Clase 5

Aplicaciones de los Números Reales

En éste capítulo realizaremos un estudio de los conjuntos numéricos, desde los naturales hasta los reales, veremos como a través de estos conjuntos se pueden desarrollar algunas aplicaciones, tales como, solución de ecuaciones lineales, cálculo de desigualdades, cálculo de intervalos, cálculo del valor absoluto y solución de sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones por dos incógnitas.

5.1 Valor absoluto y sus propiedades

El valor absoluto de un número real, denotado por $|x|$, representa su magnitud o distancia desde cero en la recta numérica, sin importar su signo (positivo o negativo).

Formalmente, se define de la siguiente manera:

- Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$
- Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$

En palabras simples:

- El valor absoluto de un número positivo es el mismo número.
- El valor absoluto de un número negativo es el mismo número pero sin el signo negativo.
- El valor absoluto de cero es cero.

Ejemplos:

- $|5| = 5$
- $|-3| = 3$

- $|0| = 0$

Propiedades importantes del valor absoluto:

- $|x| \geq 0$ para cualquier número real x
- $|x| = |-x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)

Aplicaciones del valor absoluto:

El valor absoluto se utiliza en diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas, como:

- **Geometría:** Para calcular distancias entre puntos en la recta numérica o en el plano cartesiano
- **Álgebra:** Para resolver ecuaciones e inecuaciones que involucran valores absolutos
- **Cálculo:** Para definir límites y estudiar la continuidad de funciones
- **Física:** Para representar magnitudes que solo tienen sentido en términos de su magnitud, como la velocidad o la fuerza

Ejemplo 1:

Resuelve la siguiente inecuación $|x+2| \geq 5$

Debemos aplicar la definición de valor absoluto y después resolver las inecuaciones resultantes

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \textbf{si } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \textbf{si } x+2 < 0 \end{cases}$$

el problema se transforma en

$$|x+2| \geq 5 \Rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 5 & \textbf{si } x \geq -2 \\ \cup & \\ -x-2 \geq 5 & \textbf{si } x < -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 & \textbf{si } x \geq -2 \\ \cup & \\ x \leq -7 & \textbf{si } x \leq -2 \end{cases}$$

como se deben verificar las dos inecuaciones, la solución será

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3 \cup x \leq -7\} \\ &= (-\infty, -7] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

5.1.1 Taller de la Sección

1. Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto

   a) $\left|x + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}$
   b) $\left|2x - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{9}$
   c) $\left|5x + \frac{7}{4}\right| > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
   d) $\left|2x + \frac{3}{5}\right| \geq \sqrt{\frac{7}{11}}$
   e) $\left|5 + x^{-1}\right| < 1$
   f) $\left|\frac{2}{x} - 3\right| < 5$
   g) $|x - 5| < x + 1$
   h) $\left|x^2 - 2\right| \leq 1$
   i) $\left|\frac{2x-1}{x}\right| > 2$