Artículo 1
Valores y Vectores Propios

Acerca del Autor
Julián Andrés Rincón Penagos
JARINCONAPPS@GMAIL.COM
15 de Noviembre de 2024

1.1 Introducción

En este capítulo vamos a estudiar los valores y vectores propios de matrices de 2×2 y 3×3.

Consideremos la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

vamos a realizar el siguiente cálculo

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I_2})$$

esto se conoce como calcular el polinomio característico, que nos va a dar los siguiente:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - (a_{21})(a_{12}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

esto se puede ver como

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathbf{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

cuando este polinomio característico se hace cero, se dice que se encuentran los valores propios de la matriz, esto nos quiere decir que cuando el determinante se hace cero se ha encontrado el núcleo de la matriz. Esto se puede escribir como

$$E_{\lambda_n} = \mathcal{N}(\boldsymbol{A} - \lambda_n \boldsymbol{I_2})$$

con esto podemos encontrar la solución a un sistema de ecuaciones homogénea la cual nos dará como resultado los vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$.

Ejemplo

Calcular los valores y vectores propios de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución

Polinomio Característico y Valores Propios

Para calcular los valores propios debemos encontrar el polinomio característico, así

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I_2}) \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(7-\lambda) - (5)(3) \\ &= 14 - 2\lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 15 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda - 1 \end{aligned}$$

Este resultado lo podemos comprobar en la calculadora

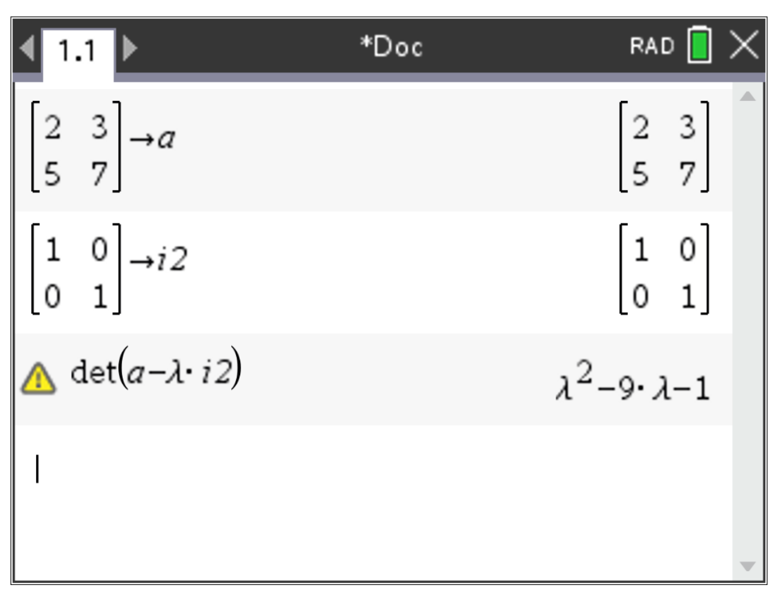

Figura 1.1: Cálculo del Polinomio Característico en la TI-Nspire CX II

Este polinomio representa todos los posibles valores que el determinante de la matriz puede tomar al variar la diagonal principal. Cuando encontremos un determinante cero, habremos encontrado el núcleo de la matriz.

En este sentido debemos encontrar los valores de λ que hacen que el polinomio se haga cero. Para ello vamos a usar la función general de segundo grado

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}\\ &= \frac{9 \pm \sqrt{81+4}}{2}\end{aligned}$$

del cual obtenemos dos valores propios

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right) \text{ y } \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right)$$

Vector Propio para $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right)$

Para calcular los vectores propios, vamos a calcular los espacios propios asociados a cada valor propio, así

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{A} - \left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right)\right)\boldsymbol{I_2}\right)$$

así tenemos que resolver el sistema homogéneo

$$\left[\boldsymbol{A} - \left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right)\right)\boldsymbol{I_2}\right]\boldsymbol{K_1} = 0$$

es decir

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right)\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{K_1} &= 0\\ \begin{pmatrix}2-\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right) & 3\\ 5 & 7-\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{85}\right)\end{pmatrix}\boldsymbol{K_1} &= 0\end{aligned}$$

para resolver este sistema homogéneo, usamos Gauss con la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{85}\right) & 3 & 0\\ 5 & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{85}\right) & 0\end{array}\right)$$

aplicamos las siguientes operaciones elementales:

1. Permutar la fila 1 con la 2: P_{12}

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{85}\right) & 3 & 0\\ 5 & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{85}\right) & 0\end{array}\right)\\ =&\left(\begin{array}{cc|c}5 & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{85}\right) & 0\\ \frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{85}\right) & 3 & 0\end{array}\right)\end{aligned}$$

2. Multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{5}$: $M_1\left(\frac{1}{5}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{85}\right) & 0\\ \frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{85}\right) & 3 & 0\end{array}\right)$$

3. Restar de la fila 2 la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{85}\right)$: $E_{21}\left(\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{85}\right)\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{85}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Así hemos encontrado infinitas soluciones, que podemos representar como

$$\begin{aligned}k_1 + \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{85}\right)k_2 &= 0\\ k_1 &= -\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{85}\right)k_2\end{aligned}$$

si tomamos un valor adecuado para $k_2 = -10$ tenemos que $k_1 = 5+\sqrt{85}$ por lo tanto el vector propio esta dado por

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}5+\sqrt{85}\\ -10\end{pmatrix}\right\}$$

Vector Propio para $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right)$

Para calcular los vectores propios, vamos a calcular los espacios propios asociados a cada valor propio, así

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{A} - \left(\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right)\right)\boldsymbol{I_2}\right)$$

así tenemos que resolver el sistema homogéneo

$$\left[\boldsymbol{A} - \left(\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right)\right)\boldsymbol{I_2}\right]\boldsymbol{K_1} = 0$$

es decir

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right)\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{K_1} &= 0\\ \begin{pmatrix}2-\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right) & 3\\ 5 & 7-\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{85}\right)\end{pmatrix}\boldsymbol{K_1} &= 0\end{aligned}$$

para resolver este sistema homogéneo, usamos Gauss con la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{85}\right) & 3 & 0\\ 5 & \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{85}\right) & 0\end{array}\right)$$

aplicamos las siguientes operaciones elementales:

1. Permutar la fila 1 con la 2: P_{12}

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{85}\right) & 3 & 0\\ 5 & \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{85}\right) & 0\end{array}\right)\\ =&\left(\begin{array}{cc|c}5 & \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{85}\right) & 0\\ \frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{85}\right) & 3 & 0\end{array}\right)\end{aligned}$$

2. Multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{5}$: $M_1\left(\frac{1}{5}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{85}\right) & 0\\ \frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{85}\right) & 3 & 0\end{array}\right)$$

3. Restar de la fila 2 la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{85}\right)$: $E_{21}\left(\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{85}\right)\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{85}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Así hemos encontrado infinitas soluciones, que podemos representar como

$$\begin{aligned}k_1 + \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{85}\right)k_2 &= 0\\ k_1 &= -\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{85}\right)k_2\end{aligned}$$

si tomamos un valor adecuado para $k_2 = -10$ tenemos que $k_1 = 5-\sqrt{85}$ por lo tanto el vector propio esta dado por

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}5-\sqrt{85}\\ -10\end{pmatrix}\right\}$$

1.2 Generación de Matrices Especiales 2×2

En esta sección quiero desarrollar un proceso inverso al que realizamos en la sección anterior. Como se puede observar encontramos unos valores propios irracionales que se vuelven un poco complicados de calcular.

Supongamos que después de encontrar el primer vector propio, usando Gauss, llegamos a lo siguiente

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que genera infinitas soluciones, es decir que

$$\begin{aligned} k_1 - 5k_2 &= 0 \\ k_1 &= 5k_2 \end{aligned}$$

que genera el siguiente espacio propio

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

trataremos de devolver el proceso, creando una fila 2 que sea múltiplo escalar (linealmente dependientes) de la fila 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

y ahora vamos a sumar un valor de λ que elegiremos aleatoriamente multiplicado por la matriz identidad, por ejemplo $\lambda = 7$ entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

matriz que debería tener valores propios enteros, uno de ellos $\lambda = 7$, y para ello vamos a realizar la prueba en la calculadora

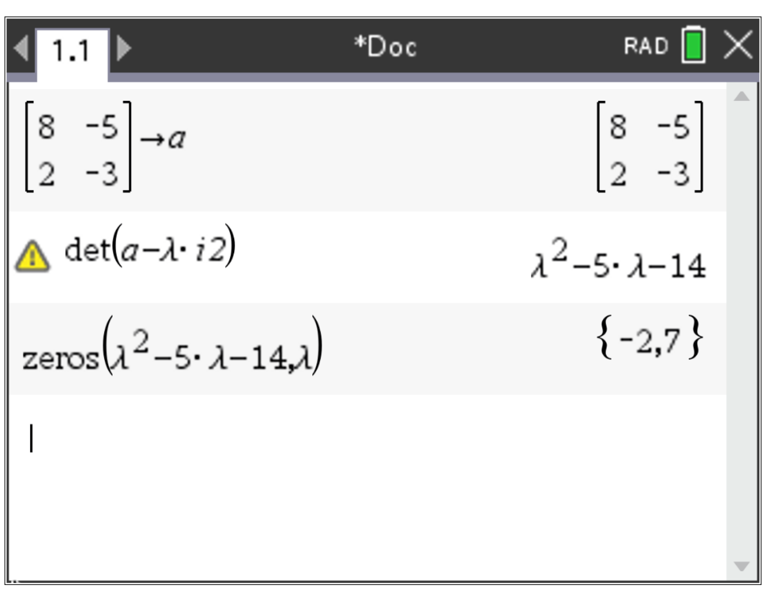

Figura 1.2: Cálculo del Polinomio Característico y Valores Propios en la Calculadora TI-Nspire CX II

Así podemos observar que los valores propios de la matriz calculada son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 7$

Ejemplo 2

Encontrar los valores y vectores propios de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -19 \\ -10 & 106 \end{pmatrix}$$

Solución

Valores Propios

Para encontrar los valores propios de la matriz debemos encontrar el polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\boldsymbol{A} - \lambda I_2) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 13 & -19 \\ -10 & 106 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 13-\lambda & -19 \\ -10 & 106-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (13-\lambda)(106-\lambda) - (-10)(-19) \\ &= 1378 - 13\lambda - 106\lambda + \lambda^2 - 190 \\ &= \lambda^2 - 119\lambda + 1188 \end{aligned}$$

factorizamos el polinomio característico como

$$p(\lambda) = (\lambda - 11)(\lambda - 108)$$

de donde obtenemos que

$$\lambda_1 = 11 \text{ y } \lambda_2 = 108$$

Vector propio asociado a $\lambda_1 = 11$

Para encontrar el vector propio asociado a λ_1 resolvemos el siguiente sistema homogéneo

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(\boldsymbol{A} - 11\boldsymbol{I_2})$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 13 & -19 \\ -10 & 106 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{K_1} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & -19 \\ -10 & 95 \end{pmatrix}\boldsymbol{K_1} &= 0 \end{aligned}$$

esto es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -19 & 0 \\ -10 & 95 & 0 \end{array}\right)$$

para resolver el sistema usamos Gauss, aplicando operaciones elementales

$$\begin{aligned} M_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -19 & 0 \\ -10 & 95 & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{19}{2} & 0 \\ -10 & 95 & 0 \end{array}\right) \\ E_{21}(-10)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{19}{2} & 0 \\ -10 & 95 & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{19}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

así obtenemos infinitas soluciones

$$\begin{aligned} k_1 - \frac{19}{2}k_2 &= 0 \\ k_1 &= \frac{19}{2}k_2 \end{aligned}$$

si elegimos $k_2 = 2$ tenemos que $k_1 = 19$ por lo tanto se genera el vector propio

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 19 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Vector propio asociado a $\lambda_1 = 108$

Para encontrar el vector propio asociado a λ_1 resolvemos el siguiente sistema homogéneo

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{A} - 108\boldsymbol{I_2}\right)$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 13 & -19 \\ -10 & 106 \end{pmatrix} - 108\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{K_2} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -95 & -19 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{K_2} &= 0 \end{aligned}$$

esto es

$$\left(\begin{array}{cc|c} -95 & -19 & 0 \\ -10 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

para resolver el sistema usamos Gauss, aplicando operaciones elementales

$$\begin{aligned} P_{12}\left(\begin{array}{cc|c} -95 & -19 & 0 \\ -10 & -2 & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|c} -10 & -2 & 0 \\ -95 & -19 & 0 \end{array}\right) \\ M_1\left(-\frac{1}{10}\right)\left(\begin{array}{cc|c} -10 & -2 & 0 \\ -95 & -19 & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ -95 & -19 & 0 \end{array}\right) \\ E_{21}\left(-95\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ -95 & -19 & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

así obtenemos infinitas soluciones

$$\begin{aligned} k_1 + \frac{1}{5}k_2 &= 0 \\ k_1 &= -\frac{1}{5}k_2 \end{aligned}$$

si elegimos $k_2 = -5$ tenemos que $k_1 = 1$ por lo tanto se genera el vector propio

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$$

1.3 Generación de Matrices Especiales 3×3

Ya vimos un método que nos sirve para generar matrices especiales de dimensión 2. En esta sección vamos a analizar un método general para generar matrices especiales de orden 3 (que tienen valores propios enteros).

1.3.1 Método General

Un primer método que puedo proponer para crear matrices aleatorias es el siguiente. Primero propongamos una matriz general de 3×3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y vamos a calcular el polinomio característico de esta matriz

$$\begin{aligned} p\left(\lambda\right) &= \det\left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_3}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&\left(a_{11} - \lambda\right)\left[\left(a_{22} - \lambda\right)\left(a_{33} - \lambda\right) - \left(a_{32}\right)\left(a_{23}\right)\right] \\ &- \left(a_{12}\right)\left[\left(a_{21}\right)\left(a_{33} - \lambda\right) - \left(a_{31}\right)\left(a_{23}\right)\right] \\ &+ \left(a_{13}\right)\left[\left(a_{21}\right)\left(a_{32}\right) - \left(a_{31}\right)\left(a_{22} - \lambda\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&\left(a_{11} - \lambda\right)\left[a_{22}a_{33} - a_{22}\lambda - a_{33}\lambda + \lambda^2 - a_{32}a_{23}\right] \\ &- a_{12}\left[a_{21}a_{33} - a_{21}\lambda - a_{31}a_{23}\right] \\ &+ a_{13}\left[a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} + a_{31}\lambda\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}\lambda - a_{11}a_{33}\lambda + a_{11}\lambda^2 - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &- a_{22}a_{33}\lambda + a_{22}\lambda^2 + a_{33}\lambda^2 - \lambda^3 + a_{32}a_{23}\lambda \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{21}\lambda + a_{12}a_{31}a_{23} \\ &+ a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} + a_{13}a_{31}\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&-\lambda^3 + \left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)\lambda^2 \\ &- \left(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}\right)\lambda \\ &+ \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\right) \end{aligned}$$

Este polinomio nos da la idea de reescribirlo en otros términos, el coeficiente del término cuadrático es la traza de la matriz y el término independiente es el determinante de la matriz, entonces puedo escribir el polinomio característico como

$$\begin{aligned} p\left(\lambda\right) = &-\lambda^3 + \text{tr}\left(A\right) \\ &- \left(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}\right)\lambda \\ &+ \det\left(A\right) \end{aligned}$$

Consideremos ahora una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de una matriz dada, tenemos

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

si calculamos el polinomio característico teniendo en cuenta la forma anterior tenemos

$$p\left(\lambda\right) = -\lambda^3 + \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\right)\lambda^2 - \left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3\right)\lambda + \det\left(A\right)$$

pero además queremos que la matriz no tenga tantos ceros, que no sea diagonal, para ello podemos analizar la siguiente expresión

$$a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}$$

los primeros tres términos con las combinaciones de multiplicar los componentes de la diagonal, que en la matriz que tenemos anteriormente son los valores propios. Los otros términos deben dar cero para que el determinante de la matriz no se altere y el polinomio característico si tenga las soluciones deseadas, entonces se pueden presentar las siguientes combinaciones:

1. $-(0)\,a_{32}-(0)\,a_{21}-(0)\,a_{31}$ con matriz asociada
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ a_{21} & \lambda_2 & 0\\ a_{31} & a_{32} & \lambda_3\end{pmatrix}$$
2. $-a_{23}\,(0)-a_{12}\,(0)-a_{13}\,(0)$ con matriz asociada
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & \lambda_2 & a_{23}\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$
3. $-(0)\,a_{32}-(0)\,a_{21}-a_{13}\,(0)$ con matriz asociada
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & a_{13}\\ a_{21} & \lambda_2 & 0\\ 0 & a_{32} & \lambda_3\end{pmatrix}$$
4. $-a_{23}\,(0)-a_{12}\,(0)-(0)\,a_{31}$ con matriz asociada
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & 0\\ 0 & \lambda_2 & a_{23}\\ a_{31} & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$
5. $-(0)\,a_{32}-a_{12}\,(0)-(0)\,a_{31}$ con matriz asociada
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ a_{31} & a_{32} & \lambda_3\end{pmatrix}$$
6. $-a_{23}\,(0)-(0)\,a_{21}-a_{13}\,(0)$ con matriz asociada
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & a_{13}\\ a_{21} & \lambda_2 & a_{23}\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Calcular los valores y vectores propios de la siguiente matriz
$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Solución

Para calcular los valores propios necesitamos calcular el polinomio característico, entonces tenemos:
$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\det\left(\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\\
&=\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 0 & -3\\ -2 & 3-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\\
&=(5-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda)-(0)(-1)\right]\\
&\quad-(0)\left[(-2)(2-\lambda)-(0)(-2)\right]\\
&\quad+(-3)\left[(-2)(0)-(0)(3-\lambda)\right]\\
&=(5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)\end{aligned}$$
por lo tanto los valores propios de la matriz son $\lambda_1=5$, $\lambda_2=3$ y $\lambda_3=2$.

Vector propio asociado a $\lambda_1=5$

Para calcular el vector propio usamos la siguiente expresión
$$E_{\lambda_1}=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I_3}\right)$$
esto es
$$\left[\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
luego
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
para resolver el sistema usamos Gauss con la matriz aumentada
$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -3 & 0\\ -2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)$$
para ello aplicamos algunas operaciones elementales
$$\begin{aligned}P_{12}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -3 & 0\\ -2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)&=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)\\
M_1\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)&=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)\\
M_2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)&=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)\\
E_{31}(-3)&=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{aligned}$$
tenemos infinitas soluciones, $k_1+k_2+\frac{1}{2}k_3=0$ de donde $k_1=-k_2-\frac{1}{2}k_3$, por otra parte $k_3=0$ y k_2 es la variable libre, entonces si $k_2=1$ tenemos que $k_1=-1$, generando así el espacio propio
$$E_{\lambda_1}(5)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$
con multiplicidad geométrica $mg\left(\lambda_1\right)=1$

Vector propio asociado a $\lambda_2=3$

Para calcular el vector propio usamos la siguiente expresión
$$E_{\lambda_2}=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I_3}\right)$$
esto es
$$\left[\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
luego
$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
para resolver el sistema usamos Gauss con la matriz aumentada
$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -3 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

para ello aplicamos algunas operaciones elementales

$$M_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$E_{21}\left(-2\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$M_2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$E_{32}\left(-1\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

tenemos infinitas soluciones, $k_1-\frac{3}{2}k_3=0$ de donde $k_1=\frac{3}{2}k_3$ y $k_3=0$, k_2 es la variable libre, entonces $k_2=1$ tenemos el siguiente espacio propio

$$E_{\lambda_2}\left(3\right)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

con multiplicidad geométrica $mg\left(\lambda_2\right)=1$

Vector propio asociado a $\lambda_3=2$

Para calcular el vector propio usamos la siguiente expresión

$$E_{\lambda_3}=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I_3}\right)$$

esto es

$$\left[\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

para resolver el sistema usamos Gauss con la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

para ello aplicamos algunas operaciones elementales

$$M_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$E_{21}\left(-2\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

tenemos infinitas soluciones, $k_1-k_3=0$ de donde $k_1=k_3$ y por otra parte $k_2=3k_3$ si $k_3=1$ entonces $k_2=3$ y $k_1=1$ dando lugar al espacio propio

$$E_{\lambda_3}\left(2\right)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

con multiplicidad geométrica $mg\left(\lambda_3\right)=1$.

¿Cómo comprobamos que los vectores propios están bien calculados?

Si multiplicamos a la matriz $\boldsymbol{A}$ dada por cada vector propio, debe ser un múltiplo escalar del vector propio ampliado λ veces el valor propio. A continuación se ve una captura de pantalla de esta prueba.

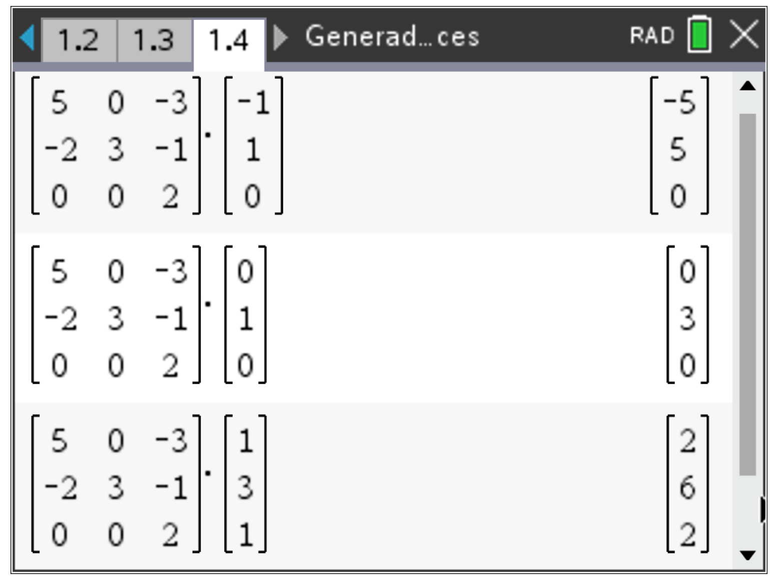

Figura 1.3: Producto de la matriz $\boldsymbol{A}$ dada por cada vector propio encontrado

Matriz P de vectores propios

Una vez calculados los vectores propios,

$$E_{\lambda_1}\left(5\right)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{\lambda_2}\left(3\right)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{\lambda_3}\left(2\right)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

podemos calcular una matriz P cuyas columnas son los vectores propios, entonces tenemos

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y quiero representar estos vectores para que tengan magnitud 1, así que tenemos

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{11}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{3}{\sqrt{11}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}$$

que de forma aproximada tendremos

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-0.707 & 0 & 0.301\\ 0.707 & 1 & 0.904\\ 0 & 0 & 0.301\end{pmatrix}$$

Este resultado se comprobó en la calculadora

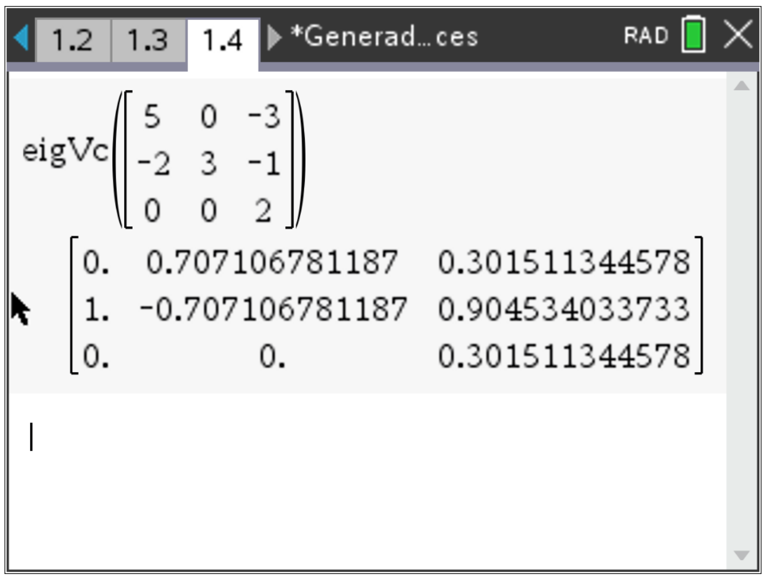

Figura 1.4: Comprobación de los vectores propios en la calculadora TI-Nspire CX II

Observación

La calculadora ordena los vectores de forma diferente. Esto es porque cuando calcula los valores propios los ordena de menor a mayor, sin embargo en este cálculo conserve el orden que propuse la matriz del ejemplo, dado que los elementos de la diagonal son los mismos valores propios.

Comprobar la matriz P

Para comprobar si los vectores propios nos quedaron bien calculados, encontremos la inversa de la matriz P, esto lo realizaré con la ayuda de la calculadora. En la captura de pantalla de la calculadora se puede observar la matriz P , su inversa y que el producto de $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{I_3}$

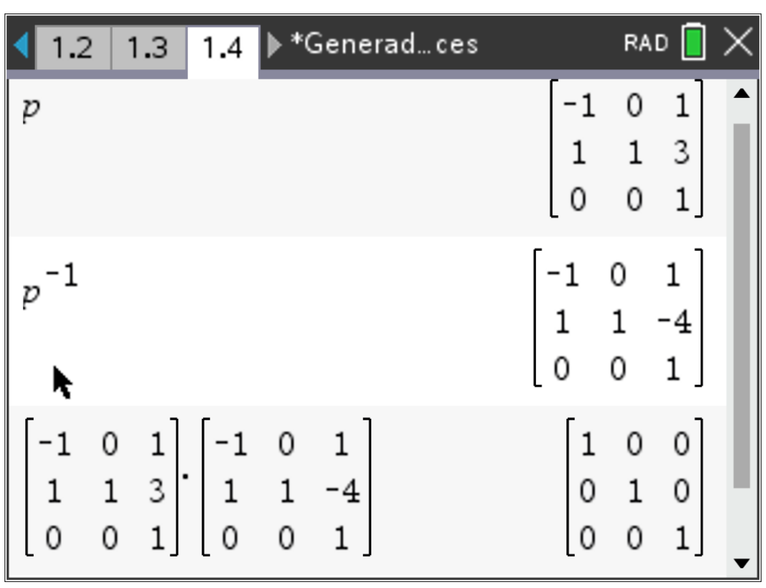

Figura 1.5: Cálculo de la Matriz Inversa de P mediante TI-Nspire CX II

Así, si creamos la matriz diagonal con los valores propios tenemos lo siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de tal manera que

$$\boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$$

En la siguiente captura de pantalla muestro el cálculo de estos productos, y como se obtiene la matriz del ejemplo.

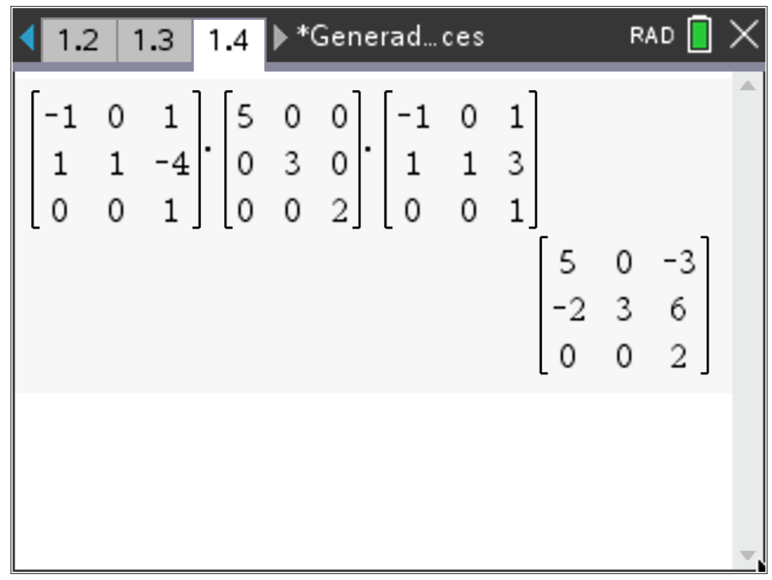

Figura 1.6: Verificación del Producto $\boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$

¿Qué sucede si se cambian la posición de los valores propios?

En este experimento, vamos a crear todas las diagonales posibles con los valores propios encontrados y realizaremos el cálculo del producto $\boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$. Estos resultados se muestran en las siguientes capturas de pantalla.

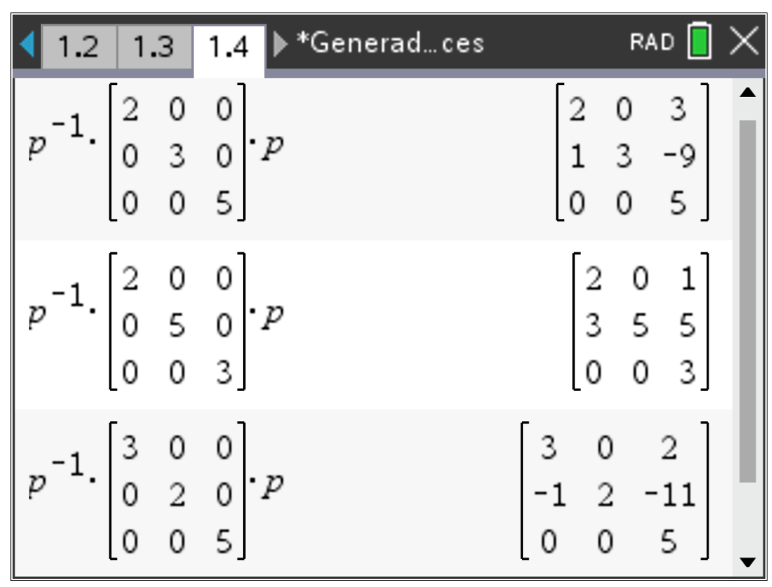

Figura 1.7: Cálculo de matrices semejantes (1)

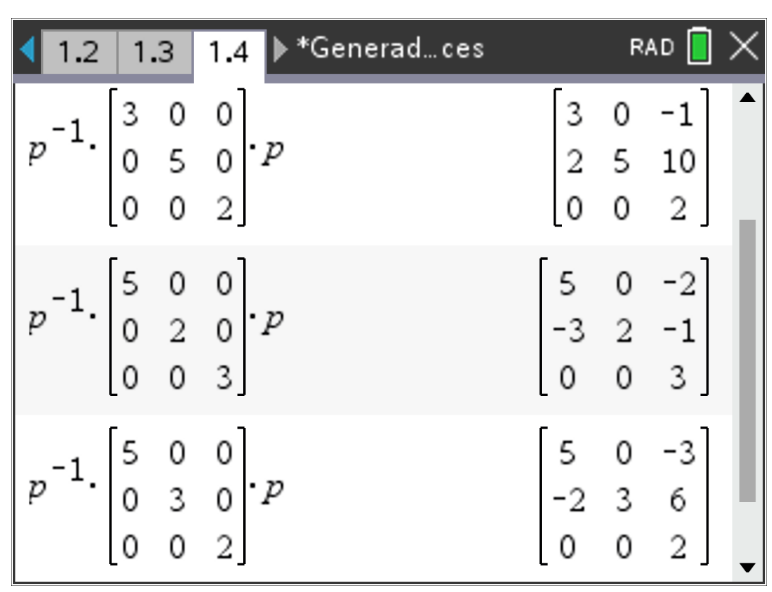

Figura 1.8: Cálculo de matrices semejantes (2)

Estas matrices se llaman semejantes puesto que comparten los mismos valores propios.

¿Qué sucede si sumo todas las matrices semejantes encontradas?

En este experimento tomamos a todas las matrices semejantes y las sumamos

$$\begin{aligned}&=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&3&-9\\0&0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&1\\3&5&5\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&2\\-1&2&-11\\0&0&5\end{pmatrix}\\&+\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&5&10\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&-2\\-3&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&-3\\-2&3&6\\0&0&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}20&0&0\\0&20&0\\0&0&20\end{pmatrix}\end{aligned}$$

se genera una matriz diagonal con un 20. Este 20 se explica por que en las seis combinaciones de matrices diagonales se tienen dos veces cada valor propio, y dado que los valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$ entonces tenemos

$$2\,(2) + 2\,(3) + 2\,(5) = 20$$

Demostración

Las seis matrices semejantes aparecen de las siguientes operaciones

$$\begin{aligned}D_T &= P^{-1}D_1P + P^{-1}D_2P + P^{-1}D_3P\\&+ P^{-1}D_4P + P^{-1}D_5P + P^{-1}D_6P\end{aligned}$$

en cada expresión se puede factorizar $P^{-1}P$ es decir que tenemos

$$D_T = P^{-1}P\,(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6)$$

donde D_n con $n = \{1,2,3,4,5,6\}$ son cada una de las posibles combinaciones de las matrices diagonales con sus valores propios.

Luego, dado que $P^{-1}P = I_3$ se tiene que

$$D_T = I_3\sum_{n=1}^{6} D_n$$

como cada valor propio aparece en cada componente como máximo dos veces entonces la sumatoria da origen a una matriz del tipo

$$D=\begin{pmatrix}2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3&0&0\\0&2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3&0\\0&0&2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3\end{pmatrix}$$

y al multiplicar esta matriz por la matriz identidad de orden tres se obtiene la misma matriz que se puede escribir como

$$D_T=2\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&0&0\\0&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&0\\0&0&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}$$

y cada componente como la traza de cualquiera de las posibles diagonales con los valores propios

$$D_T=2\begin{pmatrix}\text{tr}\,(D)&0&0\\0&\text{tr}\,(D)&0\\0&0&\text{tr}\,(D)\end{pmatrix}$$

1.4 Ejercicios Propuestos

A continuación dejo al lector una lista de algunas matrices a las cuales puede calcular los valores y vectores propios. Además puede calcular las matrices semejantes y comprobar la última propiedad demostrada.

1. $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-5&1&0\\-2&-3&-1\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}-7&0&0\\-4&5&0\\5&-5&-2\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}-6&-4&-6\\0&-6&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}-7&-4&-4\\0&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$
5. $A=\begin{pmatrix}-2&0&2\\3&5&0\\0&6&5\end{pmatrix}$
6. $A=\begin{pmatrix}-2&0&3\\4&5&0\\0&2&3\end{pmatrix}$
7. $A=\begin{pmatrix}4&-3&0\\0&2&0\\7&0&2\end{pmatrix}$
8. $A=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&-3\\-3&0&-6\end{pmatrix}$
9. $A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&3&0\\-5&-5&-1\end{pmatrix}$
10. $A=\begin{pmatrix}7&5&0\\0&0&0\\-4&5&-3\end{pmatrix}$
11. $A=\begin{pmatrix}-1&0&-5\\7&-4&-4\\0&0&-6\end{pmatrix}$
12. $A=\begin{pmatrix}7&0&5\\0&-6&-7\\0&0&-6\end{pmatrix}$