Capítulo 3

Resolución de Triángulos

Desde las majestuosas pirámides de Egipto hasta los intrincados cálculos de navegación, los triángulos han sido figuras geométricas fundamentales en la ciencia, la ingeniería y la vida cotidiana. Sin embargo, conocer solo algunos de sus lados y ángulos a menudo nos plantea un enigma: ¿cómo determinar las medidas restantes? En este capítulo desarrollaremos varios ejemplos en diferentes contextos para resolver diversos problemas en los que encontramos triángulos.

Atrás quedarán las limitaciones de la geometría básica, que a menudo requiere información completa sobre lados y ángulos. Aquí, aprenderemos cómo las relaciones fijas entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos agudos -el seno, el coseno y la tangente- nos abren un universo de posibilidades. Descubriremos cómo estas razones nos permiten calcular longitudes de lados desconocidos a partir de ángulos conocidos, y viceversa.

3.1 Razones Trigonométricas

Consideremos el siguiente triángulo

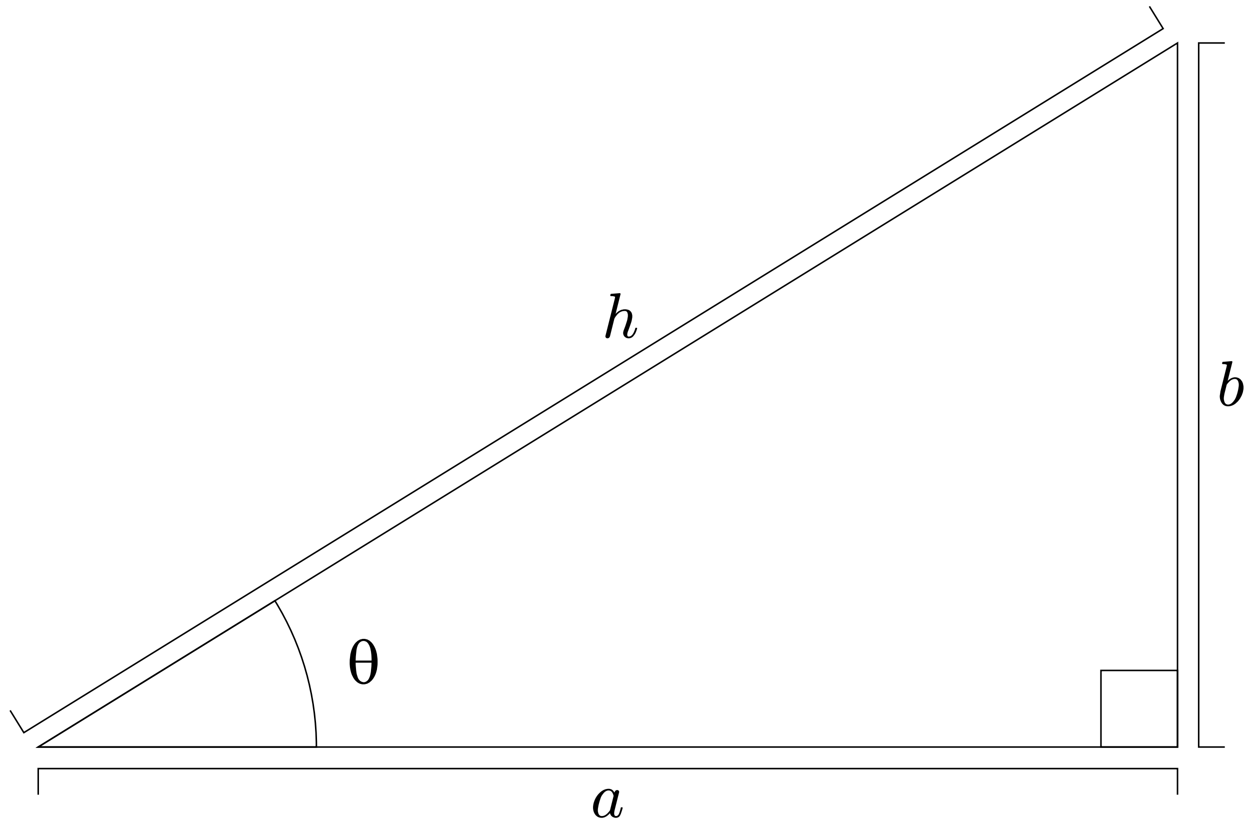

Figura 3.1: Triángulo Rectángulo

Con el ángulo θ se forman las siguientes seis razones trigonométricas:

- $\sin(\theta) = \dfrac{b}{h}$
- $\cos(\theta) = \dfrac{a}{h}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$
- $\cot(\theta) = \dfrac{a}{b}$
- $\sec(\theta) = \dfrac{h}{a}$
- $\csc(\theta) = \dfrac{h}{b}$

Ejemplo 1:

Esteban quiere calcular la altura de un edificio, para ello ha calculado que la distancia desde su casa a la base del edificio es de 50 metros, y el ángulo de elevación es de $25.64°$. Calcular la altura del edificio.

Solución

Al abordar la resolución de triángulos, es fundamental comenzar con un bosquejo para visualizar el problema. La siguiente figura ilustra un ejemplo.

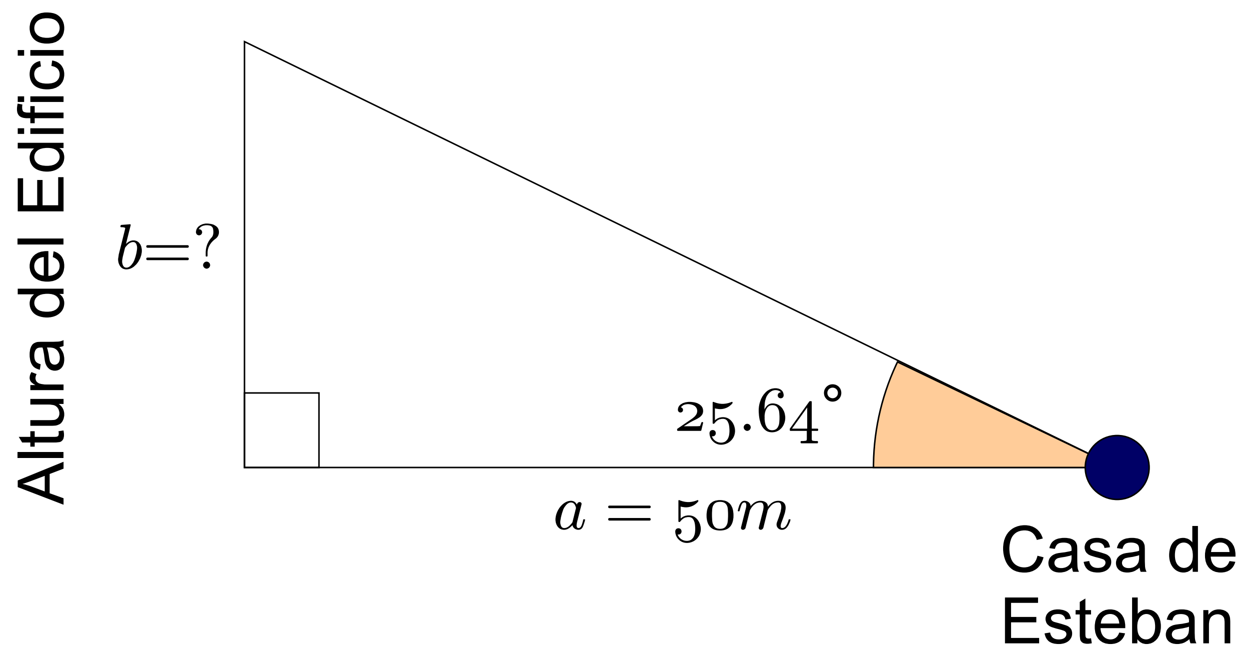

Figura 3.2: Situación Problema

Esto nos sugiere usar la razón trigonométrica tangente, veamos

$$\tan(25.64°) = \frac{b}{50}$$

despejando el lado opuesto tenemos

$$\begin{aligned} b &= 50\tan(25.64°) \\ &= 23.998 \\ &\approx 24m \end{aligned}$$

Respuesta: La altura del edificio que Esteban midió es aproximadamente 24 metros.

Ejemplo 2:

Queremos cruzar un cable en un río. El cable tiene un largo de 15 metros. El cable no se pasa de forma perpendicular al rio, si no formando una diagonal con un ángulo de $20°$. Determine el ancho del rio, considerando que el cable queda tensado en cada orilla del rio.

Solución

Veamos un bosquejo de la situación problema.

Del triángulo podemos observar que la razón trigonométrica que debemos usar es coseno, de tal forma que,

$$\cos(20°) = \frac{a}{15m}$$

entonces multiplicando por 15 tenemos,

$$\begin{aligned} 15\cos(20°) &= a \\ 14.095m &= a \end{aligned}$$

Respuesta: Así el ancho del río es aproximadamente $14.095m$

Ejemplo 3:

Vamos a una salida de campo a las cordilleras del Quindío. Supongamos que salimos en línea recta ascendiendo 1850 metros a un ángulo de $19°$. Calcule el total del recorrido.

Solución

En el siguiente bosquejo podemos observar la situación planteada.

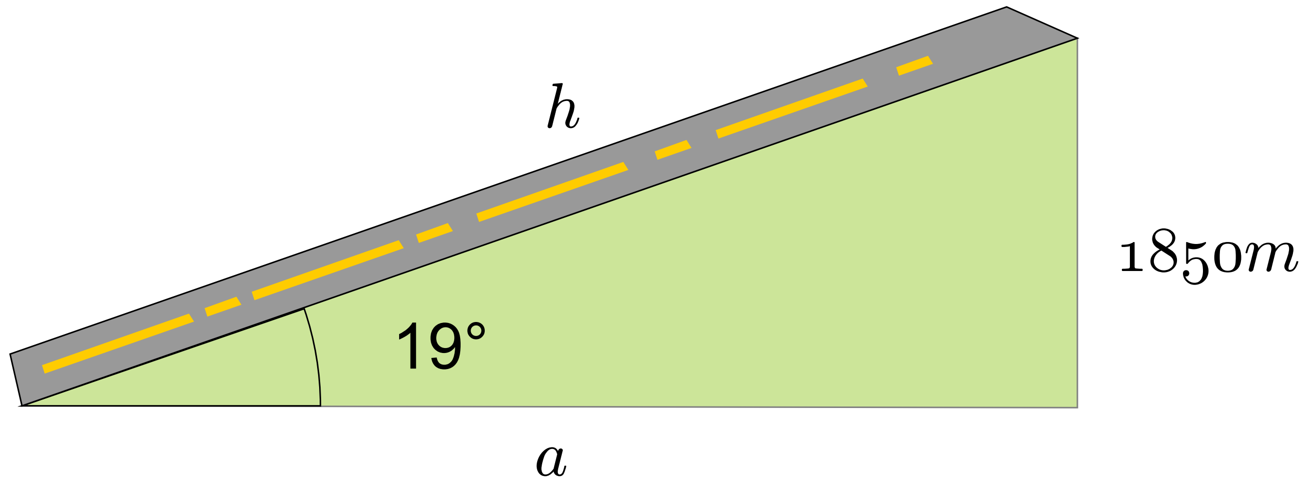

Figura 3.3: Situación Problema

Una razón trigonométrica que nos asocia la situación es seno,

$$\sin(19°) = \frac{1850m}{h}$$

de aquí tenemos que despejar a h, entonces,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1850m}{\sin(19°)} \\ &\approx 5682,37m \end{aligned}$$

Respuesta: El recorrido total de la salida de campo es de 5682.37 metros.

3.2 Relaciones de la Tangente

Consideremos el siguiente triángulo

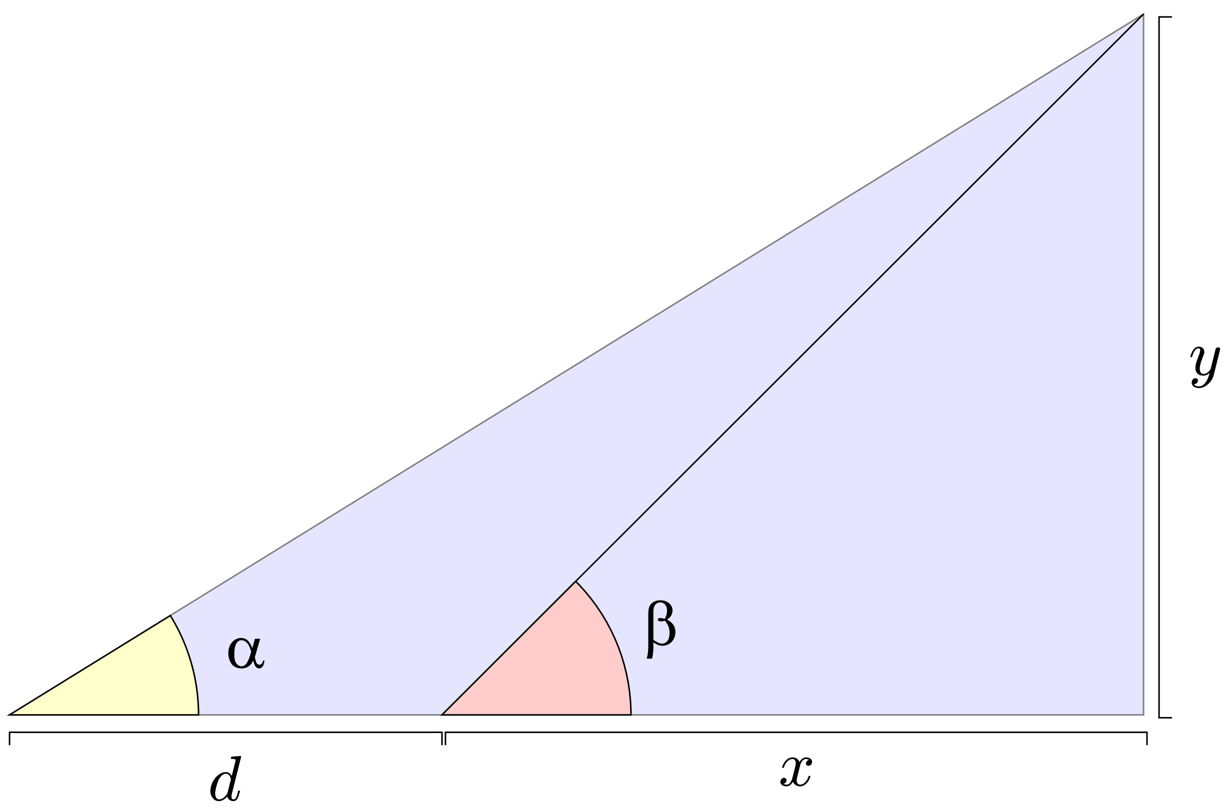

Figura 3.4: Relaciones de la Tangente

Podemos obtener las siguientes relaciones

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{d+x}$$

de la cual despejamos a y, entonces

$$y = (d+x)\tan(\alpha) \tag{3.1}$$

Por otra parte,

$$\tan(\beta) = \frac{y}{x}$$

de la cual despejamos a y, entonces

$$y = x\tan(\beta) \tag{3.2}$$

Como las y son iguales, procedemos a igualar las ecuaciones 3.1 y 3.2,

$$x\tan(\beta) = (d+x)\tan(\alpha)$$

Aplicamos la propiedad distributiva al lado derecho,

$$x\tan(\beta) = d\tan(\alpha) + x\tan(\alpha)$$

Restamos en ambos lados de la ecuación $x\tan(\alpha)$,

$$x\tan(\beta) - x\tan(\alpha) = d\tan(\alpha)$$

Ahora factorizamos a x,

$$x\left[\tan(\beta)-\tan(\alpha)\right]=d\tan(\alpha)$$

Dividimos ambos miembros de la ecuación por $\tan(\beta)-\tan(\alpha)$,

$$x=\frac{d\tan(\alpha)}{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}$$

Esta es la ecuación para encontrar el valor de x. Ahora de la ecuación 3.2 sabemos que

$$y=x\tan(\beta)$$

pero ya conocemos el valor de x, entonces

$$y=\left[\frac{d\tan(\alpha)}{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}\right]\tan(\beta)$$
$$y=\frac{d\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}$$

Ejemplo 4:

Tenemos que observar a la especie "Momotus Aequatorialis" que ha elaborado su nido en un barranco del cual no conocemos la altura. Hemos medido desde una distancia desconocida un ángulo de elevación de $20°$, luego nos desplazamos 3 metros y calculamos un nuevo ángulo de elevación de $22°$. Calcular la distancia desde el último punto de observación a la base del barranco y la altura del mismo.

Solución

En la siguiente figura se ilustra la situación problema:

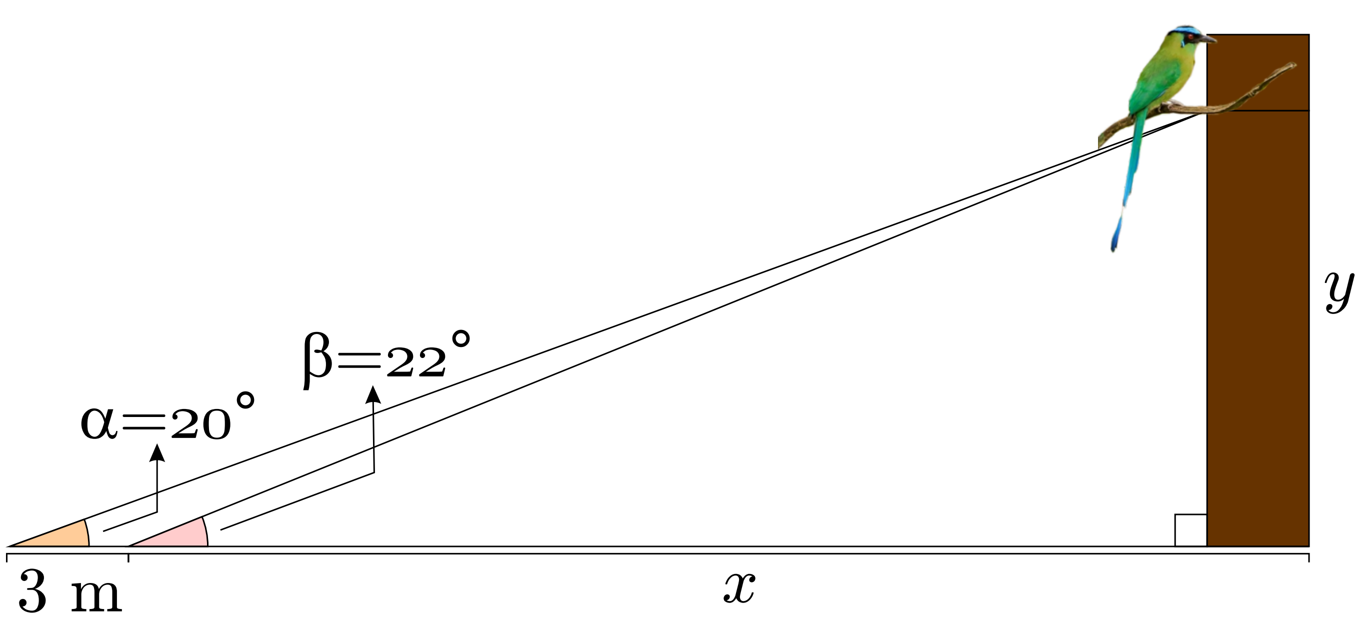

Figura 3.5: Situación Problema

Para resolver este problema, vamos a usar las formulas de la relación de la tangente, que son

$$x = \frac{d \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \beta}$$

y

$$y = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \beta}$$

entonces reemplazando los datos tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \tan (20^\circ)}{\tan (22^\circ) - \tan (20^\circ)} \\ &\approx 27.25 \end{aligned}$$

y para la altura

$$\begin{aligned} y &= \frac{3 \tan (20^\circ) \tan (22^\circ)}{\tan (22^\circ) - \tan (20^\circ)} \\ &\approx 11.01 \end{aligned}$$

Respuesta: La distancia de la última observación a la base del barranco es 11.01 metros y la altura del barranco es de 27.25 metros.

3.3 Ley o Teorema del Seno

Consideremos el siguiente triángulo $\triangle ABC$

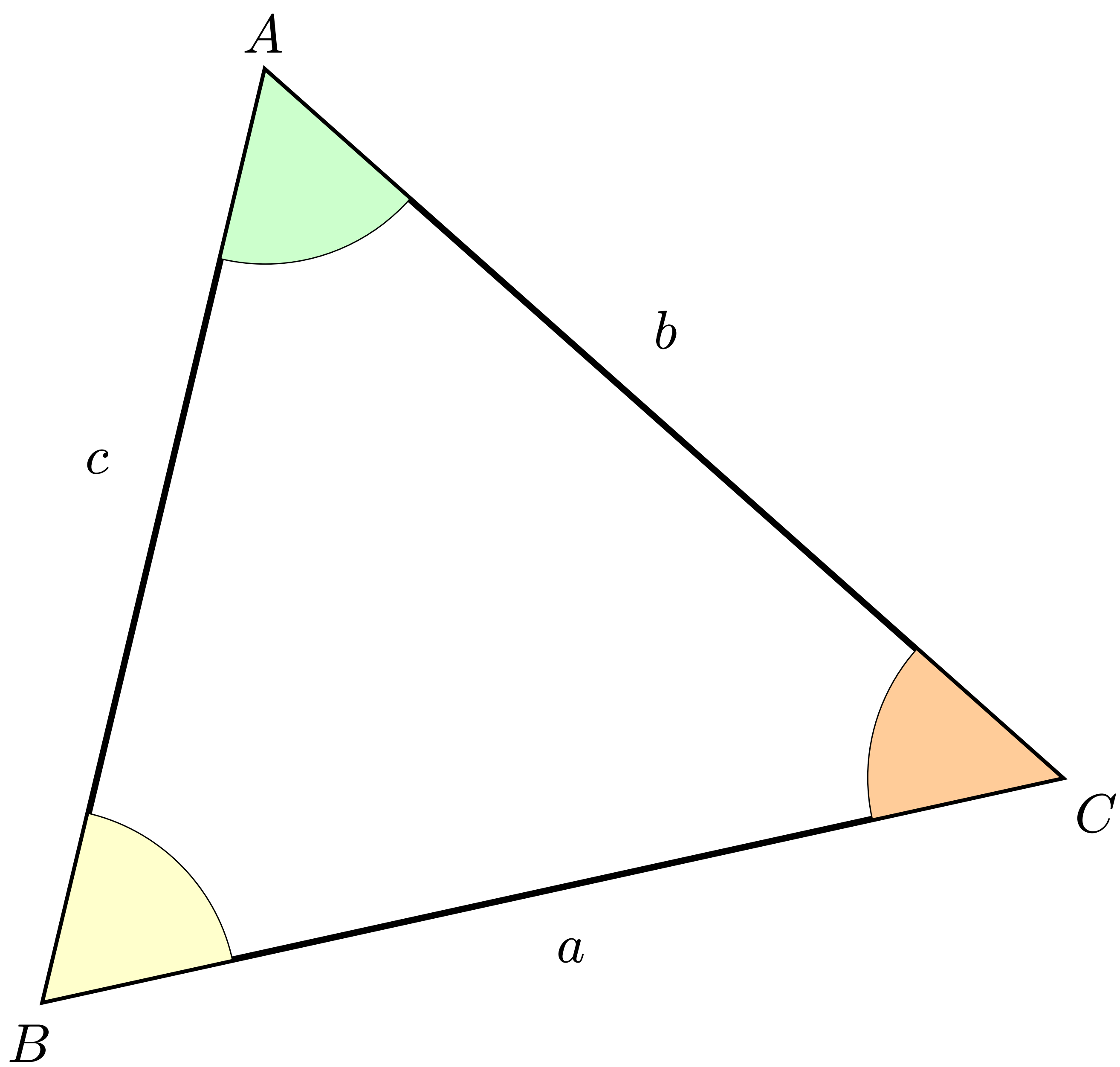

Figura 3.6: Triángulo $\triangle ABC$

Se puede establecer una Ley General para el triángulo. Es importante notas que este triángulo no es rectángulo por lo cual no podemos aplicar directamente las razones trigonométricas.

La Ley del Seno enuncia lo siguiente:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Si tomamos dos de estas razones con 3 datos conocidos podemos encontrar todos los datos del triángulo.

Ejemplo 5:

Queremos delimitar un terreno en forma triangular en el cual habita una especie. Se conoce la información que se presenta en la siguiente figura. Determina las otras medidas del triángulo y calcular el área del terreno.

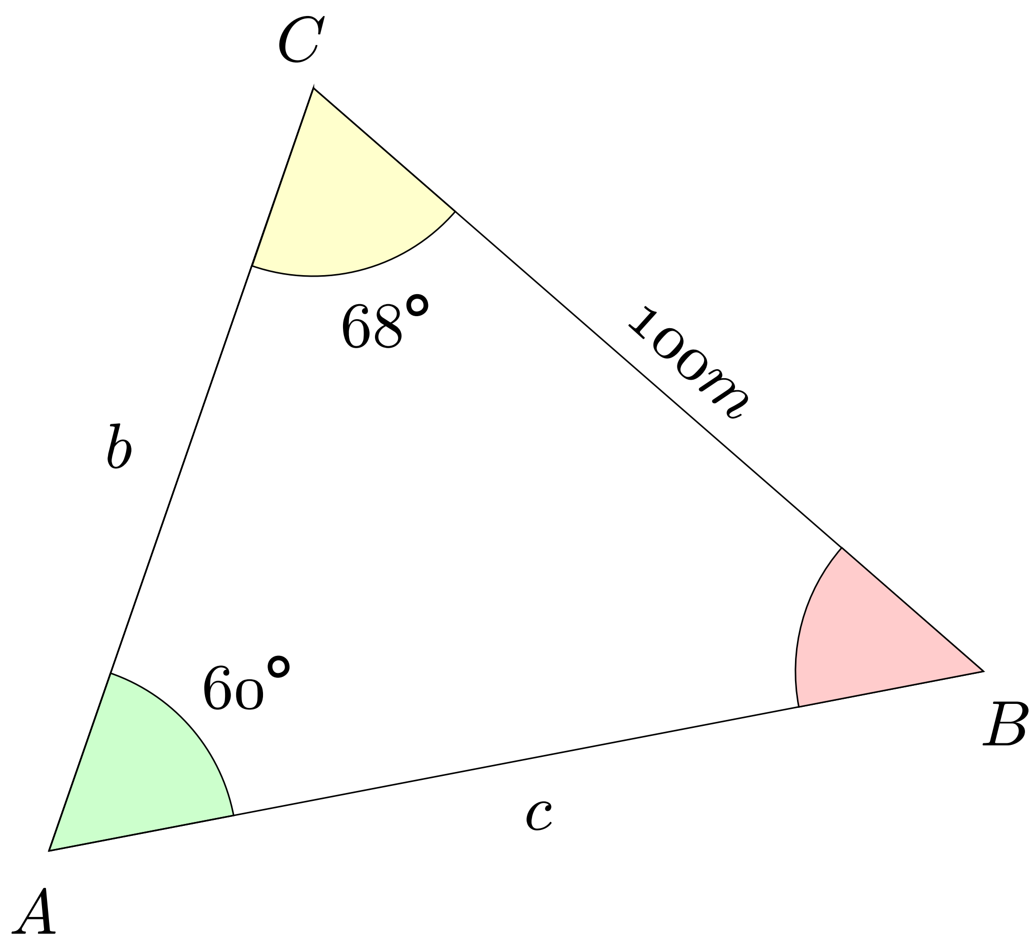

Figura 3.7: Situación Problema.

Solución

Aplicando la Ley del Seno tenemos

$$\frac{100}{\sin(60^\circ)} = \frac{c}{\sin(68^\circ)}$$

despejamos de esta ecuación a c, entonces

$$\begin{aligned} c &= \frac{100 \cdot \sin(68^\circ)}{\sin(60^\circ)} \\ &\approx 107.06 \text{ m} \end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular el valor de b, para ello necesitamos el ángulo B. Como ya tenemos dos (2) ángulos podemos usar la suma interna de los ángulos del triángulo

$$\begin{aligned} B &= 180^\circ - 60^\circ - 68^\circ \\ &= 52^\circ \end{aligned}$$

ahora podemos aplicar la Ley del Seno

$$\frac{b}{\sin(52^\circ)} = \frac{100}{\sin(60^\circ)}$$

despejamos a b,

$$b = \frac{100 \cdot \sin(52^\circ)}{\sin(60^\circ)} = 90.99 \text{ m}$$

Como ya conocemos los tres lados del triángulo podemos hallar el área. Vamos a usar la fórmula de Herón

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

con

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

conocido como el semiperímetro, así,

$$\begin{aligned} s &= \frac{100 + 90.99 + 107.06}{2} \\ &= 149.02 \text{ m} \end{aligned}$$

ahora el área es

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{149.02\,(149.02-100)\,(149.02-90.99)\,(149.02-107.06)} \\ &\approx 4218.19\ m^2 \end{aligned}$$

Respuesta: El área del Terreno es aproximadamente 4218.19 metros cuadrados.

Ejemplo 6:

Estamos a la orilla de un rio, nos ubicamos en el punto A, tomamos una medición angular hacia un punto B al otro lado del rio de $57°$. Nos desplazamos 23 metros rio abajo y tomamos una nueva medición desde ese punto C al punto B con $53°$. El siguiente gráfico ilustra la situación.

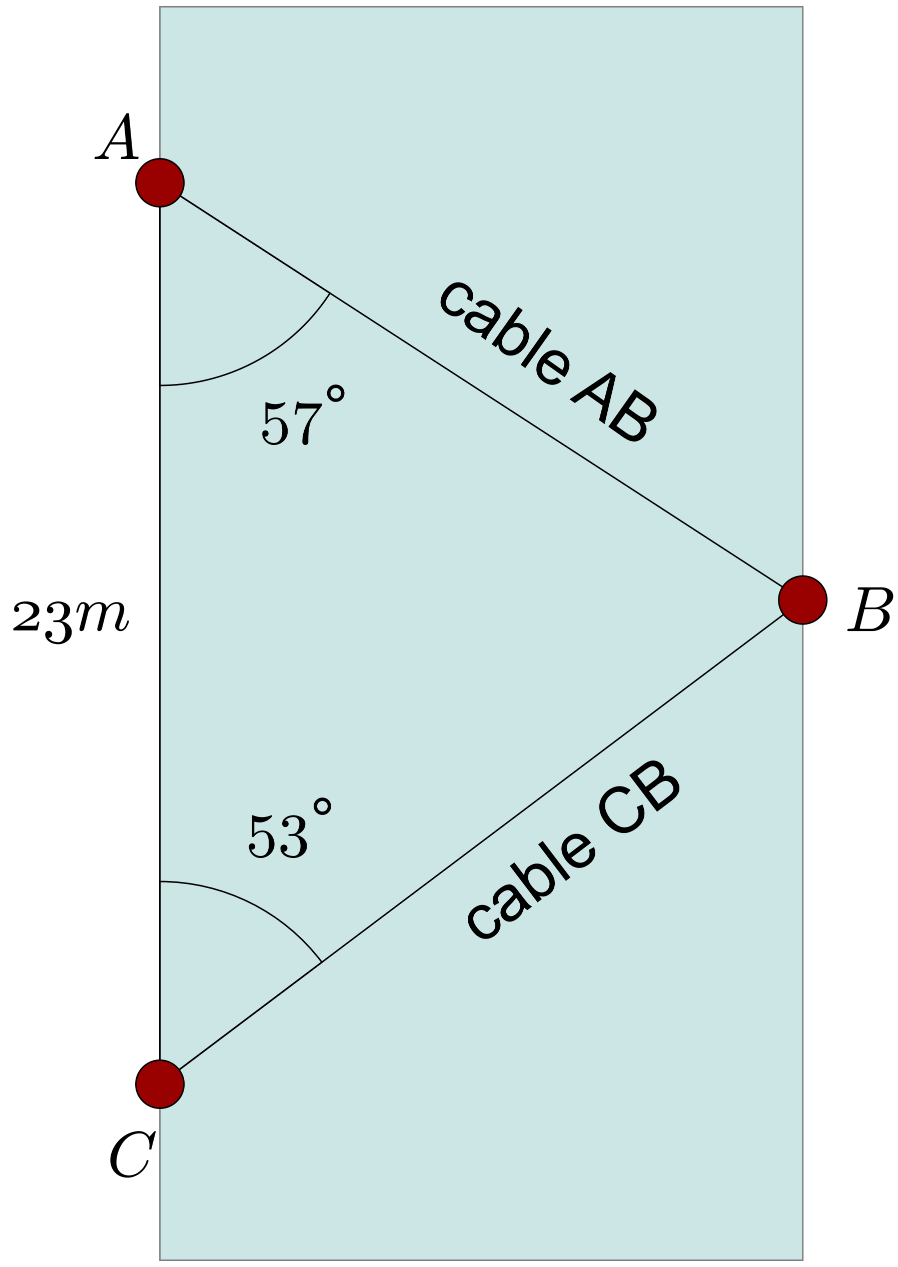

Figura 3.8: Situación Problema

Si tuviéramos que instalar 2 cables $\overline{AB}$ o $\overline{CB}$ cuál sería más económico.

Calculamos el ángulo B

$$\begin{aligned} B &= 180^\circ - 57^\circ - 53^\circ \\ &= 70^\circ \end{aligned}$$

aplicando la Ley del Seno tenemos

$$\begin{aligned} \frac{23}{\sin(70^\circ)} &= \frac{c}{\sin(53^\circ)} \\ c &= \frac{23 \cdot \sin(53^\circ)}{\sin(70^\circ)} \\ c &= 19.54m \end{aligned}$$

Ahora para calcular a

$$\frac{23}{\sin\left(70°\right)} = \frac{a}{\sin\left(57°\right)}$$
$$a = \frac{23 \cdot \sin\left(57°\right)}{\sin\left(70°\right)}$$
$$a = 20.52m$$

Respuesta: El tramo más económico es el $\overline{AB} = c$

Ejemplo 7:

Tenemos dos especies de Tortugas Podocnemis Expansa y Podocnemis Lewyana, la primera corre a una velocidad de $1.2^{km}/_{h}$ y la segunda $0.9^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ en tierra. Ambas salen de un río en un punto A, toman caminos diferentes, separándose $63°$. Al cabo de $45m$ ¿Cuánto se han Alejado?

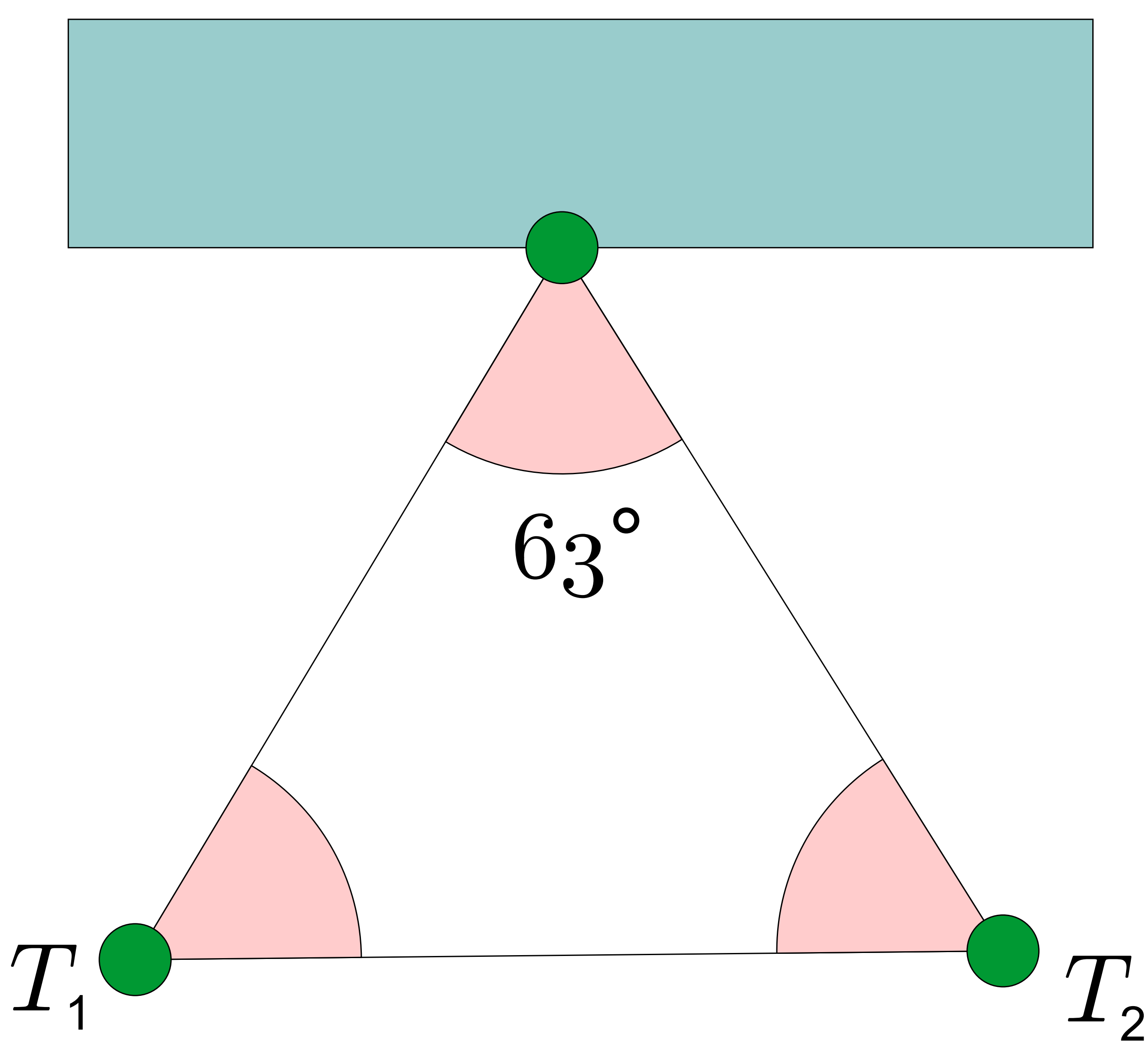

Figura 3.9: Situación Problema

45 Minutos ¿Cuántas horas son?

$$\frac{45\textbf{min}}{60\textbf{min}} = 0.75h$$

- Tortuga 1

$$1.2\frac{km}{h} \cdot 0.75h = 0.9km$$

- Tortuga 2

$$0.9\frac{km}{h} \cdot 0.75km = 0.675km$$

3.4 Ley o Teorema del Coseno

Si tenemos el siguiente triángulo con los datos conocidos, tenemos las tres fórmulas siguientes:

- Para encontrar el lado a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

- Para encontrar el lado b

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$

- Para encontrar el lado c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Así aplicando la Ley del Coseno tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^2 &= (0.9)^2 + (0.675)^2 - 2(0.9)(0.675)\cos(63°) \\ a^2 &= 0.714026 \\ a &= \sqrt{0.714026} \\ a &\approx 0.845 \end{aligned}$$

Respuesta: La tortugas se han alejado 0.84**km.**

A continuación vamos a demostrar que los ángulos T_1 y T_2 no son necesariamente iguales, para ello aplicamos la Ley del Seno:

$$\begin{aligned}
\frac{0.845}{\sin(63^\circ)} &= \frac{0.9}{\sin(T_2)} \\
\sin(T_2) &= \frac{0.9 \cdot \sin(63^\circ)}{0.845} \\
\sin(T_2) &= 0.949 \\
T_2 &= \sin^{-1}(0.949) \\
T_2 &= 71.62^\circ
\end{aligned}$$

Luego

$$T_1 = 180^\circ - 63^\circ - 71.62^\circ = 45.68^\circ$$

Así queda demostrado que los ángulos T_1 y T_2 no son necesariamente iguales.

3.5 Descripción del Trabajo de la Unidad.

Para esta unidad vamos a entregar un archivo PDF con las siguientes características:

1. Formato Institucional (Universidad del Quindío)
2. Debe contener portada:
   a) Nombre de la Universidad
   b) Nombre de la Facultad
   c) Nombre del Programa
   d) Nombre de la Materia
   e) Nombre del Docente
   f) Nombre del Estudiante
   g) Nombre de la Unidad: Razones y Funciones Trigonométricas.
   h) Ciudad y Fecha
3. Debe tener una introducción.
4. Debe resolver un problema de cada temática:
   a) Funciones Trigonométricas
   b) Relaciones Tangente

   c) Teorema del Seno
   d) Teorema del Coseno
   e) Los ejercicios los pueden buscar en internet, o usar alguna inteligencia artificial para generarlos. También me pueden preguntar si el ejercicio es adecuado por medio del Whatsapp.
5. Los problemas deben ser del contexto de cada estudiante, y para ello deben referenciar el problema mediante una fotografía.
6. Debe contener la sección de conclusiones
7. Debe contener la bibliografía correspondiente.
8. **Fecha de Entrega:** Hasta el Domingo 25 de Mayo a las 11:59 p.m.