Unidad 4

Función Cuadrática

La función cuadrática tiene la siguiente forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c se llaman coeficientes de la ecuación cuadrática. También se debe cumplir que $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

Sea la función cuadrática

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

realizar la gráfica de esta función.

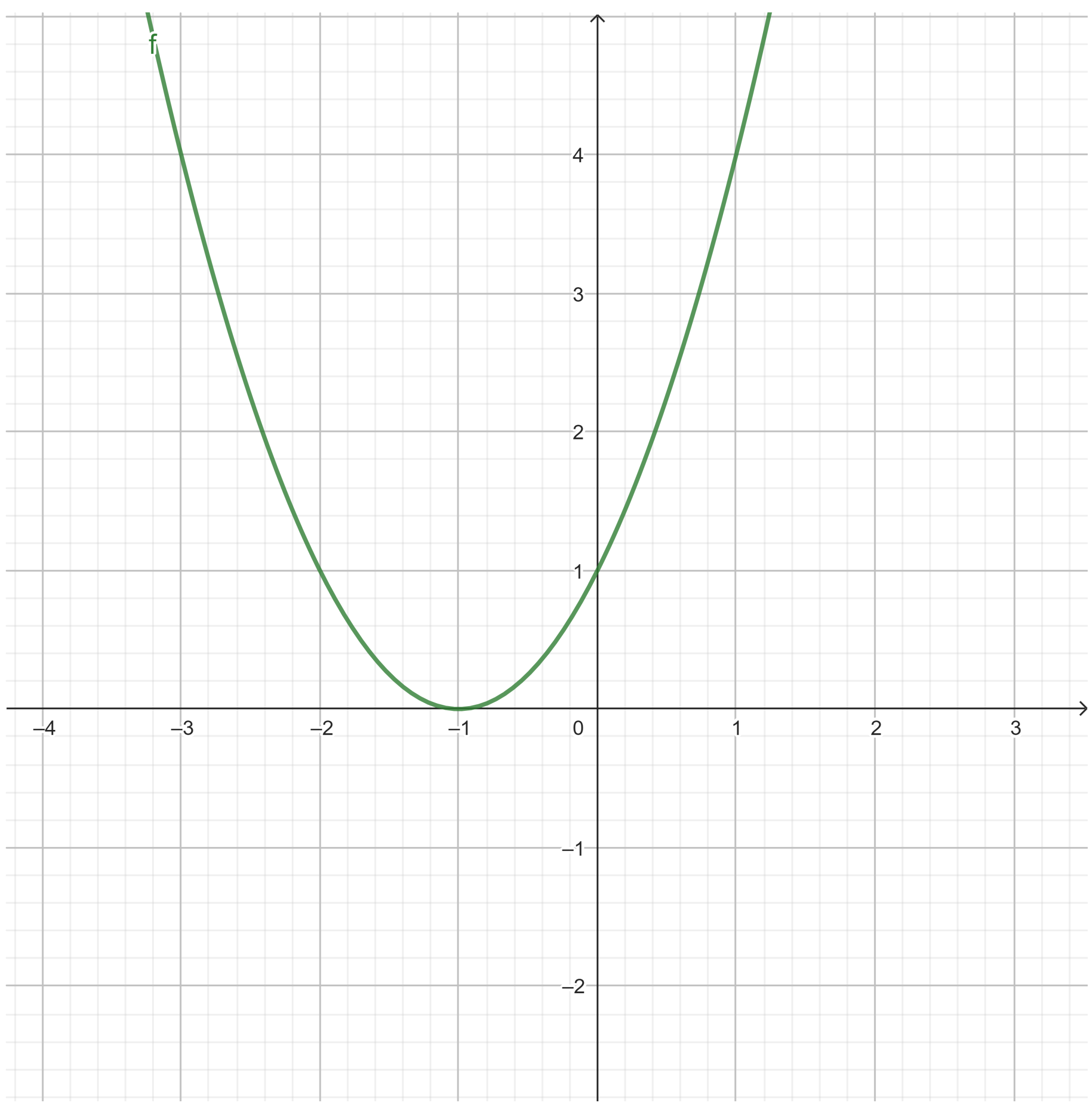


Figura 4.1: Gráfica de la Función $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Las funciones cuadráticas, pueden tener cortes con el eje x, y para ello se usa una fórmula conocida como la **fórmula general de segundo grado**, y se escribe así

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta ecuación nos permite conocer si la función tiene cortes con el eje x , para ello solo se debe evaluar el conocido *"discriminante"*.

El discriminante es la parte interna de la raíz, es decir

$$b^2 - 4ac$$

Si,

- El cálculo de $b^2 - 4ac$ es menor que cero, la función **NO** tiene cortes con el eje x
- El cálculo de $b^2 - 4ac$ es igual a **CERO**, la función cuadrática tiene un **solo** corte con el eje x

- El Cálculo de $b^2 - 4ac$ es mayor que cero, la función cuadrática tiene **DOS** cortes con el eje x.

Del ejemplo anterior tenemos que la función es

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

de aquí (recordando que la función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$) la función tiene valores $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$. Entonces con estos datos calculemos el *"discriminante"*

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2)^2 - 4(1)(1) \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función cuadrática tiene un solo corte con el eje x.

4.1 ¿Cómo se calcula el vértice de la función cuadrática?

Debemos entender que el **vértice** de la función cuadrática es el punto **MÍNIMO** de la función, y en muchas aplicaciones se usa para, por ejemplo **MINIMIZAR** costos, o **minimizar** materiales.

Para calcular el vértice se usa la fórmula

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Recordemos también que **evaluar la función**, significa, cambiar todos los valores de la x por el valor que esta en el paréntesis de la función.

Por ejemplo en la función que tenemos, que es $f(x) = x^2 + 2x + 1$ queremos saber cuál es el valor de la función cuando $x = 2$, entonces hacemos

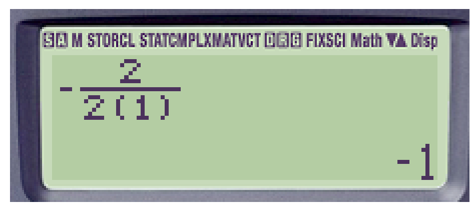
$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^2 + 2(2) + 1 \\ &= 4 + 4 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Este proceso se puede (debe) realizar en la calculadora, por ejemplo

Ahora si, vamos a calcular el **vértice** de la función cuadrática, así, $b = 2$ y $a = 1$ entonces

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\,(1)} = -1$$

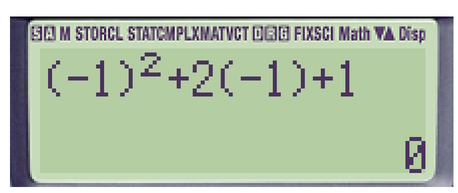
tal como se observa en la calculadora



Este sería el valor para x en el plano cartesiano, **¿Cómo calculamos el valor de y?**, para eso debemos evaluar la función en el valor que encontramos de $x = -1$, así

$$\begin{aligned} f\,(-1) &= (-1)^2 + 2\,(-1) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

tal como se ve en la calculadora



Por lo tanto el vértice de la función cuadrática es $V\,(-1, 0)$.

4.2 Gráficas en Geogebra

Geogebra es una aplicación para Geometría Dinámica, esta nos permite crear construcciones en el Computador que nos permiten entender el comportamiento de diversos tipos de formas y funciones.

Si realizamos las simulaciones para los parámetros de la función cuadrática observamos lo siguiente:

- El valor de a es la amplitud horizontal de la función, si a es un valor muy grande, la función cuadrática tiene una amplitud muy pequeña, y si el valor de a es muy pequeño, tendrá una amplitud muy grande

❍ El valor de b "desfasa" la función cuadrática.

❍ El valor de c "desplaza" verticalmente a la función en c unidades.

Ejemplo 2:

Supongamos un insecto se encuentra en la posición $x = 1$ cm y salta 35 cm, llegando a $x = 36$ cm. Modelar una función cuadrática que muestre el salto de la insecto.

Para resolver este problema necesitamos usar los productos notables. Veamos, si tenemos

$$(x-a)(x-b)$$

lo puedo resolver usando la propiedad distributiva

$$x^2 - bx - ax + ab$$

Así, para resolver nuestro problema debemos considerar la siguiente función

$$I(x) = -(x=1)(x=36)$$

para resolver, debo pasar los números al lado de las x, entonces

$$\begin{aligned} I(x) &= -(x-1)(x-36) \\ &= -\left(x^2 - 36x - 1x + 36\right) \\ &= -\left(x^2 - 37x + 36\right) \\ &= -x^2 + 37x - 36 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función que modela el salto del insecto es

$$I(x) = -x^2 + 37x - 36$$

Veamos su gráfica

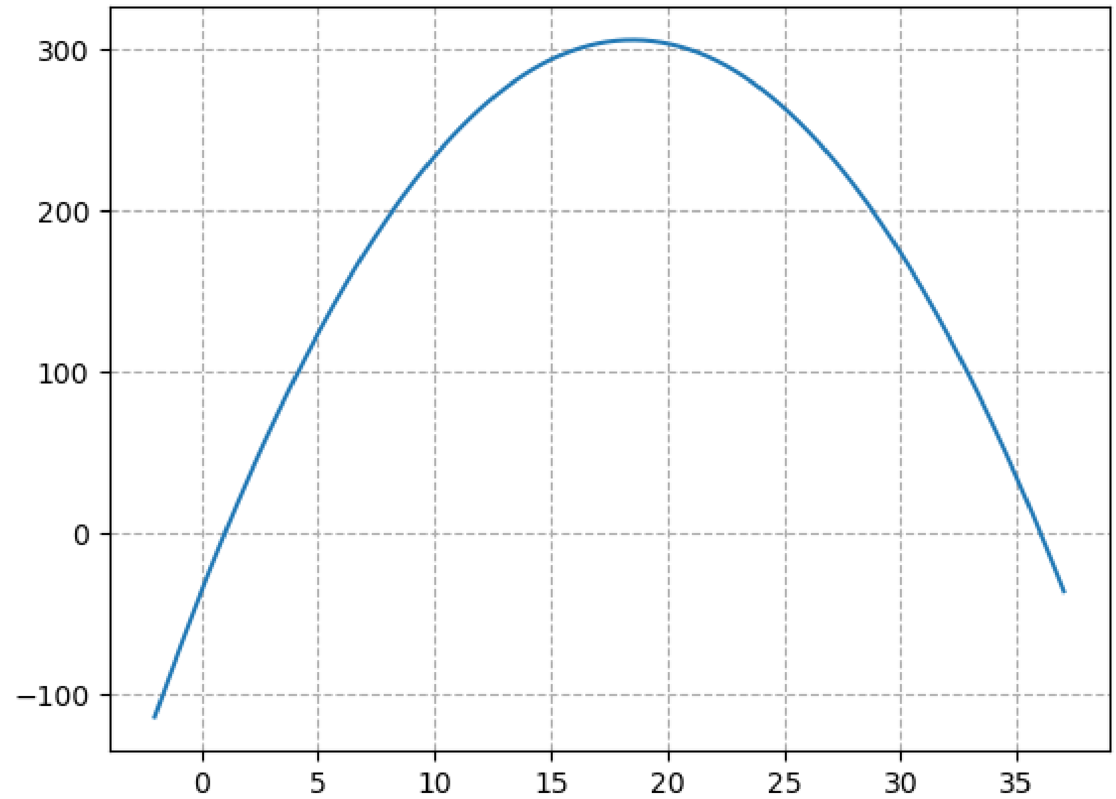


Figura 4.2: Gráfica de la Función Cuadrática

Observemos que el punto máximo sube hasta mas de 300, caso que en el fenómeno no se da.

4.3 Aplicaciones de las funciones lineales y cuadráticas

Ejemplo 3:

Encontrar una **frontera de decisión o clasificación** entre dos grupos de elementos químicos.

Elemento	**Radio Atómico**	**Electronegatividad**
Litio (Li)	167	1.0
Sodio (Na)	190	0.93
Potasio (K)	227	0.82
Magnesio (Mg)	160	1.31
Calcio (Ca)	197	1.0
Flúor (F)	71	3.98
Oxígeno (O)	60	3.44
Nitrógeno (N)	56	3.04
Clóro (Cl)	99	3.16
Azufre (S)	102	2.58

Para resolver éste problema, consideremos dos puntos, el A con coordenadas $(50, 1.5)$ y el punto B con coordenadas $(250, 3)$. Con estos puntos sabemos que podemos calcular una función lineal.

Para ello, primero debemos calcular la pendiente de la recta que tiene la forma

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

en nuestro problema tenemos que $A = (x_1 = 50, y_1 = 1.5)$ y $B = (x_2 = 250, y_2 = 3)$ así

$$m = \frac{3 - 1.5}{250 - 50} = 0.0075$$

luego debemos usar la ecuación punto-pendiente que tiene la forma

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

de aquí sabemos que $y_1 = 1.5$, $x_1 = 50$ y $m = 0.0075$, así tenemos

$$y - 1.5 = 0.0075\,(x - 50)$$

ahora debemos aplicar la propiedad distributiva, así

$$y - 1.5 = 0.0075x - 0.375$$

ahora transponemos el 1.5 positivo

$$y = 0.0075x - 0.375 + 1.5$$
$$y = 0.0075x + 1.125$$

luego sabemos por la definición de funciones que $y = f\,(x)$ por lo tanto la función queda definida como

$$f\,(x) = 0.0075x + 1.125$$

Por lo tanto una función lineal que clasifica a los dos grupos de elementos químicos es

$$f\,(x) = 0.0075x + 1.125$$

¿Cómo sabemos si la función clasificó de forma correcta a los elementos químicos?

Para responder a esta pregunta, vamos a evaluar un elemento de cada grupo y observamos el comportamiento.

Sea Litio (Li) Ra=167 E=1.0 y el otro elemento Clóro (Cl) Ra=99 E=3.16.

Recordemos que se ha graficado sobre el eje x el radio atómico, entonces en la función que tenemos vamos a evaluar el radio atómico de cada elemento.

- Para el Litio: Sea $x = 167$ entonces

$$\begin{aligned} f(167) &= 0.0075(167) + 1.125 \\ &= 2.3775 \end{aligned}$$

- Para el Clóro: Sea $x = 99$ entonces

$$\begin{aligned} f(99) &= 0.0075(99) + 1.125 \\ &= 1.867 \end{aligned}$$

¿Cómo interpretamos estos resultados?

Si observamos la gráfica, nos damos cuenta que las evaluaciones que realizamos nos generan puntos sobre la línea, este no es el objetivo. Para ello vamos a introducir un nuevo concepto.

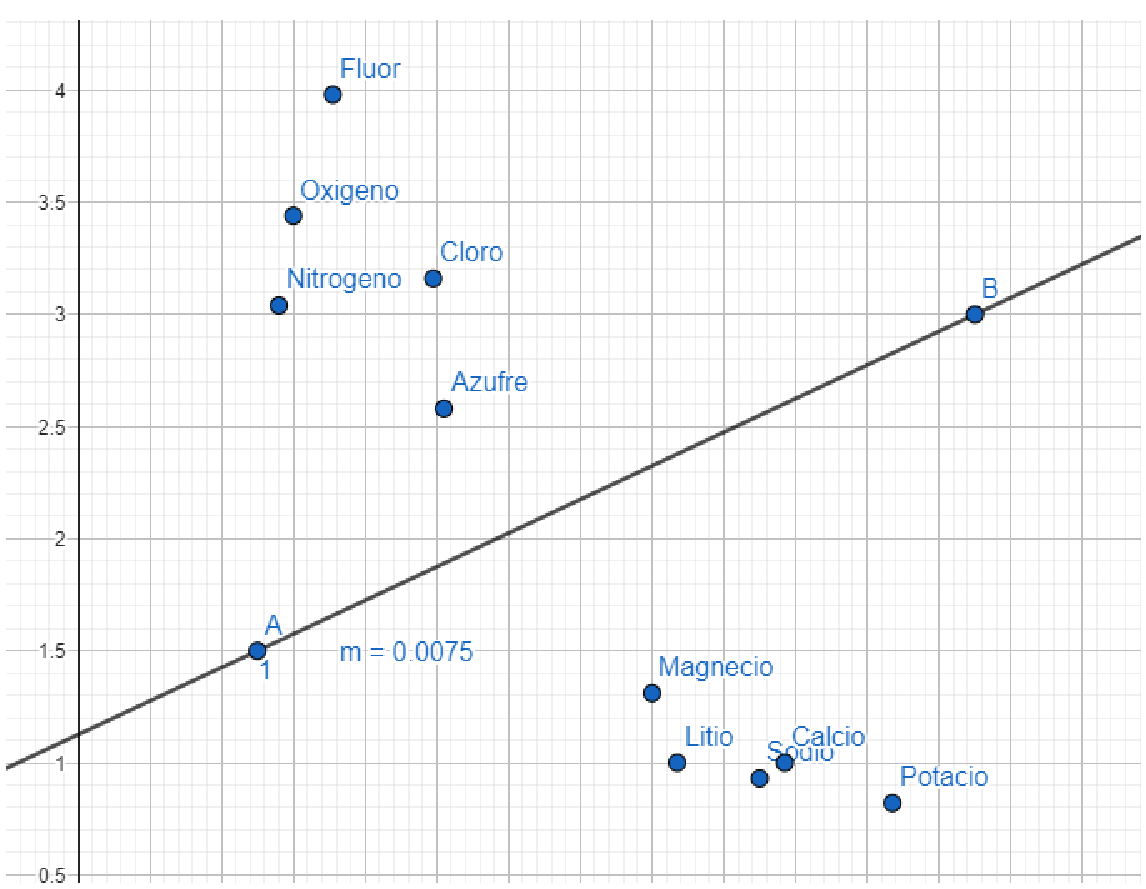


Figura 4.3: Gráfica de la función y los elementos Químicos

4.3.1 Función Escalón (Signo)

Esta función se define de la siguiente manera

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 & \textbf{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si aplicamos este concepto a nuestro problema tendríamos que realizar una modificación a la función encontrada.

La función que tenemos actualmente es

$$f(x) = 0.0075x + 1.125$$

Si evaluamos cualquier punto del primer grupo, por ejemplo el grupo A que tiene radios atómicos mayores a 160 y usando la función escalón (signo) nos debería dar cero (0), así podemos escribir la siguiente expresión

$$CEQ(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 140 \\ 1 & \textbf{si } x \geq 140 \end{cases}$$

4.4 Taller de Funciones y Lineales y Cuadráticas

A continuación se presenta una lista de aplicaciones de funciones lineales y cuadráticas. En cada una de las aplicaciones se debe encontrar el modelo si es necesario, realizar la gráfica de la función, especificar el dominio y rango de la función. Evaluar la función para los puntos indicados en el ejercicio.

4.4.1 Funciones Lineales

1. **Conversión de Grados Centígrados a Grados Fahrenheit**

   Un científico está realizando un experimento que requiere convertir temperaturas de grados Celsius a grados Fahrenheit. La fórmula para realizar esta conversión es:

   $$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

   donde F es la temperatura en grados Fahrenheit.

C es la temperatura en grados Celsius.

El científico ha registrado las siguientes temperaturas en grados Celsius: $20°C$, $37°C$ y $-5°C$.

a) ¿Cuál es la temperatura equivalente en grados Fahrenheit para cada una de las mediciones registradas por el científico?

b) Si el experimento requiere una temperatura de $68°F$, ¿cuál sería la temperatura equivalente en grados Celsius?

c) Explica, ¿Cómo puedes identificar la pendiente y el punto de intercepción en la función de conversión y que representa cada uno de esos valores en el contexto de la conversión de unidades?

2. **Modelado de Tasas de Cambio**

Un grupo de investigadores está estudiando el flujo sanguíneo en una arteria y cómo este se ve afectado por la administración de un fármaco vasodilatador. Antes de administrar el fármaco, miden que el flujo sanguíneo aumenta a una tasa constante. Durante los primeros 10 segundos, el flujo aumenta de $5 ^{ml}/_{s}$ a $8 ^{ml}/_{s}$.

a) Suponiendo que el aumento del flujo sanguíneo es lineal, determina la función que describe el flujo sanguíneo (F) en función del tiempo (t) antes de la administración del fármaco.

b) Utilizando la función obtenida, predice cuál será el flujo sanguíneo a los 15 segundos.

c) Después de 20 segundos el doctor aplica un fármaco que estabiliza el flujo sanguíneo en $11 ^{ml}/_{s}$, escribe una función a trozos que describa el flujo sanguíneo antes y después de la aplicación del fármaco.

d) Explica cómo la pendiente de la función lineal representa la tasa de cambio del flujo sanguíneo en este contexto.

3. **Relaciones fisiológicas**

Un grupo de antropólogos está estudiando la relación entre la longitud del fémur y la estatura en una población humana. Han recolectado datos de varios individuos, encontrando una relación lineal aparente. Los datos muestran que, en promedio, por cada centímetro adicional en la longitud del fémur, la estatura aumenta en 2.5 centímetros.

a) Si se sabe que una persona tiene un fémur de 45 centímetros de longitud y una estatura de 165 centímetros, determina la función lineal que describe la relación entre la longitud del fémur (x) y la estatura (y).

b) Utilizando la función obtenida, estima la estatura de una persona con un fémur de 50 centímetros.

c) Si se encuentra un fémur de 42 cm en una excavación arqueológica, ¿cuál sería la estatura estimada del individuo?

d) Explica cómo la pendiente de la función lineal representa la relación entre la longitud del fémur y la estatura en este contexto.

4. **Dosis génica y producción de proteína bacteriana**

   Un grupo de genetistas está investigando la relación entre el número de copias de un gen específico y la cantidad de proteína que produce en una cepa de bacterias. Han observado que existe una relación lineal entre estas dos variables.

   a) **Datos Experimentales:**

   1) Cuando las bacterias tienen 2 copias del gen, producen 10 unidades de proteína.
   2) Cuando tienen 4 copias, producen 18 unidades.

   b) **Pregunta**

   1) Determina la función lineal que describe la relación entre el número de copias del gen (x) y la cantidad de proteína producida (y).
   2) Utilizando la función obtenida, predice cuántas unidades de proteína producirían las bacterias si tuvieran 6 copias del gen.
   3) Si los investigadores miden que una bacteria produce 25 unidades de proteína, ¿cuántas copias del gen tiene esta bacteria?
   4) Explica cómo la pendiente de la función lineal representa la relación entre el número de copias del gen y la producción de proteína en este contexto.

5. **Modelo Presa-Depredador**

   Un grupo de ecólogos está estudiando la interacción entre una población de zorros (depredadores) y una población de conejos (presas) en un ecosistema local. Han observado que la tasa de consumo de conejos por parte de los zorros varía con la densidad de la población de zorros.

a) **Datos Recolectados:**

1) Cuando la densidad de la población de zorros es de 5 zorros por kilómetro cuadrado, la tasa de consumo es de 15 conejos por semana.
2) Cuando la densidad de la población de zorros es de 10 zorros por kilómetro cuadrado, la tasa de consumo es de 25 conejos por semana.

b) **Preguntas**

1) Suponiendo una relación lineal, determina la función que describe la tasa de consumo de conejos (C) en función de la densidad de la población de zorros (Z).
2) Utilizando la función obtenida, predice cuál sería la tasa de consumo de conejos si la densidad de la población de zorros fuera de 15 zorros por kilómetro cuadrado.
3) Si se observa que la tasa de consumo de conejos es de 30 por semana, ¿Cuál es la densidad de la población de zorros?
4) Explica qué representa la pendiente de la función lineal en este contexto ecológico.
5) ¿Cuales son las limitantes de modelar este fenómeno ecológico con una función lineal?

6. **Tasa de Descomposición Lineal en Hojas Caídas**

Un grupo de biólogos está estudiando la descomposición de hojas caídas en un bosque. Durante las primeras semanas del proceso, observan que la pérdida de masa de las hojas sigue una tendencia lineal.

a) **Datos Recolectados:**

1) Al inicio del estudio (tiempo = 0 semanas), las hojas tienen una masa promedio de 100 gramos.
2) Después de 3 semanas, la masa promedio de las hojas se ha reducido a 85 gramos.

b) **Preguntas:**

1) Suponiendo que la descomposición sigue un modelo lineal en estas etapas tempranas, determina la función que describe la masa de las hojas (M) en función del tiempo (t) en semanas.
2) Utilizando la función obtenida, predice cuál será la masa promedio de las hojas después de 5 semanas.
3) ¿Cuánto tiempo tardarán las hojas en perder la mitad de su masa original?
4) Explica cómo la pendiente de la función lineal representa la tasa de descomposición en este contexto.
5) ¿Cuáles son algunas de las razones por las que la descomposición podría no seguir un patrón perfectamente lineal a largo plazo?

7. **Impacto Lineal de Pesticidas en Población de Abejas**

   Un grupo de ecotoxicólogos está estudiando el efecto de un pesticida en la población de abejas de una región agrícola. Han observado que a medida que aumenta la concentración del pesticida en el ambiente, la población de abejas disminuye de manera aparentemente lineal durante el periodo de estudio.

   a) **Datos Recolectados:**

   1) Cuando la concentración del pesticida es de 0 partes por millón (ppm), la población de abejas es de 10,000 individuos por hectárea.
   2) Cuando la concentración del pesticida es de 2 ppm, la población de abejas disminuye a 8,000 individuos por hectárea.

   b) **Preguntas:**

   1) Determina la función lineal que describe la relación entre la concentración del pesticida (x) y la población de abejas (y).
   2) Utilizando la función obtenida, predice cuál sería la población de abejas si la concentración del pesticida aumentara a 3 ppm.
   3) ¿A qué concentración de pesticida se esperaría que la población de abejas descendiera a 5000 individuos por hectárea?
   4) Explica qué representa la pendiente de la función lineal en este contexto de impacto ambiental.

5) ¿Cuáles son algunas de las limitaciones de usar un modelo lineal para representar el impacto de un contaminante en una población?

8. **Relación Lineal: Sustrato y Velocidad Enzimática Inicial**

Un bioquímico está estudiando la cinética de una enzima en el laboratorio. Sabe que a bajas concentraciones de sustrato, la velocidad inicial de la reacción enzimática muestra una relación lineal con la concentración del sustrato.

a) **Datos Experimentales:**

1) A una concentración de sustrato de 1 milimolar (mM), la velocidad inicial de la reacción es de 5 micromoles por minuto (µmol/min).
2) A una concentración de sustrato de 2 mM, la velocidad inicial de la reacción es de 10 µmol/min.

b) **Preguntas:**

1) Suponiendo que a estas bajas concentraciones de sustrato la relación es lineal, determina la función que describe la velocidad inicial de la reacción (V) en función de la concentración de sustrato (S).
2) Utilizando la función obtenida, predice cuál sería la velocidad inicial de la reacción a una concentración de sustrato de 1.5 mM.
3) Si el bioquímico mide una velocidad inicial de 8 µmol/min, ¿cuál sería la concentración de sustrato?
4) Explica cómo la pendiente de la función lineal representa la relación entre la concentración de sustrato y la velocidad de la reacción en estas condiciones.
5) ¿Por qué es importante aclarar que este modelo lineal solo es válido a bajas concentraciones de sustrato? ¿Qué ocurre con la cinética enzimática a concentraciones de sustrato más altas?

9. **Diluciones 1:2: Modelado Lineal en el Laboratorio**

Un técnico de laboratorio necesita preparar una serie de diluciones seriadas de una solución de proteína para un experimento. Comienza con una solución madre de concentración 10 mg/mL y realiza diluciones sucesivas 1:2.

a) **Preguntas:**

1) Si el técnico realiza 4 diluciones seriadas, ¿cuál será la concentración de proteína en la última dilución?
2) Determina la función lineal que describe la relación entre el número de diluciones realizadas (x) y la concentración de la solución (y). (Nota: aunque las diluciones seriadas implican una relación exponencial, podemos aproximarla linealmente si nos enfocamos en un rango limitado de diluciones).
3) Si el experimento requiere una concentración de proteína de 0.625 mg/mL, ¿cuántas diluciones seriadas debe realizar el técnico?
4) Explica cómo la pendiente de la función lineal (o la razón de cambio) se relaciona con el factor de dilución en este proceso.
5) ¿En que casos seria mas apropiado utilizar una función exponencial para modelar este fenómeno?

10. **Relación Lineal en Fisiología: Frecuencia Respiratoria y Volumen Ventilado**

Un grupo de fisiólogos está estudiando la relación entre la frecuencia respiratoria y el volumen de aire ventilado por los pulmones en individuos sanos. Observan que, dentro de ciertos límites, existe una relación lineal entre estas dos variables.

a) **Datos Recolectados:**

1) Cuando un individuo tiene una frecuencia respiratoria de 12 respiraciones por minuto, el volumen de aire ventilado es de 6 litros por minuto.
2) Cuando la frecuencia respiratoria aumenta a 20 respiraciones por minuto, el volumen de aire ventilado es de 10 litros por minuto.

b) **Preguntas:**

1) Suponiendo una relación lineal, determina la función que describe el volumen de aire ventilado (V) en litros por minuto en función de la frecuencia respiratoria (f) en respiraciones por minuto.
2) Utilizando la función obtenida, predice cuál sería el volumen de aire ventilado si la frecuencia respiratoria fuera de 16 respiraciones por minuto.

3) Si un individuo ventila 8 litros de aire por minuto, ¿cuál es su frecuencia respiratoria?
4) Explica cómo la pendiente de la función lineal representa la relación entre la frecuencia respiratoria y el volumen de aire ventilado en este contexto fisiológico.
5) ¿Cuáles son algunas de las situaciones o condiciones fisiológicas en las que esta relación lineal podría no ser precisa?

4.4.2 Funciones Cuadráticas

1. **Crecimiento Poblacional de Insectos**

   Se observa que la población de una especie de insecto varía con el tiempo siguiendo una función cuadrática. Los datos muestran el crecimiento y declive de la población en función de las estaciones.

   a) **Datos:**
      1) Tiempo (semanas): 0, 2, 4, 6, 8, 10
      2) Población de insectos: 100, 250, 350, 300, 200, 50

   b) **Preguntas:**

   c) Determina la función cuadrática que modela la población de insectos en función del tiempo.

   d) ¿En qué semana la población alcanza su máximo?

   e) ¿En que semana la población se extingue?

2. **Altura de un Salto de Rana**

   La altura de un salto de rana en función de la distancia horizontal se puede modelar con una función cuadrática.

   a) **Datos:**
      1) Distancia horizontal (cm): 0, 20, 40, 60, 80
      2) Altura (cm): 0, 30, 40, 30, 0

   b) **Preguntas:**

   c) Encuentra la función cuadrática que describe la trayectoria del salto.

   d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la rana?

   e) ¿A que distancia la rana toca el suelo?

3. **Respuesta de Plantas a la Luz**

   La tasa de fotosíntesis de una planta varía con la intensidad de la luz, siguiendo una relación cuadrática.

   a) **Datos:**
      1) Intensidad de luz (unidades): 0, 1, 2, 3, 4
      2) Tasa de fotosíntesis: 0, 4, 8, 8, 4

   b) **Preguntas:**
      1) Determina la función cuadrática que relaciona la intensidad de luz con la tasa de fotosíntesis.
      2) ¿Cual es la intensidad de luz optima para la fotosintesis?

4. **Crecimiento de Tumores**

   El crecimiento de algunos tumores puede ser modelado por una función cuadrática en sus etapas iniciales.

   a) **Datos:**
      1) Tiempo (días): 0, 5, 10, 15
      2) Volumen del tumor (mm^3): 10, 25, 60, 105

   b) **Preguntas:**
      1) Encuentre la función cuadrática que modele el crecimiento del tumor.
      2) Prediga el volumen del tumor después de 20 días.
      3) ¿En que tiempo el tumor dobla su tamaño original?

5. **Concentración de Enzimas**

   La actividad de una enzima varía con su concentración, alcanzando un punto óptimo y luego disminuyendo.

   a) **Datos:**
      1) Concentración de enzima (mM): 1, 2, 3, 4, 5
      2) Actividad enzimática: 10, 25, 30, 25, 10

   b) **Preguntas:**
      1) Determina la función cuadrática que representa la actividad enzimática.
      2) ¿Cuál es la concentración óptima para la máxima actividad?

6. **Metabolismo de Fármacos**

   La concentración de un fármaco en el torrente sanguíneo varía con el tiempo, alcanzando un pico y luego disminuyendo.

   a) **Datos:**

   1) Tiempo (horas): 0, 1, 2, 3, 4
   2) Concentración de fármaco (mg/L): 0, 5, 8, 5, 0

   b) **Preguntas:**

   1) Encuentra la función cuadrática que describe la concentración del fármaco.
   2) ¿En qué momento la concentración del fármaco es máxima?

7. **Respuesta a la Temperatura**

   La tasa metabólica de un organismo varía con la temperatura, alcanzando un punto óptimo.

   a) **Datos:**

   1) Temperatura (°C): 10, 20, 30, 40, 50
   2) Tasa metabólica: 5, 15, 20, 15, 5

   b) **Preguntas:**

   1) Determina la función cuadrática que relaciona la temperatura con la tasa metabólica.
   2) ¿Cuál es la temperatura óptima para la máxima tasa metabólica?

8. **Densidad de Población Bacteriana**

   La densidad de una población bacteriana en un cultivo varía con el tiempo.

   a) **Datos:**

   1) Tiempo (horas): 0, 2, 4, 6, 8
   2) Densidad bacteriana (UFC/mL): 100, 400, 900, 1600, 2500.

   b) **Preguntas:**

   1) Encuentra la función cuadrática que describe el crecimiento de la población.
   2) ¿Cuál será la densidad después de 10 horas?

9. **Crecimiento de Peces**

El peso de un pez varía con su longitud, siguiendo una relación cuadrática.

a) **Datos:**
   1) Longitud (cm): 10, 15, 20, 25
   2) Peso (g): 50, 112.5, 200, 312.5

b) **Preguntas:**
   1) Determina la función cuadrática que relaciona la longitud con el peso.
   2) ¿Cuál será el peso de un pez de 30 cm de longitud?

10. **Contracción Muscular**

a) La fuerza de contracción de un músculo varía con la velocidad de contracción.

b) **Datos:**
   1) Velocidad (cm/s): 0, 2, 4, 6, 8
   2) Fuerza (N): 0, 8, 12, 8, 0

c) **Preguntas:**
   1) Encuentra la función cuadrática que describe la relación.
   2) ¿Cuál es la velocidad óptima para la máxima fuerza de contracción?

11. **Respuesta de Neuronas**

La frecuencia de disparo de una neurona varía con la intensidad del estímulo.

a) **Datos:**
   1) Intensidad (mV): 0, 1, 2, 3, 4
   2) Frecuencia (Hz): 0, 10, 16, 10, 0

b) **Preguntas:**
   1) Determina la función cuadrática que describe la relación.
   2) ¿Cuál es la intensidad óptima para la máxima frecuencia de disparo?

12. **Variación de Hormonas**

La concentración de una hormona en el cuerpo varía a lo largo del día.

a) **Datos:**
   1) Tiempo (horas): 0, 6, 12, 18, 24
   2) Concentración (ng/mL): 10, 25, 30, 25, 10
b) **Preguntas:**
   1) Encuentra la función cuadrática que modela la concentración de la hormona.
   2) ¿A qué hora la concentración es máxima?

Unidad 5

Función a Tramos

Ejercicio 1:

Modelar una función a tramos con base en los siguientes datos

- Para $x < -7$, una **función lineal** que pasa por el punto $A\,(-11, 7)$ y $B\,(-7, 0)$
- Para $-7 \leq x < -5$, una **función cuadrática** con cortes con el eje x en $x = -7$ y $x = -5$
- Para $-5 \leq x < -2$, una **función cúbica** negativa con cortes en $x = -5$, $x = -3$ y $x = -2$
- Para $x \geq -2$, una **función polinómica** con cortes en $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$

Solución

Para graficar vamos a usar el siguiente archivo de **Google Colab** `https://colab.research.google.com/drive/16Lmoc9C0SDm1Um0V2rB2TQVvfUcpowqL?usp=sharing`

1. **Función Lineal**

   Tenemos dos puntos $A\,(-11, 7)$ y $B\,(-7, 0)$ para la función lineal necesitamos la pendiente

$$\begin{aligned} m &= \frac{0-7}{-7-(-11)} = \frac{-7}{-7+11} \\ &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

Ahora usamos la fórmula **punto-pendiente**

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m\,(x - x_1)\\
y - 7 &= -\frac{7}{4}\,(x - (-11))\\
y - 7 &= -\frac{7}{4}\,(x + 11)\\
y - 7 &= -\frac{7}{4}x - \frac{77}{4}\\
y &= -\frac{7}{4}x - \frac{77}{4} + 7\\
y &= -\frac{7}{4}x - \frac{49}{4}
\end{aligned}
$$

ahora hacemos $f_1\,(x) = y$ entonces

$$f_1\,(x) = -\frac{7}{4}x - \frac{49}{4}$$

Los cálculos los podemos verificar en la calculadora **TI-Nspire CX CAS II** como se muestra en la siguiente figura:

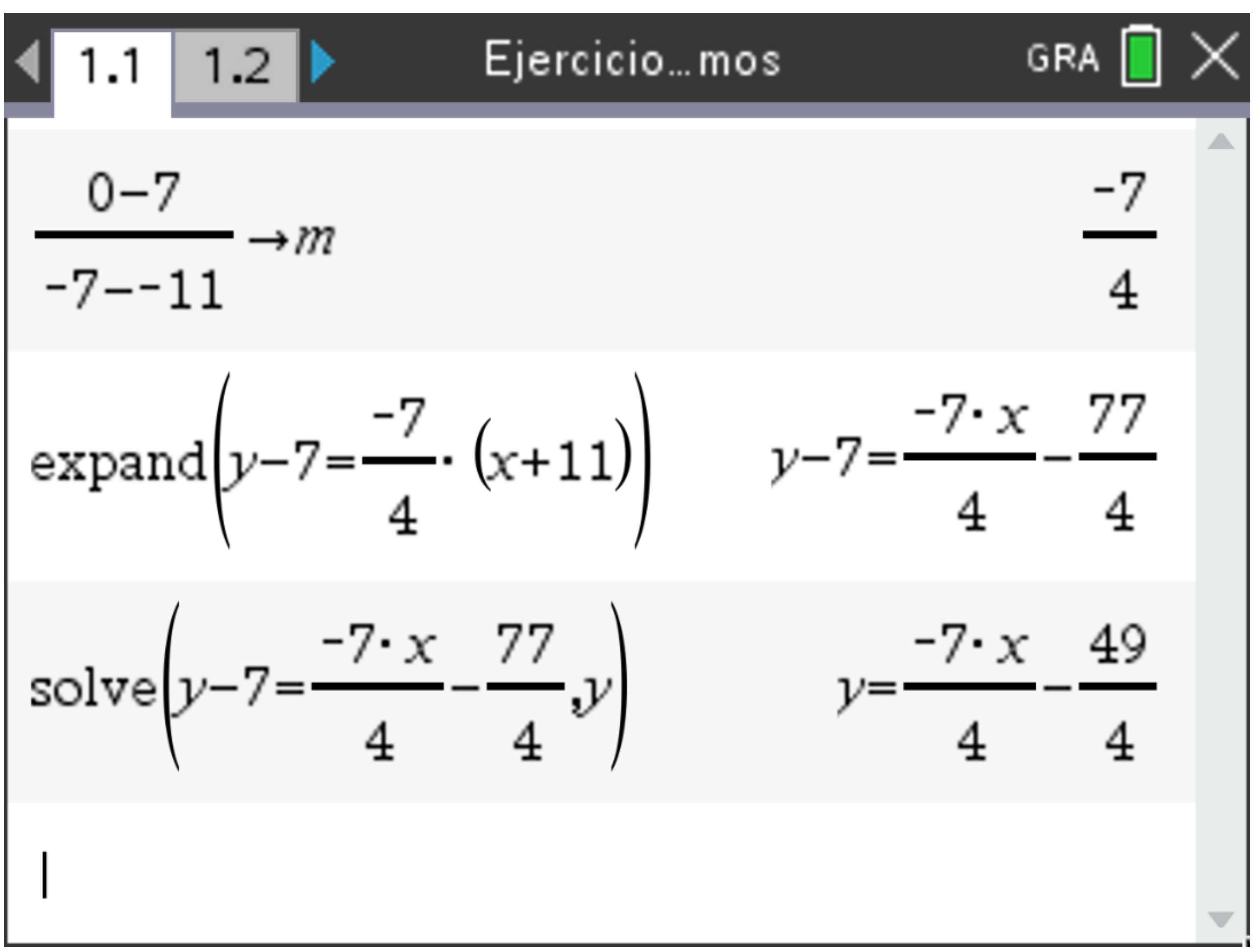


Figura 5.1: Comprobación de Resultados

A continuación se presenta la gráfica de la función lineal desarrollada en **Google Colab**

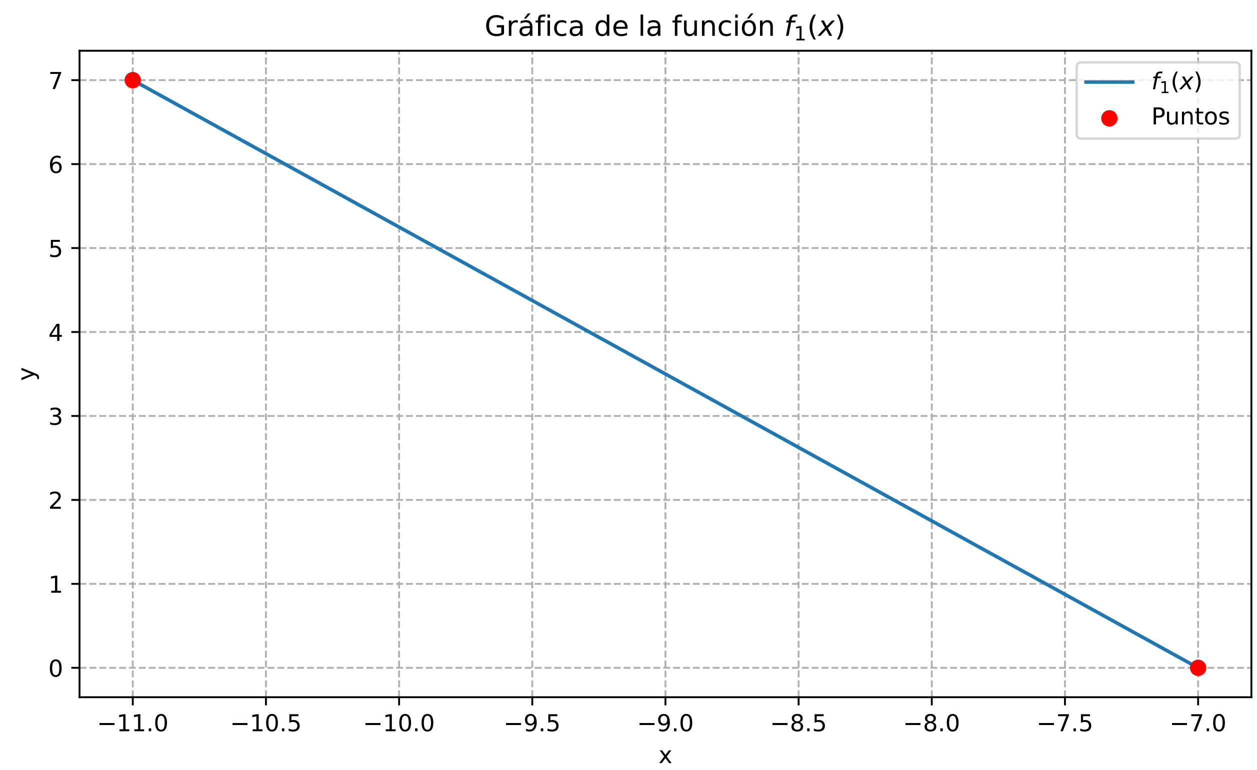


Figura 5.2: Gráfica de la Función Lineal

2. **Función Cuadrática**

   Una función cuadrática con cortes en $x = a$ y $x = b$ tiene la forma

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x = a)(x = b) \\ &= (x - a)(x - b) \end{aligned}$$

   como $a = -7$ y $b = -5$ entonces

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - (-7))(x - (-5)) \\ &= (x + 7)(x + 5) \\ &= x^2 + 5x + 7x + 35 \\ &= x^2 + 12x + 35 \end{aligned}$$

   Vértice

   Para calcular el vértice usamos la fórmula

$$\begin{aligned} V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) &= \left(\frac{-12}{2(1)}, P_2\left(\frac{-12}{2(1)}\right)\right) \\ &= (-6, P_2(-6)) \\ &= (-6, -1) \end{aligned}$$

   Como estamos calculando el segundo tramo podemos escribir $f_2(x) = P_2(x)$, entonces

$$f_2(x) = x^2 + 12x + 35$$

Estos resultados se comprueban mediante la calculadora TI-Nspire CX CAS II, como se observa en la siguiente figura:

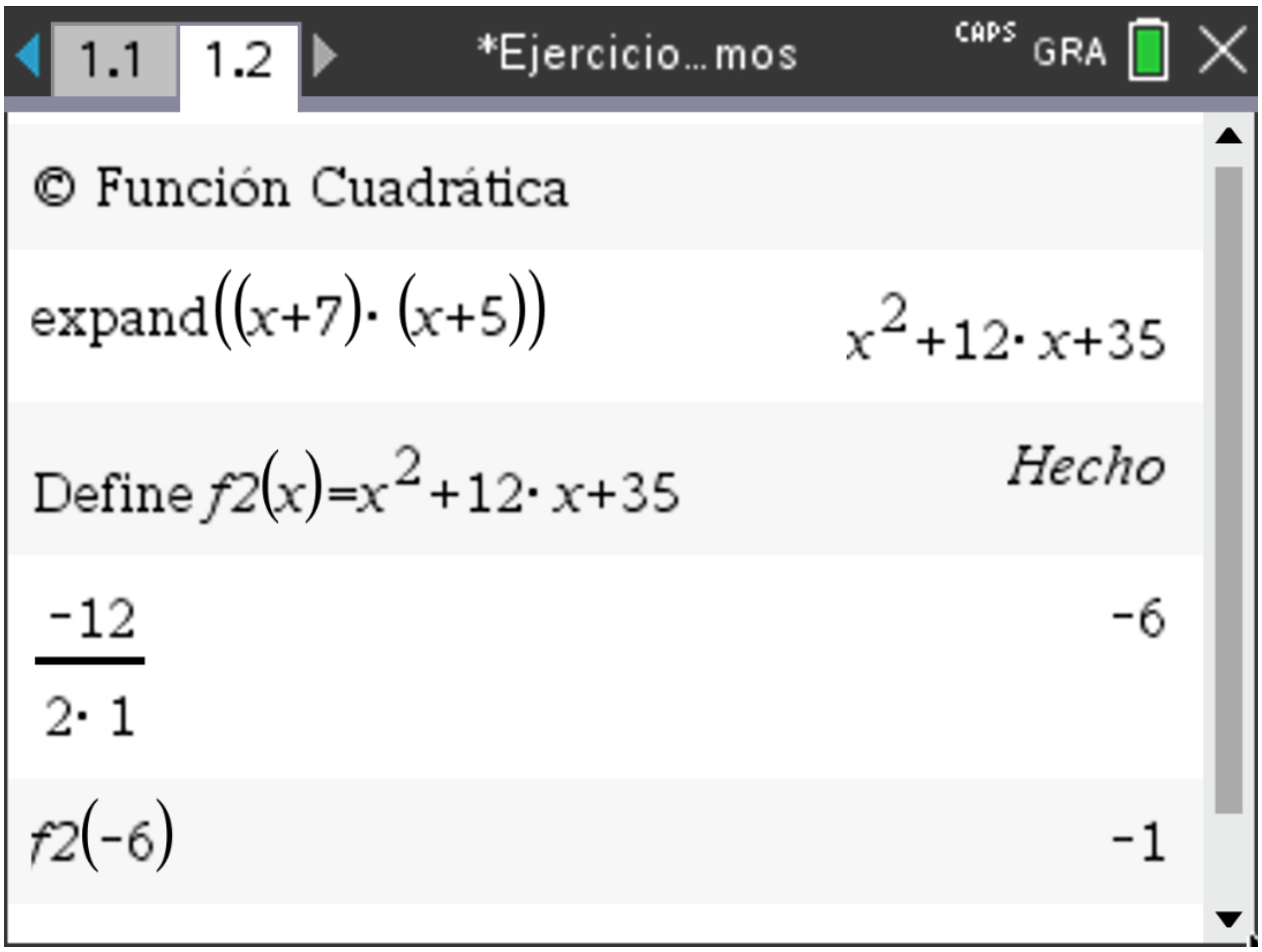


Figura 5.3: Comprobación de los Cálculos

A continuación se presenta la gráfica de la función cuadrática desarrollada en Google Colab

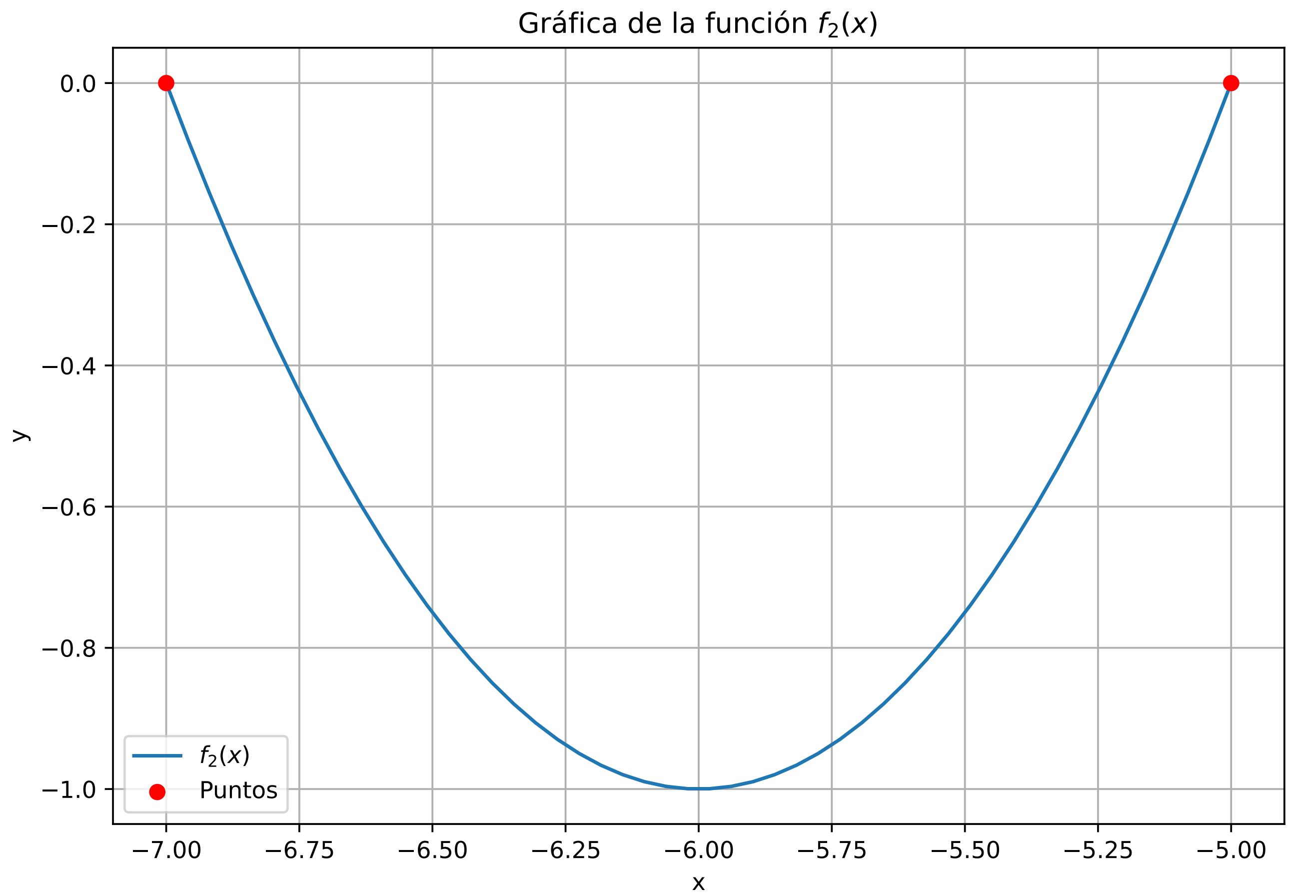


Figura 5.4: Gráfica de la Función Cuadrática

3. **Función Cúbica**

   Una función cúbica tiene la forma

$$P_3(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

con $a=-5$, $b=-3$ y $c=-2$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} P_3(x) &= (x-(-5))(x-(-3))(x-(-2)) \\ &= (x+5)(x+3)(x+2) \end{aligned}$$

aplicamos la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \left(x^2+3x+5x+15\right)(x+2) \\ &= \left(x^2+8x+15\right)(x+2) \\ &= \left(x^3+2x^2+8x^2+16x+15x+30\right) \\ &= x^3+10x^2+31x+30 \end{aligned}$$

Como la función debe ser **negativa** la multiplicamos por menos uno (-1) entonces tenemos

$$P_3(x) = -x^3-10x^2-31x-30$$

Como es el tercer tramo entonces tenemos que $f_3(x) = P_3(x)$ entonces

$$f_3(x) = -x^3-10x^2-31x-30$$

El resultado de la expansión se puede observar en la siguiente captura de pantalla de la calculadora TI-Nspire CX CAS II

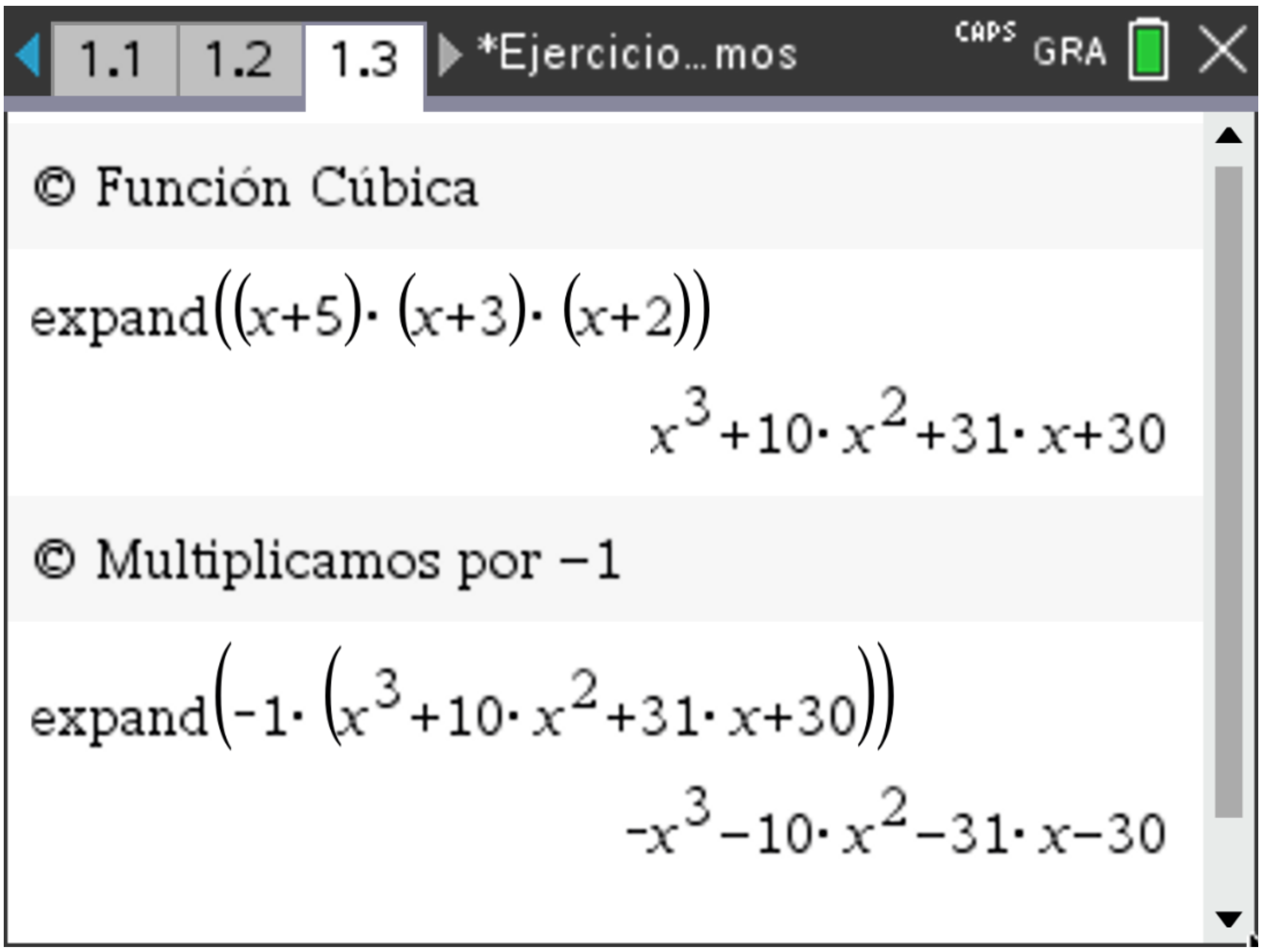


Figura 5.5: Comprobación de la Expansión

A continuación se presenta la gráfica de la función cúbica desarrollada en Google Colab

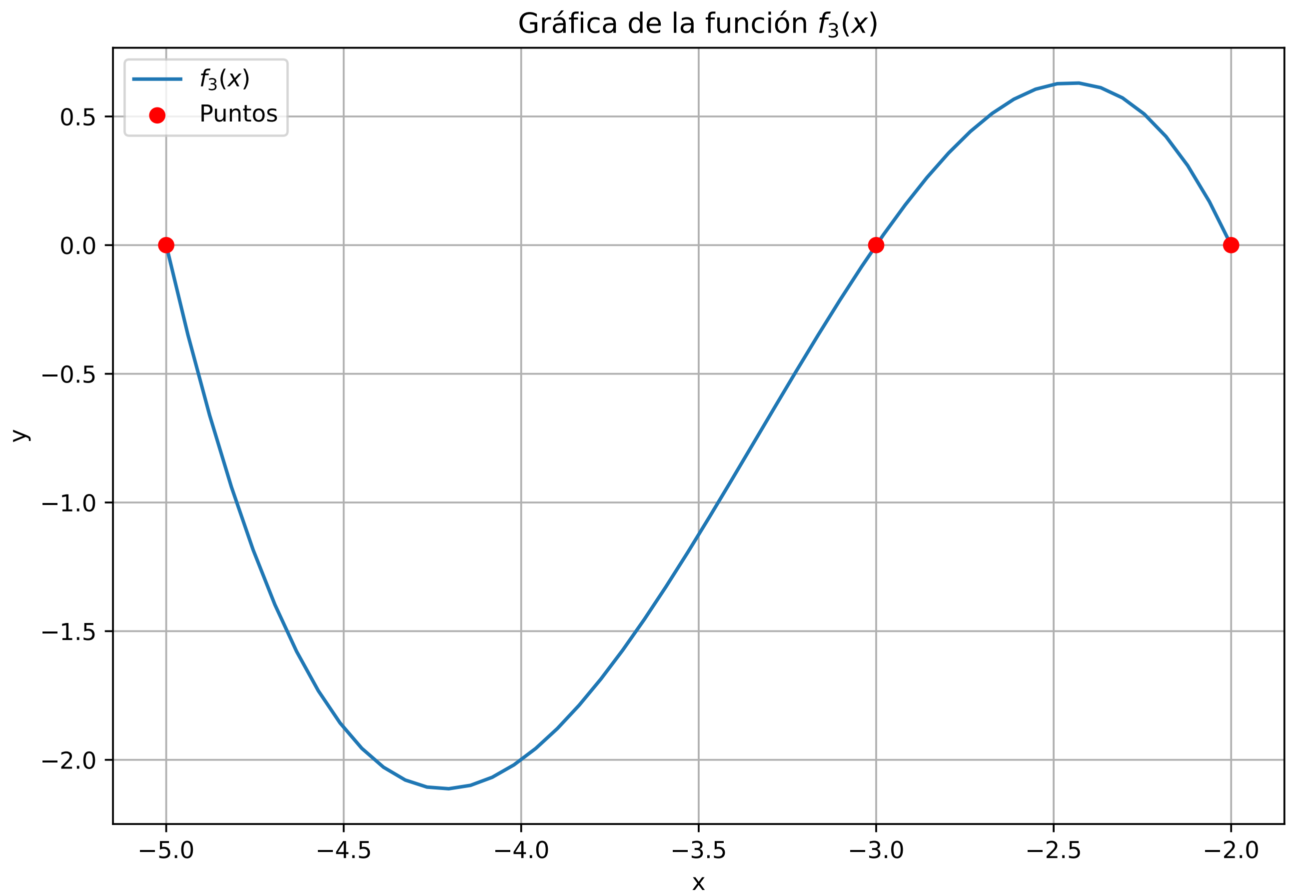


Figura 5.6: Gráfica de la Función Cúbica

4. **Función Polinómica**

   Una función polinómica con cortes en $x = -\mathbf{2}$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ **y** $x = 7$ tiene la forma

$$\begin{aligned} P_5(x) &= (x - (-2))(x-2)(x-3)(x-5)(x-7) \\ &= (x+2)(x-2)(x-3)(x-5)(x-7) \end{aligned}$$

   Usar la propiedad distributiva no es muy óptimo entonces vamos a usar **multiplicación sintética**

1	0					
0	2					$x+2$
1	2	0				
0	-2	-4				$x-2$
1	0	-4	0			
0	-3	0	12			$x-3$
1	-3	-4	12	0		
0	-5	15	20	-60		$x-5$
1	-8	11	32	-60	0	
0	-7	56	-77	-224	420	$x-7$
1	-15	67	-45	-284	420	
x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	

Por lo tanto la función polinómica esta dada por

$$P_5(x) = x^5 - 15x^4 + 67x^3 - 45x^2 - 284x + 420$$

Como estamos calculando el cuarto tramo podemos escribir $f_4(x) = P_5(x)$ así tenemos

$$f_4(x) = x^5 - 15x^4 + 67x^3 - 45x^2 - 284x + 420$$

Este resultado lo podemos comprobar en la calculadora TI-Nspire CX CAS II, como se puede observar en la siguiente figura

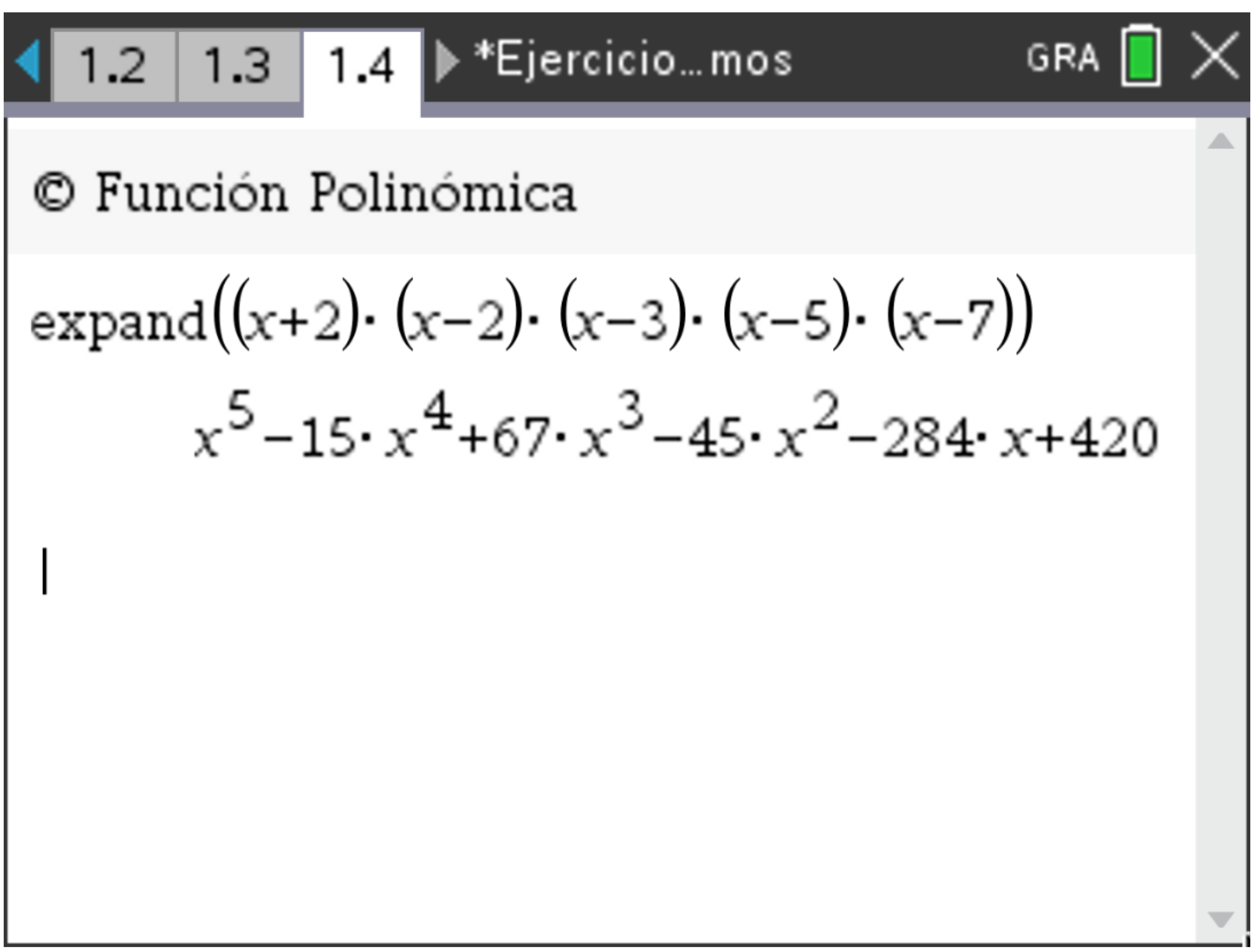


Figura 5.7: Comprobando el resultado de la Función Polinómica

A continuación tenemos la gráfica de la función cúbica desarrollada en Google Colab

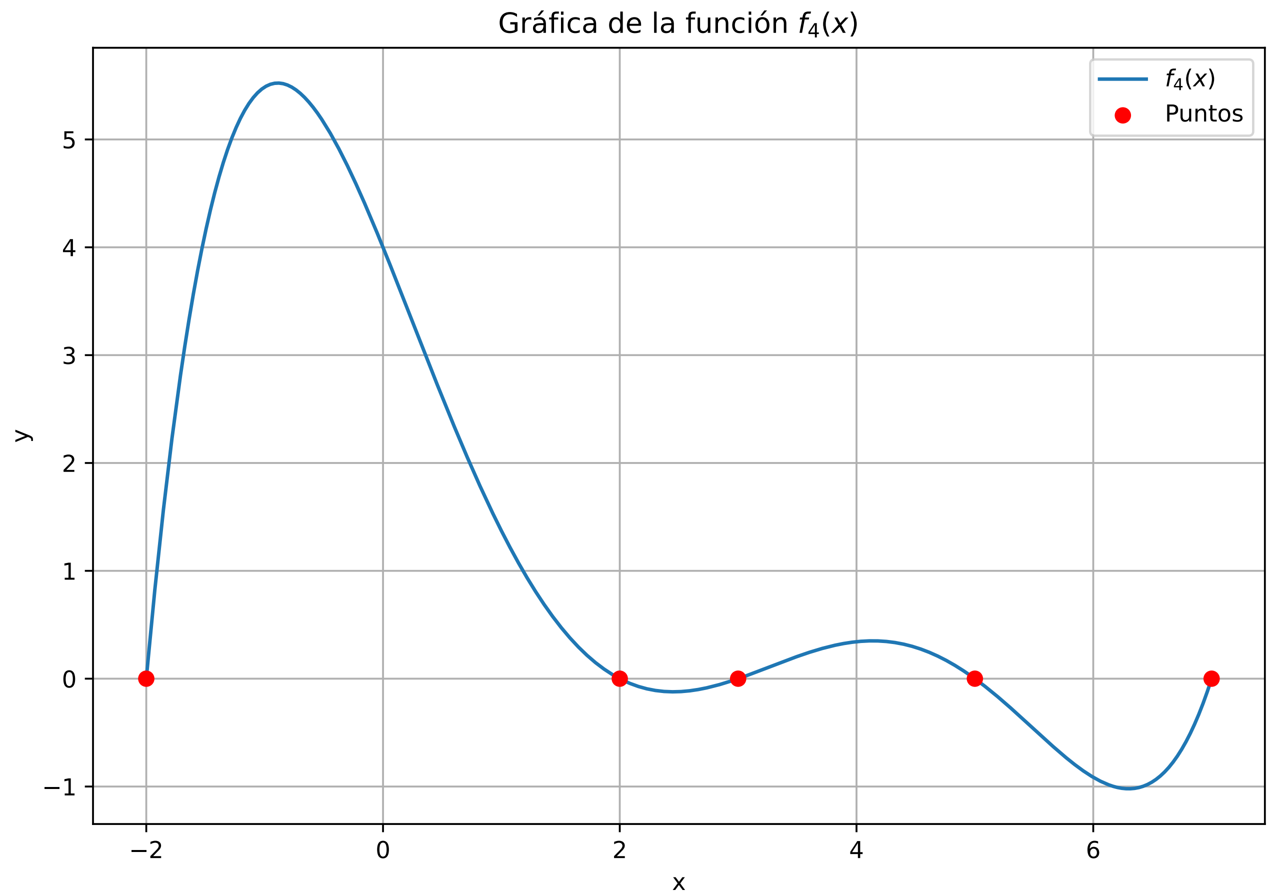


Figura 5.8: Gráfica de la función polinómica

5. **Función a tramos**

Finalmente la función a tramos esta definida por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \textbf{si } x < -7 \\ f_2(x) & \textbf{si } -7 \leq x < -5 \\ f_3(x) & \textbf{si } -5 \leq x < -2 \\ f_4(x) & \textbf{si } x \geq -2 \end{cases}$$

así tenemos la siguiente función a tramos

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{7}{4}x - \frac{49}{4} & \textbf{si } x < -7 \\ x^2 + 12x + 35 & \textbf{si } -7 \leq x < -5 \\ -x^3 - 10x^2 - 31x - 30 & \textbf{si } -5 \leq x < -2 \\ x^5 - 15x^4 + 67x^3 - 45x^2 - 284x + 420 & \textbf{si } x \geq -2 \end{cases}$$

La gráfica de la función a tramos se muestra en la siguiente figura:

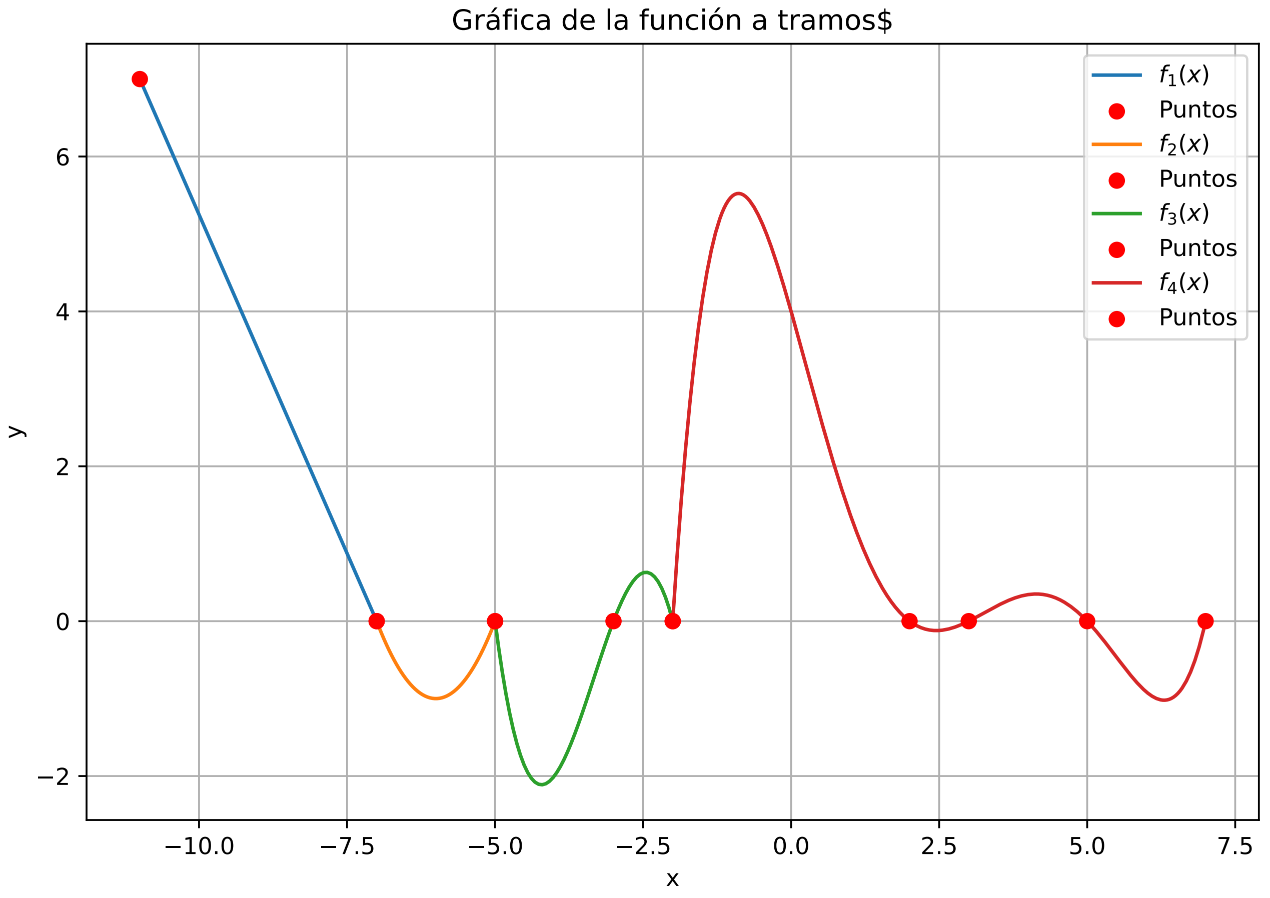


Figura 5.9: Gráfica de la función a tramos

Unidad 6
Funciones Racionales

Las funciones racionales tienen la siguiente forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

para esta definición vamos a considerar que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, con $q(x) \neq 0$. La función $p(x)$ polinómica nos genera los puntos de corte con el eje x y la función $q(x)$ polinómica nos genera las asíntotas verticales. Posteriormente el cociente entre las dos nos puede mostrar asíntotas oblicuas incluso funcionales.

Ejercicio 2:

Modelar una función racional que tiene cortes en $x = -2$ y $x = 5$, asíntotas verticales en $x = -5$, $x = -3$ y $x = 6$

Solución

Empezamos modelando la función $p(x)$ que tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - (-2))(x - 5) \\ &= (x + 2)(x - 5) \\ &= x^2 - 5x + 2x - 10 \\ &= x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

Luego modelamos la función $q(x)$ que tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} q(x) &= (x - (-5))(x - (-3))(x - 6) \\ &= (x + 5)(x + 3)(x - 6) \end{aligned}$$

aplicamos el algoritmo de multiplicación sintética

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & & & \\
0 & 5 & & & x+5 \\
\hline
1 & 5 & 0 & & \\
0 & 3 & 15 & & x+3 \\
\hline
1 & 8 & 15 & 0 & \\
0 & -6 & -48 & -90 & x-6 \\
\hline
1 & 2 & -33 & -90 &
\end{array}
$$

Por lo tanto la función cúbica tiene la forma

$$q\left(x\right)=x^3+2x^2-33x-90$$

Luego la función racional se define como

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)} \\
&= \frac{x^2-3x-10}{x^3+2x^2-33x-90}
\end{aligned}
$$

Gráfica de la Función

Para graficar la función usamos Google Colab, tal como se muestra en el siguiente código, lo podemos obtener de la siguiente URL: `https://colab.research.google.com/drive/1kUZaYQiltc6HKJj5y7XUZU09EJozVE6j?usp=sharing`

La gráfica de la función la podemos observar en la siguiente figura:

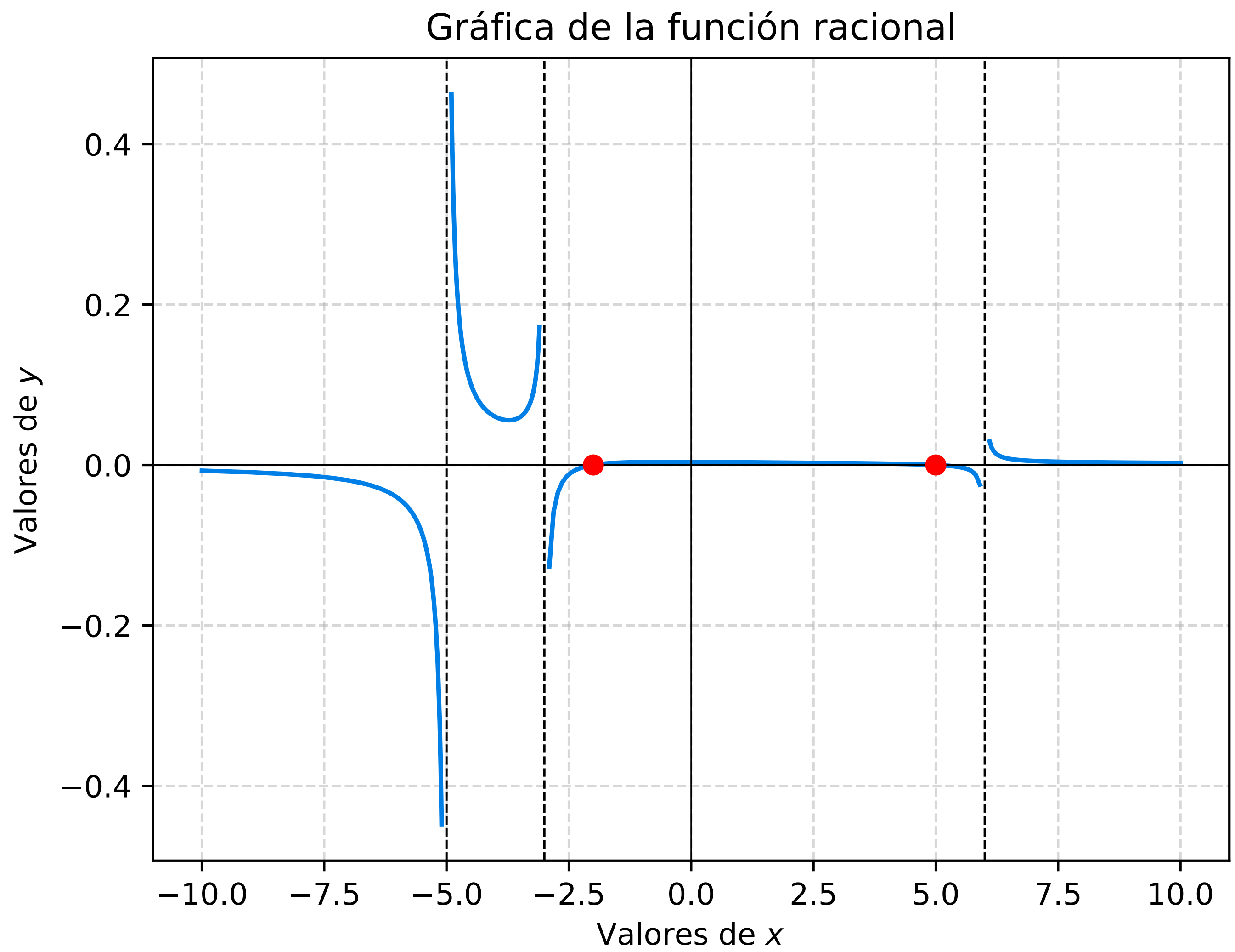


Figura 6.1: Gráfica de la Función Racional

Ejercicio 3:

Modelar una función racional que tiene cortes en $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$ y asíntotas en $x = -2$ y $x = 2$

Solución

La función del numerador de la función racional esta dada por

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x = -3)(x = -1)(x = 1)(x = 3) \\
&= (x - (-3))(x - (-1))(x - 1)(x - 3) \\
&= (x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 3)
\end{aligned}
$$

podemos observar que tenemos dos pares de diferencias al cuadrado

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1) \\
&= \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right) \\
&= x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 \\
&= x^4 - 10x^2 + 9
\end{aligned}
$$

y la función del denominador tiene la forma

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-(-2))(x-2) \\ &= (x+2)(x-2) \end{aligned}$$

también tenemos una diferencia de cuadrados, entonces

$$q(x) = x^2 - 4$$

Así la función racional esta dada por

$$f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4}$$

Hagamos una división de las funciones

$$\begin{array}{c|l} x^4 - 10x^2 + 9 & x^2 - 4 \\ -x^4 + 4x^2 & x^2 - 6 \\ \hline -6x^2 + 9 & \\ 6x^2 - 24 & \\ \hline -15 & \end{array}$$

Por lo tanto la función racional se puede reescribir como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4} \\ &= x^2 - 6 - \frac{15}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

De aquí observamos una “asíntota funcional” que es $a(x) = x^2 - 6$ que podemos observar en la gráfica de la función racional de color **rosa**. La gráfica de la función la podemos ver en la figura siguiente:

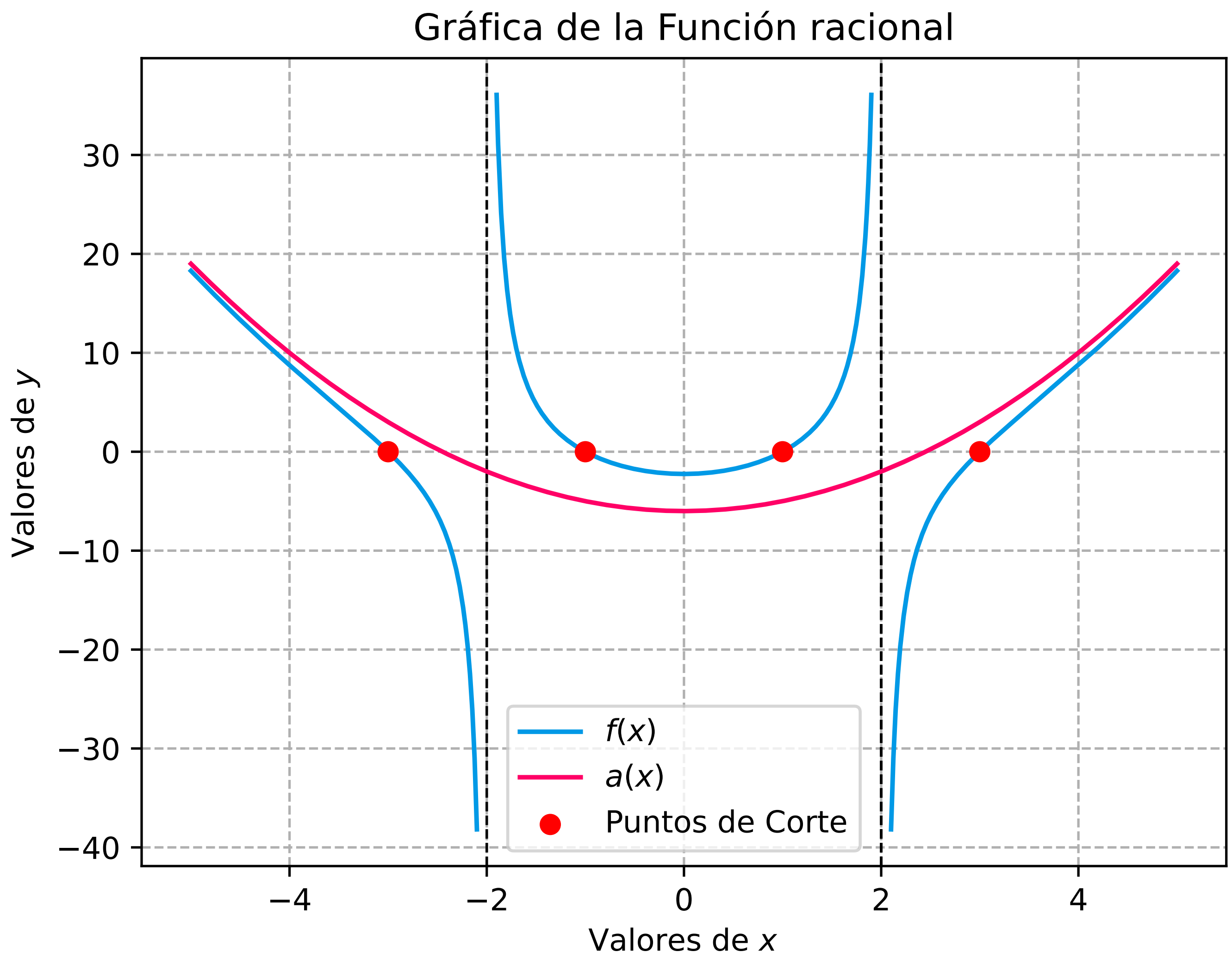


Figura 6.2: Gráfica de la Función Racional $f\left(x\right)=\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-4}$

Ejercicio 4:

Modelar una función racional que tiene cortes en $x=2$, $x=3$, $x=5$, $x=7$ y $x=11$ y asíntotas en $x=1$ y $x=12$

Solución

La función del numerador esta dada por

$$\begin{aligned} p\left(x\right) &= \left(x=2\right)\left(x=3\right)\left(x=5\right)\left(x=7\right)\left(x=11\right) \\ &= \left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)\left(x-7\right)\left(x-11\right) \end{aligned}$$

Para calcular la función polinómica vamos a usar el algoritmo de la multiplicación sintética, así tenemos

1						$x-2$
	-2					
1	-2					$x-3$
	-3	6				
1	-5	6				$x-5$
	-5	25	-30			
1	-10	31	-30			$x-7$
	-7	70	-217	210		
1	-17	101	-247	210		$x-11$
	-11	187	-1111	2717	-2310	
1	-28	288	-1358	2927	-2310	

Por lo tanto la función del numerador esta dada por

$$p\left(x\right) = x^5 - 28x^4 + 288x^3 - 1358x^2 + 2927x - 2310$$

Este resultado lo podemos comprobar en la calculadora TI-Nspire CX CAS II, como se observa en la figura siguiente:

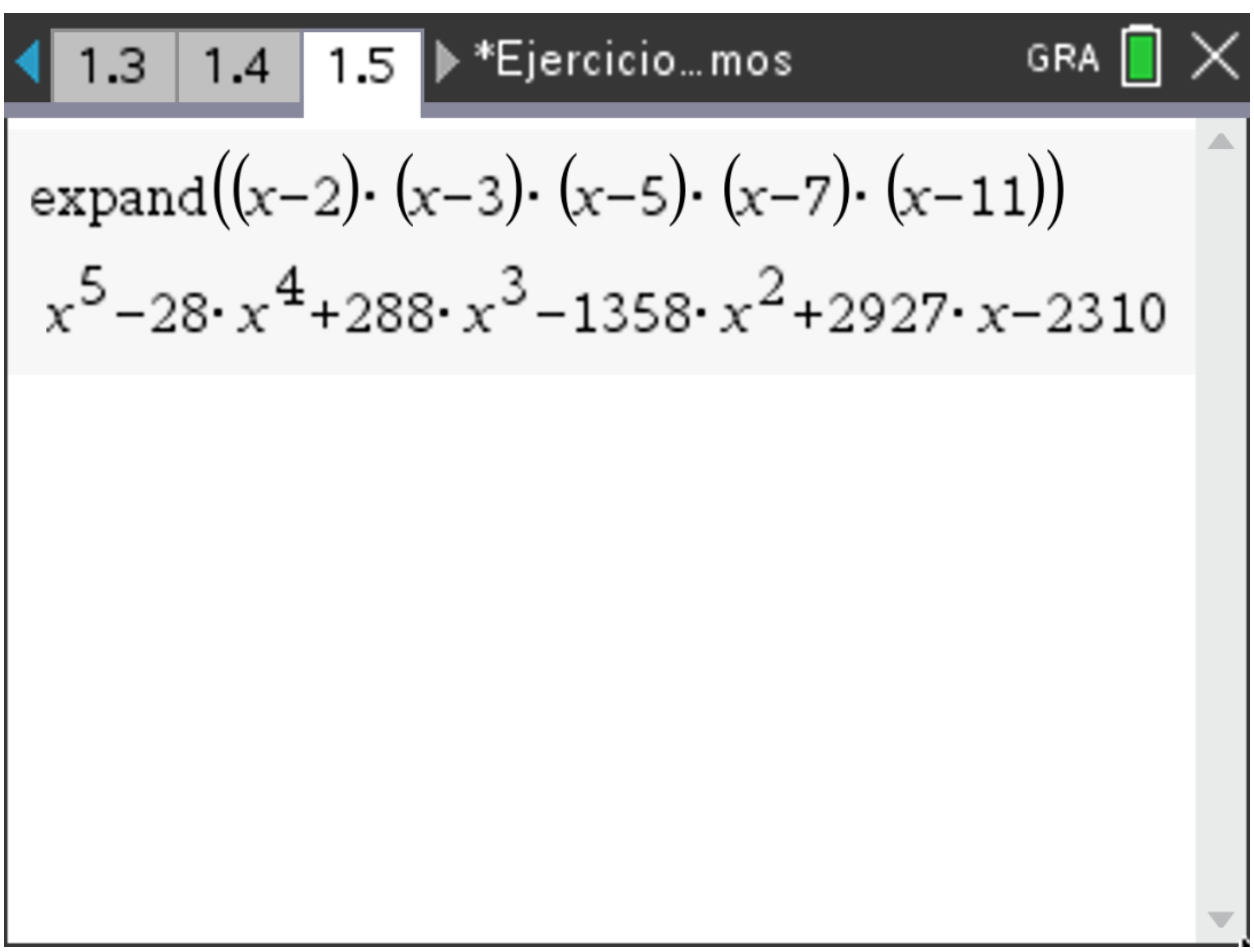


Figura 6.3: Comprobando resultados

La función del denominador esta dada por

$$\begin{aligned} q\left(x\right) &= \left(x = 1\right)\left(x = 12\right) \\ &= \left(x - 1\right)\left(x - 12\right) \\ &= x^2 - 12x - x + 12 \\ &= x^2 - 13x + 12 \end{aligned}$$

Así la función racional esta dada por

$$f\left(x\right) = \frac{x^5 - 28x^4 + 288x^3 - 1358x^2 + 2927x - 2310}{x^2 - 13x + 12}$$

Si hacemos una división de polinomios encontramos la asíntota funcional, así,

$$\begin{array}{c|c} x^5 - 28x^4 + 288x^3 - 1358x^2 + 2927x - 2310 & x^2 - 13x + 12 \\ -x^5 + 13x^4 - 12x^3 & x^3 - 15x^2 + 81x - 125 \\ \hline -15x^4 + 276x^3 - 1358x^2 + 2927x - 2310 & \\ 15x^4 - 195x^3 + 180x^2 & \\ \cline{1-1} 81x^3 - 1178x^2 + 2927x - 2310 & \\ -81x^3 + 1053x^2 - 972x & \\ \cline{1-1} -125x^2 + 1955x - 2310 & \\ 125x^2 - 1625x + 1500 & \\ \cline{1-1} 330x - 800 & \end{array}$$

Por lo tanto la función racional se puede expresar como

$$f\left(x\right) = x^3 - 15x^2 + 81x - 125 + \frac{330x - 800}{x^2 - 13x + 12}$$

De donde obtenemos que la asíntota funcional esta dada por

$$a\left(x\right) = x^3 - 15x^2 + 81x - 125$$

A continuación se da la URL `https://colab.research.google.com/drive/1A0Cr5WTUSqK7SZRAFOPc4Gx1gbu2d2iO?usp=sharing` para ver el código que realizar la gráfica de esta función en Google Colab, y la gráfica en la figura siguiente:

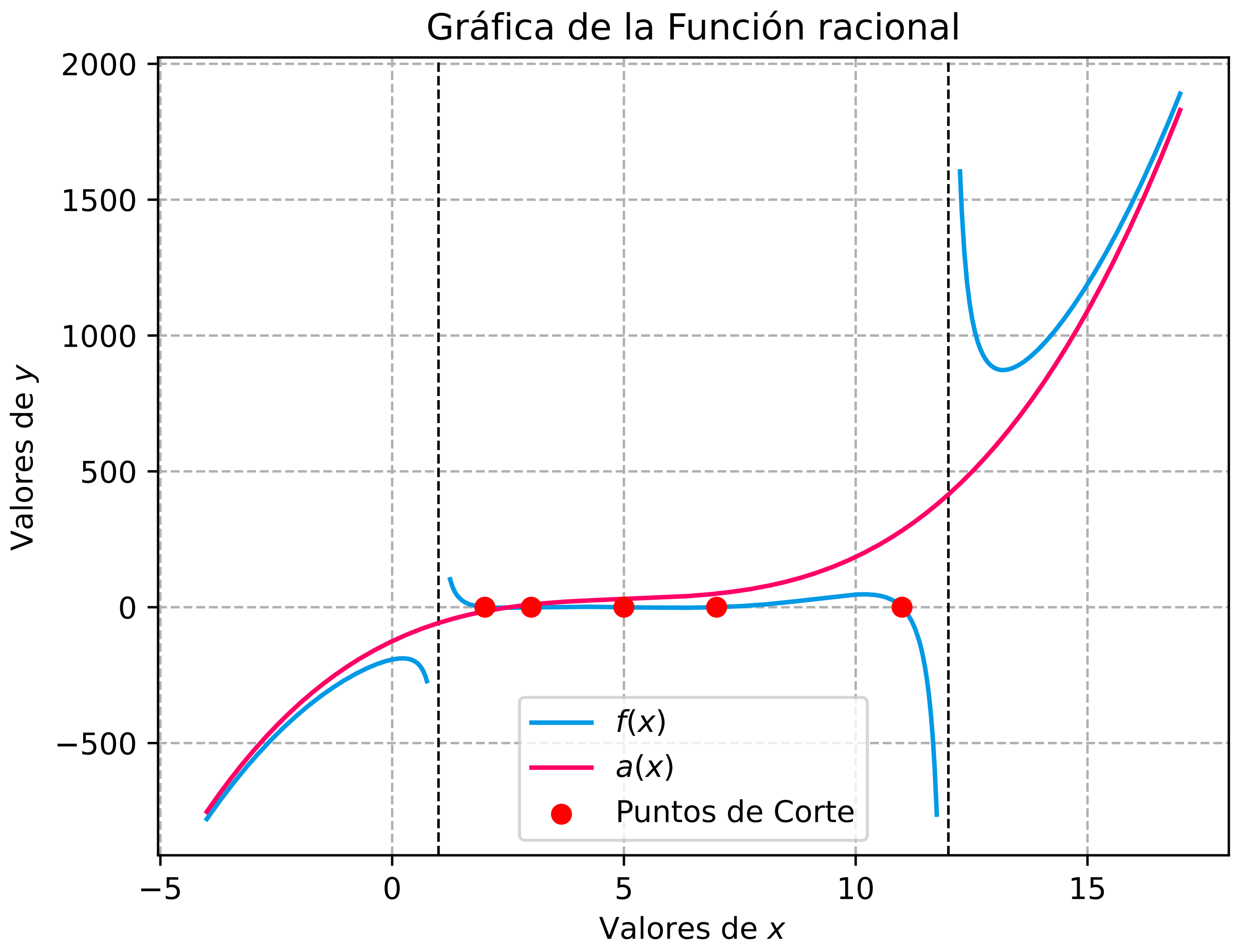


Figura 6.4: Gráfica de la Función Racional