a$ a $x_n \neq a$ $\Rightarrow$ na (x_n) můžeme použít (ii)

dostaneme $\underline{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A}$. Toto je spor s $f(x_n) \notin U(A,\varepsilon)$

10) O aritmetice limit fcí (s využitím Heineho)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

i) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$, má-li pravá strana smysl

ii) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$, –||–

iii) $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$, –||–

Dk i) nechť x_n je posloupnost, x_n jde k a a $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Podle Heineho věty (i) $\Rightarrow$ (ii) dostaneme $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$

Podle aritm. limit pro posloupnosti $\lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$

Potom z Heineho věty (ii) $\Rightarrow$ (i) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$

ii) a iii) analogicky

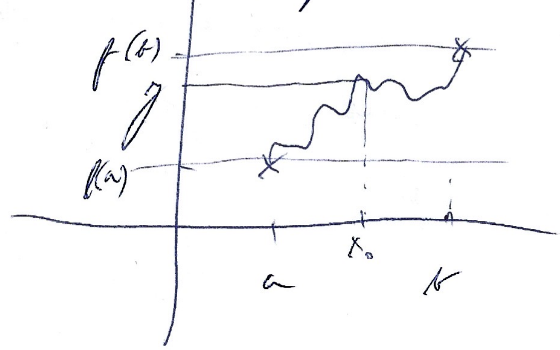
17) Nabývání mezihodnot (Darboux)

(Spojitá fce nabývá mezihodnot)

Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro $\forall y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) = y$.

Poznámka: pro $f(a) > f(b)$ platí analogicky

Splňuje:



Dk Nechť $\exists y \in (f(a), f(b))$, položme

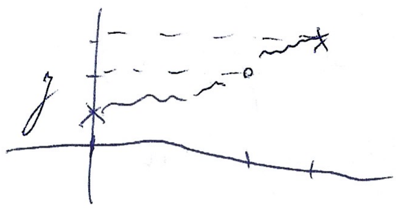
$$M = \{ z \in [a,b] : f(z) < y \}$$

Množina M je neprázdná ($a \in M$) a shora omezená číslem b, a tedy $\exists\, x_0$

$x_0 = \sup M$. Zřejmě $x_0 \in [a,b]$

Dokážeme, že $f(x_0) = y$ vyloučením případů $f(x_0) > y$ a $f(x_0) < y$

Nesplňuje:



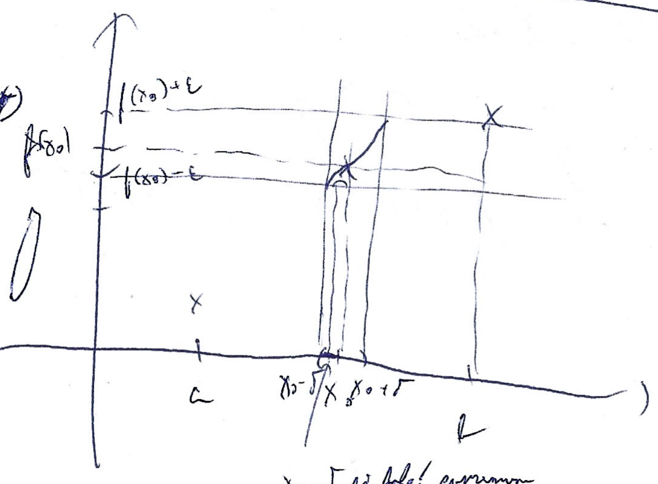
- $f(x_0) > y$ – nemůže nastat

  Z def. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > y$

  zvolíme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $f(x) > y$

  (zvolíme ε, aby $f(x_0) - \varepsilon > y$, k němu zvolíme δ).

  Tedy z def. M interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ neleží v M $\Rightarrow$ x_0 není nejmenší horní závorou M ↯

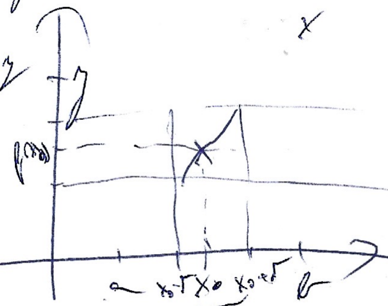


$x_0 - \delta$ je také majorantou

- $f(x_0) < y$ – nemůže nastat

  Zvolíme $\varepsilon > 0$ aby $f(x_0) + \varepsilon < y$, z def. limity $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ zvolíme δ takové, tak že $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ platí $f(x) < f(x_0 + \varepsilon) < y$

  Tedy $(x_0, x_0 + \delta)$ je $\subset M$ a tedy x_0 není horní závora M ↯

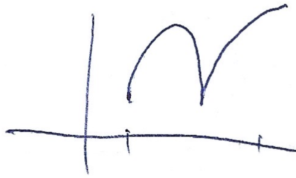


leží celé v M, x_0 nemůže být horní závora

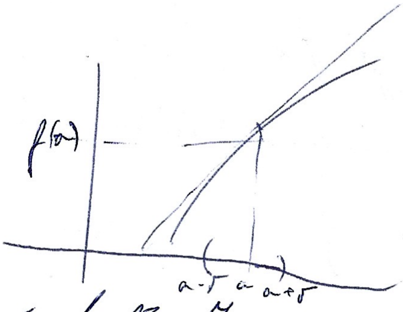
Tedy $f(x_0) = y \Rightarrow x_0 \neq a \wedge x_0 \neq b$

13) Nutná podmínka extrému (Fermatova)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému fce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$



Idea důkazu:
(sporem)
– extrém → nenulová derivace



BÚNO klesající

Dk Sporem: Nechť a je bod lokálního extrému f na M, existuje $f'(a)$, ale $f'(a) \neq 0$. BÚNO $f'(a) > 0$

Pak $\exists\, \delta > 0$ takové, že $\forall x \in P(a,\delta)$: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} > 0$ (*) ← použití limitního přechodu

$\left(f'(a) \in \mathbb{R} \;\&\; \varepsilon = \frac{f'(a)}{2}\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta)\right.$:

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon = \frac{f'(a)}{2} \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \left(\frac{f'(a)}{2}, \frac{3}{2}f'(a)\right)\Bigg)$$

Potom $\overset{x \in (a, a+\delta)}{a < x} \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a) > 0}{x-a > 0} \to f(x) > f(a) \Rightarrow$ v a není lok. max

Pro $\underset{x \in (a-\delta, a)}{a > x} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \dfrac{f(x)-f(a) < 0}{x-a < 0} \to f(x) < f(a) \Rightarrow$ v a není lok. min.

$\Downarrow$ ↯

– předpoklad, že v bodě a je extrém, ale dokázali jsme, že tam není lokální ani maximum ani minimum
(ale s nenulovou derivací)

$\Downarrow$

– spor s předpokladem
– f nemá v a extrém

14) Leibnizův vzorec (součin derivací)

$$(fg)'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x-b} = \lim_{x \to b} \frac{(f(x)-f(b))\cdot g(x) + f(b)\cdot(g(x)-g(b))}{x-b} =$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \cdot \lim_{x \to b} g(x) + f(b) \cdot \lim_{x \to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \overset{g \text{ spoj. v } b}{=} f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$$

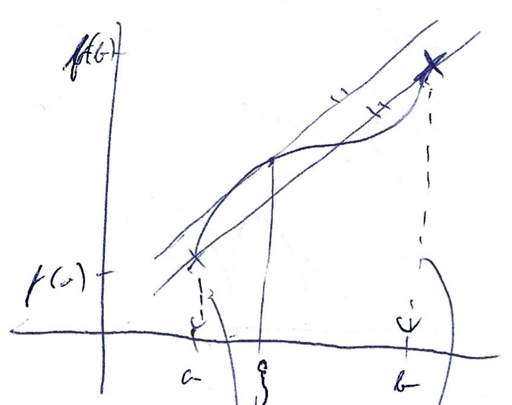
15) Lagrangeova věta o střední hodnotě

(musí existovat bod, ve kterém je derivace stejná, jako směrnice sečny protínající $f(a)$ a $f(b)$)

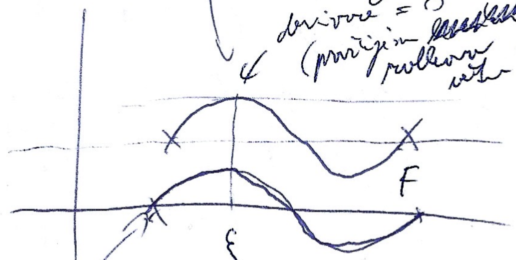
Nechť je fce f spojitá na intervalu $[a,b]$

a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b)

Pak $\exists\ \xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



lineární transformace: $f(b) \to f(a)$



Dk Položíme novou fci ~~…~~

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

($f(b)$ a původní fce se dostane na $f(a)$)

odečteme od původní fce vhodnou lineární fci

(v reálu odečítáme $\sim f(a)$, aby to vypadalo takhle)

Pak $F(x)$ je spojitá na $[a,b]$

$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a) = 0$ — konstanta

$F(b) = \dots = 0$

$0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — složka

Dále $\exists F'(x)\ \forall x \in (a,b)$

Podle Rolleovy věty $\exists\ \xi \in (a,b)$ tak, že $F'(\xi) = 0$

tj. $0 = F'(\xi) = \underbrace{f'(\xi) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{derivování po výrazech}} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$(x-a)' \dots x^0 = 1$

16) Derivace a monotonie

Nechť I je otevřený interval a f je spojitá na ~~všem~~ každém bodě a má derivaci

i) Je-li $f'(x)>0$ na int. I, pak je f rost. ($f'(x)<0$ … klesá)

ii) Je-li $f'(x)\geq 0$ na int. I, je neklesající ($f'(x)\leq 0$ … nerost.)

Dk i) Nechť $a,b \in I$, $a<b$

Pak f je na $[a,b]$ spojitá a $\exists f'(x)\ \forall x\in(a,b)$ — bereme $a<b$

$\to$ podle Lagrangeovy věty $\exists\ \xi \in (a,b)$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) > 0$ ($f(b)-f(a)>0$, $b-a>0$; $f'>0$ na int. I)

$a<b \Rightarrow f(b) > f(a)$

analogicky zbytek

17) O Taylorově polynomu

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n.

Pak: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \iff P(x) = T_n^{f,a}(x)$

– pokud za $P(x)$ dosadíme Taylorův polynom, tak $\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Taylorův polynom se přibližuje k funkci f (rozdíl f a T^n je tak malý jako x^n – menší!)

– je to jediný polynom co má tu vlastnost aproximace

Pomocné lemma: Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}$, stupeň $Q \le n$ a nechť

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0, \text{ pak } Q \overset{?}{\equiv} 0$$

Dk matem. indukcí: $\boxed{n=1}$ vlevo a musí být nula (jinak by bylo něco $\frac{1}{0}$)

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \overset{st.\,Q=1}{\Rightarrow} \underbrace{Q(x) = c\cdot(x-a)}_{\text{všechny polynomy stupně} \le 1}$$

Pak $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c(x-a)}{x-a} = c \Rightarrow c = 0$

$\Downarrow$

$Q \equiv 0$

$\boxed{n-1} \to \boxed{n}$

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a)\cdot R(x), \text{ kde stupeň } R(x) \le n-1$$

$$\lim_{x\to a} \frac{Qx}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\cdot R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

Z indukčního předpokladu pro polynom R, st. $R \le n-1$, dostáváme $R \equiv 0 \Rightarrow$

$\Downarrow$

$Q \equiv 0$

Dk: $\Leftarrow$ mat. ind. $\boxed{n=1}$: $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(x-a)$

Chceme $0 \overset{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_1^{f,a}}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a)}{x-a} =$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} - f'(a) = 0$$

Poznámka: $(T_n^{f,a}(x))' = T_{n-1}^{f',a}(x)$

$\boxed{n-1 \to n}$ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \xrightarrow[T^{f,a}(a)=f(a)]{L'H} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-(T_n^{f,a}(x))'}{n(x-a)^{n-1}} =$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} \overset{\text{podle IP pro } n-1}{=} 0$$

② Ověříme $\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \overset{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}$

$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} = 0$ podle předpokladu

$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ podle ⊜

$= 0$ ✓

st. $(P - T_n^{f,a}) \leq n \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} P - T_n^{f,a} \equiv 0$

18) Jednoznačnost primitivních fcí

Primitivní fce jsou jednoznačné až na konstantu

Nechť F a G jsou primitivní fce k f na otevřeném intervalu I. Pak $\exists\, c \in \mathbb{R}$, že $F(x) = G(x) + c$ pro $\forall x \in I$

Dk Označme $H(x) = F(x) - G(x)$, pak $(H(x))' = (F(x) - G(x))' =$

$= F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = 0$

$\Downarrow$

$\exists c \in \mathbb{R}\ H(x) = c$ na I

19) Monotonie Newtonova integrálu

$(N)\int_a^b f \leq (N)\int_a^b g$ pro $f, g \in N(a,b)$ a $f \leq g$ na (a,b)

(implikace ⊜)

Připomenutí Lagrangeovy věty o stř. hodnotě: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ pro

$\Downarrow$

$(b-a)\cdot f'(c) = f(b) - f(a)$

Dk Nechť F, resp. G, je primitivní k f, resp. ke g.

Čísla $c < d$ v (a,b) buďte libovolná!

Lagrangeova věta pro fci $F - G$ a interval $[c,d]$ pro nějaký bod $e \in (c,d)$ je

$$(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) = (F-G)'(e)\cdot(d-c) = (F'(e) - G'(e))(d-c) =$$

$$= (\underbrace{f(e) - g(e)}_{f \leq g \text{ z předpokladu}})\cdot(d-c) \leq 0,\ \text{proto}\ F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c),$$

Tato nerovnost se zachová při limitních přechodech $c \to a,\ d \to b$

20) Derivace jsou Darbouxovy

J je netriviální interval a $f: J \to \mathbb{R}$ má primitivní fci $\Rightarrow f$ má Darb. vlastnost

(Darbouxova vlastnost: $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$ má D.V., pokud pro $\forall$ interval $I \subset M$ je obraz $f[I]$ interval)

Dk

Nechť $a < b$; $f, F: [a,b] \to \mathbb{R}$, F je primitivní k f a $\underline{f(a) < c < f(b)}$.

(případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný)

Uvažme $G(x) := F(x) - cx : [a,b] \to \mathbb{R}$

Potom $G' = F' - c = f - c$ na $[a,b]$ a tedy G je spojitá. Podle věty o principu minima a maxima nabývá G v nějakém $d \in [a,b]$ minimum.

Z $G'(a) = f(a) - c < 0$ a $G'(b) = f(b) - c > 0$ plyne, že $d \in (a,b)$

Podle věty nutné podmínky extrému $G'(d) = f(d) - c = 0$, takže $\underline{f(d) = c}$

21) Bezoutova identita

Polynomy $f, g \in \mathbb{R}[x]$ nemají spol. kořen, tj. pro žádné $r \in \mathbb{C}$ neplatí, že $f(r) = g(r) = 0$. Pak $\exists\, r, s \in \mathbb{R}[x]$, že $r(x) \cdot f(x) + s(x) \cdot g(x) = 1$

Dk Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy, jak bylo uvedeno a S je množina všech lineárních kombinací polynomů $r(x) \cdot f(x) + s(x) \cdot g(x)$, kde $r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$

Předpokládejme, že $\exists\, \Delta(x) \in S$ s nejmenším stupněm mezi všemi polynomy v S $(\Delta \neq 0)$

Pak vezmeme libovolný $a(x) \in S$ a provedeme dělení se zbytkem:

$$a(x) = \Delta(x)\, b(x) + c(x), \quad b, c \in \mathbb{R}[x]$$ a stupeň $c(x)$ je menší než stupeň $\Delta(x)$ nebo nulový polynom.

Pak si všimneme, že lin. kombinace $c(x) = a(x) - b(x)\Delta(x) \in S$. Polynom $c(x)$ je tedy 0 a $a(x) = \Delta(x) \cdot b(x)$, takže $\Delta(x)$ dělí každý prvek v S. Ale $f, g \in S$ a $\Delta(x)$ je oba dělí. Protože $f(x)$ a $g(x)$ nemají spol. kořen, je $\Delta(x)$ nenulový konst. polynom. BÚNO $\Delta(x) = 1$. Tedy $1 \in S$.

2) neomezené fce nemají (R) $\int_a^b$ (nejsou riemannovsky integrovatelné)

je-li fce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neomezená, pak $f \notin R(a,b)$

Dk Předpokládejme, že fce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je neomezená.
Chceme ukázat, že pro $\forall n$ existuje dělení $\bar{a} = (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_k)$ intervalu $[a,b]$ a body $\bar{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k)$ takové, že platí $\|\bar{a}\| < \frac{1}{n}$ a $|R(\bar{a}, \bar{t}, f)| > n$.

Předpokládejme, že existuje konverg. posloup. (b_n) obsažená v $[a,b]$, která má $\lim b_n = \alpha \in [a,b]$ a zároveň $\lim |f(b_n)| = +\infty$. Tuto posloupnost můžeme najít z neomezenosti fce f a kompaktnosti $[a,b]$.
Nyní zvolíme $n \in \mathbb{N}$. Jako dělení intervalu $[a,b]$ vybereme takové, že $\|\bar{a}\| < \frac{1}{n}$, ale s podmínkou, že $\exists$ jediný index $j \in [k]$ t.ž. $\alpha \in [\bar{a}_{j-1}, \bar{a}_j]$.
Dále vybereme libovolné body $t_i \in [\bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i]$ ~~a~~ pro každé $i \neq j$. Zvolíme bod $t_j \in [\bar{a}_{j-1}, \bar{a}_j]$ t.ž. $|(\bar{a}_j - \bar{a}_{j-1}) f(t_j)| > |S| + n$, kde S je

$$S := \sum_{i=1, i \neq j}^{k} (\bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}) f(\bar{t}_i)$$

Po použití Δ-nerovnosti $|R(\bar{a}, \bar{t}, f)| \geq |(\bar{a}_j - \bar{a}_{j-1}) f(\bar{t}_j)| - |S| > n$
– spor s Cauchyho podmínkou pro Riemannovskou integrovatelnost
$\Rightarrow$ tedy neomezené fce nejsou R.I.

platí $\forall n$, Riemannovský součet je libovolně velký

23) Baireova věta v $\mathbb{R}$

Jsou-li $a < b$ reálná a $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá M_n není řídká!

(řídká množina je taková množina, že je blízko ke všem ostatním bodům)

Dk Nechť v $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je každá množina M_n řídká, odvodíme spor.

M_1 je řídká $\Rightarrow \exists [a_1,b_1] \subset [a,b]$, že $a_1 < b_1$ a $[a_1,b_1] \cap M_1 = \emptyset$.

M_2 je řídká $\Rightarrow \exists [a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$, že $a_2 < b_2 \wedge M_2 = \emptyset$

$\vdots$

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots \supset [a_n,b_n] \supset \dots$

že

$\forall n \, (a_n < b_n \wedge [a_n,b_n] \cap M_n = \emptyset)$

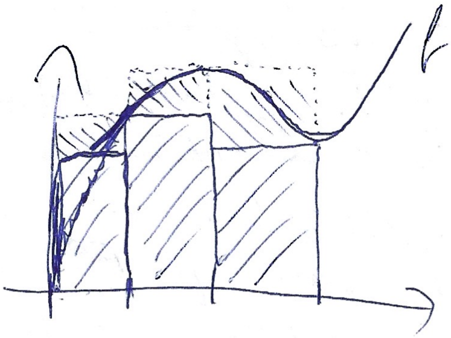
Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a_n,b_n]$. Tato limita existuje a leží v $[a,b]$, protože je neklesající a je zdola omezená a a shora b. Dokonce $a_n < b_m$ pro $\forall n, m$, takže $\alpha \in [a_n,b_n]$ $\forall n$. Pak ale $\alpha \notin M_n$ $\forall n$, $\Rightarrow$ ve sporu s $\alpha \in [a,b]$ ↯

24) $\underline{\int} \leq \overline{\int}$

dolní součty: $s(\overline{a},f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \inf(f[I_i])$

$s(\overline{a}f) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

horní součty $S(\overline{a},f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \sup(f[I_i])$



$S(\overline{a},f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\underline{\int_a^b} f := \sup(\{s(\overline{a},f) \mid \overline{a} \in D\}) \in \mathbb{R}^*$ ... dolní integrál fce f přes $[a,b]$

množina všech dělení

$\overline{\int_a^b} f = \inf(\{S(\overline{a},f) \mid \overline{a} \in D\}) \in \mathbb{R}^*$ ... horní integrál fce f přes $[a,b]$

Tvrzení: Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Pro $\forall$ dvě dělení $\overline{a}, \overline{b} \in D(a,b)$ platí, že

$$s(\overline{a},f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(\overline{b},f)$$

Dk Nechť $\bar{c}$ zjemňuje $\bar{a}, \bar{b}$ $(\bar{c} = \bar{a} \cup \bar{b})$ → společné zjemnění

Pak $\bar{c}$ je jemnější než $\bar{a}$ a $\bar{b}$ a podle předchozího tvrzení

$$s(\bar{a},f) \leq s(\bar{b},f) \wedge S(\bar{a},f) \geq S(\bar{b},f)$$

je $s(\bar{a},f) \leq s(\bar{c},f) \leq S(\bar{c},f) \leq S(\bar{b},f)$ a $s(\bar{a},f) \leq S(\bar{b},f)$

$\bar{c}$ je jemnější ⇒ dolní součet je větší

2.5) Základní věta algebry

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a je v $R(a,b)$. Pak pro $\forall x \in (a,b]$ je $f \in R(a,b)$ a

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $F(x) := \int_a^x f$, je lipschitzovsky spojitá.

Dále: f je spojitá v $x \in [a,b] \Rightarrow F'(x) = f(x)$

---

1. část věty: pokud je fce ~~...~~ omezená na $[a,b]$, pak je Riemannovsky integrovatelná na každém podintervalu $(a,x]$ pro $\forall x$ na $(a,b]$

2. část věty tvrdí, že pokud def. fce $F(x)$ jako integrál f od a do x, pak je lipsch. spojitá – tedy $\exists$ kladná konstanta K, že pro všechna x a y na $[a,b]$ platí $[F(x) - F(y)] \leq K \cdot |x-y|$. Tento vztah udává omezení rozdílu hodnot fce F na libovolném intervalu $[x,y]$.

Poslední část věty uvádí, že pokud je ~~derivace~~ fce f spojitá v bodě x na $[a,b]$, pak $\exists$ derivace fce F ve stejném bodě rovna hodnotě fce f v tomto bodě. Tedy $F'(x) = f(x)$

Dk nejdříve dk. že fce je Lipsch. spojitá (tedy že $\forall x,y \in M\ (|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x-y|)$

Nechť f je Riemannovsky integr. a f je definovaná (spojitá) na (a', b') pro $a \leq a' \leq b' \leq b$

$F(a) = 0$. F je omezená, tedy existuje omezující konstanta $d > 0$. Pak $c := d+1$ (z nejakého důvodu).

Podle def. Riemannova integrálu $|\int_x^y f - R(\bar{a}, \bar{t}, f)| < y - x$. Pak se $|F(y) - F(x)|$ rovná

$$|\int_x^y f| \leq y - x + |R(\bar{a}, \bar{t}, f)| \leq y - x + c \cdot (y - x) \text{ a tedy } \underbrace{|F(y) - F(x)| \leq c \cdot (y-x)}_{\text{lipsch. spojitá}}$$

Spojitost fce: Předpokládejme, že f je spojitá v x_0 na $[a,b]$. Zvolíme ε.

Pak můžeme najít δ že $x \in U(x_0, \delta) \cap [a,b] \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$

odhad rozdílu $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ ... rozdíl hodnot derivace $F'(x_0)$ a $f(x_0)$ je $< 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ derivace $F'(x_0) = f(x_0)\ \forall x_0$

26)

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f + \underbrace{\int_a^b \{x\} f'(x)}_{T} \text{. kde } \{x\} = a - \lfloor a \rfloor$$

Dk. pro $b := a+1$

Pak $$T = \int_a^{a+1} (x-a)\cdot f'(x) \overset{P.P.}{=} \left[(x-a)\cdot f(x)\right]_a^{a+1} - \int_a^{a+1} f$$

Takže $$\sum_{a<n\le b} f(n) = \left[(x-a) f(x)\right]_a^{a+1} = f(a+1)$$