# Clase 1

## Aplicaciones de los Números Reales

En éste capítulo realizaremos un estudio de los conjuntos numéricos, desde los naturales hasta los reales, veremos como a través de estos conjuntos se pueden desarrollar algunas aplicaciones, tales como, solución de ecuaciones lineales, cálculo de desigualdades, cálculo de intervalos, cálculo del valor absoluto y solución de sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones por dos incógnitas.

## 1.1 Conjuntos Numéricos

### 1.1.1 Números Naturales

Los números naturales son aquellos que utilizamos de forma intuitiva para contar objetos o elementos de un conjunto. Son los primeros números que aprendemos a usar y forman la base de la aritmética.

**Características principales:**

- **Empiezan en el 1:** El conjunto de los números naturales se inicia con el número 1 y continúa de forma infinita.
- **Son enteros positivos:** No incluyen fracciones, decimales ni números negativos.
- **Se usan para contar y ordenar:** Su función principal es cuantificar elementos y establecer un orden entre ellos.
- **Son infinitos:** No existe un número natural "más grande", siempre hay un siguiente.

**Representación:**

El conjunto de los números naturales se representa con la letra $\mathbb{N}$ y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

**Ejemplos de números naturales:**

❍ La cantidad de estudiantes en un aula.

❍ El número de páginas de un libro.

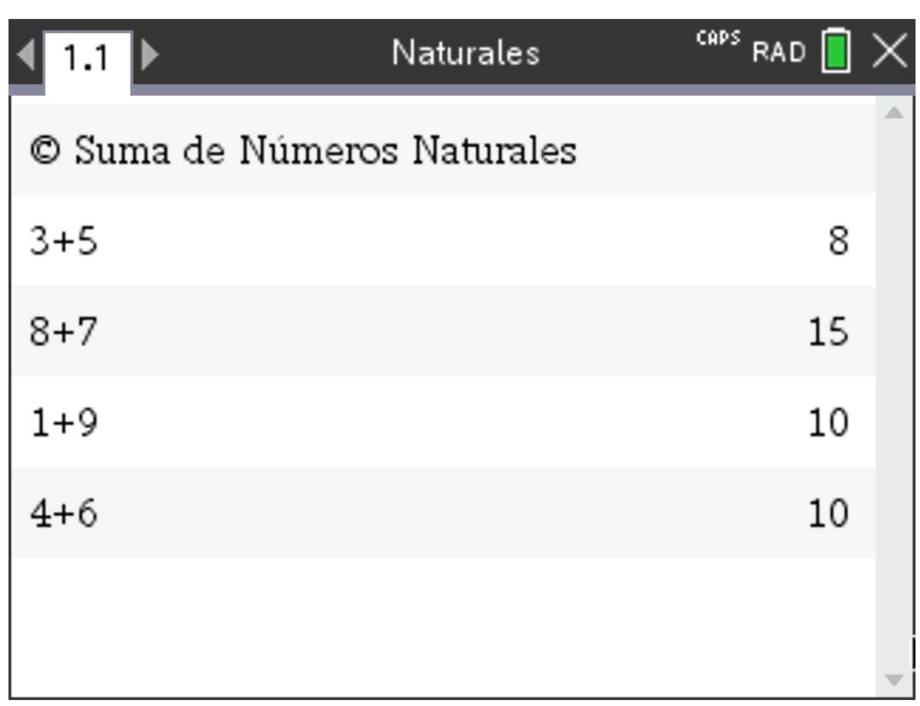
❍ Los días de la semana.

❍ La cantidad de goles marcados en un partido de fútbol.

Con los números naturales, podemos realizar las siguientes operaciones básicas:

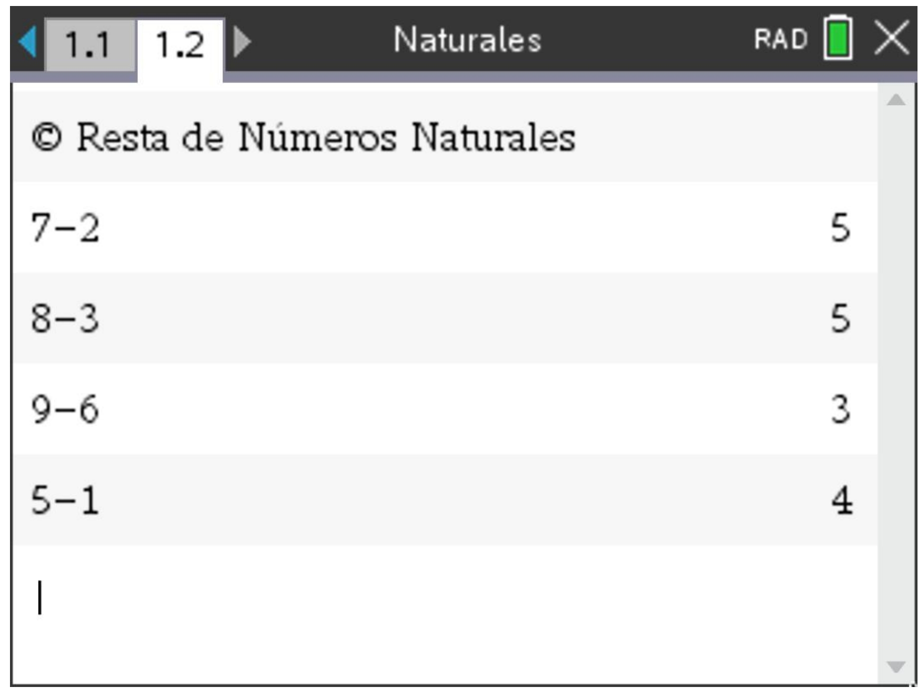
❍ **Suma (Adición):** Combina dos o más números naturales para obtener un nuevo número natural que representa el total.

❑ **Ejemplo:**



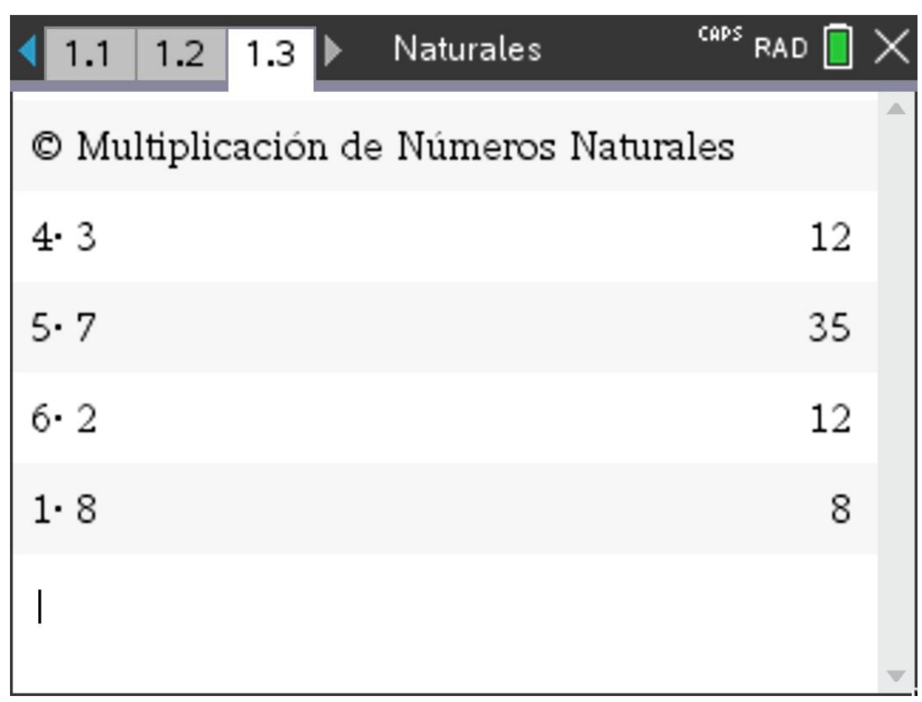

❍ **Resta (Sustracción):** Encuentra la diferencia entre dos números naturales. El resultado siempre será un número natural si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

❑ **Ejemplo:**




- **Multiplicación (Producto):** Representa la suma repetida de un número natural un cierto número de veces.

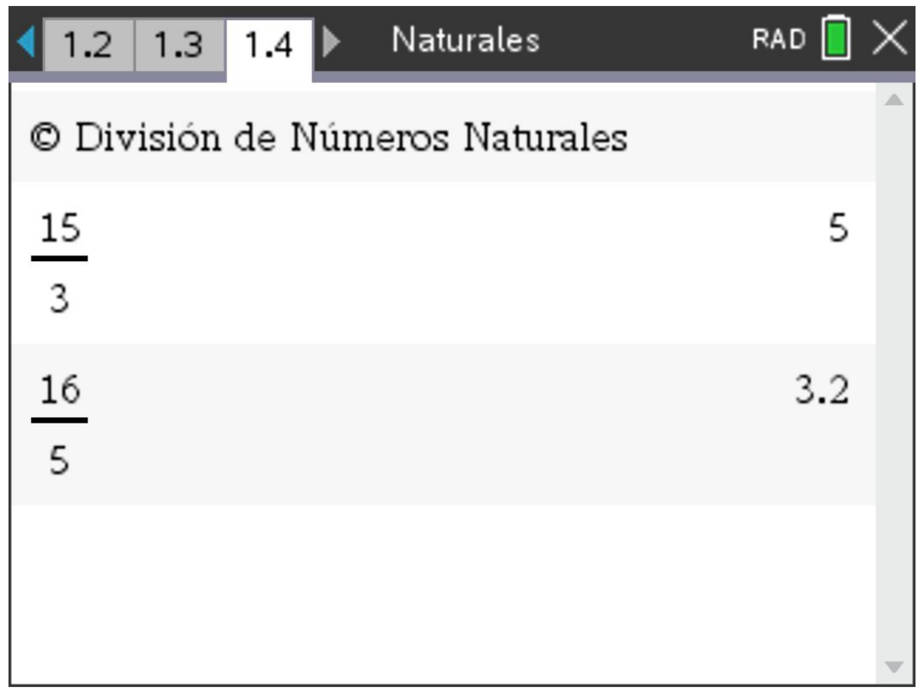
  - **Ejemplo:** $4 \times 3 = 12$ (es lo mismo que sumar 4 tres veces: $4+4+4$)



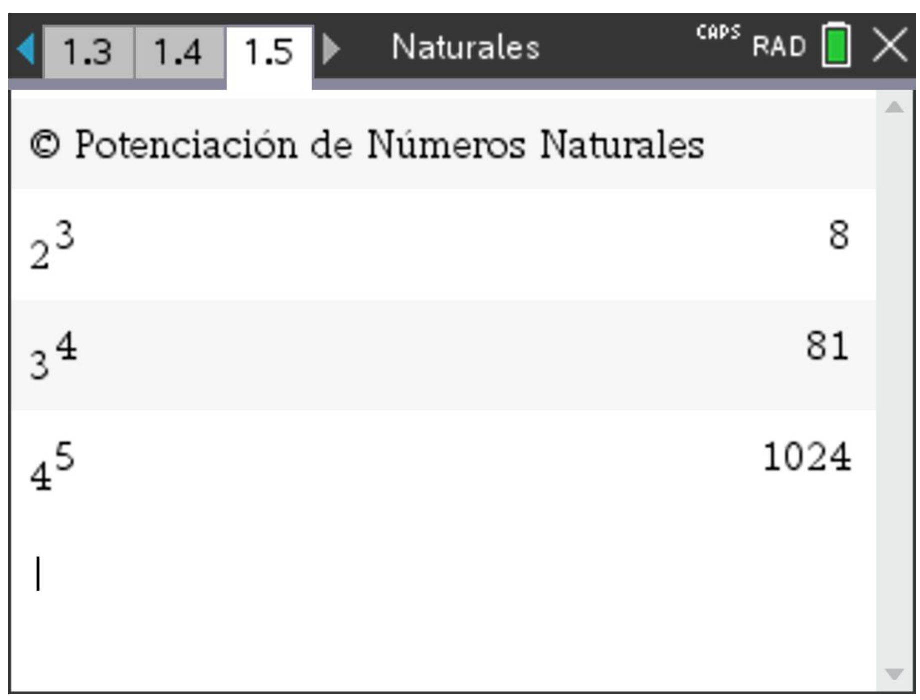

- **División (Cociente):** Reparte un número natural en partes iguales. El resultado puede ser un número natural exacto o puede tener un residuo (resto).

  - **Ejemplo:** $15 \div 3 = 5$ (división exacta)

  - **Ejemplo:** $16 \div 5 = 3$ con residuo $1$




- **Potenciación:** Expresa la multiplicación repetida de un número natural por sí mismo un cierto número de veces.
  - **Ejemplo:** $2^3 = 8$ (es lo mismo que multiplicar **2** tres veces: $2\times2\times2$)




**Propiedades importantes de estas operaciones:**

- **Clausura:** El resultado de sumar, multiplicar o potenciar dos números naturales siempre será otro número natural. La resta solo es cerrada si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo. La división no siempre es cerrada, ya que puede haber residuo.
- **Conmutatividad:** El orden de los números no afecta el resultado en la suma y la multiplicación $(a + b = b + a, a \times b = b \times a)$.
- **Asociatividad:** El agrupamiento de los números no afecta el resultado en la suma y la multiplicación $(a + b) + c = a + (b + c)\,, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

- **Elemento neutro:** El $0$ es el elemento neutro de la suma $(a + 0 = a)$ y el $1$ es el elemento neutro de la multiplicación $(a \times 1 = a)$.
- **Distributividad:** La multiplicación se distribuye sobre la suma $(a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c))$

### 1.1.2 Números Enteros

Los números enteros son una ampliación del conjunto de los números naturales, que incluye:

- **Los números naturales:** Usados para contar y ordenar $(1, 2, 3, ...)$.
- **El cero (0):** Representa la ausencia de cantidad.
- **Los números negativos:** Son los opuestos de los naturales y se usan para representar deudas, temperaturas bajo cero, profundidades, etc. $(-1, -2, -3, ...)$.

Los números enteros son todos aquellos números que no tienen parte decimal y pueden ser positivos, negativos o cero.

**Representación:**

El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$ y se puede expresar así:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Características principales:

- **Son infinitos:** Tanto en la dirección positiva como en la negativa. Incluyen a los naturales: Los números naturales son un subconjunto de los enteros.
- **Permiten realizar operaciones:** Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (con ciertas restricciones en la división).
- **Se representan en la recta numérica:** Los enteros se ubican en una recta, con el cero en el centro, los positivos a la derecha y los negativos a la izquierda.

**Ejemplos de números enteros:**

- La temperatura de -5 grados Celsius.

❍ El saldo de una cuenta bancaria con -100 dólares.

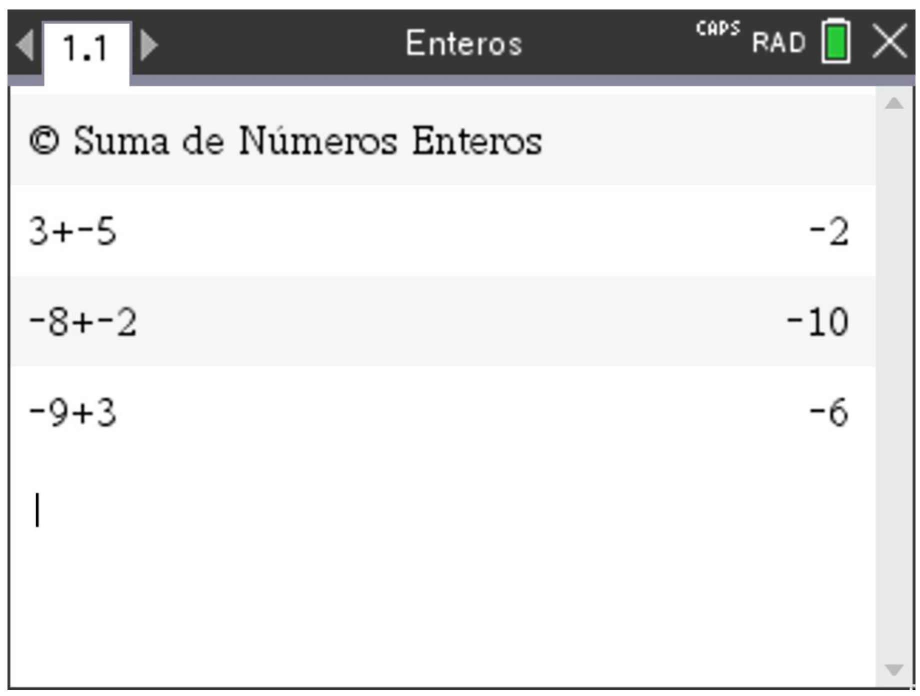
❍ El piso 3 de un edificio.

❍ El año 0.

Con los números enteros, podemos realizar las siguientes operaciones:

❍ **Suma (Adición):** Combina dos o más números enteros para obtener un nuevo número entero. Se siguen las reglas de suma de números con signos iguales o distintos.

**Ejemplo:**

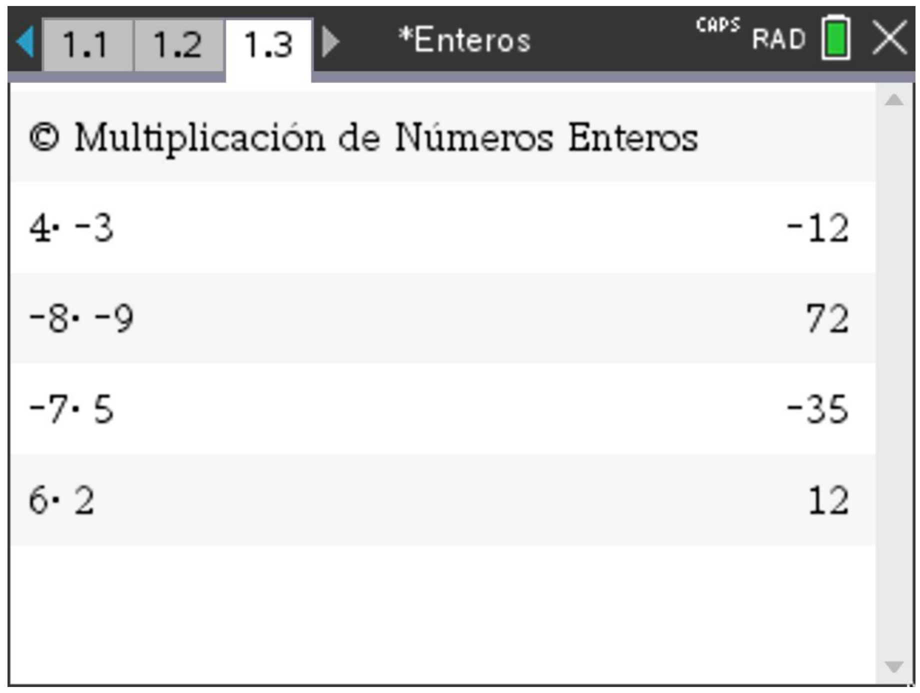



❍ **Resta (Sustracción):** Encuentra la diferencia entre dos números enteros. Es equivalente a sumar el opuesto del sustraendo.

**Ejemplo:**

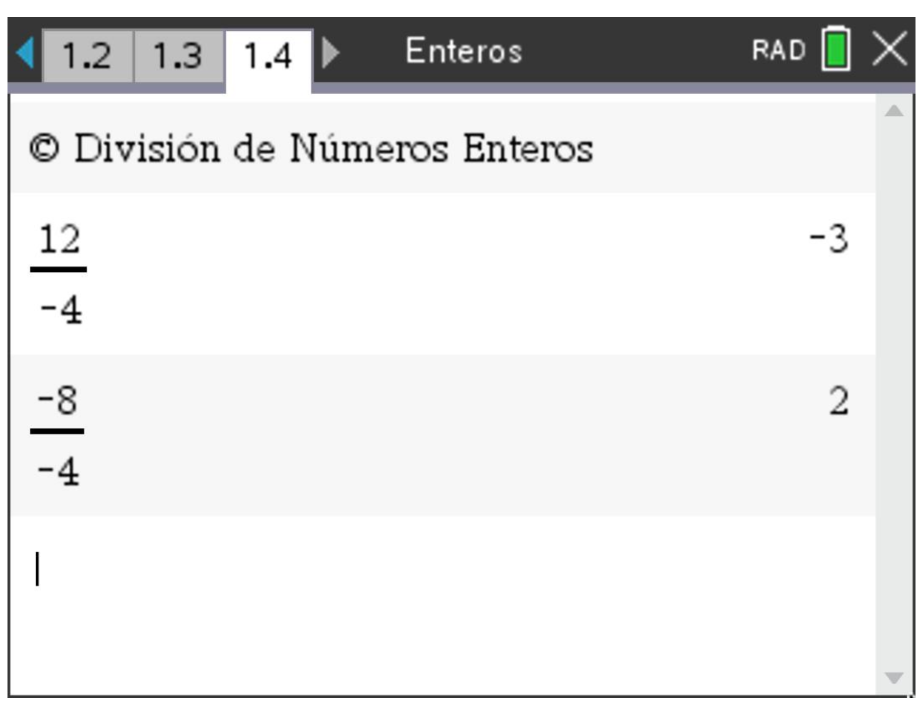

❍ **Multiplicación (Producto):** Representa la suma repetida de un número entero un cierto número de veces. Se siguen las reglas de los signos para determinar el signo del resultado.

**Ejemplo:**



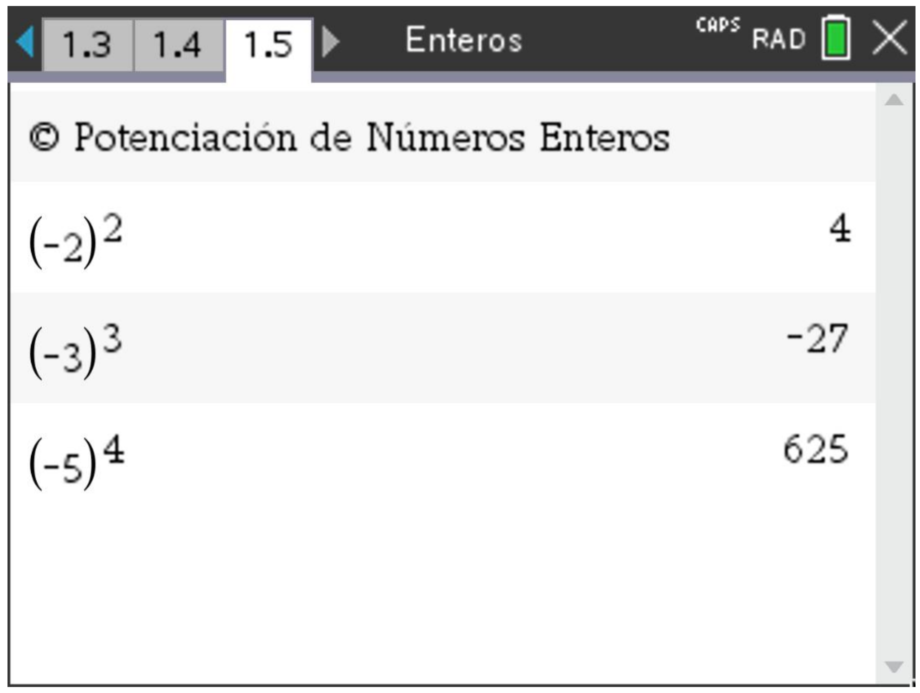

- **División (Cociente):** Reparte un número entero en partes iguales. El resultado puede ser otro número entero o puede tener un residuo (resto). Se siguen las reglas de los signos para determinar el signo del resultado.

  **Ejemplo:**




- **Potenciación:** Expresa la multiplicación repetida de un número entero por sí mismo un cierto número de veces. El signo del resultado depende de la base y del exponente.

  **Ejemplo:**




**Propiedades importantes:**

- **Clausura:** El resultado de sumar, restar, multiplicar o potenciar dos números enteros siempre será otro número entero. La división no siempre es cerrada en los enteros, ya que puede haber residuo.
- **Conmutatividad:** El orden de los números no afecta el resultado en la suma y la multiplicación.
- **Asociatividad:** El agrupamiento de los números no afecta el resultado en la suma y la multiplicación.
- **Elemento neutro:** El 0 es el elemento neutro de la suma y el 1 es el elemento neutro de la multiplicación.
- **Elemento opuesto:** Todo número entero tiene un opuesto (inverso aditivo), que al sumarse con él da como resultado 0.
- **Distributividad:** La multiplicación se distribuye sobre la suma.

### 1.1.3 Números Racionales

Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como el cociente (o fracción) de dos números enteros, donde el denominador es diferente de cero.

- **Formalmente:** Un número racional es cualquier número que se puede escribir en la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ y $q$ son números enteros y $q \neq 0$
- **Representación:**

  El conjunto de los números racionales se representa con la letra $\mathbb{Q}$.

**Características principales:**

- **Incluyen a los enteros:** Todos los números enteros son racionales, ya que pueden expresarse como una fracción con denominador 1 (por ejemplo, $5 = \frac{5}{1}$).
- **Incluyen fracciones y decimales:** Las fracciones propias e impropias, así como los decimales finitos o periódicos, son números racionales.
- **Son densos:** Entre dos números racionales cualesquiera, siempre existe otro número racional.
- **Se pueden operar:** Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto por cero).
- **Se representan en la recta numérica:** Los racionales llenan los espacios entre los enteros en la recta numérica.

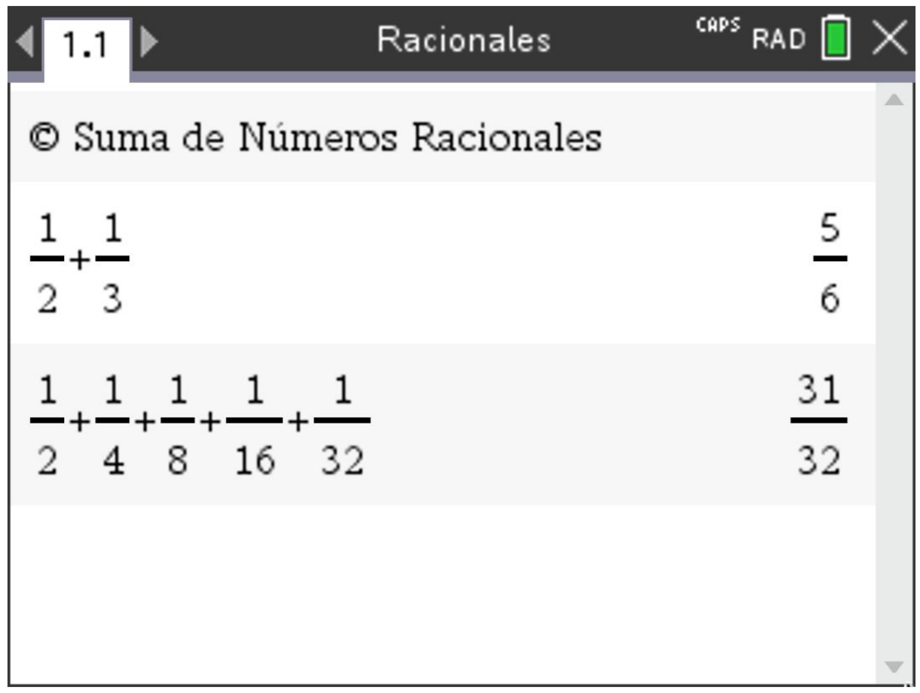
**Ejemplos de números racionales:**

- $\frac{1}{2}$ (un medio)
- $-\frac{3}{4}$ (menos tres cuartos)
- $7$ (siete, que es igual a 7/1)
- $0.25$ (cero coma veinticinco, que es igual a $\frac{1}{4}$)
- $2.3333\ldots$ (dos coma tres periódico, que es igual a $\frac{7}{3}$)

Con los números racionales, podemos realizar las siguientes operaciones:

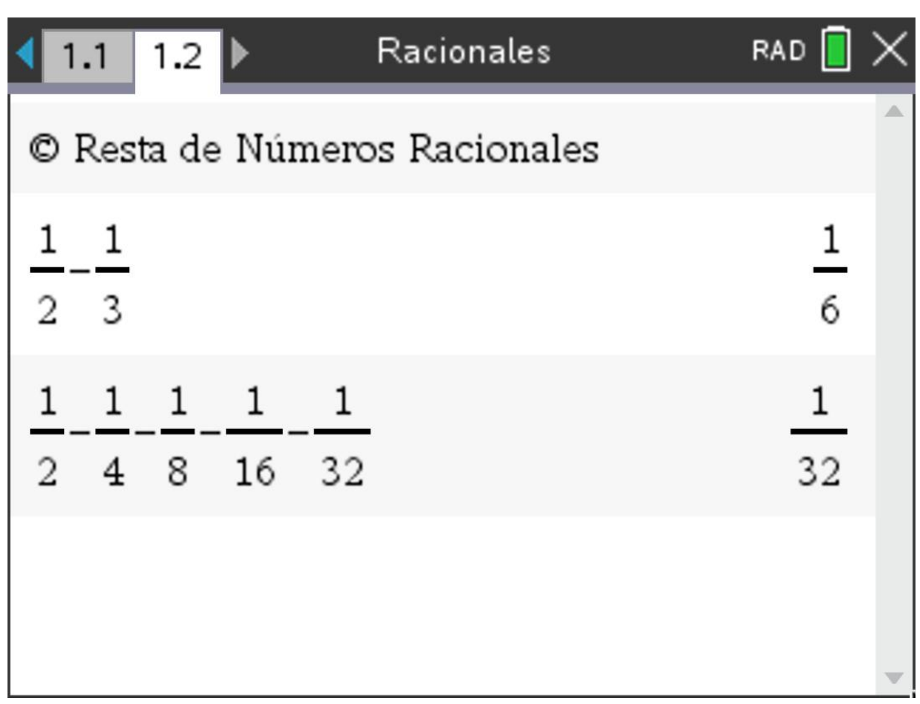
- **Suma:** Para sumar dos números racionales, se necesita encontrar un denominador común y luego sumar los numeradores.

  **Ejemplo**



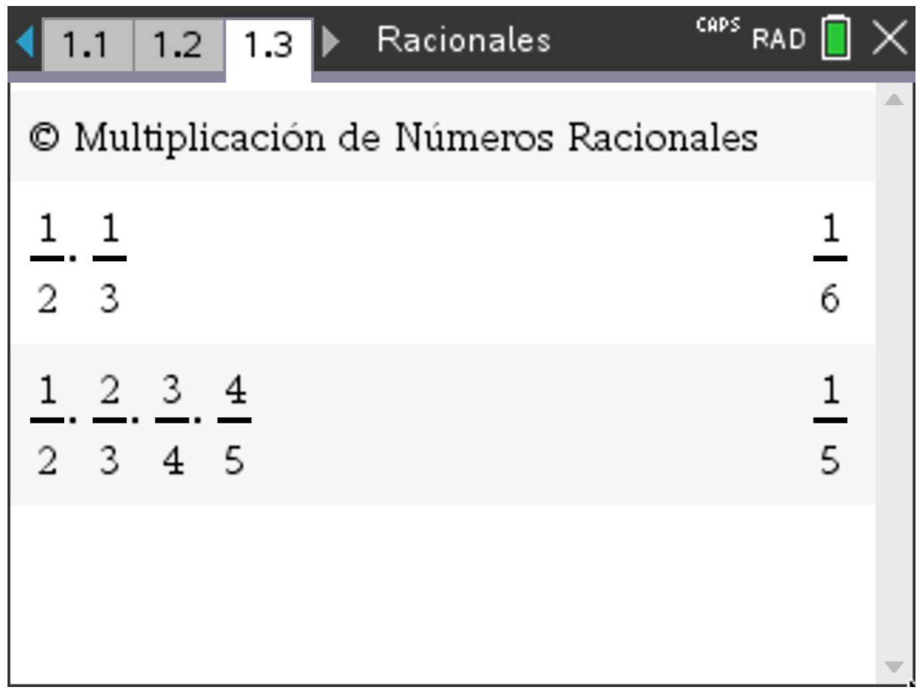

- **Resta:** Similar a la suma, se encuentra un denominador común y luego se restan los numeradores.

  **Ejemplo**



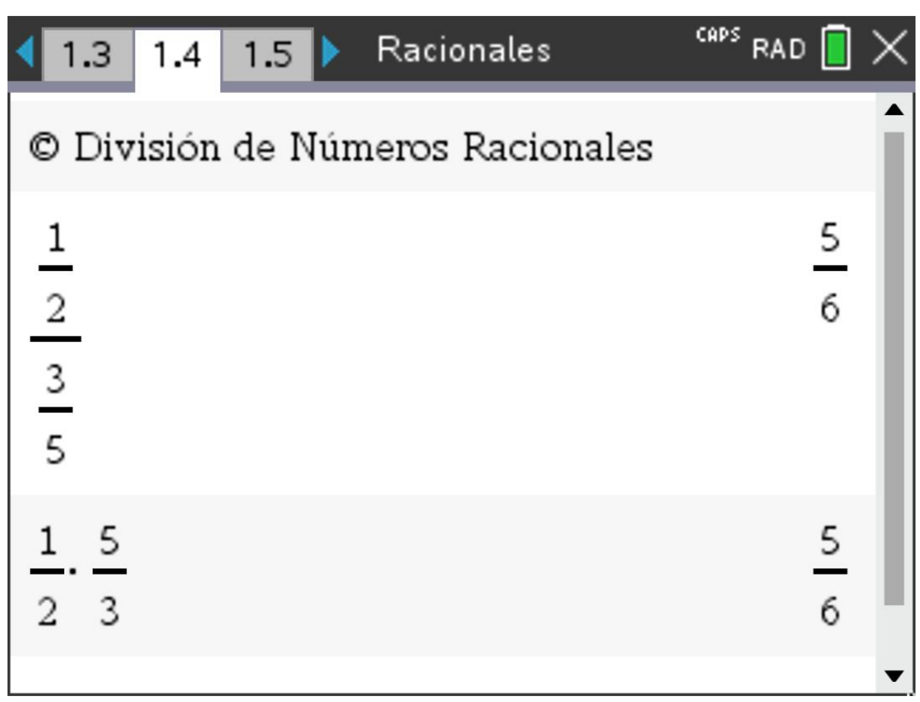

- **Multiplicación:** Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

  **Ejemplo**



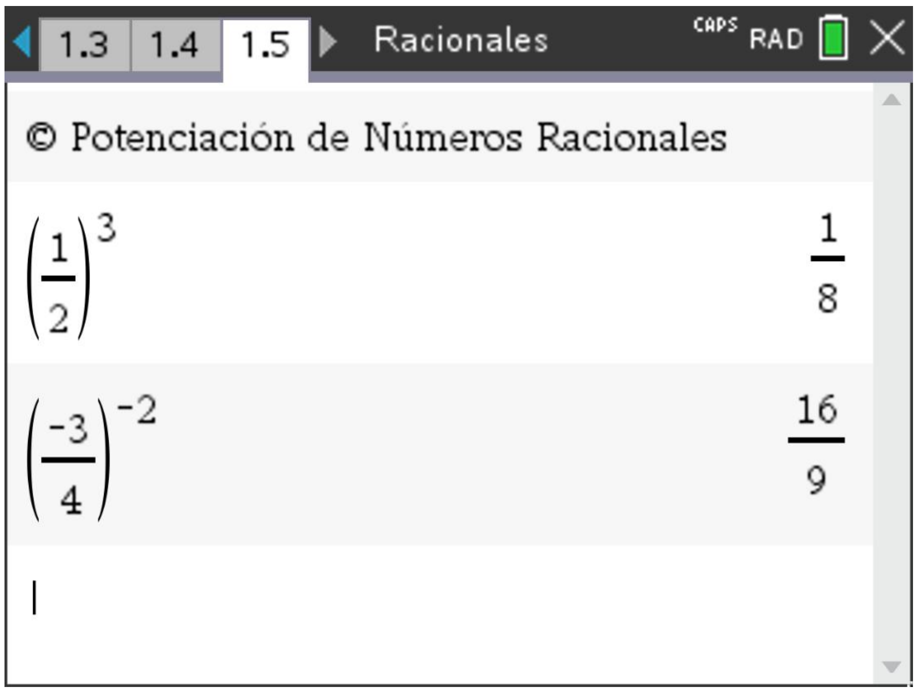

❍ **División:** Se multiplica el primer número racional por el inverso del segundo.

**Ejemplo**




❍ **Potenciación:** Elevar un número racional a una potencia entera significa multiplicarlo por sí mismo ese número de veces. Si el exponente es negativo, se calcula la potencia del inverso del número racional y se cambia el signo del resultado.

**Ejemplo**




**Propiedades importantes:**

- **Clausura:** El resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir dos números racionales (excepto por cero en la división) siempre será otro número racional.
- **Conmutatividad:** El orden de los números no afecta el resultado en la suma y la multiplicación.
- **Asociatividad:** El agrupamiento de los números no afecta el resultado en la suma y la multiplicación
- **Elemento neutro:** El 0 es el elemento neutro de la suma y el 1 es el elemento neutro de la multiplicación
- **Elemento inverso:** Todo número racional (excepto el cero) tiene un inverso multiplicativo, que al multiplicarse con él da como resultado 1 Distributividad: La multiplicación se distribuye sobre la suma

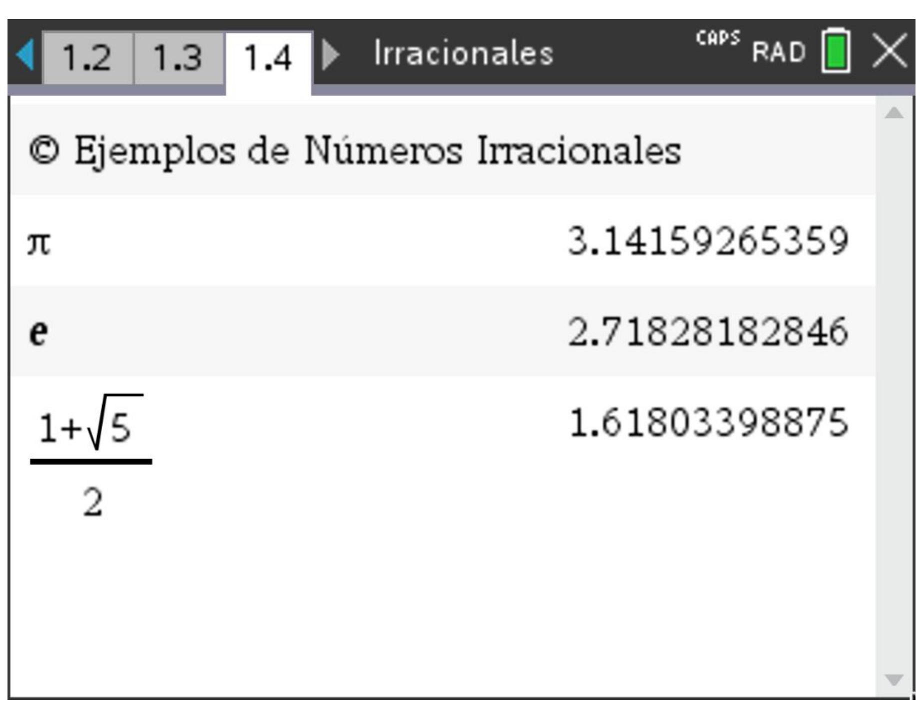
### 1.1.4 Números Irracionales

Los números irracionales son aquellos números reales que no pueden ser expresados como una fracción de dos números enteros, es decir, no se pueden escribir en la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ y $q$ son enteros y $q \neq 0$.

**Características principales:**

- **Su representación decimal es infinita y no periódica:** Esto significa que después del punto decimal, los dígitos continúan sin fin y no se repiten en un patrón predecible.

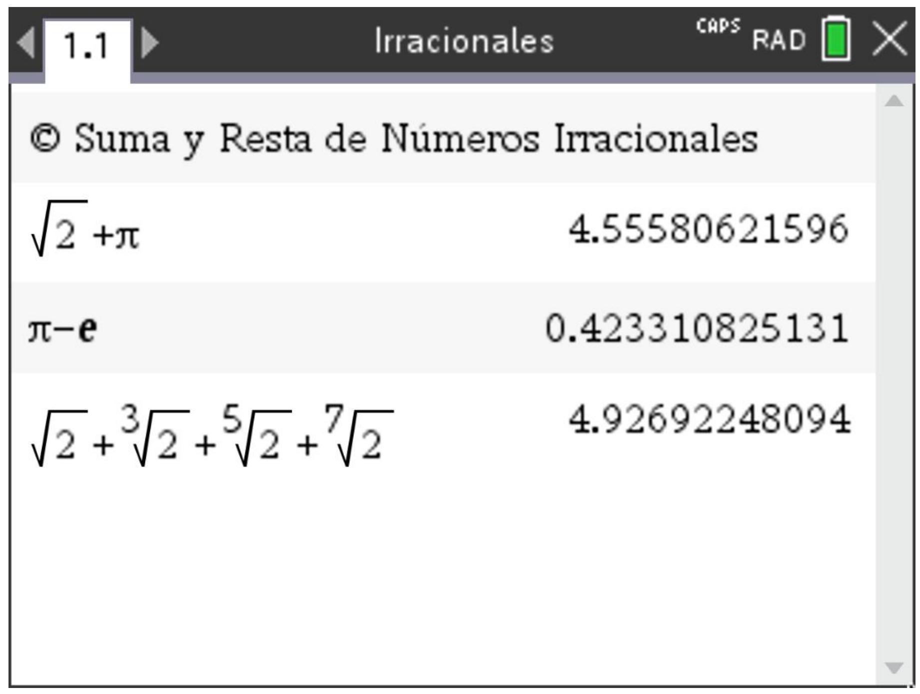
- **Completan la recta real:** Junto con los números racionales, los irracionales forman el conjunto completo de los números reales.
- **Son incontables:** No se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales, lo que significa que hay "más" números irracionales que racionales.
- **Incluyen raíces no exactas:** Las raíces cuadradas, cúbicas, etc., de números que no son cuadrados perfectos, cubos perfectos, etc., son irracionales (por ejemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}$).
- **Incluyen números trascendentes:** Estos son números que no son solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros (por ejemplo, $\pi, e$).
- **Ejemplos de números irracionales:**
  - $\pi$ (pi): La relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Su valor aproximado es 3.14159...
  - $e$ (número de Euler): La base de los logaritmos naturales. Su valor aproximado es 2.71828...
  - $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada de 2): La longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.
  - El número áureo $(\varphi)$: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Aparece en diversas proporciones en la naturaleza y el arte.




Con los números irracionales, podemos realizar las mismas operaciones básicas que con otros números reales: suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Sin embargo, es importante tener en cuenta algunas particularidades en los resultados:

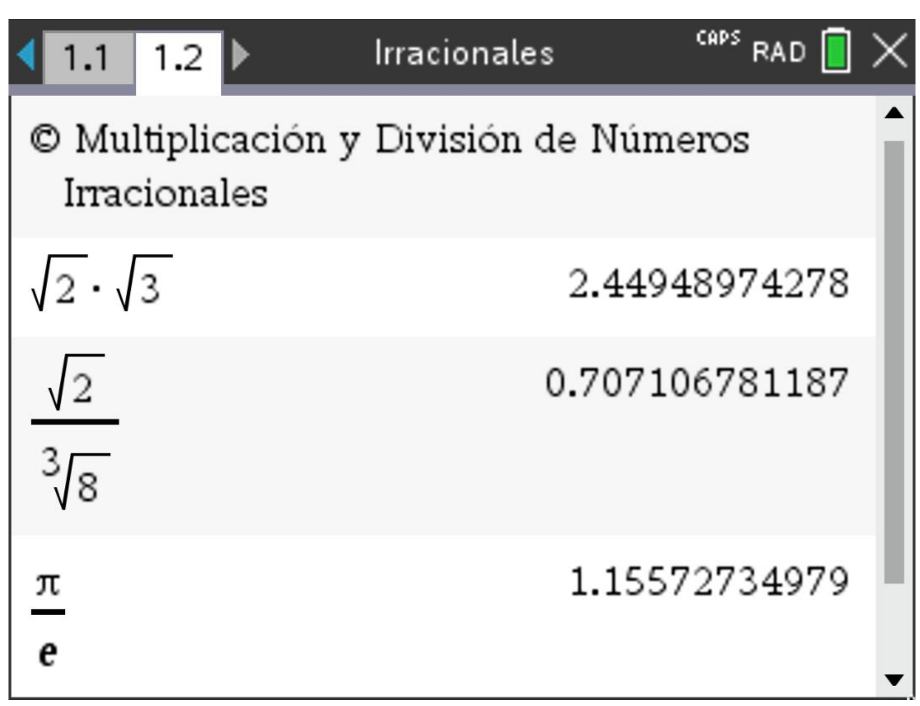
- **Suma y resta:** La suma o resta de dos números irracionales puede resultar en un número racional o irracional. La suma o resta de un número racional y un número irracional siempre resultará en un número irracional.

  - **Ejemplo:**



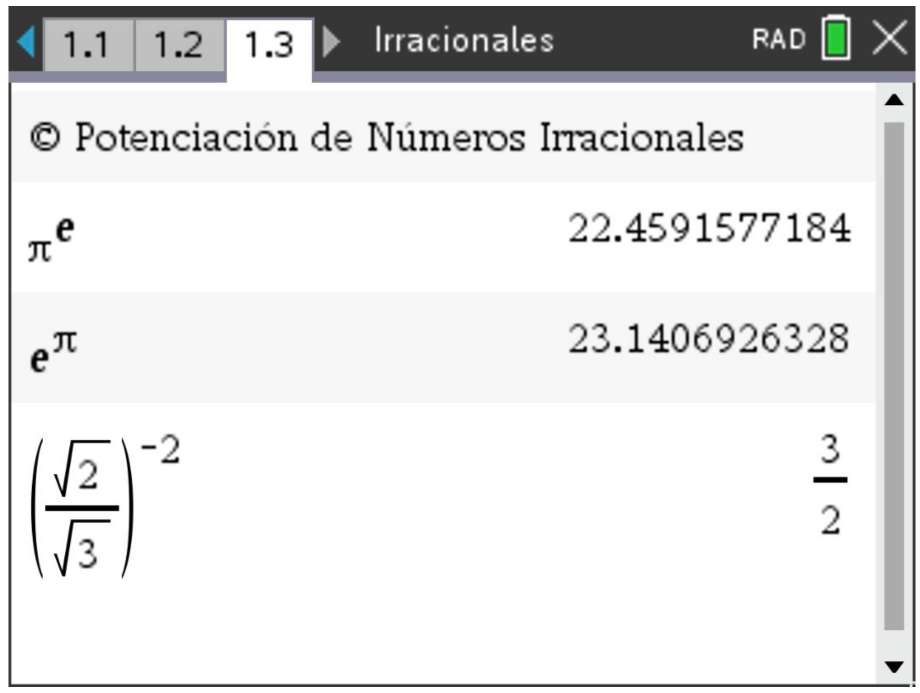

- **Multiplicación y división:** La multiplicación o división de dos números irracionales puede resultar en un número racional o irracional. La multiplicación o división de un número racional (diferente de cero) y un número irracional siempre resultará en un número irracional.

  - **Ejemplo:**




- **Potenciación:** La potenciación de un número irracional puede resultar en un número racional o irracional, dependiendo de la base y del exponente.

❑ **Ejemplos:**




**Consideraciones importantes:**

- Al operar con números irracionales, a menudo trabajamos con sus aproximaciones decimales. Esto puede llevar a resultados ligeramente inexactos debido al redondeo.
- Es fundamental recordar que la suma, resta, multiplicación o división de dos números irracionales no siempre resulta en un número irracional.
- La calculadora puede ser útil para obtener aproximaciones decimales de los resultados de operaciones con números irracionales, pero es importante entender las propiedades y limitaciones de estos números para interpretar correctamente los resultados.

## 1.1.5 Números Reales

Los números reales son aquellos que pueden representar cualquier punto en una recta numérica continua. Incluyen tanto a los números racionales (aquellos que pueden expresarse como una fracción de dos enteros) como a los irracionales (aquellos que no pueden expresarse como una fracción).

Características principales:

- **Completitud:** Los números reales "llenan" completamente la recta numérica, sin dejar huecos. Esto significa que cualquier punto en la recta corresponde a un número real, y cualquier número real corresponde a un punto en la recta.

- **Orden:** Los números reales tienen un orden natural, lo que permite compararlos y ordenarlos.
- **Operaciones:** Se pueden realizar todas las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación, división) y otras más avanzadas (potenciación, radicación, logaritmos, etc.) con números reales.
- **Representación decimal:** Todos los números reales pueden expresarse en forma decimal, ya sea finita, infinita periódica o infinita no periódica.
- **Inclusión de otros conjuntos numéricos:** Los números reales abarcan a todos los demás conjuntos numéricos estudiados previamente:
  - Números naturales ($\mathbb{N}$): 1, 2, 3, ...
  - Números enteros ($\mathbb{Z}$): $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
  - Números racionales ($\mathbb{Q}$): Todas las fracciones de la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ y $q$ son enteros y $q \neq 0$.
  - Números irracionales ($\mathbb{I}$): Números con representación decimal infinita y no periódica, como $\sqrt{2}, \pi, e$.

**Representación:**

El conjunto de los números reales se denota con la letra $\mathbb{R}$.

**Ejemplos de números reales:**

- Números enteros: $-3, 0, 5$
- Números racionales: $\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, 0.25$
- Números irracionales: $\sqrt{2}, \pi, e$

#### 1.1.5.1 Representación geométrica de los números reales

La representación geométrica de los números reales se realiza mediante la recta numérica o recta real. Esta es una línea recta en la que cada punto se asocia con un único número real y, a su vez, cada número real se corresponde con un punto único en la recta.

**Características de la recta numérica:**

- **Infinita:** Se extiende infinitamente en ambas direcciones, representadas por flechas en los extremos.
- **Continua:** No hay espacios o saltos entre los puntos, reflejando la densidad de los números reales (entre dos números reales siempre hay otro).
- **Ordenada:** Los números se ubican en orden creciente de izquierda a derecha.
- **Origen:** El punto cero (0) se marca como el origen o punto de referencia.
- **Unidad de medida:** Se establece una unidad de medida para marcar distancias iguales entre los números enteros.

**Ubicación de los números en la recta:**

- **Números enteros:** Se representan como puntos equidistantes a lo largo de la recta, con los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.
- **Números racionales:** Se ubican entre los enteros, encontrando su posición fraccionaria correspondiente. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ estaría a mitad de camino entre 0 y 1.
- **Números irracionales:** También se encuentran entre los enteros, pero su ubicación exacta puede ser más compleja de determinar, ya que sus decimales son infinitos y no periódicos. A menudo se utilizan aproximaciones o construcciones geométricas para representarlos.

**Importancia de la recta numérica:**

- **Visualización:** Permite visualizar la relación de orden y magnitud entre los números reales.
- **Operaciones:** Facilita la comprensión de operaciones como la suma (desplazamiento a la derecha) y la resta (desplazamiento a la izquierda).
- **Solución de problemas:** Es útil para resolver problemas geométricos y algebraicos que involucran números reales.

## 1.1.6 Taller de la Sección

Realiza las siguientes operaciones de números reales usando tu calculadora.

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

   ❍ **Respuesta:** $\frac{223}{140} \approx 1.59286$

2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

   ❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 8.02808$

3. $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}}$

   ❍ **Respuesta:** $\frac{2511}{1936} \approx 1.297$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-5}$

   ❍ **Respuesta:** $32836$

5. $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{7}$ se puede también escribir como $\pi\sum_{i=2}^{7}\frac{1}{i}$

   ❍ **Respuesta:** $\frac{223\pi}{140} \approx 5.00411$

6. $1+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{2}$

   ❍ **Respuesta:** $\frac{25}{9} \approx 2.77778$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{4}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{6}{\sqrt{7}}$ se puede escribir tambien como $\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{\sqrt{i+1}}$

   ❍ **Respuesta Aproximada:** $9.45969$

8. $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{121}$

   ❍ **Respuesta Aproximada** $0.429784$

9. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{8}+\frac{16}{13}+\frac{32}{21}+\frac{64}{34}+\frac{128}{55}+\frac{256}{89}$

   ❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 12.8073$

10. $\left(\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{7}}$

    ❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 1.00330615417$

11. $4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{27}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)$

❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 3.07915$

12. $16\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 3.14159$

13. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}$

❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 2.71825$

14. $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{1989}}}}$

❍ **Respuesta Aproximada:** $\approx 1.03683$

15. $\pi^{e^{\pi}}$

❍ **Respuesta Aproximada:** $319442279626 \approx 3.19442\times 10^{11}$

16. $\left(\frac{2^7\cdot\left(\pi\times 10^2+e\times 10^3\right)\cdot 5^3}{221\times 10^5\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right)\cdot\left(\frac{1}{3^2(10e+\pi)\left(\sqrt{5}-1\right)}\right)$

❍ **Respuesta:** $\frac{8}{1989}\approx 0.0040221216691805$

17. $\ln\left(\frac{\pi^2+2\pi+1}{e^2+2e+1}\right)$

❍ **Respuesta aproximada:** $\approx 0.215637$

18. $\pi^7-58\pi^6+1349\pi^5-16186x^4+107315x^3-390238x^2+716167\pi-510510$

❍ **Respuesta aproximada:** $\approx -1244.3870832$

19. $\frac{1+2^2}{6}+\frac{1+3^3}{29}+\frac{1+5^5}{3127}+\frac{1+7^7}{823545}$

❍ **Respuesta aproximada:** $\approx 3.7985295651189$

20. $\dfrac{1+\sin\left(\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{1+\cos\left(\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)}$

❍ **Respuesta aproximada:** $\approx 1.1955256950486$

21. $\frac{1}{2}(7)\left(1+\tanh\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(7+0.044715\,(7)^3\right)\right]\right)$

❍ **Respuesta**: 7

## Desafío

Calcule que resultados se obtienen al reemplazar la $x$ por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ en la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
c_{13} = \frac{1213x^{12}}{479001600} - \frac{17371x^{11}}{79833600} + \frac{362767x^{10}}{43545600} - \frac{38867x^{9}}{207360} + \frac{5706469x^{8}}{2073600} \\
- \frac{66963781x^{7}}{2419200} + \frac{8481952741x^{6}}{43545600} - \frac{1395663287x^{5}}{1451520} + \frac{35761373867x^{4}}{10886400} \\
- \frac{1948933907x^{3}}{259200} + \frac{1287969941x^{2}}{118800} - \frac{241928479x}{27720} + 2914
\end{aligned}
$$