Unidad 2

Función Cuadrática

La función cuadrática tiene la siguiente forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c se llaman coeficientes de la ecuación cuadrática. También se debe cumplir que $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

Sea la función cuadrática

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

realizar la gráfica de esta función.

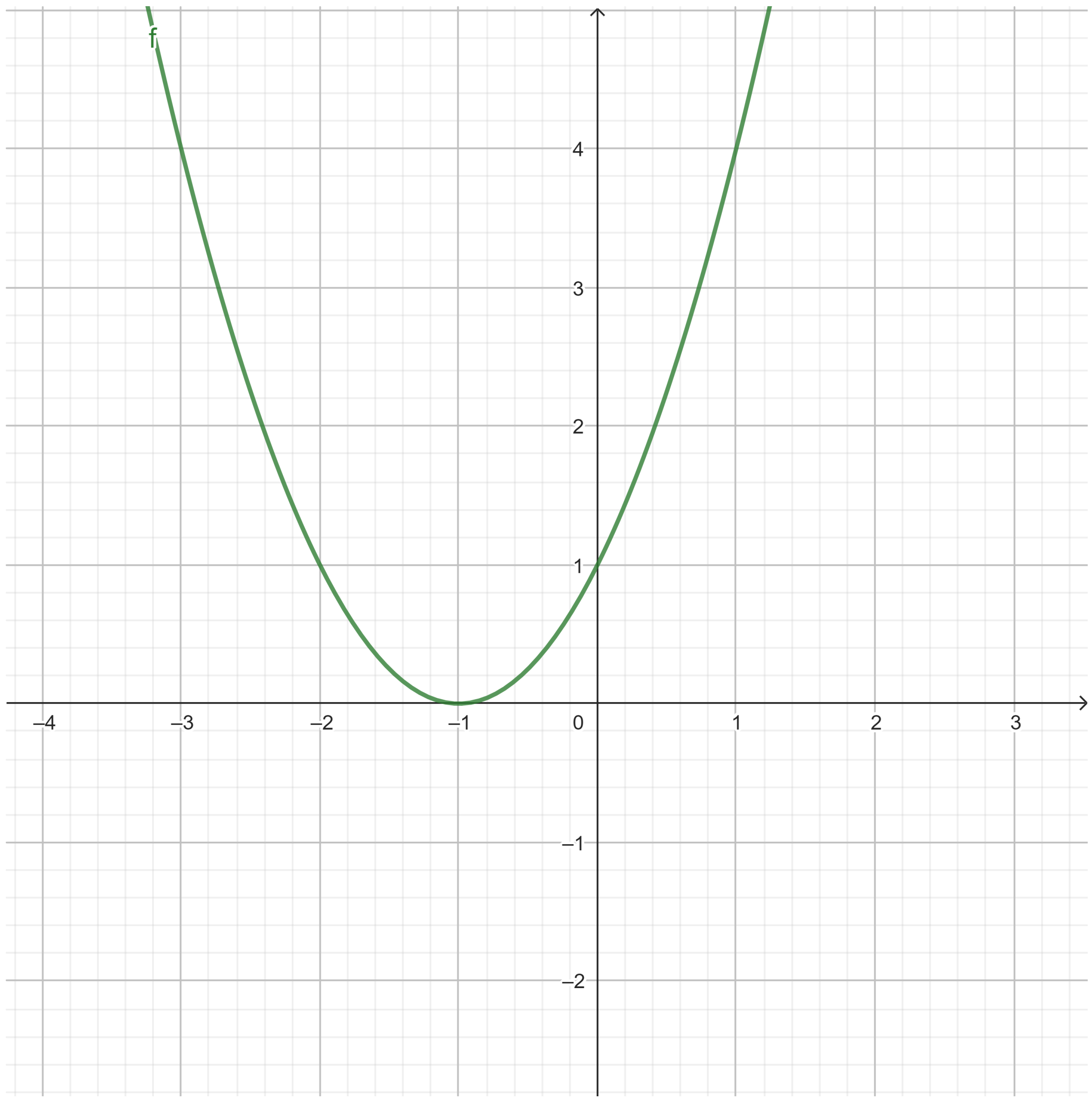


Figura 2.1: Gráfica de la Función $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Las funciones cuadráticas, pueden tener cortes con el eje x, y para ello se usa una fórmula conocida como la **fórmula general de segundo grado**, y se escribe así

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta ecuación nos permite conocer si la función tiene cortes con el eje x , para ello solo se debe evaluar el conocido *"discriminante"*.

El discriminante es la parte interna de la raíz, es decir

$$b^2 - 4ac$$

Si,

- El cálculo de $b^2 - 4ac$ es menor que cero, la función **NO** tiene cortes con el eje x
- El cálculo de $b^2 - 4ac$ es igual a **CERO**, la función cuadrática tiene un **solo** corte con el eje x

- El Cálculo de b^2-4ac es mayor que cero, la función cuadrática tiene **DOS** cortes con el eje x.

Del ejemplo anterior tenemos que la función es

$$f(x)=x^2+2x+1$$

de aquí (recordando que la función cuadrática tiene la forma $f(x)=ax^2+bx+c$) la función tiene valores $a=1$, $b=2$ y $c=1$. Entonces con estos datos calculemos el *"discriminante"*

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (2)^2-4(1)(1) \\ &= 4-4=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función cuadrática tiene un solo corte con el eje x.

2.1 ¿Cómo se calcula el vértice de la función cuadrática?

Debemos entender que el **vértice** de la función cuadrática es el punto **MÍNIMO** de la función, y en muchas aplicaciones se usa para, por ejemplo **MINIMIZAR** costos, o **minimizar** materiales.

Para calcular el vértice se usa la fórmula

$$V=\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Recordemos también que **evaluar la función**, significa, cambiar todos los valores de la x por el valor que esta en el paréntesis de la función.

Por ejemplo en la función que tenemos, que es $f(x)=x^2+2x+1$ queremos saber cuál es el valor de la función cuando $x=2$, entonces hacemos

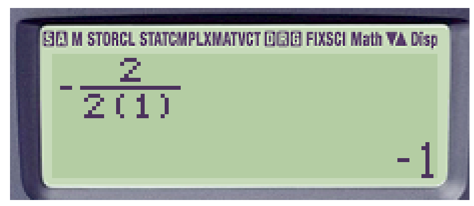
$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^2+2(2)+1 \\ &= 4+4+1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Este proceso se puede (debe) realizar en la calculadora, por ejemplo

Ahora si, vamos a calcular el **vértice** de la función cuadrática, así, $b = 2$ y $a = 1$ entonces

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\left(1\right)} = -1$$

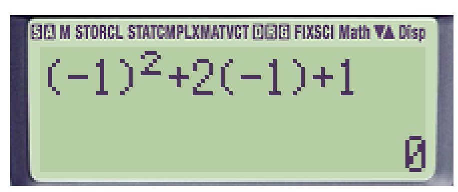
tal como se observa en la calculadora



Este sería el valor para x en el plano cartesiano, **¿Cómo calculamos el valor de y?**, para eso debemos evaluar la función en el valor que encontramos de $x = -1$, así

$$\begin{aligned} f\left(-1\right) &= \left(-1\right)^2 + 2\left(-1\right) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

tal como se ve en la calculadora



Por lo tanto el vértice de la función cuadrática es $V\left(-1, 0\right)$.

2.2 Gráficas en Geogebra

Geogebra es una aplicación para Geometría Dinámica, esta nos permite crear construcciones en el Computador que nos permiten entender el comportamiento de diversos tipos de formas y funciones.

Si realizamos las simulaciones para los parámetros de la función cuadrática observamos lo siguiente:

- El valor de a es la amplitud horizontal de la función, si a es un valor muy grande, la función cuadrática tiene una amplitud muy pequeña, y si el valor de a es muy pequeño, tendrá una amplitud muy grande

❍ El valor de b “desfasa” la función cuadrática.

❍ El valor de c “desplaza” verticalmente a la función en c unidades.

Ejemplo 2:

Supongamos un insecto se encuentra en la posición $x = 1$ cm y salta 35 cm, llegando a $x = 36$ cm. Modelar una función cuadrática que muestre el salto de la insecto.

Para resolver este problema necesitamos usar los productos notables. Veamos, si tenemos

$$(x-a)(x-b)$$

lo puedo resolver usando la propiedad distributiva

$$x^2 - bx - ax + ab$$

Así, para resolver nuestro problema debemos considerar la siguiente función

$$I(x) = -(x = 1)(x = 36)$$

para resolver, debo pasar los números al lado de las x, entonces

$$\begin{aligned} I(x) &= -(x-1)(x-36) \\ &= -\left(x^2 - 36x - 1x + 36\right) \\ &= -\left(x^2 - 37x + 36\right) \\ &= -x^2 + 37x - 36 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función que modela el salto del insecto es

$$I(x) = -x^2 + 37x - 36$$

Veamos su gráfica

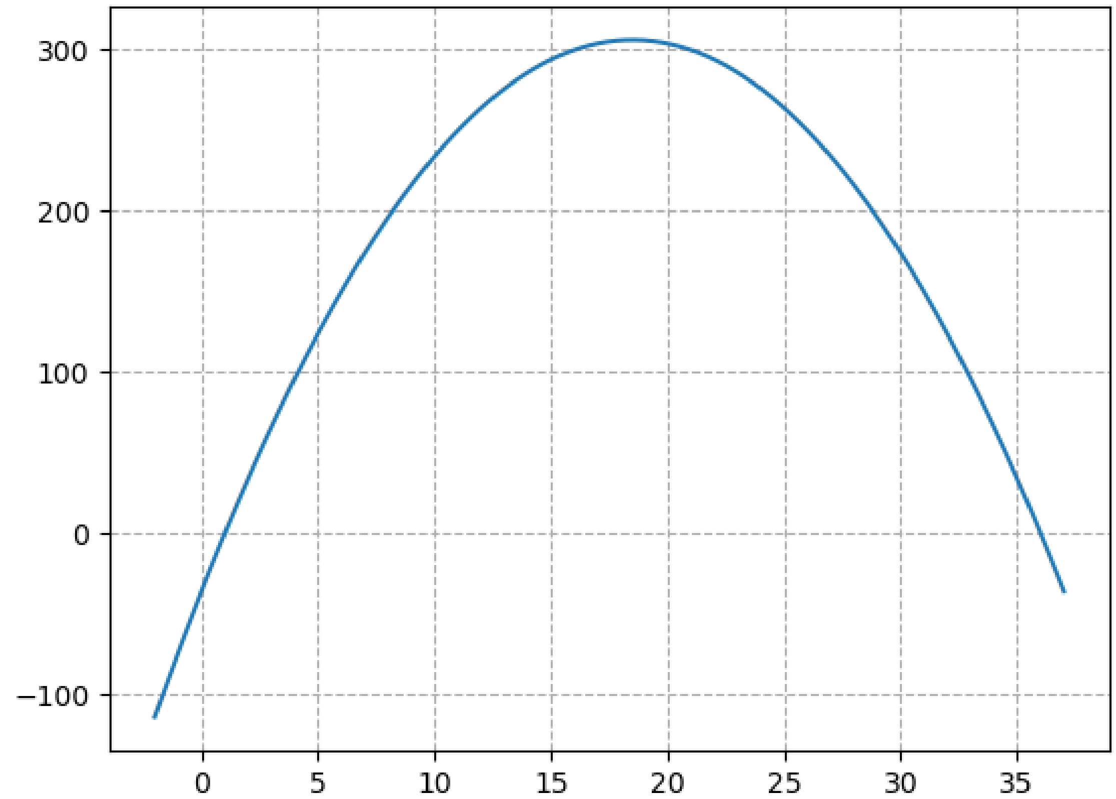


Figura 2.2: Gráfica de la Función Cuadrática

Observemos que el punto máximo sube hasta mas de 300, caso que en el fenómeno no se da.