Artículo 1
Relación de la Tangente

Acerca del Autor
Julián Andrés Rincón Penagos
JARINCONAPPS@GMAIL.COM
Marzo de 2025

Resumen

Este artículo presenta la Relación de la Tangente,
una aplicación de la trigonometría para resolver triángulos. Explora el origen de esta relación, su demostración y sus aplicaciones en trigonometría y matemáticas. El documento explica cómo la trigonometría es útil para resolver triángulos cuando se tiene información sobre los catetos y los ángulos. Se enfoca en el caso de encontrar medidas inaccesibles, como la altura de un objeto, utilizando la Relación de la Tangente. El artículo también presenta un teorema (Teorema 1) que describe cómo calcular estas medidas y proporciona un ejemplo práctico utilizando la Torre Eiffel.

1.1 Origen de la Relación

Un aplicación muy importante de la trigonometría es la resolución de triángulos. Por lo general para resolver un triángulo tenemos información de los catetos y los ángulos, con esto podemos completar la información del Triángulo. Para el caso que nos ocupa, observemos la siguiente imagen en la figura 1.1

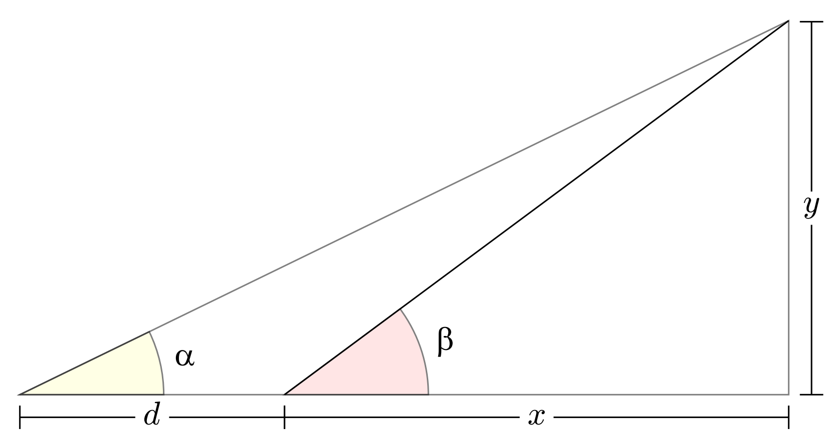

Figura 1.1: Situación a Resolver

De este triángulo conocemos el ángulo α y β además la distancia d.

Alguna aplicación para este tipo de triángulo puede ser: Supongamos que necesitamos medir la distancia x y la altura y, entonces, medir x tiene sus respectivas dificultades, tal vez se la base de una formación rocosa, un lago, y y puede por ejemplo representar la altura de un edificio o una formación rocosa, una cordillera, etc.

La situación además se presenta como una herramienta para encontrar esas medidas inaccesibles. En primer lugar medimos un ángulo inicial α en elevación al máximo de y, nos desplazamos una distancia d y allí realizamos una segunda medición de ángulo β al máximo de y. Con estos tres datos podemos encontrar x e y.

1.2 Forma de la Relación

Consideremos el primer triángulo, tal como se muestra en la figura 1.1

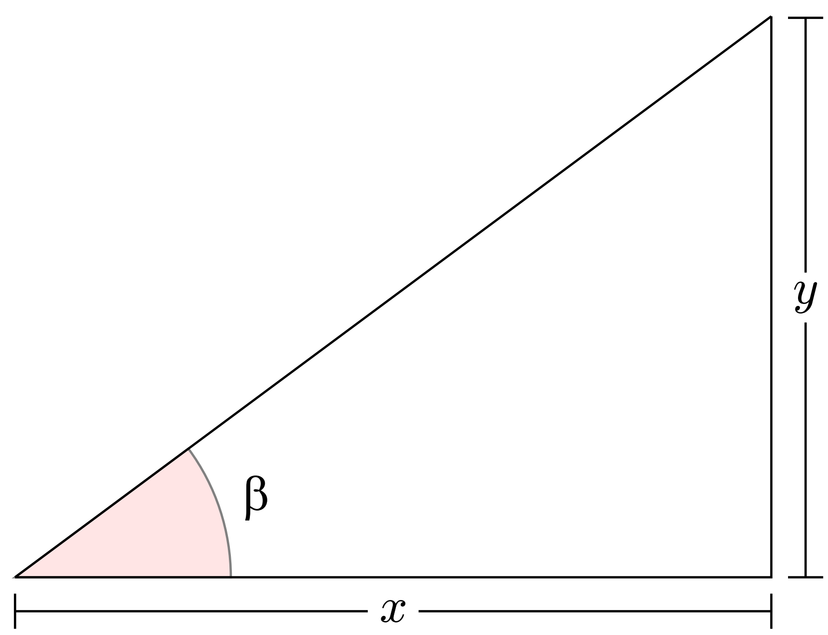

Figura 1.2: Triángulo con ángulo base de ángulo β

De este triángulo

$$\tan\beta = \frac{y}{x}$$

despejamos a y y tenemos

$$y = x\tan\beta \tag{1.1}$$

Tomando el otro triángulo, como se muestra en la figura 1.3

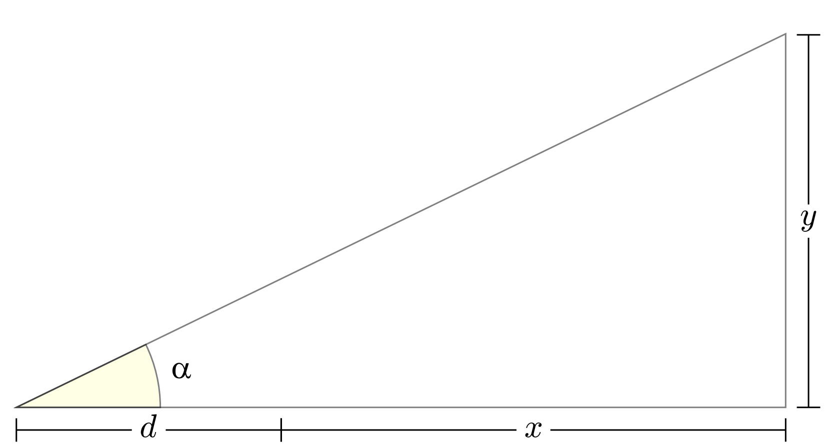

Figura 1.3: Triángulo con ángulo base de ángulo α

De este triángulo,

$$\tan\alpha = \frac{y}{d+x}$$

despejamos a y y tenemos,

$$y = (d+x)\tan\alpha \tag{1.2}$$

Luego como la altura y es la misma, podemos iguales las ecuaciones 1.1 y 1.2, así,

$$x\tan\beta = (d+x)\tan\alpha$$

aplicamos la propiedad distributiva con respecto a la suma,obtenemos,

$$x\tan\beta = d\tan\alpha + x\tan\alpha$$

sumamos en ambos lados $x\tan\beta$, entonces

$$x\tan\beta - x\tan\alpha = d\tan\alpha$$

factorizamos a x,

$$x\left(\tan\beta - \tan\alpha\right) = d\tan\alpha$$

y dividimos la ecuación por $(\tan\beta - \tan\alpha)$, así,

$$x = \frac{d\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \tag{1.3}$$

Luego reemplazamos 1.3 en 1.1, así

$$y = \left(\frac{d\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\right)\tan\beta$$

por lo tanto

$$y = \frac{d\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \tag{1.4}$$

1.3 Teorema

Teorema 1: Relación de la Tangente

Sea el triángulo de la figura 1.1, con valores conocidos α y β ángulos de elevación y d distancia recorrida entre α y β, el valor de x esta dado por

$$x = x = \frac{d\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

y el valor de y por

$$y = \frac{d\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Este resultado ya lo había escrito en el siguiente libro: Rincón Penagos, Carmona Suarez y Aldana Bermúdez (2015)

1.4 Aplicación

Ejemplo 1:

Supongamos que queremos calcular la altura de la torre Eiffel. Nos paramos a una distancia desconocida de la torre, desde allí mediante un telescopio tomamos la medida en grados de elevación del extremo de la torre, esta medida nos da $30.22°$, luego nos acercamos 114.28 metros y tomamos una nueva medición del ángulo de elevación de $36.87°$. Usar la relación de la Tangente para encontrar la distancia desde el punto de observación a la base de la torre y la altura de la torre.

El problema lo podemos representar mediante el gráfico que se muestra en la figura

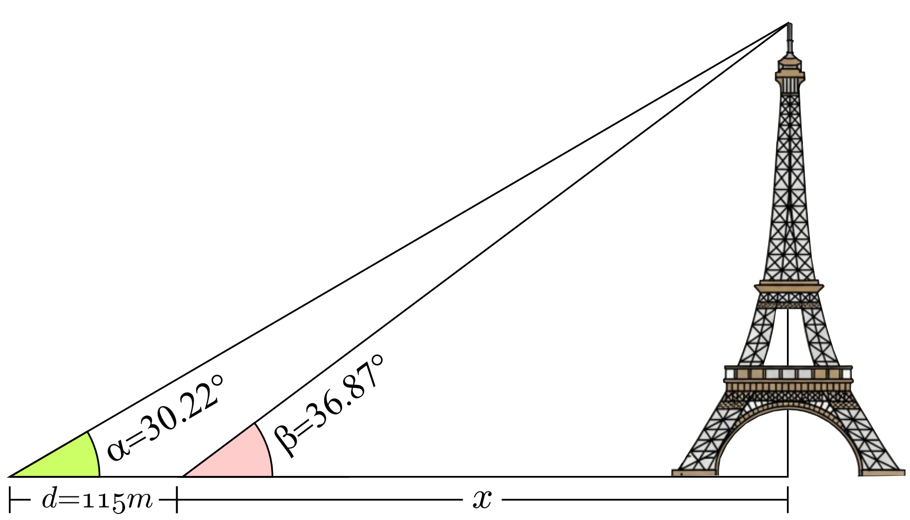

Figura 1.4: Representación del Problema

Usando el teorema de la tangente tenemos que

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{115\tan(30.22°)}{\tan(36.87°)-\tan(30.22°)} \\
&= 399.86123486554 \\
&\approx 400 \text{ m}
\end{aligned}
$$

En la siguiente captura de pantalla se puede observar el cálculo mediante la calculadora TI-Nspire CX II

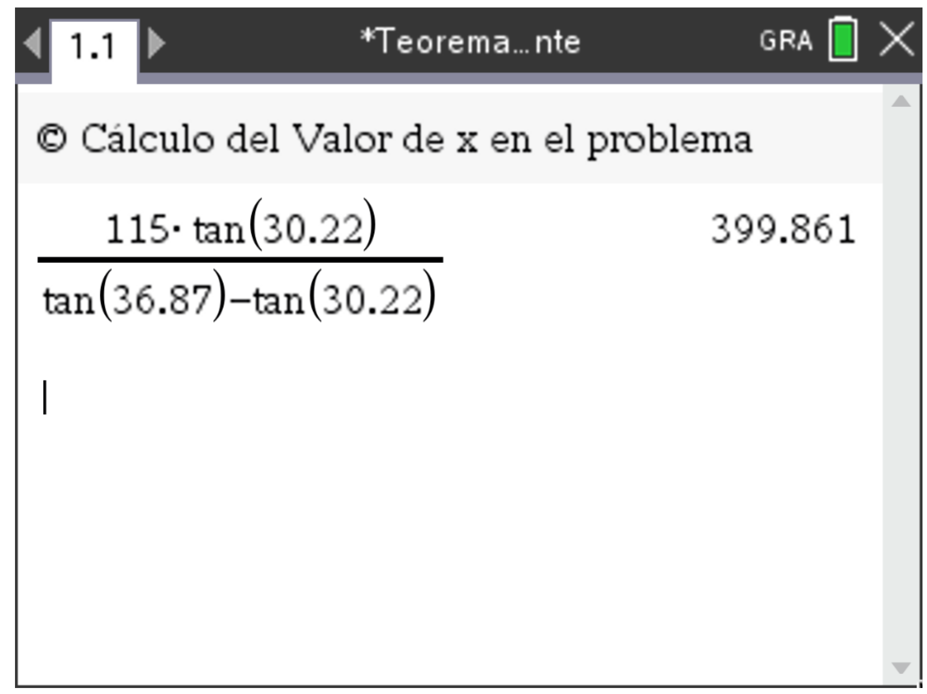

Figura 1.5: Cálculo del Valor de x

y para calcular el valor de y

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{115\tan(36.87°)\tan(30.22°)}{\tan(36.87°)-\tan(30.22°)} \\
&= 299.897 \\
&\approx 300 \text{ m}
\end{aligned}
$$

En la siguiente captura de pantalla se puede observar el cálculo de y mediante la calculadora TI-Nspire CX II

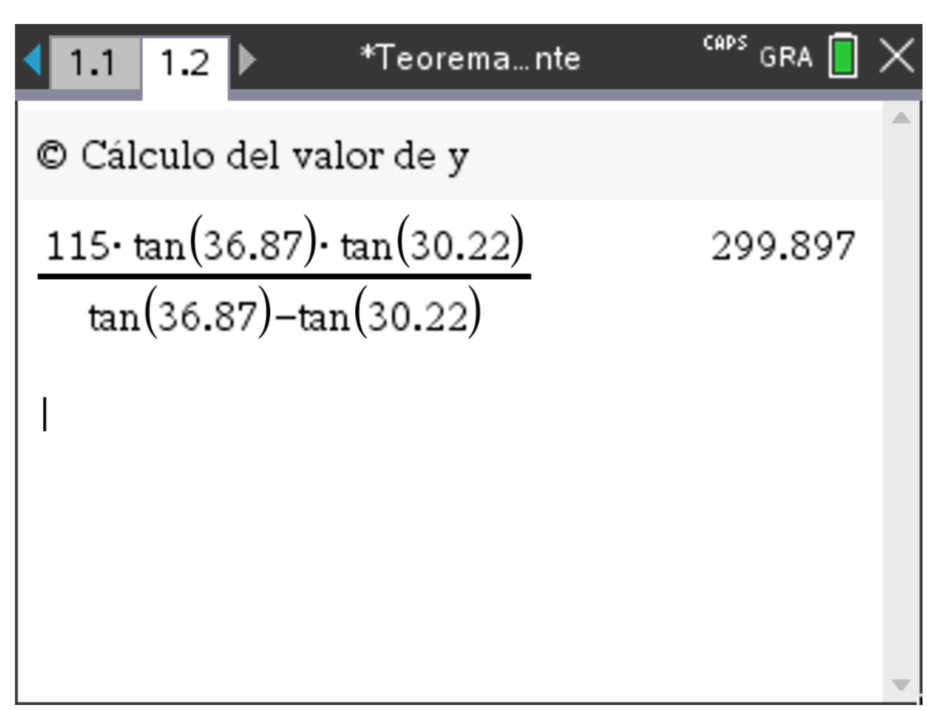

Figura 1.6: Cálculo del Valor de x

Respuesta

La distancia desde la última medición a la base de la torre es 400 metros y la altura de la torre es de 300 metros.

Referencias

Rincón Penagos, J.A., E.J. Carmona Suarez y J.E. Aldana Bermúdez (2015). *Trigonometría y GeometrÃa Analítica Mediadas por las TIC*. Armenia, Quindío, Colombia: ELIZCOM S.A.S. ISBN: 97-958-8801-32-2.