0.0.0.1 Salto de un Insecto

Consideremos que el salto de un insecto tiene forma parábola. El salto inicial se da en un valor de $x = x_0$ y la caída se da en $x = x_f$. A continuación se da un ejemplo particular y posteriormente se crea una generalización al problema.

Ejemplo 1:

Supongamos un insecto se encuentra en la posición $x = 1$ cm y salta 35 cm, llegando a $x = 36$ cm. Modelar una función cuadrática que muestre el salto de la insecto.

Para resolver este problema necesitamos usar los **productos notables**. Veamos, si tenemos

$$(x-a)(x-b)$$

lo puedo resolver usando la propiedad distributiva

$$x^2 - bx - ax + ab$$

Así, para resolver nuestro problema debemos considerar la siguiente función

$$I(x) = -(x = 1)(x = 36)$$

para resolver, debo considerar el producto de los binomios (transponiendo cada raíz al lado de las x), entonces

$$\begin{aligned} I(x) &= -(x-1)(x-36) \\ &= -\left(x^2 - 36x - 1x + 36\right) \\ &= -\left(x^2 - 37x + 36\right) \\ &= -x^2 + 37x - 36 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función que modela el salto del insecto es

$$I(x) = -x^2 + 37x - 36$$

Veamos su gráfica

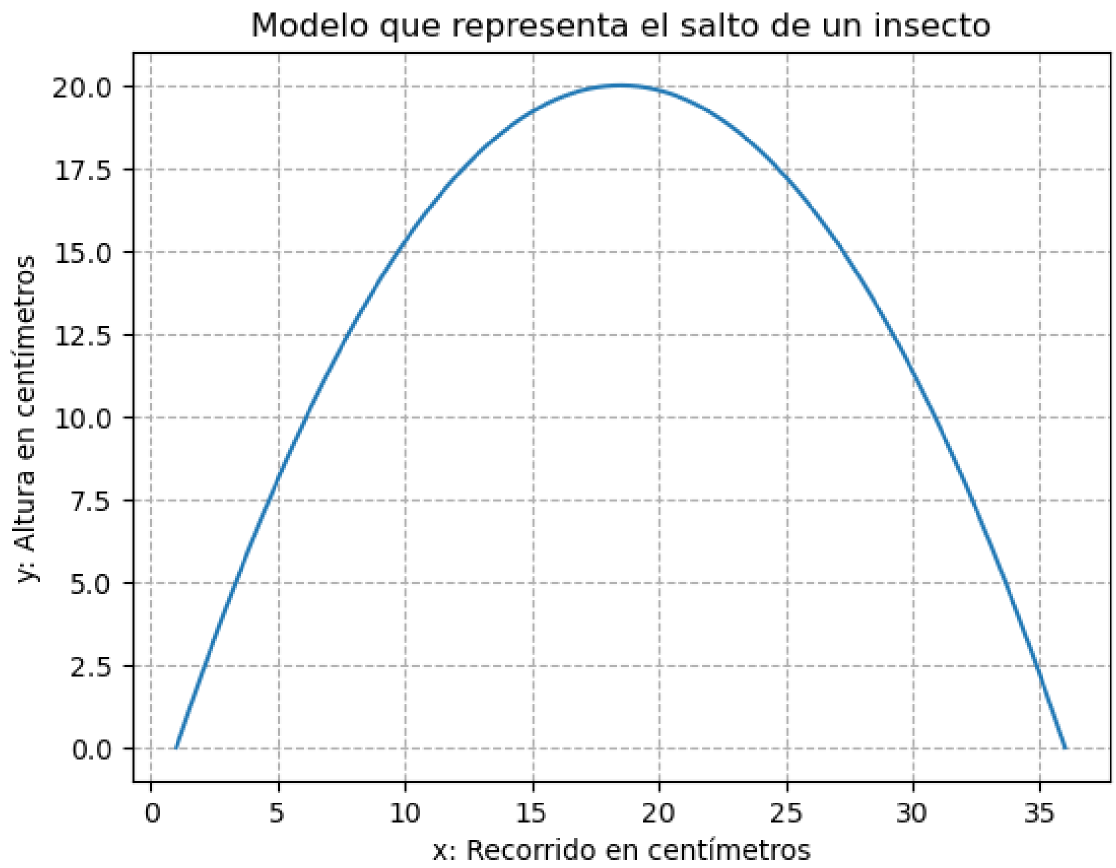

Figura 1: Gráfica de la Función Cuadrática

Observemos que el punto máximo sube hasta mas de 300, caso que en el fenómeno no se da.

Para resolver este problema vamos a calcular exactamente el valor del vértice de la parábola, para ello contamos con la fórmula

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

donde a es el coeficiente de la variable cuadrática y b el coeficiente de la variable lineal. En el ejemplo que tenemos la función esta dada por

$$I(x) = -x^2 + 37x - 36$$

entonces $a = -1$ y $b = 37$ así la **abscisa** del vértice esta dada por

$$\text{absc}(V) = -\frac{37}{2(-1)} = \frac{37}{2} = 18.5$$

luego para encontrar la **ordenada** del vértice hacemos

$$\begin{aligned} \text{ord}(V) &= I(18.5) \\ &= -(18.5)^2 + 37(18.5) - 36 \\ &= 306.25 \end{aligned}$$

Estos cálculos se verifican mediante la calculadora científica

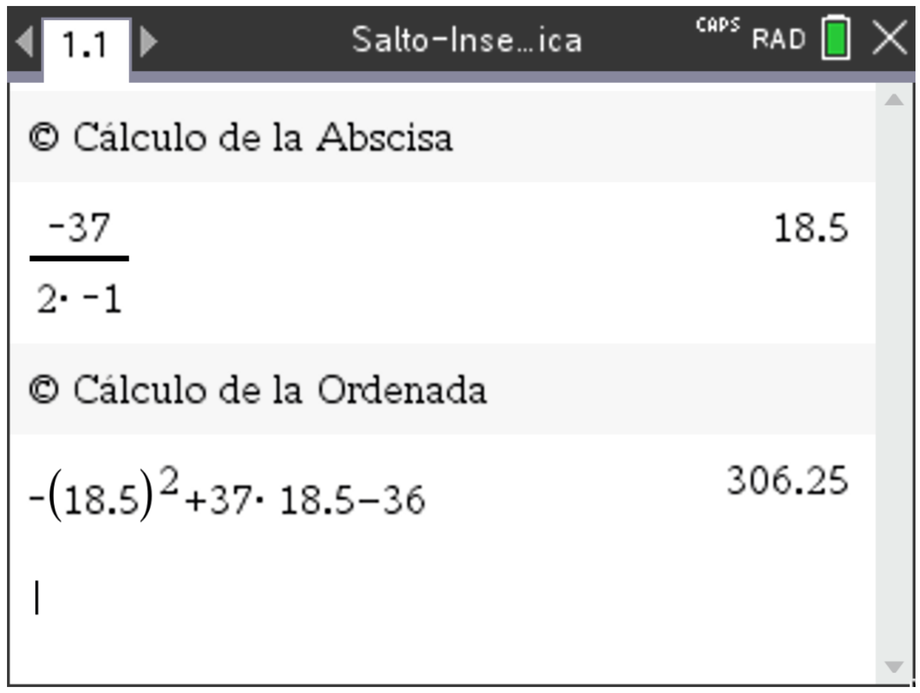

Figura 2: Cálculo del vértice de la función cuadrática

Observemos que la altura a la que puede llegar el insecto es de 306.25 centímetros, pero esto no es verdad. El fenómeno establece que por ejemplo puede llegar a los 20 centímetros, por tal razón hagamos una regla de tres simple directa.

Si 306.25 centímetros corresponden a 20 centímetros a cuanto equivale una unidad (1 centímetro) mediante esta regla, así hacemos

$$\frac{306.25 \text{ cm}}{R} = \frac{20 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$$

De esta regla de tres despejamos a R, así

$$\begin{aligned} 20R &= 306.25 \\ R &= \frac{306.25}{20} = 15.3125 \end{aligned}$$

de tal forma que si quiero reescalar toda la función cuadrática para que el salto máximo sea de 20 centímetros debo multiplicar a la función por $\frac{1}{15.3125}$, veamos

$$I(x) = \frac{1}{15.3125}\left(-x^2 + 37x - 36\right)$$

Ahora cuando graficamos de nuevo la función veremos hasta donde llegará el punto máximo.

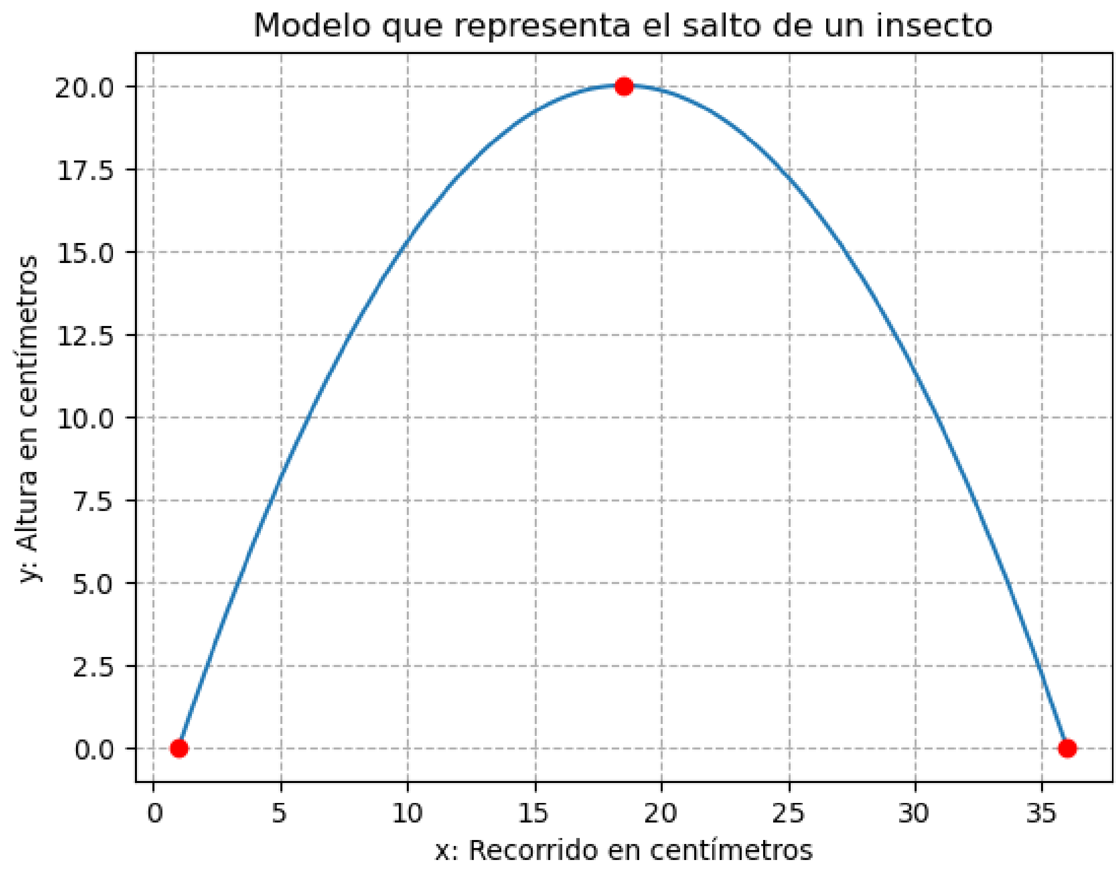

Figura 3: Gráfica de la función reescalada

Dominio y Rango

En esta función particular, como estamos hablando de un proceso biológico, la función no tomará todos los valores de números reales, basta con observar la gráfica y darse cuenta que el dominio de la función estada dado por

$$\text{Dom}\,(I) : \forall x \in [1, 36]$$

y el rango se refiere a todos los valores que puede tomar en y esto es,

$$\text{Rng}\,(I) : \forall y \in [0, 20]$$

Evaluar la Función

Como ya contamos con un modelo para este ejemplo particular, podemos realizar algunos cálculos para determinar la altura del insecto cuando se encuentra por ejemplo en la posición $x = 10$ cm o .

❍ Evaluación de la función para $x = 10$ cm

$$\begin{aligned} I\,(10) &= \frac{1}{15.3125}\left(-\,(10)^2 + 37\,(10) - 35\right) \\ &\approx 15.281 \text{ cm} \end{aligned}$$

❍ Evaluación de la función para $x = 29$ cm

$$I\left(29\right) = \frac{1}{15.3125}\left(-\left(29\right)^2 + 37\left(29\right) - 35\right)$$
$$\approx 12.8 \text{ cm}$$

Los resultados se apoyaron usando la calculadora científica (TI-Nspire CX II)

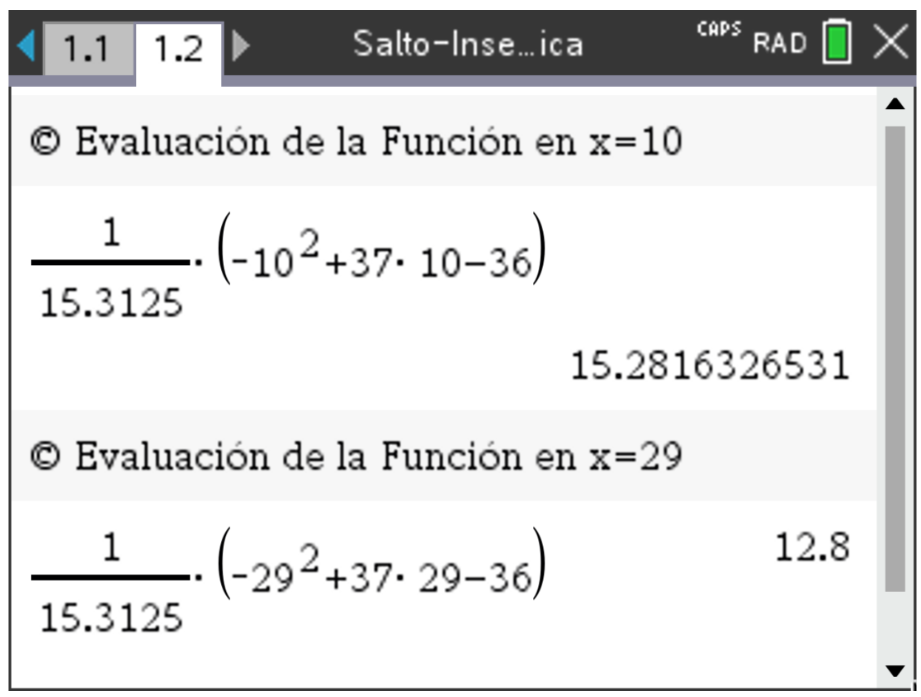

Figura 4: Resultados de la calculadora