Clase 3

Aplicaciones de los Números Reales

En éste capítulo realizaremos un estudio de los conjuntos numéricos, desde los naturales hasta los reales, veremos como a través de estos conjuntos se pueden desarrollar algunas aplicaciones, tales como, solución de ecuaciones lineales, cálculo de desigualdades, cálculo de intervalos, cálculo del valor absoluto y solución de sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones por dos incógnitas.

3.1 Desigualdades y sus propiedades

En matemáticas, una desigualdad es una expresión que establece una relación de orden entre dos cantidades o expresiones. A diferencia de una ecuación, que indica que dos expresiones son iguales, una desigualdad indica que una expresión es mayor que, menor que, mayor o igual que, o menor o igual que otra expresión.

Símbolos utilizados en desigualdades:

- $>$: Mayor que
- $<$: Menor que
- $\geq$: Mayor o igual que
- $\leq$: Menor o igual que

Ejemplos de desigualdades:

- $x > 3$ (x es mayor que 3)
- $y \leq -2$ (y es menor o igual que -2)
- $2a + 5 < b - 1$ (La expresión $2a + 5$ es menor que la expresión $b - 1$)

Aplicaciones de las desigualdades:

Las desigualdades son fundamentales en muchas áreas de las matemáticas y tienen aplicaciones en diversos campos, como:

- **Álgebra:** Para resolver problemas de optimización, encontrar rangos de valores posibles para variables, y representar gráficamente soluciones de desigualdades en el plano cartesiano.
- **Cálculo:** Para definir intervalos, estudiar el comportamiento de funciones, y analizar límites.
- **Estadística:** Para establecer intervalos de confianza y realizar pruebas de hipótesis.
- **Economía:** Para modelar restricciones presupuestarias, analizar la distribución de ingresos, y estudiar la oferta y la demanda.
- **Física:** Para describir relaciones entre magnitudes físicas, como velocidad, aceleración, y energía.
- **Ecología:**
  - Competencia entre especies: Las desigualdades se utilizan para modelar la competencia entre diferentes especies por recursos limitados, como alimento, agua o territorio. Estas desigualdades pueden ayudar a predecir qué especies tendrán más éxito en un ecosistema dado.
  - Dinámica de poblaciones: Las desigualdades también se utilizan para estudiar cómo cambian las poblaciones de diferentes especies a lo largo del tiempo. Por ejemplo, se pueden utilizar desigualdades para modelar el crecimiento de una población en función de la disponibilidad de recursos y la competencia con otras especies.
  - Distribución de especies: Las desigualdades se pueden utilizar para analizar cómo se distribuyen las diferentes especies en un hábitat. Por ejemplo, se pueden utilizar desigualdades para modelar cómo la temperatura, la humedad y otros factores ambientales influyen en la distribución de las especies.
- **Evolución:**

- **Selección natural:** Las desigualdades se utilizan para modelar cómo la selección natural actúa sobre las poblaciones. Por ejemplo, se pueden utilizar desigualdades para modelar cómo la supervivencia y la reproducción de diferentes genotipos dependen de su adaptación al medio ambiente.
- **Deriva genética:** Las desigualdades también se utilizan para estudiar cómo la deriva genética puede cambiar las frecuencias de los genes en una población a lo largo del tiempo. La deriva genética es un proceso aleatorio que puede causar que algunos genes se vuelvan más comunes que otros, incluso si no son beneficiosos.
- **Filogenia:** Las desigualdades se pueden utilizar para construir árboles filogenéticos, que muestran las relaciones evolutivas entre diferentes especies. Estos árboles se basan en datos genéticos y morfológicos, y las desigualdades se utilizan para analizar cómo estos datos apoyan diferentes posibles relaciones evolutivas.

Propiedades de las desigualdades

1. Si a los dos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.

$$\begin{gathered} 5 > 3 \\ 5+6?3+6 \\ 11 > 9 \end{gathered}$$

2. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía

$$\begin{gathered} 7 > 5 \\ 7 \cdot 3?5 \cdot 3 \\ 21 > 15 \end{gathered}$$

3. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad varía.

$$\begin{gathered} 8 < 12 \\ 8\,(-2)?12\,(-2) \\ -16 > -24 \end{gathered}$$

4. Si se cambia el orden de los miembros, la desigualdad cambia de signo.

$$7 < 11$$
$$11 > 7$$

5. Si se invierten los dos miembros, la desigualdad cambia de signo, es decir si $a > b$ entonces

$$23 > 17$$
$$\frac{1}{23} ? \frac{1}{17}$$
$$0.04347 < 0.05882$$

6. Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualdad no cambia.

$$11 > 7$$
$$(11)^2 ? (7)^2$$
$$121 > 49$$

7. Si los dos miembros o uno de ellos es negativo y se elevan a una potencia impar positiva, el signo de la desigualdad no cambia.

$$7 > -5$$
$$(7)^3 ? (-5)^3$$
$$343 > -125$$

8. Si los dos miembros son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad cambia.

$$-7 < -2$$
$$(-7)^2 ? (-2)^2$$
$$49 > 4$$

9. Si un miembro es positivo y otro negativo y ambos se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad puede cambiar.

$$8 > -6$$
$$(8)^2 ? (-6)^2$$
$$64 > 36$$

otro ejemplo,

$$\begin{aligned} 4 &> -8 \\ (4)^2 &? \, (-8)^2 \\ 16 &< 64 \end{aligned}$$

10. Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les extrae una misma raíz positiva, el signo de la desigualdad no cambia

$$\begin{aligned} 16 &< 25 \\ \sqrt{16} &? \sqrt{25} \\ 4 &< 5 \end{aligned}$$

11. Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro a miembro, resulta una desigualdad del mismo signo,

$$\begin{aligned} 7 &> 5 \\ 3 &> 2 \end{aligned}$$

al sumarlas

$$10 > 7$$

o al multiplicarlas

$$21 > 10$$

12. Si dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro a miembro, el resultado no es necesariamente del mismo signo, pudiendo ser una igualdad, así

$$10 > 8 \text{ y } 5 > 2$$

restando miembro a miembro

$$\begin{aligned} 10 - 5 &? 8 - 2 \\ 5 &< 6 \end{aligned}$$

si dividimos miembro a miembro las desigualdades

$$10 > 8 \text{ y } 5 > 4$$

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} &? \frac{8}{4} \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1:

Hallar el límite de x en las siguiente inecuación $x - 5 < 2x - 6$

Solución

$$\begin{aligned} x - 5 &< 2x - 6 \\ x - 2x &< -6 + 5 \\ -x &< -1 \end{aligned}$$

multiplicamos la expresión por -1 (Esta propiedad hace que se cambie el sentido de la desigualdad), por lo tanto

$$x > 1$$

esto quiere decir que la inecuación se satisface para valores mayores que 1, veamos, si $x = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 - 5 &< 2(2) - 6 \\ -3 &< 4 - 6 \\ -3 &< -2 \end{aligned}$$

si usamos un valor que no esta dentro del límite, por ejemplo $x = -1$, entonces

$$\begin{aligned} -1 - 5 &< 2(-1) - 6 \\ -6 &< -2 - 6 \\ -6 &< -8 \end{aligned}$$

esta proposición es falsa, por lo tanto el límite es correcto.

3.1.1 Taller de la Sección

Hallar el límite de x en las inecuaciones siguientes

1. $5x - 12 > 3x - 4$
2. $x - 6 > 21 - 8x$
3. $3x - 14 < 7x - 2$
4. $2x - \frac{5}{3} > \frac{x}{3} + 10$
5. $3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2$

6. $(x-1)^2 - 7 > (x-2)^2$
7. $(x+2)(x-1) + 26 < (x+4)(x+5)$
8. $3(x-2) + 2x(x+3) > (2x-1)(x+4)$
9. $6\left(x^2+1\right) - (2x-4)(3x+2) < 3(5x+2)$
10. $(x-4)(x+5) < (x-3)(x-2)$
11. $(2x-3)^2 + 4x^2(x-7) < 4(x-2)^3$
12. $\frac{2x+1}{3x-1} > \frac{2x+5}{3x+2}$
13. $\frac{x+3}{3} - \frac{4}{x+2} > \frac{x}{3}$
14. $\frac{5}{3x+1} - \frac{20}{9x^2-1} < \frac{2}{3x-1}$
15. $\frac{1}{x^2+x} > \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$