Capítulo 3

Ceros de Funciones de una Variable

3.1 Introducción

Cuando hablamos de los ceros de una función, podemos acercarnos a un tipo de funciones muy conocidas y son los polinomios. Los polinomio tienen la forma

$$P_n\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Teorema 1:

Todo polinomio con coeficientes reales puede ser factorizado como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles, donde:

- **Factores Lineales:** Son de la forma $(x - r)$, donde r es una raíz real del polinomio.
- **Factores Cuadráticos Irreducibles:** Son de la forma ax^2+bx+c, donde a, b y c son coeficientes reales, y el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Estos factores no tienen raíces reales.

Ejemplo 1:

Calcular el polinomio de grado tres (3) que tiene raíces en $x = 2$, $x = 3$ y $x = 5$

Para encontrar este polinomio simplemente tenemos

$$\begin{aligned} P_3(x) &= (x-2)(x-3)(x-5) \\ &= \left(x^2-3x-2x+6\right)(x-5) \\ &= \left(x^2-5x+6\right)(x-5) \\ &= x^3-5x^2-5x^2+25x+6x-30 \\ &= x^3-10x^2+31x-30 \end{aligned}$$

Ejercicio 1:

Crear un *programa* en **Python** que grafique el polinomio $P_3(x) = x^3-10x^2+31x-30$ para $x \in [1,6]$

```python
# Importar las librerias necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir el polinomio
def poly(x):
    return x**3 - 10*x**2 + 31*x - 30

# Crear el dominio de graficación
x = np.linspace(1, 6, 100)

# Evaluar el polinomio en x
y = poly(x)

# Graficar y configurar la gráfica
plt.plot(x, y)
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$P_n(x)$')
plt.title('Gráfico del Polinomio $P_n(x)$')
plt.grid(linestyle='--')
plt.show()
```

Archivo de Programa

El archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-003-Solucion-Ecuaciones-Una-Variable\Programas\Grafica-Polinomio.ipynb*

La gráfica del polinomio se presenta en la siguiente imagen.

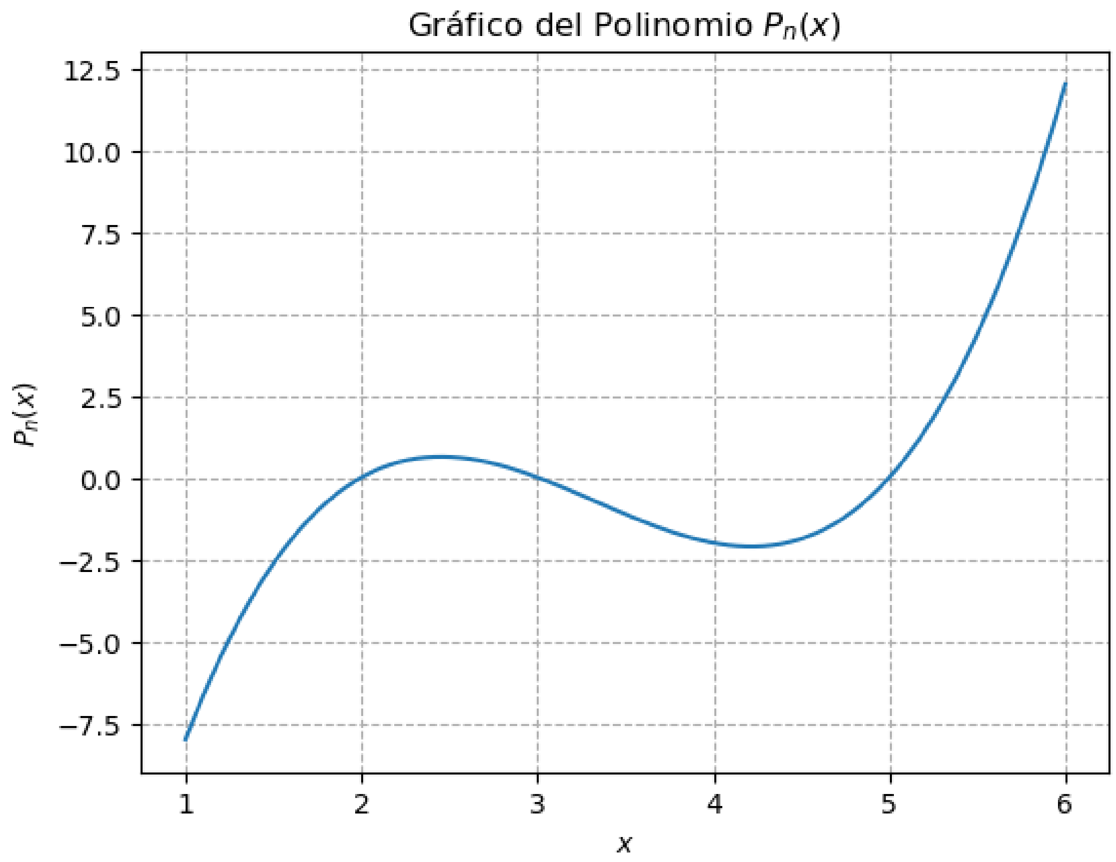

Figura 3.1: Gráfica del Polinomio $P_3(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

En muchos problemas de ingeniería, inteligencia artificial u otras disciplinas afines tenemos que resolver ecuaciones del tipo $f(x) = 0$, donde f es una función que dada una cantidad x nos devuelve $f(x)$.

El valor $\hat{x}$ que cumple que $f(\hat{x}) = 0$ se le llama **solución** de la ecuación, **raíz de la función** o **cero** de la misma. Como vimos en la introducción, en el caso de $P_3(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ podemos verificar que $\hat{x}_1 = 2$, $\hat{x}_2 = 3$ y $\hat{x}_3 = 5$ ya que al evaluar estos valores en la función da como resultado cero (se puede comprobar sobre la gráfica anterior)

En dichos problemas, **saber explícitamente la función f en muchos casos no es posible**, solo tenemos un algoritmo que dado x, nos devuelve $f(x)$.

Entonces, dependiendo de nuestro conocimiento de la función f, podremos aplicar un método numérico u otro.

Todos los métodos numéricos que hallan aproximaciones de ceros construyen una sucesión $(x_n)_n$ que queremos que converja hacia el cero $\hat{x}$ de la función f.

Cuanto mayor sea la velocidad de convergencia de la sucesión $(x_n)_n$, mejor será el método usado.

3.2 Método de la Bisección

Vamos a empezar por el algoritmo menos óptimo de la serie de algoritmos para encontrar los ceros de una función. El método de la bisección no es óptimo pero asegura la convergencia.

El método está basado en el **Teorema de Bolzano** donde recordemos que dice que si la función f es continua y tenemos dos valores a y b $(a < b)$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, o sea, hay un cambio de signo entre a y b o en el intervalo (a, b), podemos asegurar que existe un valor $\hat{x}$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

El método, también llamado método de los intervalos encajados, va construyendo una sucesión de intervalos encajados:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots ,$$

tal que el cero $\hat{x}$ siempre está en todos los intervalos $[a_n, b_n]$ y la longitud de cada intervalo $[a_n, b_n]$ vale $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.De esta manera el cero $\hat{x}$ se calcula de la forma más precisa.

3.2.1 ¿Cómo se construyen los intervalos $[a_n, b_n]$?

El primer intervalo $[a_0, b_0]$ vale

$$[a_0, b_0] = [a, b]$$

A continuación, sea $c = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ el punto medio del intervalo $[a_0, b_0]$.

Si $f(a_0)\cdot f(c) < 0$, consideremos $b_1 = c$ y $[a_1, b_1] = [a_0, c]$ y si $f(b_0)\cdot f(c) < 0$, consideramos $a_1 = c$ y $[a_1, b_1] = [c, b_0]$.

En general, veamos cómo construir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ en función del intervalo $[a_n, b_n]$. Observemos que se cumplirá siempre que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

Sea $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ el punto medio del intervalo $[a_n, b_n]$. Si $f(a_n) \cdot f(c) < 0$, consideremos $b_{n+1} = c$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c]$, y si $f(b_n) \cdot f(c) < 0$, consideremos $a_{n+1} = c$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c, b_n]$

3.2.2 Descripción Gráfica

En la siguiente gráfica se presenta el comportamiento del método de la bisección.

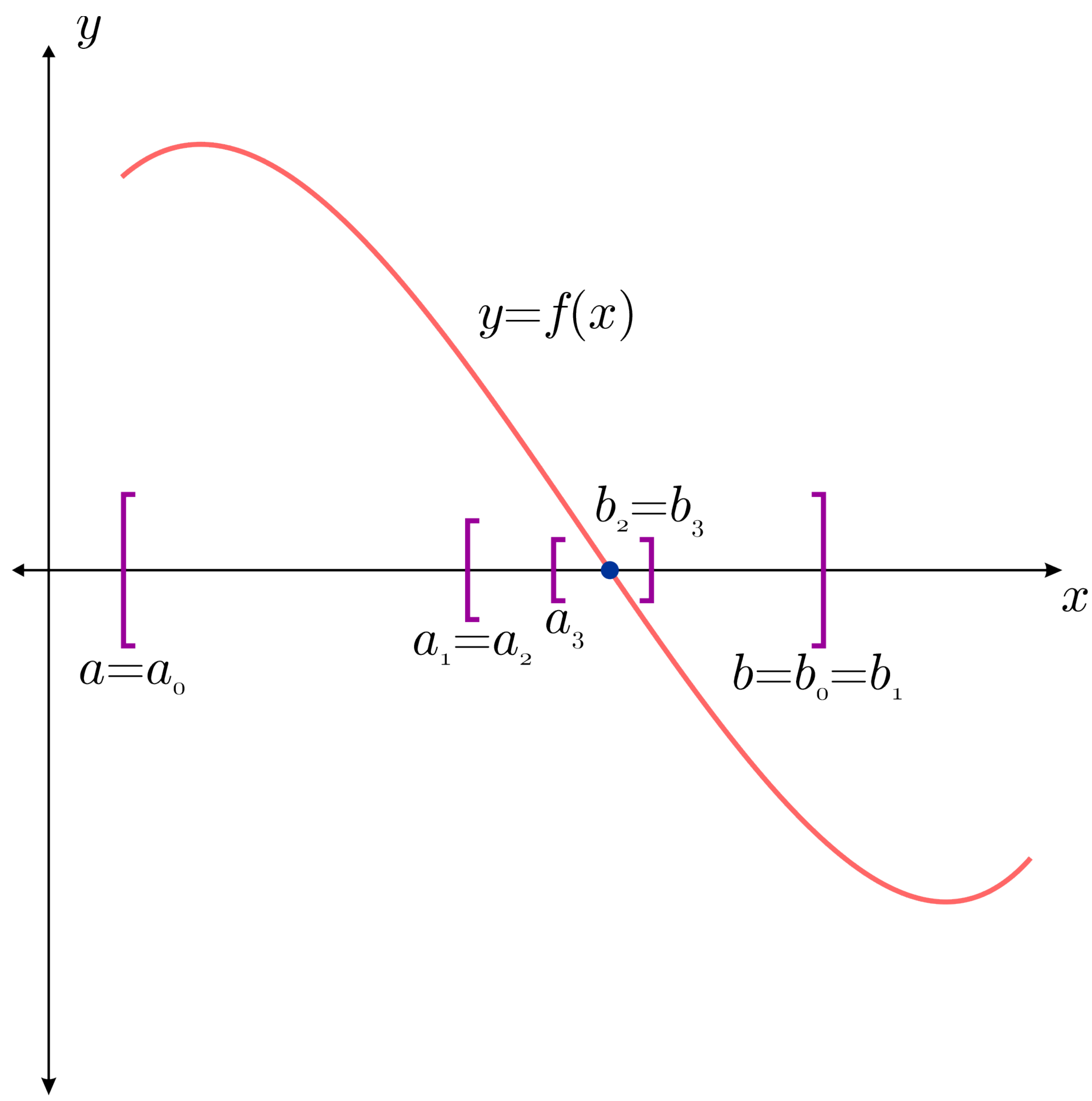

Figura 3.2: Método de la Bisección

3.2.3 Código 1

```
# Importar las librerias necesarias
import numpy as np

# Definir la función Biseccion
def Biseccion(funcion, a, b, tol, console=False):

    """
```

```
    ## ***Función:*** Biseccion
    - **Descripción:** Calcula la raíz o cero de la función $f$ en el intervalo dado $[a,b]$ con una tolerancia dada.
    - **Parámetros:**
        - *funcion:* Función a la cual se le quiere calcular la raíz o cero
        - *a:* inicio del intervalo de evaluación
        - *b:* fin del intervalo de evaluación
        - *tol:* Máximo error permitido entre la aproximación de la raíz y el valor real.
        - *console:* Valor booleano que permite (si True) mostrar los mensajes de procesamiento de la función
    """

    # Evaluar la función en el punto medio
    c = (a + b) / 2
    feval = funcion(c)

    # Mientras el punto medio del intervalo no cumpla con la condición de cero aproximado
    while abs(feval) >= tol:

        # Determinar el comportamiento de la función
        if funcion(a)*funcion(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c

        # Evaluar la función en el punto medio
        c = (a + b) / 2
        feval = funcion(c)

        if console:
            print("|f(c)| = ", abs(feval))
            print("[a,b] = [",a,",",b,"]")
```

```

    # Damos como valor aproximado del cero el último
      valor de c hallado
    return c

# ### Pruebas
# Probar la función de bisección para calcular la raíz
  de la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ en el
  intervalo para $x\in[1,4]$

# Probar la función
def f(x):
    return np.sin(x) + np.cos(x)

x = Biseccion(f, 1, 4, 1e-3, console=True)
print("Raíz: ",x)
```

Archivo de Programa

El
archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-003-Solucion-Ecuaciones-Una-Variable\Programas\Metodo-Biseccion-1.ipynb*

3.2.4 Intervalos encajados

La sucesión $(x_n)_n$ del método de la bisección serán los puntos medios de los intervalos encajados, $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Como $x_n, \hat{x} \in [a_n, b_n]$ tendremos que $|x_n - \hat{x}| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Por tanto el orden de convergencia de la sucesión $(x_n)_n$ será la de la sucesión $\frac{1}{2^n}$:

$$|x - \hat{x}| \leq K \cdot \frac{1}{2^n}$$

con $K = b - a$

3.2.5 Código 2

```python
# Definir la función Biseccion
def Biseccion(funcion, a, b, tol, console=False):

    """
    ## ***Función:*** Biseccion
    - **Descripción:** Calcula la raíz o cero de la función $f$ en el intervalo dado $[a,b]$ con una tolerancia dada.
    - **Parámetros:**
        - *funcion:* Función a la cual se le quiere calcular la raíz o cero
        - *a:* inicio del intervalo de evaluación
        - *b:* fin del intervalo de evaluación
        - *tol:* Máximo error permitido entre la aproximación de la raíz y el valor real.
        - *console:* Valor booleano que permite (si True) mostrar los mensajes de procesamiento de la función
    """

    # Calculamos el valor x0 (inicial)
    x = (a + b) / 2

    # Definimos el siguiente valor de la sucesión. Agregando un 1 nos aseguramos que entre en el ciclo while
    y = x + 1

    # Crear el ciclo condicional para calcular los intervalos. Mientras el punto medio del intervalo
    # no cumpla con la condición de cero aproximadoo
    while abs(x - y) >= tol:

        # Calculamos el punto medio
        x = (a + b ) / 2

        # Determinar el comportamiento de la función
```

```
        if funcion(a)*funcion(x) < 0:
            # Se define el nuevo b como x
            b = x
        else:
            # Se define el nuevo a como x
            a = x

        # Calcular el nuevo valor de y
        y = (a + b) / 2

        if console:
            print("x = ", x, "; y = ", y)

    # Damos como valor aproximado del cero el último valor de x hallado
    return x
```

3.2.6 Criterios de parada

¿Cuál de los dos métodos de parada es el mejor?

Los dos métodos son equivalentes pero en el caso en que evaluar la función f sea muy costoso es mejor usar el segundo método de parada ya que nos evita una evaluación de la función f.

En cambio, si evaluar la función f no es costoso, podemos usar cualquiera de los dos métodos indistintamente.

Ejemplo 2:

Aproximar el cero de la función $f(x) = x^3 - x + 1$ entre $x = -2$ y $x = -1$, o sea, aproximar el valor $\hat{x} \in (-2, -1)$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}^3 - \hat{x} + 1 = 0$.

Comprobemos que hay un cambio de signo entre $x = -2$ y $x = -1$:

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^3 - (-2) + 1 \\
&= -8 + 2 + 1 = -5 \\
f(-1) &= (-1)^3 - (-1) + 1 \\
&= -1 + 2 = 1
\end{aligned}
$$

Aplicando el método de bisección, obtenemos los valores siguientes:

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	-2	-1	-1.5	0.875	1
1	-1.5	-1	-1.5	0.875	0.25
2	-1.5	-1.25	-1.25	0.296875	0.125
3	-1.375	-1.25	-1.375	0.224609375	0.0625
4	-1.375	-1.3125	-1.3125	0.051513671875	0.03125
5	-1.34375	-1.3125	-1.34375	0.082611083984375	0.015625
6	-1.328125	-1.3125	-1.328125	0.0145759582519531	0.0078125
7	-1.328125	-1.3203125	-1.3203125	0.0187106132507324	0.00390625
8	-1.328125	-1.32421875	-1.32421875	0.00212794542312622	0.001953125
9	-1.326171875	-1.32421875	-1.326171875	0.00620882958173752	0.0009765625
10	-1.3251953125	-1.32421875	-1.3251953125	0.00203665066510439	0.00048828125
11	-1.3251953125	-1.32470703125	-1.32470703125	$4.65948833152652E-5$	0.000244140625
12	-1.324951171875	-1.32470703125	-1.324951171875	0.000994790971162729	0.0001220703125
13	-1.3248291015625	-1.32470703125	-1.3248291015625	0.000474038819447742	6.103515625E-5

Observaciones

- Vemos que el método, tal como se comento anteriormente, es lento. Por ejemplo, para pasar de un error menor que 0.1 a un error menor que 0.01, usando el método de parada $\lvert f(x_n)\rvert < \epsilon$, necesitamos cuatro iteraciones (de la iteración $n = 3$ a la iteración $n = 7$), o sea, necesitamos cuatro iteraciones para "ganar" una cifra significativa en la aproximación del cero.
- Los dos criterios de parada (dos últimas columnas) son equivalentes en el sentido que necesitan aproximadamente el mismo número de iteraciones para que se "gane" una cifra significativa en el cero. Además los valores que se obtienen con los dos criterios son del mismo orden, es decir, que si en la iteración n, $\lvert f(x_{10})\rvert \approx 4.7 \times 10^{-5}$ y $\lvert x_{10} - x_9\rvert \approx 4.9 \times 10^{-5}$

3.3 Método del Punto Fijo

El **método del punto fijo** consiste en transformar la ecuación $f(x) = 0$ en la ecuación $x = g(x)$ mediante **operaciones algebraicas "básicas"**.

Entonces el **cero** de la ecuación $f(x) = 0$ se transforma en lo que llamaremos un **punto fijo** de la función $g(x)$:

Definición 1: Definición de Punto Fijo

Sea g una función real de variable real. Diremos que $\hat{x}$ es un punto fijo de la función g si $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Observación

Gráficamente, un **punto fijo** resulta de la intersección de la recta diagonal $y = x$ y de la función $y = g(x)$

La idea es considerar la sucesión definida de forma recurrente como $x_n = g(x_{n-1})$ y ver bajo qué condiciones la sucesión $(x_n)_n$ converge hacia el **punto fijo** $\hat{x}$ de g que recordemos será el **cero** de la función f buscado.

Ejemplo 3:

Para resolver la ecuación anterior $x^3 - x + 1 = 0$, podemos realizar las siguientes transformaciones;

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 = 0, &\Rightarrow x = x^3 + 1 = g_1(x) \\ x^3 - x + 1 = 0, &\Rightarrow x^3 = x - 1 \\ &\Rightarrow x = \sqrt[3]{x-1} = g_2(x) \end{aligned}$$

Entonces hallar un punto fijo de la función g_1 o g_2 es equivalente a hallar un cero de la función $f(x) = x^3 - x + 1$

Ejercicio 2:

Crear un *programa* en **Python** que grafique las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Programa de Google Colab

Este programa se ha desarrollado usando Google Colab. Para ver el programa haz clic en el logo.

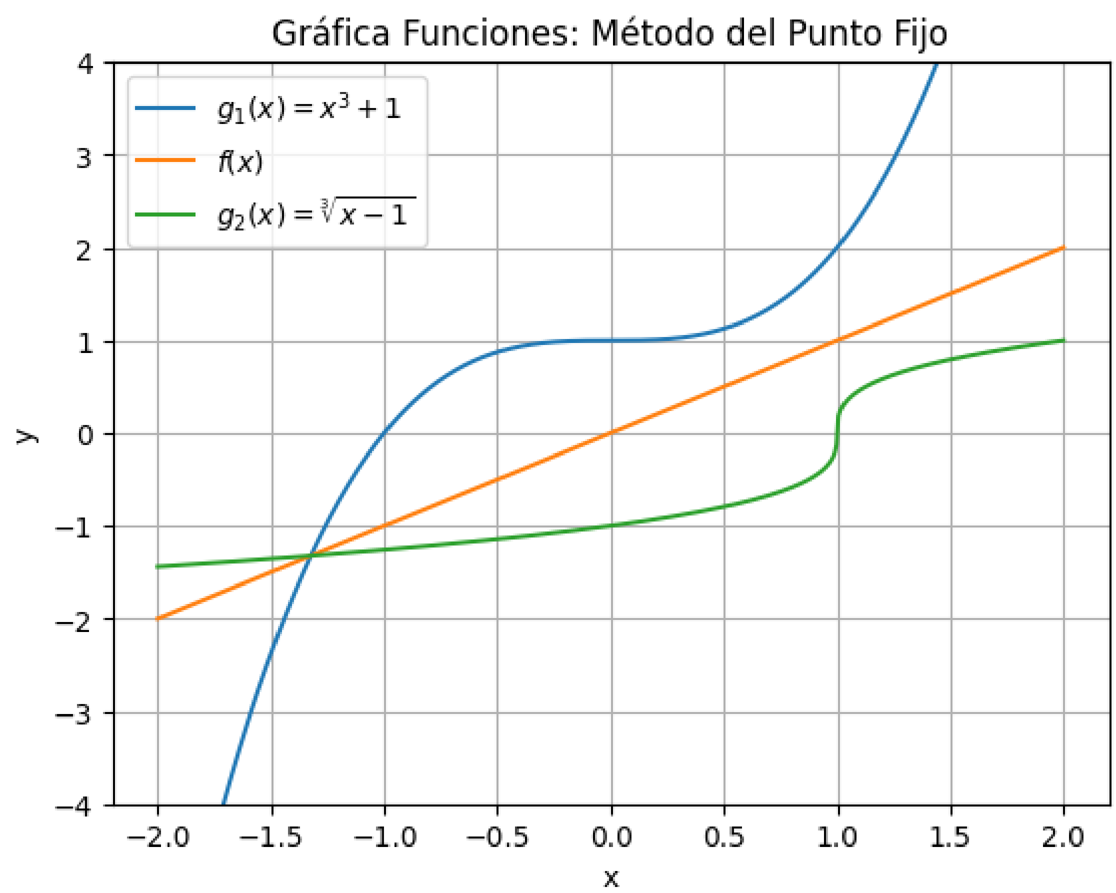

Figura 3.3: Resultado del Gráfico Generado con Python del Ejercicio Anterior

3.3.1 Existencia del Punto Fijo

El teorema siguiente nos dice cuáles son las condiciones de existencia del punto fijo de una función g:

Teorema 2:

- Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$ una función continua dentro un intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ es decir, la función g esta definida de la forma siguiente:
$$g : [a,b] \to [a,b]$$
Entonces g tiene al menos un **punto fijo** $\hat{x}$ en el intervalo $[a,b]$, es decir, existe $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

- Si además $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tal que existe una constante $k < 1$ con $|g'(x)| \leq k$, para todo valor $x \in (a,b)$. Entonces el punto fijo en el intervalo es único, es decir, existe un único $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$

Demostración

Supongamos que $g(x) \in [a,b]$, para todo $x \in [a,b]$. Consideremos la función $h(x) = g(x) - x$.

El valor de $h(a)$ cumple $h(a) = g(a) - a \geq 0$, ya que $g(a) \geq a$ al cumplirse $g(a) \in [a,b]$.

Si $h(a) = 0$,ya hemos acabado ya que en este caso, $g(a) = a$ y el punto fijo buscado sería $\hat{x} = a$. Por tanto, suponemos que $h(a) > 0$.

El valor de $h(b)$ cumple $h(b) = g(b) - b \leq 0$, ya que $g(b) \leq b$ al cumplirse $g(b) \in [a,b]$.

Si $h(b) = 0$, ya hemos acabado ya que en este caso, $g(b) = b$ y el punto fijo buscado sería $\hat{x} = b$. Por tanto, suponemos que $h(b) < 0$.

Por tanto $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, y como h es continua, usando el Teorema de Bolzano, existe un valor $\hat{x} \in (a,b)$ tal que $h(\hat{x}) = 0$, o lo que es lo mismo, $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

En resumen, siempre existe un valor $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$, tal como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que además $|g'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in [a, b]$. Veamos que el punto fijo $\hat{x}$ es único.

Supongamos que existen dos puntos fijos $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ con $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$. Si aplicamos el teorema del valor medio a la función g tenemos que existe un valor $c \in (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ tal que:

$$\hat{x}_2 - \hat{x}_1 = g(\hat{x}_2) - g(\hat{x}_1) = g'(c)(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)$$

Por tanto,

$$\hat{x}_2 - \hat{x}_1 = |g(\hat{x}_2) - g(\hat{x}_1)| = |g'(c)|(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \leq k(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) < \hat{x}_2 - \hat{x}_1$$

Llegamos a una contradicción ya que un número $\hat{x}_2 - \hat{x}_1$ no puede ser menor estrictamente que él mismo. Por tanto, nuestra suposición es falsa y $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, tal como queríamos ver.

Ejemplo

Sigamos con el ejemplo anterior, considerando las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Observando el gráfico de las funciones anteriores se observa que $g_2(x) \in [-2, -1]$ si $x \in [-2, -1]$ ya que:

$$\begin{aligned}
& -2 \leq x \leq -1 \\
\Leftrightarrow & -3 \leq x - 1 \leq -2 \\
\Leftrightarrow & -2 < -1.442 \approx \sqrt[3]{-3} \leq \sqrt[3]{x-1} \leq \sqrt[3]{-2} \approx -1.26 < -1
\end{aligned}$$

En cambio, con la función $g_1(x) = x^3 + 1$, no es cierto que $g_1(x) \in [-2, -1]$ si $x \in [-2, -1]$ como puede observarse en el gráfico.

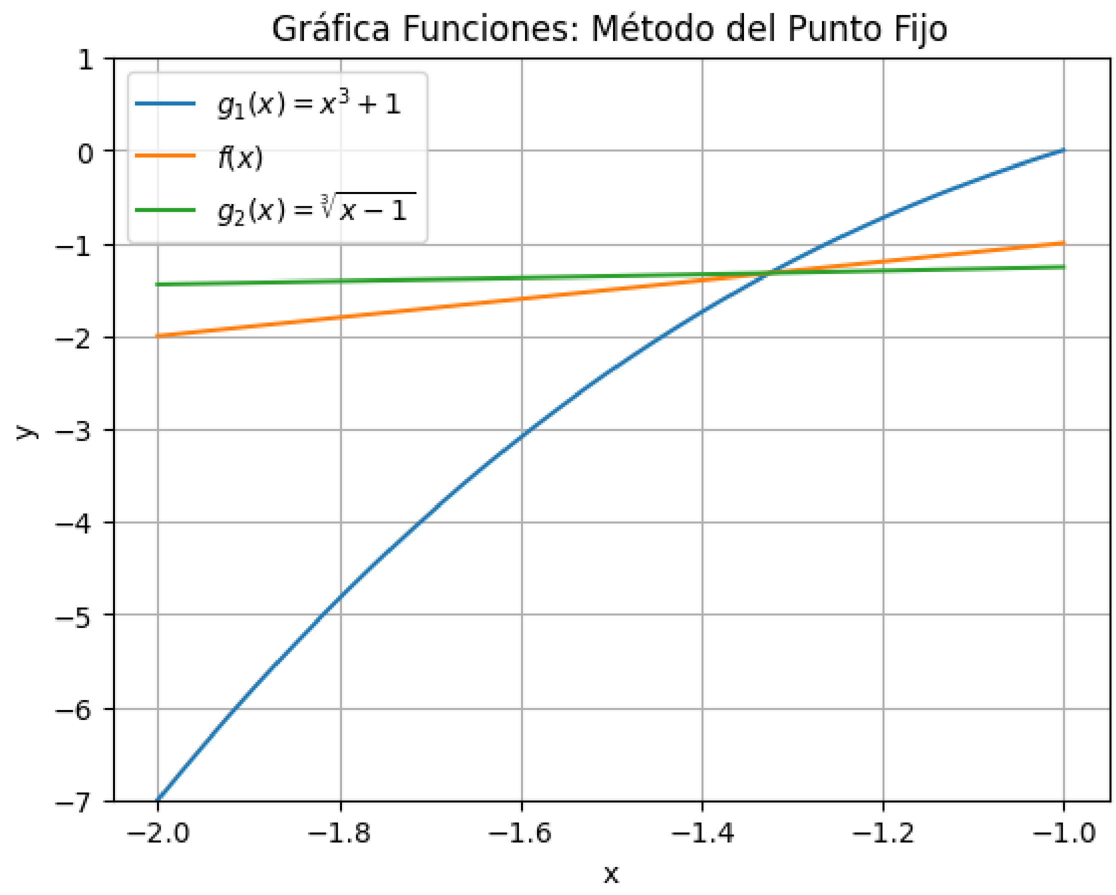

Figura 3.4: Gráfica de las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Sólo podemos aplicar el teorema anterior a la función $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Veamos si además podemos asegurar su unicidad:

$$g_2'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

si

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$0.16 \approx \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$$

Entonces existe un valor $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$ tal que $|g_2'(x)| \leq k$, para todo $x \in [-2, -1]$. Por tanto, usando el teorema anterior, podemos asegurar que el punto fijo $\hat{x}$ es único.

3.3.2 Teorema del Punto Fijo

Para resolver la ecuación $x = g(x)$ o para hallar un punto fijo de la función g, definimos la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$. El teorema siguiente nos dice bajo que condiciones la sucesión anterior converge hacia el punto fijo $\hat{x}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$.

Teorema 3: Teorema del Punto Fijo

Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$ una función continua dentro del intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$. Supongamos, además, que existe $g'(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y que existe una constante k, con $0 < k < 1$, tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [a,b]$. Sea $x_0 \in [a,b]$. Definimos la sucesión $(x_n)_n$ de forma recurrente como $x_n = g(x_{n-1})$, $n \geq 1$. Entonces x_n converge hacia el único punto fijo $\hat{x}$ de $g(x)$. Es decir $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$,con $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración

Es sencillo ver que si la sucesión $(x_n)_n$ converge, lo hace necesariamente hacia el punto fijo $\hat{x}$ ya que como $x_n = g(x_{n-1})$, tomando límites y usando que la función g es continua, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1}), \Rightarrow L = g(L),$$

lo que significa que el límite L de la sucesión $(x_n)_n$ es un punto fijo de la función g y como éste es único, $L = \hat{x}$.

Veamos a continuación que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente. Usando el Teorema del Valor Medio tenemos que existe un valor $c_n \in \langle x_n, \hat{x}\rangle$ tal que:

$$|x_n - \hat{x}| = |g(x_{n-1}) - \hat{x}| = |g'(c_n)| \cdot |x_{n-1} - \hat{x}| \leq k \cdot |x_{n-1} - \hat{x}|$$

Aplicando la desigualdad anterior n veces, tenemos que:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k\,|x_{n-1} - \hat{x}| \leq k^2\,|x_{n-2} - \hat{x}| \leq \cdots \leq k^n\,|x_0 - \hat{x}|$$

Aplicando el criterio del “emparedado” tenemos que

$$0 < \lim_{n\to\infty} |x_n - \hat{x}| \leq \lim_{n\to\infty} k^n\,|x_0 - \hat{x}| = 0$$

ya que $0 < k < 1$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} |x_n - \hat{x}|$, condición que equivale a $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, tal como queríamos demostrar.

3.3.3 Pseudocódigo

```
var
  x0, tol, n, x: real;
  iteracion: integer;
begin
  { Ingresamos el valor inicial, la tolerancia y el número de iteraciones }
  x0 := InputReal(edValorInicial);
  tol := InputReal(edTolerancia);
  n := InputInteger(edIteraciones);

  { Establecer el valor de las iteraciones a 1 }
  iteracion := 1;

  { Crear un ciclo condicional que genere las iteraciones desde n=1,...,N }
  while iteracion <= n do
  begin
    { Calculamos el siguiente término de la sucesión }
    x := g(x0);

    { Determinamos si el valor de x_n cumple con la condición de la
      tolerancia permitida }
    if abs(x - x0) < tol then
    begin
      { Mostrar el valor en la consola }
      Console.log('Método del Punto Fijo', 'Cero/Raíz', x);

      { Finalizamos la ejecución }
      Exit;
    end;

    { Incrementamos el valor de la iteración }
    iteracion := iteracion + 1;
```

```

    { Actualizamos el valor de x_n }
    x0 := x;
  end;

  { Si el código llega a este punto quiere decir que no
    alcanco la convergencia }
  Console.log('Método del Punto Fijo', 'Error',
    'El método no alcanzo la convergencia deseada');
```

Ejemplo 4:

Usar el método del punto fijo para calcular el cero de la función $f(x) = x^3 - x + 1$ en el intervalo donde $x \in [-2, -1]$

Como vimos anteriormente, debemos encontrar una función $g(x)$ tal que $g(x) \in [-2, -1]$, para este ejemplo encontramos

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= 0 \\ x^3 &= x - 1 \\ \sqrt[3]{x^3} &= \sqrt[3]{x - 1} \\ x &= \sqrt[3]{x - 1} \end{aligned}$$

De tal manera que $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Esta función presenta problemas computacionalmente. Python, Pascal y algunas calculadoras no calculan de forma correcta esta función en los números reales. Para resolver este problema vamos a factorizar el menos dentro de la raíz, así

$$g(x) = -\sqrt[3]{1 - x}$$

De esta forma ya podemos calcular el método del punto fijo. Al aplicar el método obtenemos los siguientes datos.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	-1.5	1
2	-1.5	0.142791191702547
3	-1.35720880829745	0.0263478494960256
4	-1.33086095880143	0.00497718456907981
5	-1.32588377423235	0.000944410830463038
6	-1.32493936340188	0.000179352109182407
7	-1.3247600112927	$3.40660658153524E-5$
8	-1.32472594522689	$6.47069252313059E-6$
9	-1.32471947453436	$1.22908542810052E-6$
10	-1.32471824544894	$2.33460738963132E-7$

3.3.4 Observaciones

- El método anterior converge más rápidamente que el método de la bisección ya que aproximadamente en cada iteración "ganamos" una cifra significativa del valor $\hat{x}$,es decir, observemos que en la iteración n, existe una constante c_n, $0 < c_n < 10$, tal que

$$|x_n - x_{n-1}| \approx c_n \cdot 10^{n-2}$$

- La velocidad de convergencia de la sucesión x_n será aproximadamente equivalente a la velocidad de convergencia de la sucesión k^n, donde k recordemos que es la constante tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [a,b]$. En el ejemplo que estamos desarrollando, recordemos que k valía: $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$. Por tanto, la sucesión $(x_n)_n$ tendrá una velocidad de convergencia equivalente a la velocidad de convergencia de la sucesión $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$

Ejercicio 3:

Considere la sucesión anterior $(x_n)_n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$. Desarrolle un *programa* en **Python** que grafique esta sucesión para los primeros n valores

Programa de Google Colab

Este programa se ha desarrollado usando Google Colab. Para ver el programa haz clic en el logo.

Al graficar esta sucesión tenemos el siguiente resultado

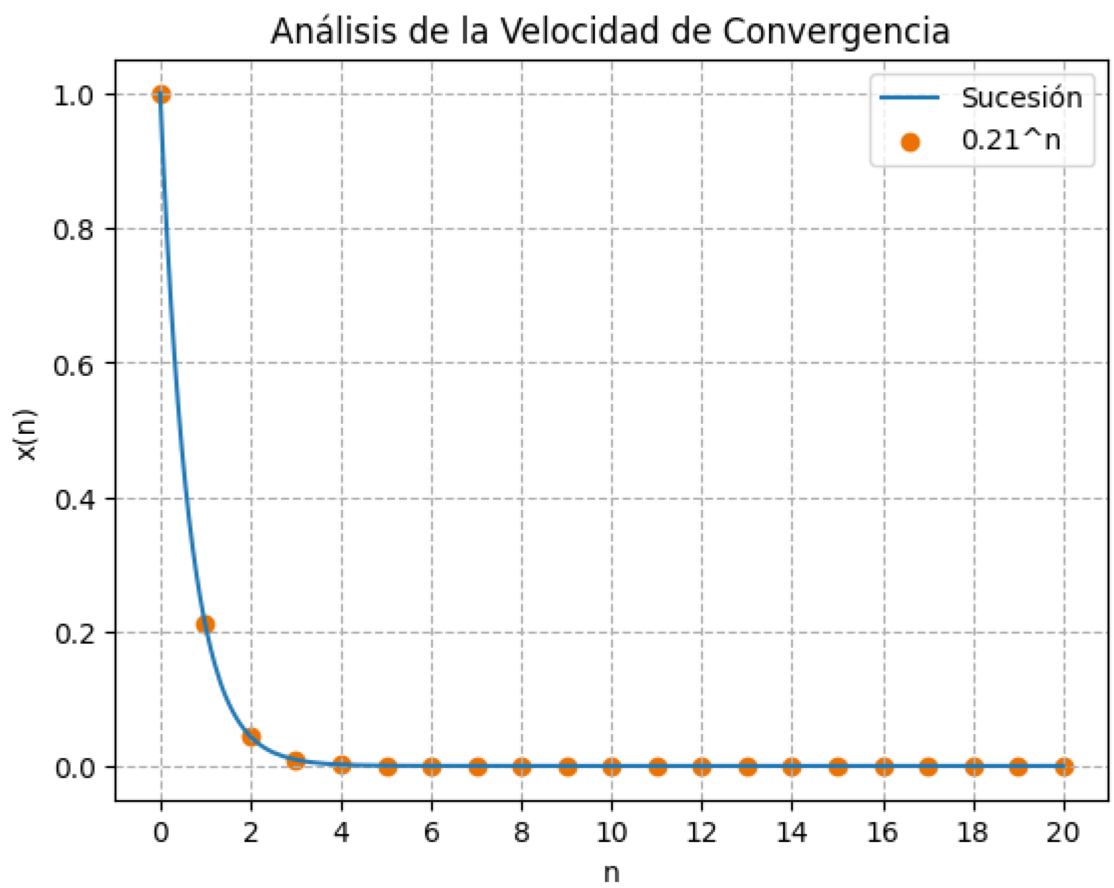

Figura 3.5: Gráfica de la sucesión $(x_n)_n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$

Ejercicio 4:

Construya un *programa* en **Python** que defina una función llamada ***punto_fijo*** que reciba como argumentos, el valor inicial x_0, la tolerancia tol, el número máximo de iteraciones n_max y la función a evaluar.

Programa de Google Colab

Este programa se ha desarrollado usando Google Colab. Para ver el programa haz clic en el logo.

3.3.5 Estimación del Error Cometido

En la demostración del Teorema del Punto Fijo vimos una estimación del error cometido con la aproximación x_n con respecto al punto fijo $\hat{x}$:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot |x_0 - \hat{x}|$$

Dicha estimación no es útil ya que al no conocer $\hat{x}$,tampoco conocemos $|x_0 - \hat{x}|$.

La proposición siguiente nos da una estimación del error $|x_n - \hat{x}|$ en función de los extremos del intervalo $[a, b]$, x_0 y de x_1 que son valores conocidos.

Proposición de la Estimación del Error Cometido

En las condiciones del **Teorema del Punto Fijo**, se cumple:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot \max\{x_0 - a, b - x_0\}, |x_n - \hat{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|$$

para todo $n \geq 1$, si $x_0 \in [a, b]$

Demostración

En la demostración del Teorema del Punto Fijo vimos que:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot |\hat{x} - x_0|,$$

pero como $x_0, \hat{x} \in [a, b]$, podemos considerar dos casos:

- $a \leq \hat{x} \leq x_0$. En este caso $|\hat{x} - x_0| \leq x_0 - a \leq \max\{x_0 - a, b - x_0\}$

❍ $x_0 \leq \hat{x} \leq b$. En este caso $|\hat{x} - x_0| \leq b - x_0 \leq \max\{x_0 - a, b - x_0\}$

Por tanto queda demostrada la primera desigualdad.

Para demostrar la segunda, primero acotamos $|x_{n+1} - x_n|$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
&|x_{n+1} - x_n| \\
=&|g(x_n) - g(x_{n-1})| \\
\leq& k \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq k^2 \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq k^n \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Si $n \geq 1$. Por tanto, si $m > n \geq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq k^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + k^{m-2} \cdot |x_1 - x_0| + \cdots + k^n \cdot |x_1 - x_0| \\
&= k^n \cdot |x_1 - x_0| \left(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}\right)
\end{aligned}$$

Como la expresión anterior es cierta para toda $m > n$, haciendo $m \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|\hat{x} - x_n| &\leq k^n \cdot |x_1 - x_0| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\
&= k^n \cdot |x_1 - x_0| \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

y ya tenemos demostrada la segunda desigualdad.

Definición 2: Sucesión de Cauchy

Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ se dice que es de **Cauchy** si para todo número real positivo ε (epsilon) existe un número natural **N** tal que para todos los números naturales $m, n > N$, se cumple que:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Definición 3: Serie Geométrica

Una serie **geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. En otras palabras, es una serie donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante llamada razón (generalmente denotada por r). Una serie geométrica se expresa generalmente como:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

donde a es el primer término de la serie, r es la razón común y n es el índice de la suma.

Una serie geométrica converge (es decir, la suma de sus términos tiene un valor finito) si y solo si el valor absoluto de la razón r es menor que uno (1),

$$|r| < 1$$

❍ Si $|r| < 1$, la suma de la serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 5:

Apliquemos las desigualdades anteriores a los datos de nuestro ejemplo.

Considerando la primera desigualdad, el valor de

$$\text{máx}\left\{x_0 - a, b - x_0\right\}$$

será en nuestro caso:

$$\begin{aligned}\text{máx}\left\{x_0 - a, b - x_0\right\} &= \text{máx}\left\{-1.5 - (-2), -1 - (-1.5)\right\} \\ &= \text{máx}\left\{0.5, 0.5\right\} = 0.5\end{aligned}$$

Recordemos que $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$
Veamos,

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$k^n \cdot \lvert x_n - x_{n-1}\rvert = 0.5 \cdot k^n$	$\frac{k^n}{1-k} \cdot \lvert x_1 - x_0\rvert$
2	-1.50000	0.14279	0.10499	0.03795
3	-1.35721	0.02635	0.02205	0.00797
4	-1.33086	0.00498	0.00463	0.00167
5	-1.32588	0.00094	0.00097	0.00035
6	-1.32494	0.00018	0.00020	0.00007