บทที่ 1 เมทริกซ์ (Matrices)

เมทริกซ์เป็นหนึ่งในเนื้อหาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) ที่มีความสำคัญมากหัวข้อหนึ่ง เนื่องจากสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่นๆ ได้ ไม่ว่าจะเป็นสาขาวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ธุรกิจ เป็นต้น เนื่องด้วยข้อมูลของปัญหาในสาขาวิชาดังกล่าวข้างต้นนั้น บ่อยครั้งจะจัดเรียงกันอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (แบบแถวและหลัก) หรือความสัมพันธ์ของข้อมูลอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ จะทำให้เราสามารถนำความรู้ที่เกี่ยวกับการดำเนินการทางเมทริกซ์มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา และสามารถตอบปัญหาต่างๆ ได้ สำหรับในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับพื้นฐานของเมทริกซ์ และเมทริกซ์ในรูปแบบต่างๆ รวมถึงบทนิยามเบื้องต้น การดำเนินการและสมบัติต่างๆ ของเมทริกซ์

1.1 ความรู้เบื้องต้นของระบบสมการเชิงเส้น (Introduction to Systems of Linear Equation)

สมการเส้นตรงในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ เขียนแทนด้วย

$$ax + by = c\,;\quad a \text{ และ } b \text{ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน} \qquad (1.1)$$

สมการระนาบในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ เขียนแทนด้วย

$$ax + by + cz = d \qquad ;a, b \text{ และ } c \text{ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน} \qquad (1.2)$$

จะเห็นได้ว่าในสมการ (1.1) และ(1.2) ตัวแปรทั้ง x, y และ z มีลักษณะเชิงเส้น (ยกกำลัง1) สำหรับในรูปทั่วไปสมการเชิงเส้น n ตัวแปร $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ อยู่ในรูป

$$a_1x_1, + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1.3)$$

โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ b เป็นค่าคงตัว และสัมประสิทธิ์ a_i $, i = 1, \ldots, n$ **ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน**

ในกรณีที่ $b = 0$ สมการ (1.3) จะอยู่ในรูป

$$a_1x_1, + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \qquad (1.4)$$

และเรียกสมการ (1.4) ว่า**สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (homogeneous linear equation)**

สำหรับกรณี $b \neq 0$ จะเรียกสมการ(1.3) ว่า**สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ (non-homogeneous linear equation)**

ตัวอย่าง 1.1 ตัวอย่างของสมการที่อยู่ในรูปแบบของ**สมการเชิงเส้น**

$$3x + y = 7 \tag{1.5}$$

$$x - \frac{1}{2}y + 4z = 1 \tag{1.6}$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \tag{1.7}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \tag{1.8}$$

ตัวอย่างของ**สมการที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น**

$$3x + y^2 = 4 \tag{1.9}$$

$$x + \sin y = 0 \tag{1.10}$$

$$5x + y - xy = 7 \tag{1.11}$$

$$x_1 + 2\sqrt{x_2} + x_3 = 1 \tag{1.12}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

....

....

....

ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations) หรือ**ระบบเชิงเส้น (linear system)** และเรียกตัวแปรว่า **ตัวไม่ทราบค่า (unknowns)** ตัวอย่างเช่น ระบบสมการเชิงเส้น (1.13) มีตัวไม่ทราบค่า คือตัวแปร a และ b และในระบบสมการเชิงเส้น (1.14) มีตัวไม่ทราบค่า คือตัวแปร x, y และ z

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b &= 1 \\ 2a - b &= 4 \end{aligned}\right\} \quad (1.13) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 5y - 7z &= -11 \end{aligned}\right\} \quad (1.14)$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสมการ m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า(หรือตัวแปร) n ตัว สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1.15)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ เป็นค่าคงตัว ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวไม่ทราบค่า และ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ทางขวามือของระบบสมการเป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยหรือคำตอบ (solution) ของระบบสมการ (1.15) มี ลำดับ n จำนวน : $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ซึ่ง

หรือแทนค่า $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,..., $x_n = s_n$

ลงในระบบสมการ (1.15) แล้วทำให้สมการเป็นจริงทุกสมการ และผลเฉลยของระบบสมการสามารถเขียนในรูป $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ และเรียกว่า ordered n-tuple ในกรณีถ้า $n = 2$ แล้วจะเรียก ordered pair และถ้า $n = 3$ แล้วจะเรียกว่า ordered triple

ตัวอย่างเช่นผลเฉลยของระบบสมการ (1.13) คือ

$$a = -1, \ b = 2$$

หรือเขียนในรูปของ **ordered pair** : $(-1, 2)$

และผลเฉลยของระบบสมการ (1.14) คือ

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

หรือเขียนในรูปของ **ordered triple** : $(-1, 2, 3)$

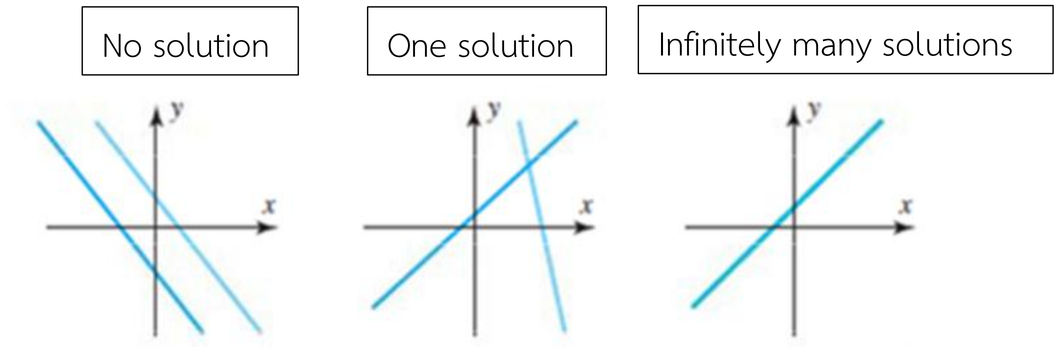
โดยทั่วไป จะเรียกระบบสมการเชิงเส้น ว่าเป็น ระบบต้องกัน (consistent system) ถ้าระบบสมการเชิงเส้นนั้นมีผลเฉลย และเรียกระบบสมการเชิงเส้น ว่าเป็นระบบไม่ต้องกัน (inconsistent system) ถ้าระบบสมการเชิงเส้นนั้นไม่มีผลเฉลย

- ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นอาจมีเพียงผลเฉลยเดียว (one solution)
- มีผลเฉลยมากมายไม่จำกัด (infinite many solutions)
- ไม่มีผลเฉลย (no solution)

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y &= c_1 \\ a_2x+b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

เราพิจารณารูปแบบของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (1.16) โดยการวาดกราฟเส้นตรง 2 เส้น ดังรูป 1.1



(a) (b) (c)

รูปที่ 1.1 รูปแบบผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว

สรุป

....

....

....

....

....

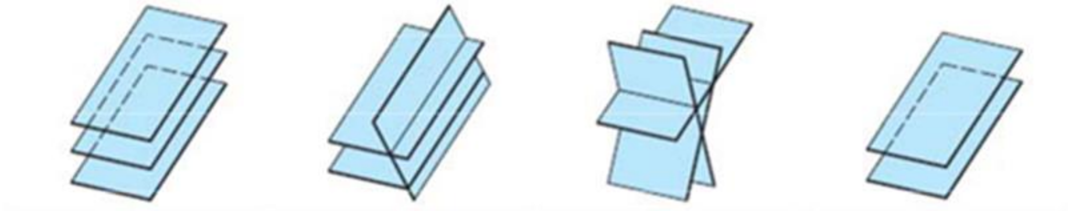
....

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว

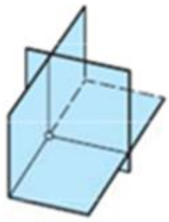
$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

เราพิจารณารูปแบบของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (1.17) โดยการวาดกราฟของระบบสมการ ดังรูป 1.2

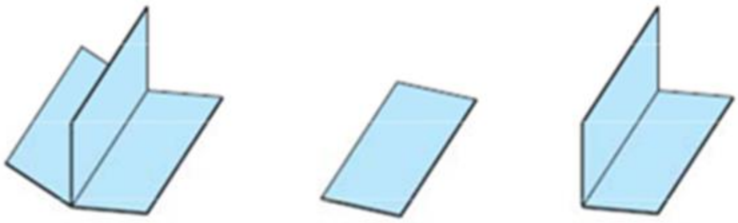
No solution



One solution



Infinitely many solutions



รูปที่ 1.2 รูปแบบผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว

สรุป

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.2 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2a+b &= 6 \\ a-b &= 1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 1.3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a+b &= 2 \\ 5a+5b &= 10 \end{aligned} \tag{1.19}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 1.4 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2a - 4b &= 1 \\ 8a - 16b &= 4 \end{aligned} \tag{1.20}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 1.5 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 6 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned} \qquad (1.21)$$

<u>วิธีทำ</u>

ข้อสังเกตุ พบว่าในการแก้สมการเชิงเส้นนั้น การดำเนินการต่อไปนี้กับระบบสมการ ไม่ทำให้ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเปลี่ยนแปลง คือ

1. การคูณสมการด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์
2. การสลับกันของสมการ
3. การนำค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์คูณกับสมการใดสมการหนึ่งแล้วบวกเข้ากับอีกสมการหนึ่ง

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีสมการ m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า n ตัว

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1.22)$$

จะพบว่าในการหาผลเฉลยของระบบสมการ(1.22) จะมีความยุ่งยากมากขึ้น แต่ระบบสมการเชิงเส้น (1.22) สามารถเขียนในรูปการคูณกันของเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1.23)$$

ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

แล้วระบบสมการ (1.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ $Ax = b$ และเรียกเมทริกซ์ A ว่า **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** เรียก x ว่าเวกเตอร์ของตัวไม่ทราบค่า**(ตัวแปร)** และเรียก b ว่า เวกเตอร์ของค่าคงตัวขวามือ ซึ่งในการหาผลรวมของระบบสมการ ต้องการใช้ความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์โดยจะกล่าวในบทที่ 3 ต่อไป

1.2 เมทริกซ์และการดำเนินการของเมทริกซ์ Matrices and Matrix Operations

<u>บทนิยาม 1.1</u> เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนหรือฟังก์ชัน เขียนเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular Array) ภายในเครื่องหมาย [ ]

รูปทั่วๆ ไปของเมทริกซ์นั้น เรานิยมเขียนดังนี้

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & & \text{หลักที่ } n \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \longleftarrow \text{แถวที่ 2} \\ \\ \longleftarrow \text{แถวที่ 3} \\ \\ \\ \end{array}$$

1. สมาชิกของเมทริกซ์ซึ่งเขียนเรียงกันในรูปแนวนอนเรียกว่า แถว (row)
2. สมาชิกของเมทริกซ์ซึ่งเขียนเรียงกันในรูปแนวตั้ง เรียกว่า หลัก (column)

เราใช้สัญลักษณ์ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่คือ $A, B, C, \ldots$ แทนเมทริกซ์ และใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก $a, b, c, \ldots$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น ใช้สัญลักษณ์ a_{ij} แทนสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A

เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แทนเมทริกซ์ a ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad E = [9]$$

จงเขียนสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ข้างต้น พร้อมทั้งบอกขนาดของเมทริกซ์ด้วย

....

....

....

....

<u>ชนิดของเมทริกซ์</u>

1. เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว 1 แถว และจำนวนหลัก n หลัก เราเรียกว่า **เวกเตอร์แถว (Row vector) :**

$$\begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ \ldots . \ a_n \end{bmatrix}$$

2. เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว m แถว และจำนวนหลัก 1 หลัก เราเรียกว่า **เวกเตอร์หลัก (Column vector):**

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3. เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (Zero vector) และใช้สัญลักษณ์ $\underline{0}$

4. **เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix)** คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว และจำนวนหลักเท่ากัน ถ้าเมทริกซ์ใดมีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากับ n จะเรียกว่า **เมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n (Square matrix of order n)** เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

เรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 2

5. **เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal matrix)** คือ เมทริกซ์จัตุรัส ที่สมาชิกที่ไม่อยู่บน**แนวทแยงหลัก (main diagonal)** เป็นศูนย์ทุกตัว หรือกล่าวได้ว่า เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ สำหรับทุกตัว $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

6. **เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)** คือ เมทริกซ์ทแยงมุม ที่สมาชิกทุกตัวที่อยู่บนแนวทแยงหลักเป็น 1 และใช้สัญลักษณ์ I_n หรือ I เช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. **เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix)** คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักทุกตัวเป็นศูนย์ หรือกล่าวได้ว่า เมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ สำหรับทุก $i = 2,\ldots,n-1$ และ $j = 1,\ldots,i-1$

8. **เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Lower triangular matrix)** คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเหนือแนวทแยงมุมหลักทุกตัวเป็นศูนย์ หรือกล่าวได้ว่า เมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i < j$ สำหรับทุก $i = 1,\ldots,n-1$ และ $j = i+1,\ldots,n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Upper triangularmatrix *Lower triangularmatrix*

9. **เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix)** คือ เมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีสมบัติว่า $A^T = A$ นั่นคือจะกล่าวว่า เมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = a_{ij}$ สำหรับทุก $i, j = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่างเช่น
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

10. **เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew Symmetric matrix)** คือ เมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีสมบัติว่า $A^T = -A$ นั่นคือ จะกล่าวว่าเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = -a_{ij}$ สำหรับทุก $i, j = 1,2,\ldots,n$

ตัวอย่างเช่น
$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>บทนิยาม 1.2</u> จะกล่าวว่าเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]$ เท่ากันกับเมทริกซ์ $B = \left[b_{ij}\right]$ ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า i, j

ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่าสมบัติในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A = A$ (สมบัติสะท้อน)
2. ถ้า $A = B$ จะได้ว่า $B = A$ (สมบัติสมมาตร)
3. ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้วจะได้ว่า $A = C$ (สมบัติถ่ายทอด)

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 0 \\ -1 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & y^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b-a & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -b & a \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ก. จงหาค่า x และ y ที่ทำให้เมทริกซ์ $A = B$

ข. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้เมทริกซ์ $A = C$

<u>วิธีทำ</u>

<u>บทนิยาม 1.3</u> กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี่ขนาดเท่ากัน

ผลต่างของเมทริกซ์ A และ B เขียนทนด้วยสัญลักษณ์ $A + B$ **นิยามโดย**

$$A+B = \left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n} \tag{1.24}$$

ผลบวกของเมทริกซ์ A และ B เขียนทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ **นิยามโดย**

$$A-B = \left[a_{ij}-b_{ij}\right]_{m\times n} \tag{1.25}$$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ก. จงหา $A + B$ และ $B - A$

ข. จงหา $A + C, B + C, A - C$ และ $B - C \;\; C = D$

<u>วิธีทำ</u>

สมบัติการการบวกเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 1.1 กฎการสลับที่สำหรับการบวก (Commutative Law for Addition)

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A+B = B+A$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.2 กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก (Associative Law for Addition)

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A+(B+C) = (A+B)+C$

พิสูจน์

บทนิยาม 1.4 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ C เป็นสเกลาร์

ผลคูณของเมทริกซ์ A กับ สเกลาร์ c เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ cA กำหนดโดย

$$cA = \left[ca_{ij}\right]_{m\times n} \tag{1.26}$$

ตัวอย่าง 1.9 กำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1+i & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad i=\sqrt{-1}$$

จงหา $3A$, $(-1)A$ และ $\frac{1}{2}A$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ เท่ากัน และ r, s เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $(r+s)A=rA+sA$
2. $(A+B)r=rA+rB$

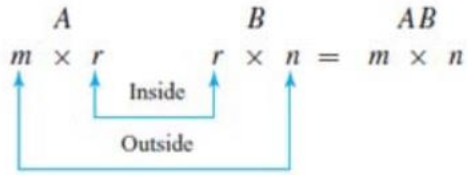
พิสูจน์

<u>บทนิยาม 1.5</u>   การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times r}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{r\times n}$ ผลคูณของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B นิยามโดย

$$C = AB = \left[a_{ij}\right]_{m\times r}\left[b_{ij}\right]_{r\times n} = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$

โดยที่ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,r$, $j = 1,2,\ldots,n$



แสดงดังแผนภาพต่อไปนี้

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

จะพบว่า

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$$

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{และ} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ BA

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1+i \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & 2 \\ 2 & -i & 5 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ BA

<u>**วิธีทำ**</u>

ทฤษฎีบท 1.4 ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ เท่ากัน และ C เป็นเมทริกซ์ใดๆที่คูณกับเมทริกซ์ A และ B ได้ จะได้ว่า

1. ถ้า $A = B$ แล้ว $AC = BC$
2. ถ้า $A = B$ แล้ว $CA = CB$

ทฤษฎีบท 1.5 กฎการจัดหมู่สำหรับการคูณ (Associative Law for Multiplication)

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ และ C เป็นเมทริกซ์ขนาด $p \times q$ แล้ว

$$(AB)C = A(BC)$$

<u>**พิสูจน์**</u>

ทฤษฎีบท 1.6 กฎการกระจาย (Distributive Law)

1. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n\times p$

   จะได้ว่า $$(A+B)C = AC+BC$$

2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ และ B, C เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n\times p$

   จะได้ว่า $$A(B+C) = AB+AC$$

พิสูจน์ (1)

หมายเหตุ กรณีที่ (2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.7

A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times p$ และ ให้ r, s เป็นสเกลาร์ใดๆ จะได้ว่า

1. $r\,(sA) = (rs)A = s(rA)$
2. $A(rB) = r(AB)$

พิสูจน์

บทนิยาม 1.6 **เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of Matrix)**

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว เมทริกซ์สลับของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$A^T = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$$

โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$

หมายเหตุ เราใช้สัญลักษณ์ A^T หรือ A^t แทนเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & i \\ 1-i & 8 \end{bmatrix}$ **จะได้ว่า** $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1-i \\ 0 & i & 8 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 1.8

ถ้า A^T และ B^T คือทรานสโพสของเมทริกซ์ A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ เท่ากัน และถ้า c คือสเกลาร์ จะได้ว่า

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(-A)^T = -A^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(cA)^T = cA^T$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.9

ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีผลคูณ AB แล้วจะได้ว่า $(AB)^T = B^T A^T$

<u>พิสูจน์</u>

บทแทรก

1. เราจะเรียก เมทริกซ์ A ว่าเป็น**เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)** ถ้า $A = A^T$
2. เราจะเรียก เมทริกซ์ A ว่าเป็น**เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew-Symmetric Matrix)** ถ้า $A^T = -A$

ตัวอย่างเช่น

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรเพราะ $A = A^T$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตรเพราะ $B^T = -B$

<u>บทนิยาม 1.7</u> กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว สังยุค (conjugate) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$\overline{A} = \left[\overline{a}_{ij}\right]_{m\times n}$$

เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$

หมายเหตุ เราใช้สัญลักษณ์ A^* แทน สังยุคเมทริกซ์สลับเปลี่ยน โดยที่ $A^* = \overline{A^T}$ และพบว่า $\overline{A^T} = \overline{A}^T$

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} i+i & -2 \\ 0 & 1 \\ 7-8i & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 7-5i \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 7+3i \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

<u>สมบัติสังยุคของเมทริกซ์</u>

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}$ และ $\overline{A-B} = \overline{A}-\overline{B}$
3. $\overline{cA} = \overline{c}\,\overline{A}$ เมื่อ $\overline{c}$ เป็นสเกลาร์

ทฤษฎีบท 1.10

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ ใดๆ แล้ว

1. $\left(A^*\right)^* = A$
2. $(-A)^* = -A^*$

ทฤษฎีบท 1.11

ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times n$ เท่ากัน และ c เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\left(A+B\right)^* = A^* + B^*$
2. $(cA)^* = \overline{c}A^*$

<u>บทนิยาม 1.8</u> จะกล่าวว่าเมทริกซ์เชิงซ้อน A เป็น **เมทริกซ์เฮอร์มิเทียน (Hermitian)** ถ้า $A^* = A$

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1+2i \\ -4 & 0 & -i \\ 1-2i & i & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow A^* =$

ตัวอย่าง 1.12 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad , E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } F = \begin{bmatrix} 3-i & 5 & -2 \\ 4 & i & 7 \end{bmatrix}$$

จงหา

(a) $2(D+3E)^T$

(b) $A(CB)$

(c) $B^T B$

(d) $\overline{F}$

<u>วิธีทำ</u>

เมทริกซ์ยกกำลัง

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n จะได้ว่าผลคูณของเมทริกซ์ตัวมันเองสามารถเขียนในรูปยกกำลัง กล่าวคือ $A^2 = AA,\ A^3 = AAA,\ \cdots, A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k\ terms}$

บทนิยาม 1.9 เทรซ (trace) ของเมทริกซ์ คือ ผลบวกของสมาชิกบนแนวทแยงหลักทั้งหมด

กล่าวคือ ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n แล้วจะได้ว่า เทรซ ของ A นิยามโดย

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

หมายเหตุ เราใช้สัญลักษณ์ $tr(A)$ แทน เทรซของเมทริกซ์ A

ทฤษฎีบท 1.13

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n และ c เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1. $tr\left(A^T\right) = tr(A)$
2. $tr(cA) = c\, tr(A)$
3. $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

ตัวอย่าง 1.13 จงใช้เมทริกซ์ในตัวอย่าง 1.12 คำนวณหาข้อต่อไปนี้

$(a)\ tr(D)$ $\qquad$ $(b)\ tr(2D-E)$

$(c)\ tr(BC)$ $\qquad$ $(d)\ tr\left(AA^T\right)$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงสร้างเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]$ ที่มีขนาด 4×4 โดยสมาชิกของเมทริกซ์ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขข้อต่อไปนี้

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \ , & |i-j| \geq 1 \\ -1, & |i-j| < 1 \end{cases}$$

2. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$a = 2$ และ $b = -5$

จงแสดงว่า

(a) $A+(B+C) = (A+B)+C$
(b) $(AB)C = A(BC)$
(c) $A(B-C) = AB-AC$
(d) $\left(B^T\right)^T = B$
(e) $(bA)^T = bA^T$
(f) $tr\left(3AB^T\right)$

3. จงหาค่าของ k ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$$

4. จงหาค่าของ $a,b.c$ และ d ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c-2d \\ c+2d & 4 \end{bmatrix}$$

5. จงหาค่าของ a ที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a & 4-2a \\ 2a & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

6. จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a & a+3b \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร

1.3 เมทริกซ์ผกผัน Inverse Matrix

บทนิยาม 1.10 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ซึ่งทำให้ $AB = BA = I$ เราจะกล่าวว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผัน (Inverse matrix) ของเมทริกซ์ A (หรือกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน และเรียก A ว่าเป็น เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix)) และเราใช้สัญลักษณ์ A^{-1} แทนเมทริกซ์ผกผันของ A (A^{-1} อ่านว่า A อินเวอร์ส) สำหรับกรณีที่ A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน เราจะเรียก A ว่า เมทริกซ์เอกฐาน(singular matrix) นั้นคือ $B = A^{-1}$ ดังนั้น $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $AB = BA = I$

<u>**วิธีทำ**</u>

ทฤษฎีบท 1.14

ถ้าเมทริกซ์ A มีเมทริกซ์ผกผัน แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์ผกผันเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ สมมติให้เมทริกซ์ B และ C เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A จากนิยาม 1.10 จะได้ว่า

$$AB = BA = I \text{ และ } AC = CA = I$$

ดังนั้น $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

นั้นคือ A จะมีเมทริกซ์ผกผันเพียงเมทริกซ์เดียว

ทฤษฎีบท 1.15

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ $ab - bc \neq 0$ และ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>**พิสูจน์**</u>

ตัวอย่าง 1.15 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) จงหา A^{-1} พร้อมทั้งแสดงว่า $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(b) จงให้เหตุผลว่า เหตุใดเมทริกซ์ B ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.16 กำหนดให้ A และ B ต่างก็เป็นเมทริกซ์ผกผัน แล้ว ผลคูณ AB จะเป็นเมทริกที่มีเมทริกซ์ผกผันด้วย และ

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

พิสูจน์

ตัวอย่าง 1.16 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท 1.17 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าศูนย์หรือเท่ากับศูนย์ แล้วสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. A^{-1} เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน และ $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^n เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน และ $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$
3. kA เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน โดยที่ $k \neq 0$ และ $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

ตัวอย่าง 1.17 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท 1.18 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน แล้ว A^T จะเป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผันด้วย และ

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

ตัวอย่าง 1.18 กำหนดให้

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ A

<u>**วิธีทำ**</u>

ตัวอย่าง 1.19 จงใช้เมทริกซ์ผกผันหา x_1, x_2, x_3 จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -4 \\ x_1 + 5x_2 + 12x_3 &= -11 \end{aligned}$$

<u>**วิธีทำ**</u>

ข้อสังเกต ถ้า $Ax = B$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว $x = A^{-1}B$ เมื่อ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $X = \left[x_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$

แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \end{bmatrix}$$

1.1 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ข้างต้น

1.2 จงแสดงว่า

(a) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. จงหาเมทริกซ์ A เมื่อกำหนดให้

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $(5A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\left(5A^{T}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

สำหรับข้อ 4. – 5. จงใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ผกผัน หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

4. $$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

1.4 การแบ่งเมทริกซ์เป็นส่วนๆ Partitioned Matrics

เราสามารถแบ่งเมริกซ์ให้เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเล็กๆ ซึ่งเรียกว่า เมทริกซ์ย่อย (submatrics) โดยการขีดเส้นกั้นในแนวนอนหรือแนวตั้งตามต้องการ ตัวอย่างเช่น เมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]$ มีขนาด 3×4 สามารถแบ่งเป็นเมทริกซ์ย่อย ได้ 3 แบบดังนี้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.19 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน ถ้าแบ่ง A และ B เป็นเมทริกซ์ย่อย $A = \left[A_{ij}\right]$ และ $B = \left[B_{ij}\right]$ ตามลำดับโดยที่ A_{ij} และ B_{ij} มีขนาดเท่ากัน แล้วจะได้ว่า

$$A + B = \left[A_{ij} + B_{ij}\right]$$

ตัวอย่าง 1.19 กำหนดให้

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 9 & 8 & 4 \end{array}\right] \quad \text{และ} \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & -4 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right]$$

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ โดยที่ $A_{11} =$ $A_{12} =$ $A_{21} =$ $A_{22} =$

และ $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ โดยที่ $B_{11} =$ $B_{12} =$ $B_{21} =$ $B_{22} =$

ดังนั้น $A + B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix} =$

ทฤษฎีบท 1.20 กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีผลคูณ ถ้าแบ่ง A และ B เป็นเมทริกซ์ย่อย $A = \left[A_{ik}\right]$ และ $B = \left[B_{kj}\right]$ ตามลำดับ โดยผลคูณ $A_{ik}B_{kj}$ ทุกค่า i, j และ k แล้วจะได้ว่า

$$AB = \left[\sum_{all\ k} A_{ik}B_{kj}\right]$$

ตัวอย่าง 1.20 กำหนดให้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 5 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right] \quad \text{และ} \quad B = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ \hline 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{array}\right]$$

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ โดยที่ $A_{11} =$ $A_{12} =$ $A_{21} =$ $A_{22} =$

และ $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ โดยที่ $B_1 =$ $B_2 =$

ดังนั้น $AB = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 + A_{12} + B_2 \\ A_{21} + B_1 + A_{22} + B_2 \end{bmatrix} =$

การยกกำลังของเมทริกซ์จัตุรัสในรูปแบบ $\left[\begin{array}{c|c} I & \underline{0} \\ \hline R & S \end{array}\right]$

กำหนดให้เมทริกซ์จัตุรัส $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ สามารถแบ่งเป็นเมทริกซ์ย่อยในรูปแบบ $\left[\begin{array}{c|c} I & \underline{0} \\ \hline R & S \end{array}\right]$

โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ขนาด $m\times m$

$\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ขนาด $m\times(n-m)$

R เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-m)\times m$

S เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด $(n-m)\times(n-m)$

จะพบว่า
$$A^2 = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+\underline{0}R & I\underline{0}+\underline{0}S \\ RI+SR & R\underline{0}+S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ (I+S)R & S^2 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ (I+S)R & S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ (I+S+S)R & S^2 \end{bmatrix}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$A^k = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ \left(I+S+\ldots+S^{k-2}\right)R & S^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ (I+S+S)R & S^2 \end{bmatrix}$$

และเนื่องจาก $(I-S)\left(I+S+S^2+\ldots+S^{k-1}\right) = I-S^k$

ถ้า $I-S$ เป็นเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า

$$(I-S)\left(I+S+S^2+\ldots+S^{k-1}\right) = (I-S)^{-1}\left(I-S^k\right)$$

ดังนั้น
$$A^3 = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ (I-S)^{-1}\left(I-S^k\right)R & S^k \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่ S เป็นเมทริกซ์ที่มีสมบัติว่า $S^k \to \underline{0}$ เมื่อ $k\to\infty$ จะได้ว่า

$$A^k = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ (I-S)^{-1}R & \underline{0} \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. กำหนดให้

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ และ } B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \\ \hline -0 & 2 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

1.1 จงแสดงว่า $A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$

1.2 จงแสดงว่า $AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$

1.5 การดำเนินการขั้นมูลฐาน (Elementary Operation)

<u>บทนิยาม 1.11</u> การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row Operation) คือการดำเนินการกับเมทริกซ์อย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับสองแถวใดๆ ของเมทริกซ์

   เช่น สลับแถวที่ i กับแถวที่ j และใช้สัญลักษณ์ $R_i \leftrightarrow R_j$

2. การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์

   เช่น ดำเนินการกับแถวที่ i โดยคูณแถวที่ i ด้วยค่าคงที่ $c \neq 0$ และใช้สัญลักษณ์ cR_i

3. การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยค่าคงที่แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง

   เช่น ดำเนินการกับแถวที่ j โดยนำค่าคงที่ c กับแถวที่ i แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j และใช้สัญลักษณ์ $cR_i + R_j$

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

(1) สลับแถวที่สองกับแถวที่สามของเมทริกซ์ A จะได้เมทริกซ์ B :

$B =$

(2) คูณแถวที่หนึ่งของเมทริกซ์ B ด้วย $-\frac{1}{2}$ จะได้เมทริกซ์ C :

$C =$

(3) คูณแถวที่หนึ่งของเมทริกซ์ C ด้วย -2 แล้วบวกเข้ากับแถวที่สามของเมทริกซ์ C จะได้เมทริกซ์ D :

$D =$

<u>เมทริกซ์มูลฐาน</u> (Elementary Matrix)

เมทริกซ์มูลฐาน คือเมทริกซ์จตุรัสที่ได้จากการดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์

1. สลับแถวที่ i กับแถว j ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ และใช้สัญลักษณ์ $E_1(i,j)$
2. คูณแถวที่ i ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ ด้วยค่าคงที่ $c \neq 0$ และใช้สัญลักษณ์ $E_2(i,\mathrm{c})$
3. นำค่าคงที่ c ไปคูณกับแถวที่ i แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j และใช้สัญลักษณ์ $E_3(i,c,j)$

ตัวอย่างเช่น

$$E_1(2,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2(2,-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad E_3(3,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อเราดำเนินการตามแถวแบบใดแบบหนึ่งกับเมทริกซ์ A จะพบว่าผลลัพธ์เท่ากับ การนำเอาเมทริกซ์มูลฐานที่ได้จากการดำเนินการตามแถวแบบเดียวกันมาคูณทางซ้ายของเมทริกซ์ A

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ และเมทริกซ์มูลฐาน } E_1(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $E_1(1,2)A =$ $\qquad\qquad = B$

และเมื่อเราดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์ A โดยสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A จะได้

และเราพบว่า $E_2\left(3,\frac{1}{3}\right)B =$ $\qquad\qquad = C$

และพบว่า $E_3(1,-1,3)C =$ $\qquad\qquad = D$

<u>เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์มูลฐาน</u>

1. เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์มูลฐาน $E_1(i,j)$ คือ $E_1(i,j)^{-1} = E_1(i,j)$
2. เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์มูลฐาน $E_2(i,\mathrm{c})$ คือ $E_2(i,\mathrm{c})^{-1} = E_1\left(i,\dfrac{1}{c}\right)$
3. เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์มูลฐาน $E_3(i,\mathrm{c},j)$ คือ $E_3(i,\mathrm{c},j)^{-1} = E_3(i,-\mathrm{c},j)$

ตัวอย่างเช่น

$$E_1(1,2)E_1(1,2)^{-1} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} =$$

$$E_2(2,-5)E_2(2,-5)^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{bmatrix} =$$

$$E_3(2,3,1)E_3(2,3,1)^{-1} = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} =$$

<u>บทนิยาม 1.12</u> ถ้าเมทริกซ์ B ได้มาจากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานอย่างใดอย่างหนึ่งกับเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด เรากล่าวว่า **เมทริกซ์ A สมมูลแบบแถว (Row equivalent)** กับเมทริกซ์ B เขียนสัญลักษณ์เป็น $A \sim B$

<u>บทนิยาม 1.13</u> ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ เรากล่าวว่า A **เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (Row echelon matrix)** หรือ เมทริกซ์ขั้นบันได ก็ต่อเมื่อ A มีสมบัติ ดังนี้

1. ในแต่ละแถว สมาชิกตัวแรกนับจากซ้ายมือไม่เป็นศูนย์ จะต้องเป็น 1 ซึ่งเราเรียกว่า **ตัวนำหนึ่ง (leading one)**
2. ถ้าสมาชิกตัวแรกไม่ใช่ศูนย์ (คือตัวนำหนึ่ง) ในแถวที่ i อยู่ในสดมภ์ที่ j แล้วสมาชิกตัวนำหนึ่งในแถวที่ $i+1$ (แถวถัดไป) จะต้องอยู่ในสดมภ์ที่ k เมื่อ $k \geq j+i$ และแถวที่ไม่มีตัวนำหนึ่ง คือ แถวที่เป็นศูนย์ทั้งแถวซึ่งจะอยู่ใต้แถวที่มีตัวนำหนึ่ง

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป (**Reduced row echelon matrix**) หรือ เมทริกซบันไดลดรูป ก็ต่อเมื่อ A มีสมบัติ ดังนี้

1. A เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (Row echelon matrix)
2. ถ้าสมาชิกตัวนำหนึ่งในแถวที่ i อยู่ในสดมภ์ที่ j แล้วสมาชิกในแถวอื่นๆ ในสดมภ์ที่ j เป็นศูนย์ทั้งหมด

ตัวอย่างของ เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว

$$\begin{bmatrix}1&2&-4&7\\0&1&3&1\\0&0&1&4\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&4&6&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างของ เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป

$$\begin{bmatrix}1&0&0&6\\0&1&0&9\\0&0&1&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างเพิ่มเติมของเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว

$$\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างเพิ่มเติมของเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&*&0&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&1&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&1&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.22 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

จงใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row Operation) กับเมทริกซ์ A เพื่อลดรูปเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูปแบบ**เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (Row echelon matrix)** และ**เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป (Reduced row echelon matrix)**

<u>วิธีทำ</u>

หมายเหตุ

ขั้นตอนการลดรูปเมทริกซ์ให้อยู่ในรูป เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว เรียกว่า **Gaussian elimination** และขั้นตอนสำหรับการลดรูปเมทริกซ์ใหอยู่ในรูปขั้นบันไดแบบแถวลดรูป เรียกว่า **Gauss- Jordan elimination**

ทฤษฎีบท 1.21 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะมีเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปเพียงเมทริกซ์เดียวที่สมมูลแบบแถวกับเมทริกซ์ A

ตัวอย่าง 1.22 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์มูลฐาน E ที่ทำให้ EA เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.22 เมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ จะมีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ A สมมูลแบบแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์

การหาเมทริกซ์ผกผัน

จากทฤษฎีบท 1.22 กล่าวว่า เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ จะมีเมทริกซ์ผกผันก็ต่อเมื่อเมทริกซ์สมมูลแบบแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือเมื่อดำเนินการแบบแถวกับเมทริกซ์ A จนกระทั่งได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ I จะได้เมทริกซ์มูลฐาน $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ซึ่งทำให้

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = I$$

นั่นคือจะได้ $E = E_k \ldots E_2 E_1$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A

เราสามารถหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส A ได้ โดยเริ่มจากเขียนเมทริกซ์ให้อยู่ในรูป $\left[A|I\right]$ แล้วดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์ $\left[A|I\right]$ จนกระทั่งได้เมทริกซ์รูปแบบ $\left[I|E\right]$ จะได้ว่า $E = E_k \ldots E_2 E_1$ เป็นเมทริกผกผันของเมทริกซ์ A **นั้นคือ**

$$\left(E_k \ldots E_2 E_1\right) A = EA = I$$

สำหรับกรณีที่เมื่อดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์ A แล้ว ได้เมทริกซ์ที่มีศูนย์ทั้งแถว แสดงว่าเมทริกซ์ A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่าง 1.24 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ผกผันของ A

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.24 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

วิธีทำ

บทนิยาม 1.14 การดำเนินการตามสดมภ์ขั้นมูลฐาน (Elementary Column Operation) คือการดำเนินการกับเมทริกซ์อย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับสองหลักใดๆ ของเมทริกซ์
   เช่น สลับหลักที่ i กับหลักที่ j และใช้สัญลักษณ์ $C_i \leftrightarrow C_j$
2. การคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วยค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์
   เช่น ดำเนินการกับสลับหลักที่ i โดยคูณหลักที่ i ด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ และใช้สัญลักษณ์ kC_i
3. การคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วยค่าคงที่แล้วนำไปบวกกับอีกสดมภ์หนึ่ง
   เช่น ดำเนินการกับสลับหลักที่ j โดยนำค่าคงที่ k ไปคูณกับหลักที่ i แล้วนำไปบวกกับหลักที่ j และใช้สัญลักษณ์ $kC_i + C_j$

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(1) สลับหลักที่หนึ่งกับหลักที่สองของเมทริกซ์ A จะได้เมทริกซ์ B :

$B =$

(2) คูณหลักที่หนึ่งของเมทริกซ์ B ด้วย 2 จะได้เมทริกซ์ C :

$C =$

(3) คูณหลักที่หนึ่งของเมทริกซ์ C ด้วย -3 แล้วบวกเข้ากับหลักที่สามของเมทริกซ์ C จะได้เมทริกซ์ D :

$D =$

สมบัติต่างๆ ของการสมมูลแบบหลัก จะทำนองเดียวกับการดำเนินการตามแถว เรากล่าวว่า **เมทริกซ์ A สมมูลแบบหลักกับเมทริกซ์ B** ถ้าเมทริกซ์ B ได้มาจากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามสดมภ์ขั้นมูลฐานอย่างใดอย่างหนึ่งกับเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด จะได้ว่า การสมมูลแบบหลัก เป็นความสัมพันธ์สมมูล

เมื่อกล่าวว่าเมทริกซ์ A สมมูลแบบสดมภ์ กับเมทริกซ์ B จะหมายความว่า มีเมทริกซ์มูลฐานแบบสดมภ์ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ที่ ทำให้ $AE_1, E_2 \ldots E_k = B$ หรือ $A = BE_1, E_2 \ldots E_k$

แรงค์ของเมทริกซ์ (Rank of matrix)

บทนิยาม 1.15 กำหนดให้ R แทนเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปที่สมมูลกับเมทริกซ์ A จะได้ว่า แรงค์ของเมทริกซ์ A (Rank of A) เท่ากับจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ R

สมบัติต่างๆ ของแรงค์

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ เท่ากัน สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $rank\ A = rank\ A^T$
2. ถ้า A สมมูลกับ B แล้ว $rank\ A = rank\ B$
3. $rank\ A \le \min\{m, n\}$
4. $rank\ AB \le \min\{rank\ A, rank\ B\}$

ตัวอย่าง 1.26 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $rank\ A = rank\ A^T$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 1.5

1. กำหนดเมทริกซ์ A และเมทริกซ์มูลฐาน E

   จงหาผลคูณ EA และแสดงว่ามีผลลัพธ์เท่ากับการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานกับเมทริก์ A

   a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

   b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

2. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & 25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

   จงหาเมทริกซ์มูลฐาน E ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

   a) $EA = B$

   b) $EB = A$

   c) $EA = C$

   d) $EC = A$

สำหรับข้อ 3. - 18. จงหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ (ถ้ามี)

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

สำหรับข้อ 12. – 13. จงหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ โดยที่ k_1, k_2, k_3, k_4 และ k เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์

12. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

จงใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ผกผัน หาคำตอบของระบบสมการในข้อ 14. – 15.

14. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$ 15. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -4 \end{aligned}$