Clase 9

Ceros de Funciones de una Variable

9.1 El Método de la Secante

El método de **Newton-Rapson** es un método muy potente pero tiene un inconveniente: necesitamos conocer la función derivada $f'(x)$.

En muchos problemas de análisis numérico, dicho conocimiento es un *lujo*. Sabemos cómo evaluar la función f pero no hay forma de tener una expresión de la función f'. En estos casos, el **método de Newton-Rapson** no es aplicable.

Para resolver esta dificultad, podemos usar el cociente incremental como una aproximación a $f'(x_{n-1})$

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

si x_{n-2} y x_{n-1} están aproximados, la aproximación anterior tendrá poco error.

Si sustituimos la expresión anterior de $f'(x_{n-1})$ en el método de Newton-Rapson, obtenemos el denominado **Método de la Secante**:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}} = x_{n-1} - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

9.1.1 Pasos del Método

El método de la secante también puede deducirse siguiendo los pasos siguientes:

- Dados los puntos $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, consideremos la recta que pasa por dichos puntos de ecuación:

$$y - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1} - f(x_{n-2}))}{x_{n-1} - x_{n-2}} \cdot (x - x_{n-1})$$

- Hallamos la intersección de dicha recta con el eje X resolviendo $y = 0$ y el punto de intersección será el punto siguiente de la sucesión x_n :

$$y = 0, \Rightarrow x = x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

  obteniendo la misma expresión que anteriormente teníamos.

Ejercicio 1:

Crear un *programa* en **Python** que muestre el proceso gráfico del Método de la Secante con la función $f(x) = e^{-x} - \dfrac{2}{x} + 1$

En el gráfico anterior vemos cómo funciona el método de la secante:

- Hemos considerado $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$. Hallando la recta que pasa por los puntos $(0.5, f(0.5))$ y $(1, f(1))$ y viendo dónde corta el eje de las X,
- Hacemos lo mismo con los puntos $(x_1, f(x_1)) = (1, f(1))$ y $(x_2, f(x_2))$, es decir, hallamos la recta que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(x_2, f(x_2))$ y viendo dónde corta el eje de las X, hallamos el nuevo punto de la sucesión x_3
- Y así sucesivamente, hasta llegar a una aproximación del cero $\hat{x}$

9.1.2 Código de Programa

A continuación se presenta el código desarrollado en Python para aplicar el **Método de la Secante**

```python
# Definir la función Secante
def Secante(x_0, x_1, Tol, maxItera, funcion):

    """
    ## ***Función***: Secante
    - **Descripción:** Calcula el cero de una función
      aplicando el método de la secante
    - **Parámetros:**
        - *x_0:* Valor inicial
        - *x_1:* Valor cercano al inicial
        - *Tol:* Tolerancia aceptada para el cálculo del
          cero
        - *funcion:* Función a la cual queremos calcular
          el cero de la función
    - **Valor de Retorno:**
        - El cero de la función
        - Tabla con la sucesión de términos encontrados
    """

    # Aplicar la fórmula de la secante
    y_0 = funcion(x_0)
    y_1 = funcion(x_1)

    # Definir las sucesiones a estudiar
    x_n = [x_0, x_1]
    f_xn = [np.abs(y_0), np.abs(y_1)]
    d_xn = [1, np.abs(x_1 - x_0)]

    # Crear el ciclo para calcular recursivamente el
      valor de la raíz o cero de la función
    for n in range(2, maxItera):

        x = x_1 - (y_1*(x_1 - x_0)) / (y_1 - y_0)

        # Determinar si la sucesión de terminos ha
          llegado a la convergencia deseada
        if np.abs(x - x_1) <= Tol:
```

```
            # Se devuelve el valor del cero
            x_n.append(x)
            f_xn.append(np.abs(funcion(x)))
            d_xn.append(np.abs(x - x_1))

            s_n = {
                "x_n": x_n,
                "f_xn": f_xn,
                "d_xn": d_xn
            }
            df = pd.DataFrame(s_n)
            return x, df

        # Actualizar los valores de las sucesiones
        x_0 = x_1
        x_1 = x
        y_0 = y_1

        y_1 = funcion(x)

        # Agregar los valores a las sucesiones
        x_n.append(x_1)
        f_xn.append(np.abs(y_1))
        d_xn.append(np.abs(x_1 - x_0))

    s_n = {
            "x_n": x_n,
            "f_xn": f_xn,
            "d_xn": d_xn
        }
    df = pd.DataFrame(s_n)

    print("El algoritmo no alcanzo la convergencia deseada con los pasos establecidos")
    return x, df
```

Ejercicio 2:

Aplicar el **Método de la Secante** para calcular la raíz/cero de la función siguiente

$$f\left(x\right) = e^{-x} - \frac{2}{x} + 1$$

con condiciones iniciales $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = 1$

Al aplicar el método podemos observar las sucesiones generadas a través de la siguiente tabla

Raíz: 1.6878939979865044

	x_n	f_xn	d_xn
0	0.500000	2.393469e+00	1.000000
1	1.000000	6.321206e-01	0.500000
2	1.179442	3.882667e-01	0.179442
3	1.465152	1.340033e-01	0.285710
4	1.615728	3.908607e-02	0.150576
5	1.677734	5.287212e-03	0.062006
6	1.687434	2.379934e-04	0.009700
7	1.687891	1.512700e-06	0.000457
8	1.687894	4.353786e-10	0.000003

Figura 9.1: Tabla de datos generados en el **Método de la Secante**