Capítulo 3

Ceros de Funciones de una Variable

3.1 Introducción

Cuando hablamos de los ceros de una función, podemos acercarnos a un tipo de funciones muy conocidas y son los polinomios. Los polinomio tienen la forma

$$P_n\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Teorema 1:

Todo polinomio con coeficientes reales puede ser factorizado como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles, donde:

- **Factores Lineales:** Son de la forma $(x - r)$, donde r es una raíz real del polinomio.
- **Factores Cuadráticos Irreducibles:** Son de la forma ax^2+bx+c, donde a, b y c son coeficientes reales, y el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Estos factores no tienen raíces reales.

Ejemplo 1:

Calcular el polinomio de grado tres (3) que tiene raíces en $x = 2$, $x = 3$ y $x = 5$

Para encontrar este polinomio simplemente tenemos

$$\begin{aligned} P_3(x) &= (x-2)(x-3)(x-5) \\ &= \left(x^2 - 3x - 2x + 6\right)(x-5) \\ &= \left(x^2 - 5x + 6\right)(x-5) \\ &= x^3 - 5x^2 - 5x^2 + 25x + 6x - 30 \\ &= x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \end{aligned}$$

Ejercicio 1:

Crear un *programa* en **Python** que grafique el polinomio $P_3(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ para $x \in [1, 6]$

```python
# Importar las librerias necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir el polinomio
def poly(x):
    return x**3 - 10*x**2 + 31*x - 30

# Crear el dominio de graficación
x = np.linspace(1, 6, 100)

# Evaluar el polinomio en x
y = poly(x)

# Graficar y configurar la gráfica
plt.plot(x, y)
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$P_n(x)$')
plt.title('Gráfico del Polinomio $P_n(x)$')
plt.grid(linestyle='--')
plt.show()
```

Archivo de Programa

El
archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-003-Solucion-Ecuaciones-Una-Variable\Programas\Grafica-Polinomio.ipynb*

La gráfica del polinomio se presenta en la siguiente imagen.

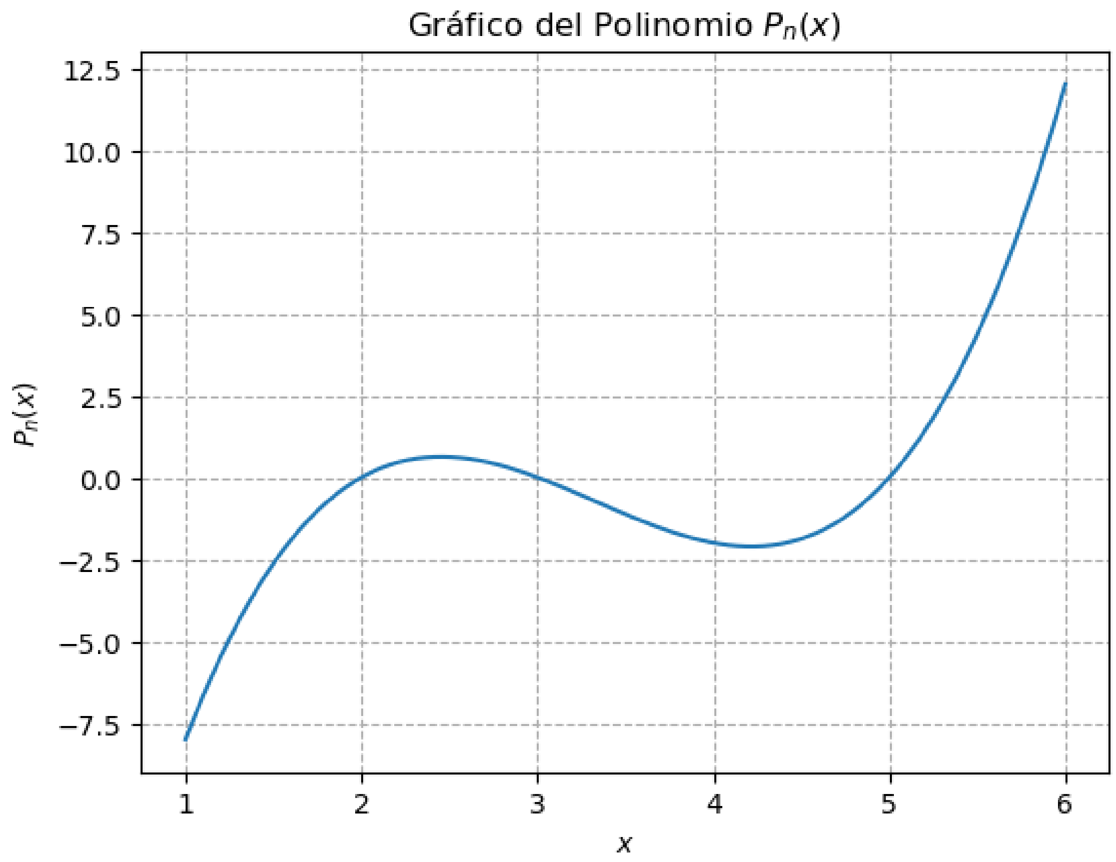

Figura 3.1: Gráfica del Polinomio $P_3(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

En muchos problemas de ingeniería, inteligencia artificial u otras disciplinas afines tenemos que resolver ecuaciones del tipo $f(x) = 0$, donde f es una función que dada una cantidad x nos devuelve $f(x)$.

El valor $\hat{x}$ que cumple que $f(\hat{x}) = 0$ se le llama **solución** de la ecuación, **raíz de la función** o **cero** de la misma. Como vimos en la introducción, en el caso de $P_3(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ podemos verificar que $\hat{x}_1 = 2$, $\hat{x}_2 = 3$ y $\hat{x}_3 = 5$ ya que al evaluar estos valores en la función da como resultado cero (se puede comprobar sobre la gráfica anterior)

En dichos problemas, **saber explícitamente la función f en muchos casos no es posible**, solo tenemos un algoritmo que dado x, nos devuelve $f(x)$.

Entonces, dependiendo de nuestro conocimiento de la función f, podremos aplicar un método numérico u otro.

Todos los métodos numéricos que hallan aproximaciones de ceros construyen una sucesión $(x_n)_n$ que queremos que converja hacia el cero $\hat{x}$ de la función f.

Cuanto mayor sea la velocidad de convergencia de la sucesión $(x_n)_n$, mejor será el método usado.

3.2 Método de la Bisección

Vamos a empezar por el algoritmo menos óptimo de la serie de algoritmos para encontrar los ceros de una función. El método de la bisección no es óptimo pero asegura la convergencia.

El método está basado en el **Teorema de Bolzano** donde recordemos que dice que si la función f es continua y tenemos dos valores a y b $(a < b)$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, o sea, hay un cambio de signo entre a y b o en el intervalo (a, b), podemos asegurar que existe un valor $\hat{x}$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

El método, también llamado método de los intervalos encajados, va construyendo una sucesión de intervalos encajados:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots ,$$

tal que el cero $\hat{x}$ siempre está en todos los intervalos $[a_n, b_n]$ y la longitud de cada intervalo $[a_n, b_n]$ vale $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.De esta manera el cero $\hat{x}$ se calcula de la forma más precisa.

3.2.1 ¿Cómo se construyen los intervalos $[a_n, b_n]$?

El primer intervalo $[a_0, b_0]$ vale

$$[a_0, b_0] = [a, b]$$

A continuación, sea $c = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ el punto medio del intervalo $[a_0, b_0]$.

Si $f(a_0) \cdot f(c) < 0$, consideremos $b_1 = c$ y $[a_1, b_1] = [a_0, c]$ y si $f(b_0) \cdot f(c) < 0$, consideramos $a_1 = c$ y $[a_1, b_1] = [c, b_0]$.

En general, veamos cómo construir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ en función del intervalo $[a_n, b_n]$. Observemos que se cumplirá siempre que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

Sea $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ el punto medio del intervalo $[a_n, b_n]$. Si $f(a_n) \cdot f(c) < 0$, consideremos $b_{n+1} = c$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c]$, y si $f(b_n) \cdot f(c) < 0$, consideremos $a_{n+1} = c$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c, b_n]$

3.2.2 Descripción Gráfica

En la siguiente gráfica se presenta el comportamiento del método de la bisección.

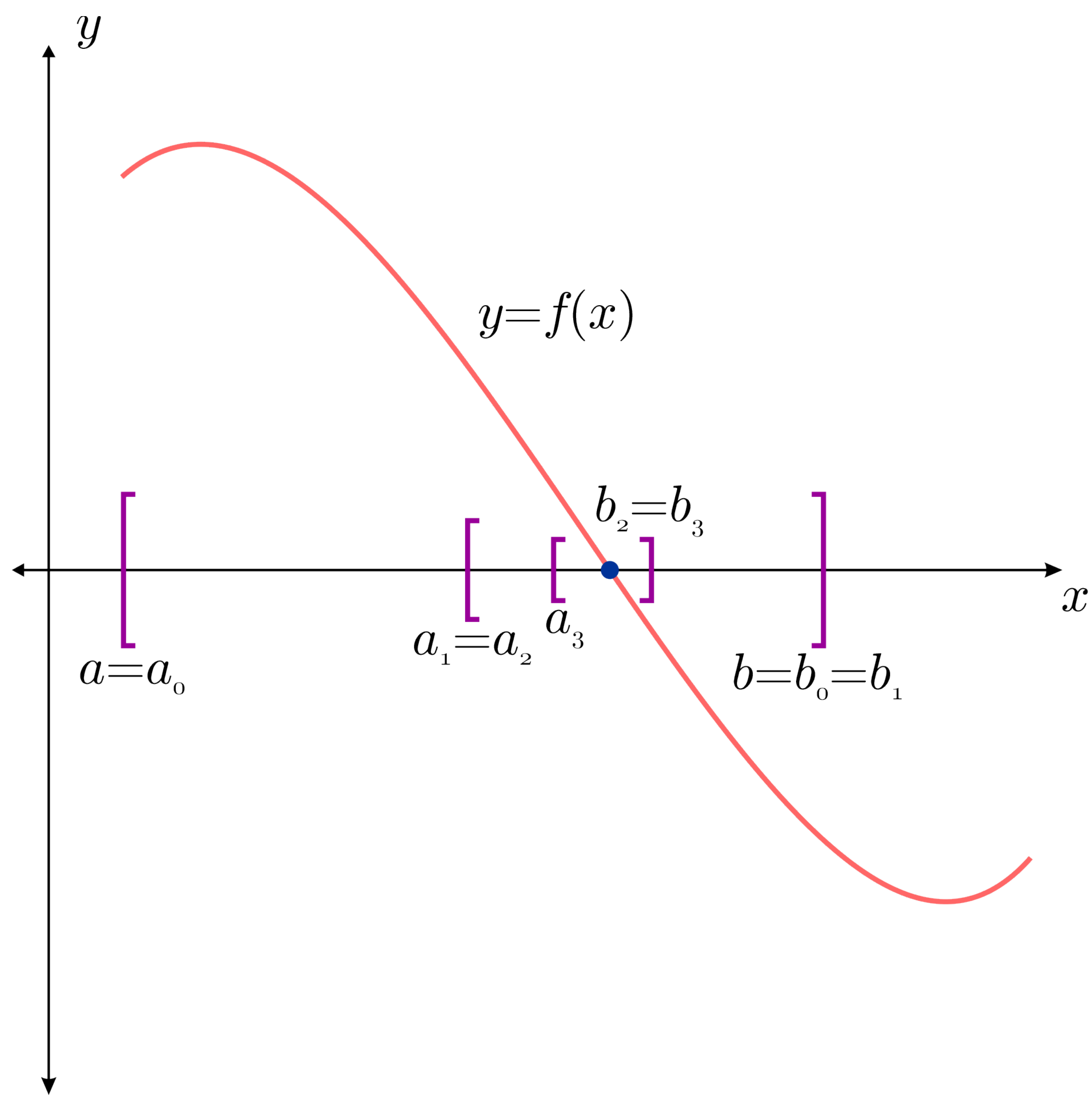

Figura 3.2: Método de la Bisección

3.2.3 Código 1

```
# Importar las librerias necesarias
import numpy as np

# Definir la función Biseccion
def Biseccion(funcion, a, b, tol, console=False):

    """
```

```
    ## ***Función:*** Biseccion
    - **Descripción:** Calcula la raíz o cero de la
      función $f$ en el intervalo dado $[a,b]$ con una
      tolerancia dada.
    - **Parámetros:**
        - *funcion:* Función a la cual se le quiere
          calcular la raíz o cero
        - *a:* inicio del intervalo de evaluación
        - *b:* fin del intervalo de evaluación
        - *tol:* Máximo error permitido entre la
          aproximación de la raíz y el valor real.
        - *console:* Valor booleano que permite (si True
          ) mostrar los mensajes de procesamiento de la
          función
    """

    # Evaluar la función en el punto medio
    c = (a + b) / 2
    feval = funcion(c)

    # Mientras el punto medio del intervalo no cumpla
      con la condición de cero aproximado
    while abs(feval) >= tol:

        # Determinar el comportamiento de la función
        if funcion(a)*funcion(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c

        # Evaluar la función en el punto medio
        c = (a + b) / 2
        feval = funcion(c)

        if console:
            print("|f(c)| = ", abs(feval))
            print("[a,b] = [",a,",",b,"]")
```

```

    # Damos como valor aproximado del cero el último
      valor de c hallado
    return c

# ### Pruebas
# Probar la función de bisección para calcular la raíz
  de la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ en el
  intervalo para $x\in[1,4]$

# Probar la función
def f(x):
    return np.sin(x) + np.cos(x)

x = Biseccion(f, 1, 4, 1e-3, console=True)
print("Raíz: ",x)
```

Archivo de Programa

El archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-003-Solucion-Ecuaciones-Una-Variable\Programas\Metodo-Biseccion-1.ipynb*

3.2.4 Intervalos encajados

La sucesión $(x_n)_n$ del método de la bisección serán los puntos medios de los intervalos encajados, $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Como $x_n, \hat{x} \in [a_n, b_n]$ tendremos que $|x_n - \hat{x}| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Por tanto el orden de convergencia de la sucesión $(x_n)_n$ será la de la sucesión $\frac{1}{2^n}$:

$$|x - \hat{x}| \leq K \cdot \frac{1}{2^n}$$

con $K = b - a$

3.2.5 Código 2

```python
# Definir la función Biseccion
def Biseccion(funcion, a, b, tol, console=False):

    """
    ## ***Función:*** Biseccion
    - **Descripción:** Calcula la raíz o cero de la función $f$ en el intervalo dado $[a,b]$ con una tolerancia dada.
    - **Parámetros:**
        - *funcion:* Función a la cual se le quiere calcular la raíz o cero
        - *a:* inicio del intervalo de evaluación
        - *b:* fin del intervalo de evaluación
        - *tol:* Máximo error permitido entre la aproximación de la raíz y el valor real.
        - *console:* Valor booleano que permite (si True) mostrar los mensajes de procesamiento de la función
    """

    # Calculamos el valor x0 (inicial)
    x = (a + b) / 2

    # Definimos el siguiente valor de la sucesión. Agregando un 1 nos aseguramos que entre en el ciclo while
    y = x + 1

    # Crear el ciclo condicional para calcular los intervalos. Mientras el punto medio del intervalo
    # no cumpla con la condición de cero aproximadoo
    while abs(x - y) >= tol:

        # Calculamos el punto medio
        x = (a + b ) / 2

        # Determinar el comportamiento de la función
```

```
        if funcion(a)*funcion(x) < 0:
            # Se define el nuevo b como x
            b = x
        else:
            # Se define el nuevo a como x
            a = x

        # Calcular el nuevo valor de y
        y = (a + b) / 2

        if console:
            print("x = ", x, "; y = ", y)

    # Damos como valor aproximado del cero el último
      valor de x hallado
    return x
```

3.2.6 Criterios de parada

¿Cuál de los dos métodos de parada es el mejor?

Los dos métodos son equivalentes pero en el caso en que evaluar la función f sea muy costoso es mejor usar el segundo método de parada ya que nos evita una evaluación de la función f.

En cambio, si evaluar la función f no es costoso, podemos usar cualquiera de los dos métodos indistintamente.

Ejemplo 2:

Aproximar el cero de la función $f(x) = x^3 - x + 1$ entre $x = -2$ y $x = -1$, o sea, aproximar el valor $\hat{x} \in (-2, -1)$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}^3 - \hat{x} + 1 = 0$.

Comprobemos que hay un cambio de signo entre $x = -2$ y $x = -1$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - (-2) + 1 \\ &= -8 + 2 + 1 = -5 \\ f(-1) &= (-1)^3 - (-1) + 1 \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Aplicando el método de bisección, obtenemos los valores siguientes:

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$\lvert f(x_n) \rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	-2	-1	-1.5	0.875	1
1	-1.5	-1	-1.5	0.875	0.25
2	-1.5	-1.25	-1.25	0.296875	0.125
3	-1.375	-1.25	-1.375	0.224609375	0.0625
4	-1.375	-1.3125	-1.3125	0.051513671875	0.03125
5	-1.34375	-1.3125	-1.34375	0.082611083984375	0.015625
6	-1.328125	-1.3125	-1.328125	0.0145759582519531	0.0078125
7	-1.328125	-1.3203125	-1.3203125	0.0187106132507324	0.00390625
8	-1.328125	-1.32421875	-1.32421875	0.00212794542312622	0.001953125
9	-1.326171875	-1.32421875	-1.326171875	0.00620882958173752	0.0009765625
10	-1.3251953125	-1.32421875	-1.3251953125	0.00203665066510439	0.00048828125
11	-1.3251953125	-1.32470703125	-1.32470703125	$4.65948833152652E-5$	0.000244140625
12	-1.324951171875	-1.32470703125	-1.324951171875	0.000994790971162729	0.0001220703125
13	-1.3248291015625	-1.32470703125	-1.3248291015625	0.000474038819447742	6.103515625E-5

Observaciones

- Vemos que el método, tal como se comento anteriormente, es lento. Por ejemplo, para pasar de un error menor que 0.1 a un error menor que 0.01, usando el método de parada $\lvert f(x_n) \rvert < \epsilon$, necesitamos cuatro iteraciones (de la iteración $n = 3$ a la iteración $n = 7$), o sea, necesitamos cuatro iteraciones para "ganar" una cifra significativa en la aproximación del cero.

- Los dos criterios de parada (dos últimas columnas) son equivalentes en el sentido que necesitan aproximadamente el mismo número de iteraciones para que se "gane" una cifra significativa en el cero. Además los valores que se obtienen con los dos criterios son del mismo orden, es decir, que si en la iteración n, $\lvert f(x_{10}) \rvert \approx 4.7 \times 10^{-5}$ y $\lvert x_{10} - x_9 \rvert \approx 4.9 \times 10^{-5}$

3.3 Método del Punto Fijo

El **método del punto fijo** consiste en transformar la ecuación $f(x) = 0$ en la ecuación $x = g(x)$ mediante **operaciones algebraicas "básicas"**.

Entonces el **cero** de la ecuación $f(x) = 0$ se transforma en lo que llamaremos un **punto fijo** de la función $g(x)$:

Definición 1: Definición de Punto Fijo

Sea g una función real de variable real. Diremos que $\hat{x}$ es un punto fijo de la función g si $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Observación

Gráficamente, un **punto fijo** resulta de la intersección de la recta diagonal $y = x$ y de la función $y = g(x)$

La idea es considerar la sucesión definida de forma recurrente como $x_n = g(x_{n-1})$ y ver bajo qué condiciones la sucesión $(x_n)_n$ converge hacia el **punto fijo** $\hat{x}$ de g que recordemos será el **cero** de la función f buscado.

Ejemplo 3:

Para resolver la ecuación anterior $x^3 - x + 1 = 0$, podemos realizar las siguientes transformaciones;

$$\begin{aligned}
x^3 - x + 1 = 0, &\Rightarrow x = x^3 + 1 = g_1(x) \\
x^3 - x + 1 = 0, &\Rightarrow x^3 = x - 1 \\
&\Rightarrow x = \sqrt[3]{x - 1} = g_2(x)
\end{aligned}$$

Entonces hallar un punto fijo de la función g_1 o g_2 es equivalente a hallar un cero de la función $f(x) = x^3 - x + 1$

Ejercicio 2:

Crear un *programa* en **Python** que grafique las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

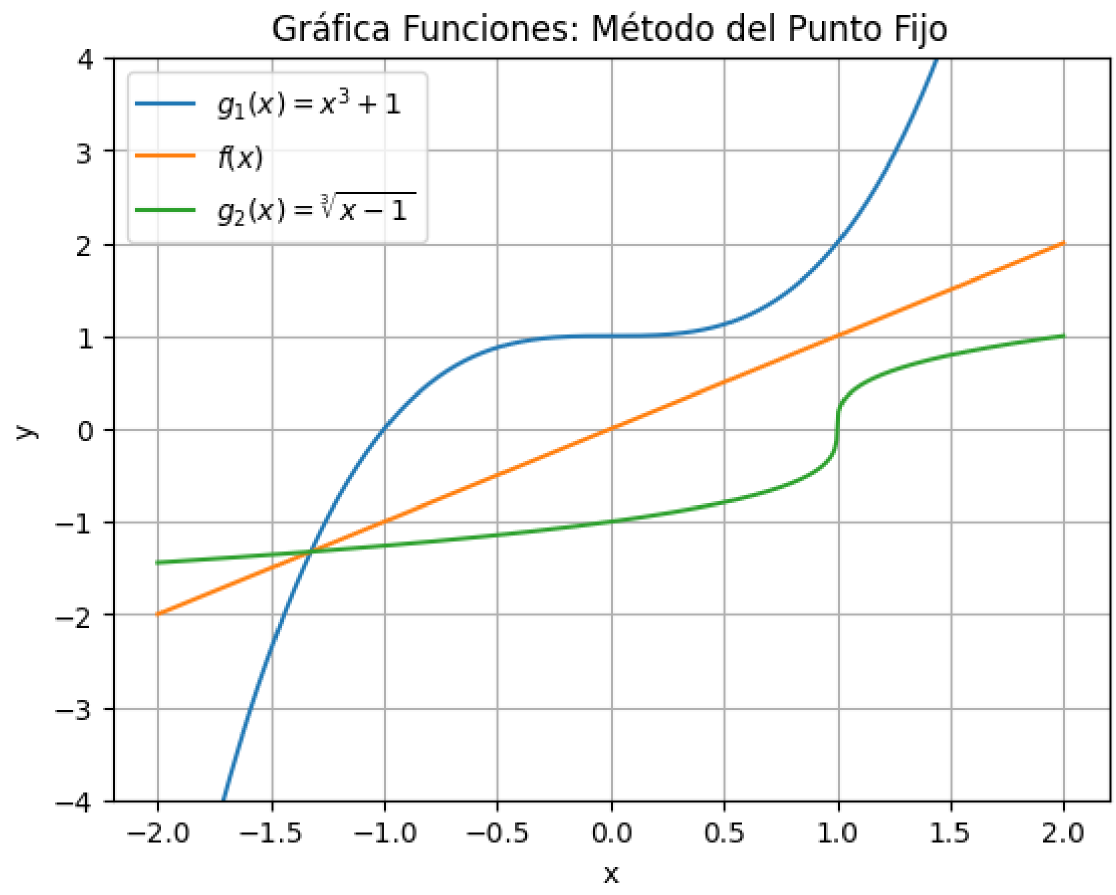

Figura 3.3: Resultado del Gráfico Generado con Python del Ejercicio Anterior

3.3.1 Existencia del Punto Fijo

El teorema siguiente nos dice cuáles son las condiciones de existencia del punto fijo de una función g:

Teorema 2:

- Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$ una función continua dentro un intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ es decir, la función g esta definida de la forma siguiente:

$$g : [a,b] \to [a,b]$$

  Entonces g tiene al menos un **punto fijo** $\hat{x}$ en el intervalo $[a,b]$, es decir, existe $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

- Si además $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tal que existe una constante $k < 1$ con $|g'(x)| \leq k$, para todo valor $x \in (a,b)$. Entonces el punto fijo en el intervalo es único, es decir, existe un único $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$

Demostración

Supongamos que $g\left(x\right)\in\left[a,b\right]$, para todo $x\in\left[a,b\right]$. Consideremos la función $h\left(x\right)=g\left(x\right)-x$.

El valor de $h\left(a\right)$ cumple $h\left(a\right)=g\left(a\right)-a\geq0$, ya que $g\left(a\right)\geq a$ al cumplirse $g\left(a\right)\in\left[a,b\right]$.

Si $h\left(a\right)=0$,ya hemos acabado ya que en este caso, $g\left(a\right)=a$ y el punto fijo buscado sería $\hat{x}=a$. Por tanto, suponemos que $h\left(a\right)>0$.

El valor de $h\left(b\right)$ cumple $h\left(b\right)=g\left(b\right)-b\leq0$, ya que $g\left(b\right)\leq b$ al cumplirse $g\left(b\right)\in\left[a,b\right]$.

Si $h\left(b\right)=0$, ya hemos acabado ya que en este caso, $g\left(b\right)=b$ y el punto fijo buscado sería $\hat{x}=b$. Por tanto, suponemos que $h\left(b\right)<0$.

Por tanto $h\left(a\right)>0$ y $h\left(b\right)<0$, y como h es continua, usando el Teorema de Bolzano, existe un valor $\hat{x}\in\left(a,b\right)$ tal que $h\left(\hat{x}\right)=0$, o lo que es lo mismo, $g\left(\hat{x}\right)=\hat{x}$.

En resumen, siempre existe un valor $\hat{x}\in\left[a,b\right]$ tal que $g\left(\hat{x}\right)=\hat{x}$, tal como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que además $\left|g'\left(x\right)\right|\leq k<1$, para todo $x\in\left[a,b\right]$. Veamos que el punto fijo $\hat{x}$ es único.

Supongamos que existen dos puntos fijos $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ con $\hat{x}_1<\hat{x}_2$. Si aplicamos el teorema del valor medio a la función g tenemos que existe un valor $c\in\left(\hat{x}_1,\hat{x}_2\right)$ tal que:

$$\hat{x}_2-\hat{x}_1=g\left(\hat{x}_2\right)-g\left(\hat{x}_1\right)=g'\left(c\right)\left(\hat{x}_2-\hat{x}_1\right)$$

Por tanto,

$$\hat{x}_2-\hat{x}_1=\left|g\left(\hat{x}_2\right)-g\left(\hat{x}_1\right)\right|=\left|g'\left(c\right)\right|\left(\hat{x}_2-\hat{x}_1\right)\leq k\left(\hat{x}_2-\hat{x}_1\right)<\hat{x}_2-\hat{x}_1$$

Llegamos a una contradicción ya que un número $\hat{x}_2-\hat{x}_1$ no puede ser menor estrictamente que él mismo. Por tanto, nuestra suposición es falsa y $\hat{x}_1=\hat{x}_2$, tal como queríamos ver.

Ejemplo

Sigamos con el ejemplo anterior, considerando las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Observando el gráfico de las funciones anteriores se observa que $g_2(x) \in [-2,-1]$ si $x \in [-2,-1]$ ya que:

$$\begin{aligned} & -2 \leq x \leq -1 \\ \Leftrightarrow & -3 \leq x-1 \leq -2 \\ \Leftrightarrow & -2 < -1.442 \approx \sqrt[3]{-3} \leq \sqrt[3]{x-1} \leq \sqrt[3]{-2} \approx -1.26 < -1 \end{aligned}$$

En cambio, con la función $g_1(x) = x^3+1$, no es cierto que $g_1(x) \in [-2,-1]$ si $x \in [-2,-1]$ como puede observarse en el gráfico.

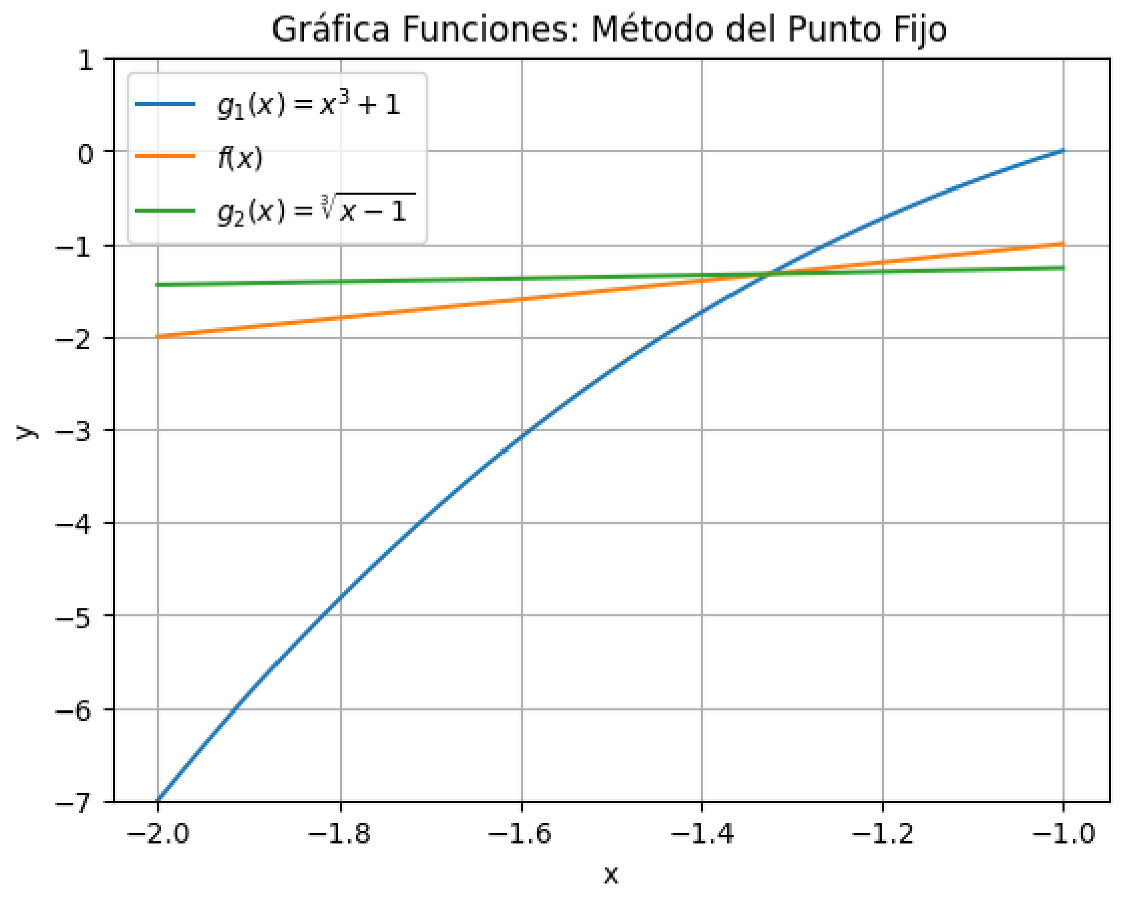

Figura 3.4: Gráfica de las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Sólo podemos aplicar el teorema anterior a la función $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Veamos si además podemos asegurar su unicidad:

$$g_2'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

si

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$0.16 \approx \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$$

Entonces existe un valor $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$ tal que $|g_2'(x)| \leq k$, para todo $x \in [-2, -1]$. Por tanto, usando el teorema anterior, podemos asegurar que el punto fijo $\hat{x}$ es único.

3.3.2 Teorema del Punto Fijo

Para resolver la ecuación $x = g(x)$ o para hallar un punto fijo de la función g, definimos la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$. El teorema siguiente nos dice bajo que condiciones la sucesión anterior converge hacia el punto fijo $\hat{x} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$.

Teorema 3: Teorema del Punto Fijo

Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$ una función continua dentro del intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$. Supongamos, además, que existe $g'(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y que existe una constante k, con $0 < k < 1$, tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [a,b]$. Sea $x_0 \in [a,b]$. Definimos la sucesión $(x_n)_n$ de forma recurrente como $x_n = g(x_{n-1})\,,\ n \geq 1$. Entonces x_n converge hacia el único punto fijo $\hat{x}$ de $g(x)$. Es decir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$,con $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración

Es sencillo ver que si la sucesión $(x_n)_n$ converge, lo hace necesariamente hacia el punto fijo $\hat{x}$ ya que como $x_n = g(x_{n-1})$, tomando límites y usando que la función g es continua, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1})\,, \Rightarrow L = g(L)\,,$$

lo que significa que el límite L de la sucesión $(x_n)_n$ es un punto fijo de la función g y como éste es único, $L = \hat{x}$.

Veamos a continuación que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente. Usando el Teorema del Valor Medio tenemos que existe un valor $c_n \in \langle x_n, \hat{x}\rangle$ tal que:

$$|x_n - \hat{x}| = |g(x_{n-1}) - \hat{x}| = |g'(c_n)| \cdot |x_{n-1} - \hat{x}| \leq k \cdot |x_{n-1} - \hat{x}|$$

Aplicando la desigualdad anterior n veces, tenemos que:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k\,|x_{n-1} - \hat{x}| \leq k^2\,|x_{n-2} - \hat{x}| \leq \cdots \leq k^n\,|x_0 - \hat{x}|$$

Aplicando el criterio del "emparedado" tenemos que

$$0 < \lim_{n\to\infty} |x_n - \hat{x}| \leq \lim_{n\to\infty} k^n\,|x_0 - \hat{x}| = 0$$

ya que $0 < k < 1$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} |x_n - \hat{x}|$, condición que equivale a $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, tal como queríamos demostrar.

3.3.3 Código de Programa

```python
# Importar las librerias necesarias
import numpy as np
import pandas as pd

# Definir el método del punto fijo
def PuntoFijo(funcion, x_0, tol, max_iteraciones, console=False):

    """
    ## ***Función***: PuntoFijo
    - **Descripción:** Calcula la raíz de una función cerca de un punto inicial
    - **Parámetros:**
        - *funcion:* Función que queremos resolver
        - *x_0:* Punto inicial del algoritmo
        - *tol:* Valor máximo de convergencia
        - *max_iteraciones:* Número máximo de iteraciones del método
        - *console:* Valor booleano. Permite mostrar mensajes de prueba en la consola
    - **Valor de Retorno:** Raíz/Cero de la Función
    """

```

```python
    # Iniciar el valor de las iteraciones en 1
    iteraciones = 1

    # Definir los arreglos de la raíz y el error
    raiz_ = []
    error_ = []

    # Crear un ciclo condicional que genere las iteraciones desde n=1,...,max_iteraciones
    while iteraciones <= max_iteraciones:
        # Calculamos el siguiente término de la sucesión
        x = funcion(x_0)
        raiz_.append(x)
        error_.append(np.abs(x - x_0))

        # Determinamos si el valor de x_n cumple con la condición de la tolerancia permitida
        if np.abs(x - x_0) < tol:
            # Devolver el resultado y finalizar la ejecución
            if console:
                df = pd.DataFrame({"Raices": raiz_, "Errores": error_})
                print(df)
            return x
        else:
            # Incrementamos el valor de la iteración
            iteraciones = iteraciones + 1

            # Actualizamos el valor de x_0
            x_0 = x

    # Si el código llega a este punto quiere decir que no alcanco la convergencia
    print("El método no alcanzo la convergencia deseada")
    return x
```

```

# ### Ejemplo
#
# Usar el método del punto fijo para calcular el cero de la función $f\left(x\right)=x^{3}-x+1$ en el intervalo donde $x\in\left[-2,-1\right]$

# Definir la función g(x)
def g(x):
    return np.cbrt(x-1)

x = PuntoFijo(g, -1, 1e-5, 20, console=True)
print("Raíz/Cero: ", x)
```

Ejemplo 4:

Usar el método del punto fijo para calcular el cero de la función $f\left(x\right)=x^{3}-x+1$ en el intervalo donde $x\in\left[-2,-1\right]$

Como vimos anteriormente, debemos encontrar una función $g\left(x\right)$ tal que $g\left(x\right)\in\left[-2,-1\right]$, para este ejemplo encontramos

$$\begin{aligned} x^{3}-x+1&=0\\ x^{3}&=x-1\\ \sqrt[3]{x^{3}}&=\sqrt[3]{x-1}\\ x&=\sqrt[3]{x-1} \end{aligned}$$

De tal manera que $g\left(x\right)=\sqrt[3]{x-1}$. Esta función presenta problemas computacionalmente. Python, Pascal y algunas calculadoras no calculan de forma correcta esta función en los números reales. Para resolver este problema vamos a factorizar el menos dentro de la raíz, así

$$g\left(x\right)=-\sqrt[3]{1-x}$$

De esta forma ya podemos calcular el método del punto fijo. Al aplicar el método obtenemos los siguientes datos.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	-1.5	1
2	-1.5	0.142791191702547
3	-1.35720880829745	0.0263478494960256
4	-1.33086095880143	0.00497718456907981
5	-1.32588377423235	0.000944410830463038
6	-1.32493936340188	0.000179352109182407
7	-1.3247600112927	$3.40660658153524E-5$
8	-1.32472594522689	$6.47069252313059E-6$
9	-1.32471947453436	$1.22908542810052E-6$
10	-1.32471824544894	$2.33460738963132E-7$

3.3.4 Observaciones

- El método anterior converge más rápidamente que el método de la bisección ya que aproximadamente en cada iteración “ganamos” una cifra significativa del valor $\hat{x}$,es decir, observemos que en la iteración n, existe una constante c_n, $0 < c_n < 10$, tal que

$$|x_n - x_{n-1}| \approx c_n \cdot 10^{n-2}$$

- La velocidad de convergencia de la sucesión x_n será aproximadamente equivalente a la velocidad de convergencia de la sucesión k^n, donde k recordemos que es la constante tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [a,b]$. En el ejemplo que estamos desarrollando, recordemos que k valía: $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$. Por tanto, la sucesión $(x_n)_n$ tendrá una velocidad de convergencia equivalente a la velocidad de convergencia de la sucesión $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$

Ejercicio 3:

Considere la sucesión anterior $(x_n)_n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$. Desarrolle un *programa* en **Python** que grafique esta sucesión para los primeros n valores

Archivo de Programa

El archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-003-Solucion-Ecuaciones-Una-Variable\Programas\Grafica-Sucesiones-de-Velocidad-de-Convergencia.ipynb*

Al graficar esta sucesión tenemos el siguiente resultado

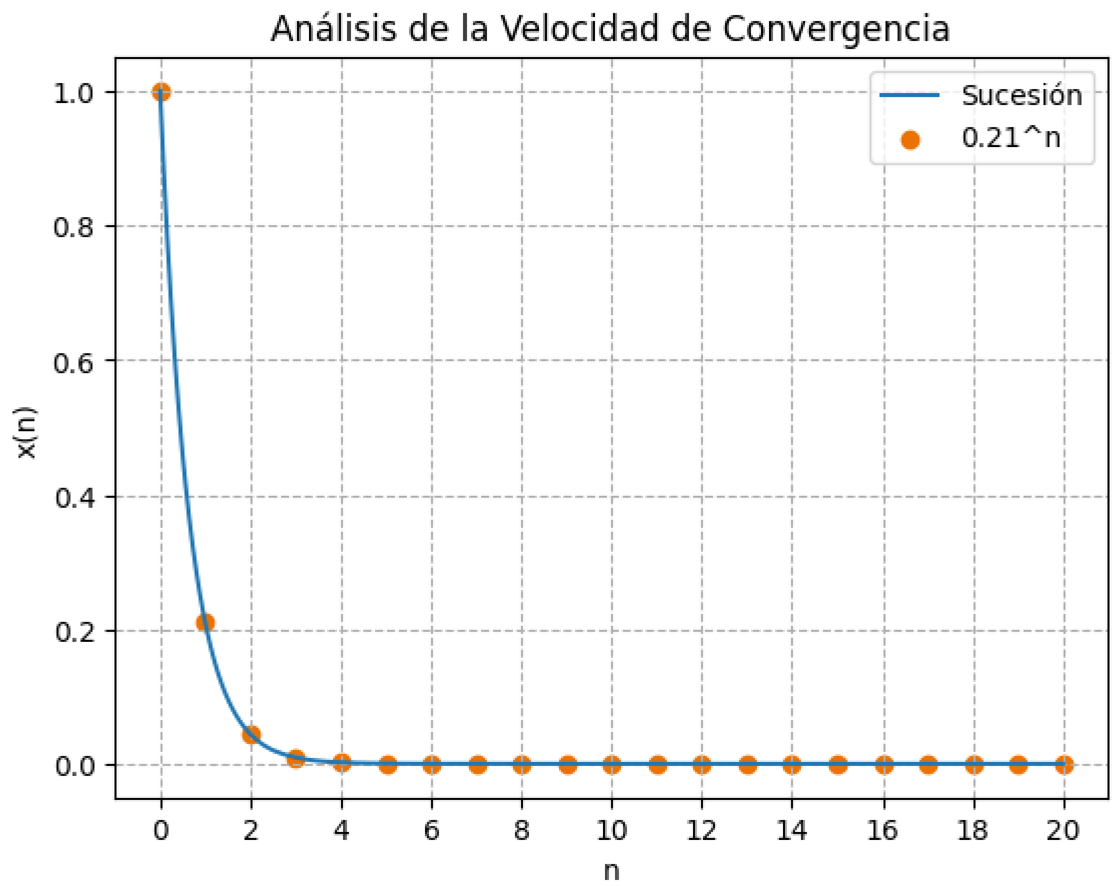

Figura 3.5: Gráfica de la sucesión $(x_n)_n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$

3.3.5 Estimación del Error Cometido

En la demostración del Teorema del Punto Fijo vimos una estimación del error cometido con la aproximación x_n con respecto al punto fijo $\hat{x}$:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot |x_0 - \hat{x}|$$

Dicha estimación no es útil ya que al no conocer $\hat{x}$,tampoco conocemos $|x_0 - \hat{x}|$.

La proposición siguiente nos da una estimación del error $|x_n - \hat{x}|$ en función de los extremos del intervalo $[a, b]$, x_0 y de x_1 que son valores conocidos.

Proposición de la Estimación del Error Cometido

En las condiciones del **Teorema del Punto Fijo**, se cumple:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot \text{máx}\{x_0 - a, b - x_0\}, |x_n - \hat{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|$$

para todo $n \geq 1$, si $x_0 \in [a, b]$

Demostración

En la demostración del Teorema del Punto Fijo vimos que:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot |\hat{x} - x_0|,$$

pero como $x_0, \hat{x} \in [a, b]$, podemos considerar dos casos:

- $a \leq \hat{x} \leq x_0$. En este caso $|\hat{x} - x_0| \leq x_0 - a \leq \text{máx}\{x_0 - a, b - x_0\}$
- $x_0 \leq \hat{x} \leq b$. En este caso $|\hat{x} - x_0| \leq b - x_0 \leq \text{máx}\{x_0 - a, b - x_0\}$

Por tanto queda demostrada la primera desigualdad.

Para demostrar la segunda, primero acotamos $|x_{n+1} - x_n|$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
&|x_{n+1} - x_n| \\
=&|g(x_n) - g(x_{n-1})| \\
\leq& k \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq k^2 \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq k^n \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Si $n \geq 1$. Por tanto, si $m > n \geq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq k^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + k^{m-2} \cdot |x_1 - x_0| + \cdots + k^n \cdot |x_1 - x_0| \\
&= k^n \cdot |x_1 - x_0| \left(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}\right)
\end{aligned}$$

Como la expresión anterior es cierta para toda $m > n$, haciendo $m \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|\hat{x} - x_n| &\leq k^n \cdot |x_1 - x_0| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\
&= k^n \cdot |x_1 - x_0| \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

y ya tenemos demostrada la segunda desigualdad.

Definición 2: Sucesión de Cauchy

Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ se dice que es de **Cauchy** si para todo número real positivo ε (epsilon) existe un número natural **N** tal que para todos los números naturales $m, n > N$, se cumple que:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Definición 3: Serie Geométrica

Una serie **geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. En otras palabras, es una serie donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante llamada razón (generalmente denotada por r). Una serie geométrica se expresa generalmente como:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

donde a es el primer término de la serie, r es la razón común y n es el índice de la suma.

Una serie geométrica converge (es decir, la suma de sus términos tiene un valor finito) si y solo si el valor absoluto de la razón r es menor que uno (1),

$$|r| < 1$$

- Si $|r| < 1$, la suma de la serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Ejemplo 5:

Apliquemos las desigualdades anteriores a los datos de nuestro ejemplo.

Considerando la primera desigualdad, el valor de

$$\text{máx}\{x_0 - a, b - x_0\}$$

será en nuestro caso:

$$\begin{aligned} \text{máx}\{x_0 - a, b - x_0\} &= \text{máx}\{-1.5 - (-2), -1 - (-1.5)\} \\ &= \text{máx}\{0.5, 0.5\} = 0.5 \end{aligned}$$

Recordemos que $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$
Veamos,

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$k^n \cdot \lvert x_n - x_{n-1}\rvert = 0.5 \cdot k^n$	$\frac{k^n}{1-k} \cdot \lvert x_1 - x_0\rvert$
2	-1.50000	0.14279	0.10499	0.03795
3	-1.35721	0.02635	0.02205	0.00797
4	-1.33086	0.00498	0.00463	0.00167
5	-1.32588	0.00094	0.00097	0.00035
6	-1.32494	0.00018	0.00020	0.00007

Problemas de Ceros: Método de la bisección y método del punto fijo

1. Usar el método de la bisección para hallar los ceros de las funciones siguientes en los intervalos indicados con un error menor que $\epsilon = 10^{-5}$. Hacerlo usando los dos criterios de parada vistos anteriormente:

   - $\lvert f(x_n)\rvert \leq \epsilon$
   - $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \leq \epsilon$

   a) $f(x) = x - 3^{-x}$, para $0 \leq x \leq 1$

   b) $f(x) = e^x - x^2 + 2x - 3$, para $0 \leq x \leq 2$

2. Usar el método de la bisección para hallar el primer cero $\hat{x} > 0$ tal que $\tan x = x$. Calcularlo con un error menor que $\epsilon = 0.0001$. Usar el criterio de parada $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \leq \epsilon$

3. Queremos resolver la ecuación $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ para x entre 0 y 1. Para ello sumamos el método del punto fijo $x_n = g_i(x_{n-1})$ con las funciones siguientes:

   - $g_1(x) = \frac{x^3+1}{4}$
   - $g_2(x) = \sqrt[3]{4x-1}$
   - $g_3(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{x}}$

   a) Demostrar que algebraicamente es equivalente que x verifique que $f(x) = 0$ a que x verifique $x = g_i(x)$ para $i = 1, 2, 3$

b) Considerar $x_0 = 0.5$ ¿cuál de las sucesiones asociadas al método del punto fijo con $g = g_i$, $i = 1, 2, 3$ converge a un cero de f en el intervalo $[0, 1]$?

c) Podrías dar una explicación teórica a lo observado en el item anterior?

4. Para cada una de las ecuaciones siguientes, determinar el intervalo $[a, b]$ donde el método del punto fijo converge. Hallar el punto fijo con un error de $\epsilon = 10^{-6}$ usando el criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$

   a) $x - \cos(x) = 0$

   b) $x^2 - e^{\frac{x}{2}} = 0$, donde $0 < x < 3$

5. Demostrar que si $A > 0$ es un número real positivo, la solución definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{m-1}},\ n \geq 1$$

converge a $\sqrt{A}$ siempre que $x_0 > 0$.

❍ Indicación: Definir $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{A}{2x}$. Hallar un intervalo $[a, b]$ tal que si $x \in [a, b]$ entonces $g(x) \in [a, b]$.

❍ Probar con $[a, b] = \left[\sqrt{A}, \infty\right]$

❍ Estudiar el caso $x_0 < 0$

3.4 Método de Newton-Rapson

El **Método de Newton-Rapson** es uno de los métodos más conocidos y más **potentes** en el sentido de su **velocidad de convergencia**. Sin embargo, al contrario que el **Método de la Bisección**, su **convergencia** no está **asegurada**.

Veamos gráficamente en que consiste el método de Newton-Rapson

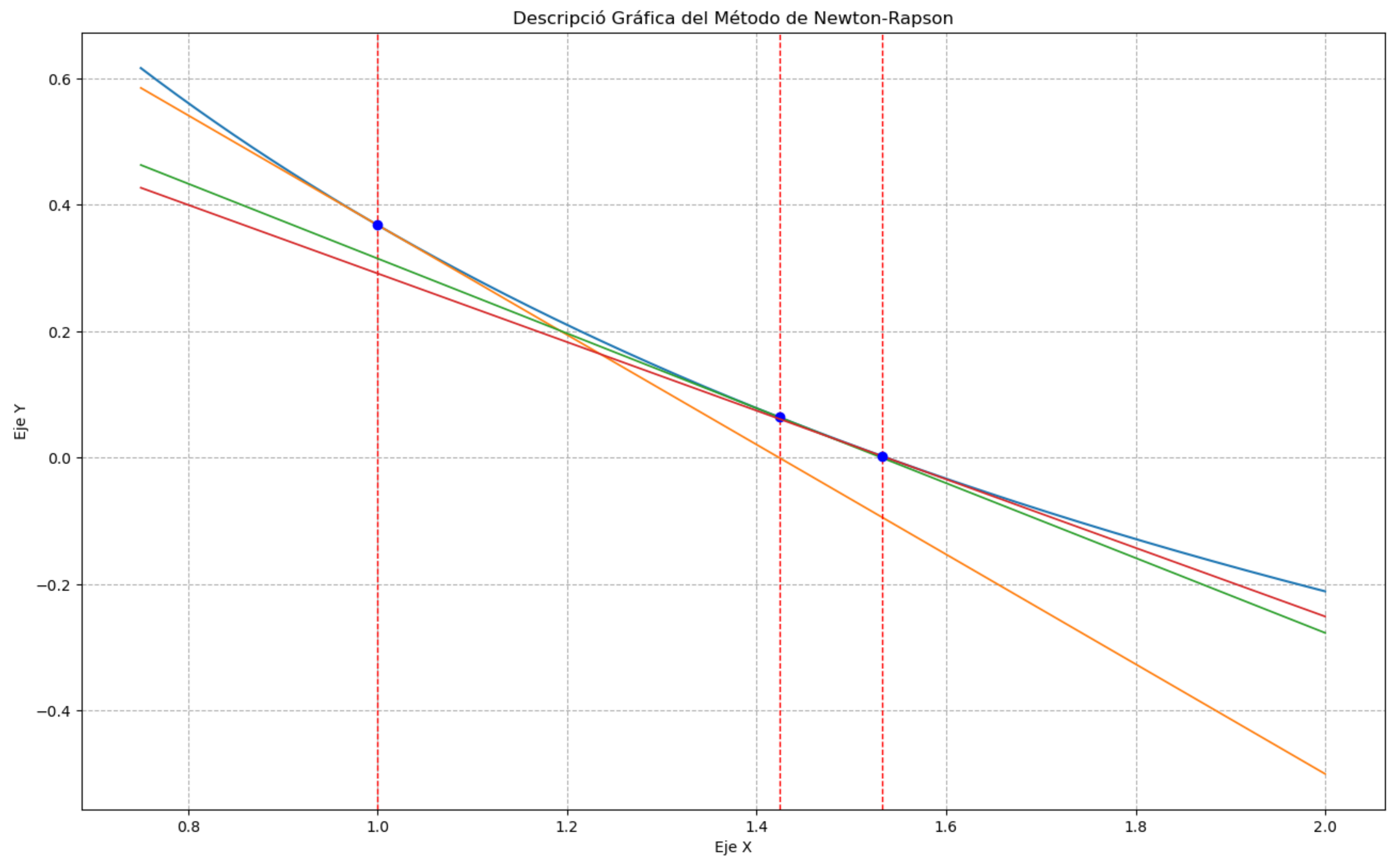

Figura 3.6: Descripción Gráfica del Método de Newton-Rapson

En el gráfico anterior vemos que tratamos de hallar un cero $\hat{x}$ marcado en rojo de la función $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}\ln(x)$.

Para ello, empezamos con el valor inicial $x_0 = 1$. A continuación hallamos la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0)) = \left(1, e^{-1}\right) \approx (1, 0.367879)$.

Seguidamente, miramos dónde corta dicha recta tangente al eje de las X. Dicho punto de corte, será el siguiente elemento de la sucesión x_1.

El paso siguiente es hacer con el punto x_1 lo mismo que hemos hecho con el punto x_0: hallar la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y mirar dónde corta dicha recta tangente al eje de las X para hallar x_2 y así sucesivamente.

De esta forma obtenemos una sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ cuyo límite como puede observarse el gráfico es el cero $\hat{x}$.

Como puede verse en el gráfico, la velocidad de convergencia es muy rápida ya que con dos iteraciones, tenemos un valor x_2 muy próximo al cero $\hat{x}$.

3.4.1 Pasos del método

El método de Newton-Rapson que no da el valor de x_n en función de x_{n-1} se deduce de realizar los pasos siguientes:

- Desarrollamos por Taylor la función f que suponemos de clase $\mathcal{C}^2[a,b]$ en un cierto intervalo de la que queremos hallar el cero en el punto x_{n-1} usando el polinomio de Taylor de grado 1 y usando la expresión del resto de Lagrange:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi(x_{n-1}))}{2}(x - x_{n-1})^2,$$

  donde $\xi(x_{n-1}) \in \langle x, x_{n-1} \rangle$

- Si usamos la aproximación anterior en el cero $\hat{x}$, como $f(\hat{x}) = 0$, tenemos que:

$$0 = f(\hat{x}) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(\hat{x} - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi(x_{n-1}))}{2}(\hat{x} - x_{n-1})^2$$

- Si suponemos que $|\hat{x} - x_{n-1}|$ es pequeño podemos despreciar el término del resto de Lagrange y obtenemos:

$$0 = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}),$$

  donde hemos escrito x en lugar de $\hat{x}$ ya que el valor que cumple la condición anterior no es el cero $\hat{x}$ sino un valor aproximado x. Dicho valor aproximado será el siguiente valor de la sucesión x_n

- Si despejamos $x = x_n$ de la ecuación anterior, hallamos la relación buscada:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Observación

Los pasos anteriores equivalen a buscar la recta tangente en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, cuya ecuación es $y = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$, y buscar el corte de dicha recta con el eje X, es decir, resolver $y = 0$, para hallar el punto x_n, tal como comentamos en la introducción del método.

Observación

El método de Newton-Rapson es un caso particular del usar el método del punto fijo, con la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Observemos que el valor x_n se calcula de la forma siguiente en función de la función $g : x_n = g(x_{n-1})$

3.4.2 Código de Programa

A continuación se presenta el código del programa para calcular mediante el método de **Newton-Rapson**

```
# Definir el método de Newton–Rapson
def NewtonRapson(x_0, tol, max_iteraciones, f, df_dx,
    console=False):

    # Iniciar el contador para las iteraciones
    n = 0

    # Crear las sucesiones
    xn_n = []
    f_n = []
    diff_n = []

    # Calculamos el primer valor aproximado de la raíz
    x = x = x_0 - (f(x_0) / df_dx(x_0))

    # Mientras  no lleguemos al número máximo de
      iteraciones
    # while n <= max_iteraciones:
    while np.abs(x - x_0) >= tol:

        # Actualizamos el valor de x_0
        x_0 = x

        # Calculamos el valor de x_n
        x = x_0 - (f(x_0) / df_dx(x_0))

```

```
        # Calcular los valores de las sucesiones
        xn_n.append(x_0)
        f_n.append(np.abs(f(x_0)))
        diff_n.append(np.abs(x - x_0))

    # Crear el dataFrame
    sucesiones = {
        "x_n": xn_n,
        "|f(x_n)|": f_n,
        "|x_n - x_{n-1}|": diff_n
    }
    df = pd.DataFrame(sucesiones)
    return x, df
```

Ejemplo 6:

Hallar el cero de la función $f\left(x\right) = e^{-x} - \frac{1}{2}\ln\left(x\right)$ con valor inicial $x_0 = 1$

Usando que $f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2x}$, los demás valores se hallarán usando la recurrencia siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} - \frac{e^{-x_{n-1} - \frac{1}{2}\ln(x_{n-1})}}{-e^{-x_{n-1}} - \frac{1}{2x_{n-1}}} \\
&= x_{n-1} - \frac{\frac{1}{e^{x_{n-1}}} - \frac{\ln(x_{n-1})}{2}}{-\frac{1}{e^{x_{n-1}}} - \frac{1}{2x_{n-1}}} \\
&= x_{n-1} - \frac{\frac{2 - e^{x_{n-1}}\ln(x_{n-1})}{2e^{x_{n-1}}}}{\frac{-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}}{2x_{n-1}e^{x_{n-1}}}} \\
&= x_{n-1} - \frac{2x_{n-1}e^{x_{n-1}}\left(2 - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right)\right)}{2e^{x_{n-1}}\left(-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}}{1} - \frac{x_{n-1}\left(2 - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right)\right)}{-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}\right) - x_{n-1}\left(2 - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right)\right)}{-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}} - 2 + e^{x_{n-1}}\ln\left(x\right)\right)}{-\left(2x_{n-1} + e^{x_{n-1}}\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(2x_{n-1} + e^{x_{n-1}} - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right) + 2\right)}{2x_{n-1} + e^{x_{n-1}}}
\end{aligned}
$$

Usando el programa realizado en Python obtenemos la siguiente tabla. En la imagen se muestran los valores que van tomando las iteraciones dentro del Método de Newton-Rapson

```
Raíz/Cero x =  1.537201702578355
        x_n      |f(x_n)|  |x_n - x_{n-1}|
0  1.423883  6.408337e-02     1.082618e-01
1  1.532145  2.737385e-03     5.046693e-03
2  1.537192  5.453415e-06     1.009420e-05
3  1.537202  2.173273e-11     4.022738e-11
```

Figura 3.7: Tabla de Valores Aplicando **Newton-Rapson**

Observación

- Observamos que con 4 iteraciones hemos llegado a una tolerancia de $\approx 10^{-5}$ si usamos el criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-5}$. Es decir, el método converge muy rápido hacia la solución $\hat{x}$
- El criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq TOL$ es más "duro" que el criterio de parada $|f(x_n)| \leq TOL$ en el sentido que se necesitan más iteraciones para que se cumpla con la misma tolerancia **TOL,** tal como se puede observar en la tabla anterior.

3.4.3 Convergencia del Método de Newton-Rapson

Ya hemos comentado que no tenemos asegurada la convergencia del método de Newton-Rapson. Sin embargo, el Teorema siguiente nos dice bajo qué condiciones podemos tener convergencia.

Teorema 4:

Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Sea $\hat{x}$ un cero de la función f, $f(\hat{x}) = 0$ con $f'(\hat{x}) \neq 0$, es decir $\hat{x}$ es un cero simple de f. Entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que la sucesión generada por el Método de **Newton-Rapson**, $(x_n)_n$ converge a $\hat{x}$ para todo valor inicial $x_0 \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$

Demostración

Recordemos que el método de Newton-Rapson es un caso particular del Método del Punto Fijo con $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Sea k con $0 < k < 1$. La demostración consistirá en hallar $\delta > 0$ tal que la función g cumple:

- $g(x) \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ para todo $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$
- $|g'(x)| \leq k$

Entonces, usando el Teorema del Punto Fijo, podemos afirmar que la sucesión $(x_n)_n$ converge hacia la solución $\hat{x}$.

Hallemos pues el valor $\delta > 0$. Como f' es continua y $f'(\hat{x}) \neq 0$, existe un valor $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (\hat{x} - \delta_1, \hat{x} + \delta_1) \subseteq [a, b]$

El valor de $g'(x)$ si $x \in (\hat{x} - \delta_1, \hat{x} + \delta_1)$ vale:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) \cdot f^n(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

La expresión anterior tiene sentido ya que $f'(x) \neq 0$ para todo valor de $x \in (\hat{x} - \delta_1, \hat{x} + \delta)$. Además, $g'(\hat{x}) = 0$ ya que $\hat{x}$ es un cero de la función $f : f(\hat{x}) = 0$

Como $g'(x)$ es continua y $g'(\hat{x}) = 0$, para el valor de k existe un valor $\delta > 0$, tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$. Ya tenemos verificada la segunda condición.

Debemos verificar la primera, es decir, se debe verificar que si $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$, $g(x) \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$.

Sea pues un valor $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$. Entonces, usando el Teorema del Valor Medio, podemos afirmar que existe un valor $c \in \langle x, \hat{x} \rangle \subseteq (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ tal que

$$|g(x) - \hat{x}| = |g(x) - g(\hat{x})| = |g'(c)| \cdot |x - \hat{x}| \leq k \cdot |x - \hat{x}| < |x - \hat{x}| < \delta$$

Como $|g(x) - \hat{x}| < \delta$, tenemos que $g(x) \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ tal como queríamos demostrar.

3.4.4 Convergencia del Método de Newton

El Teorema anterior nos dice que el método de Newton-Rapson converge siempre que el cero $\hat{x}$ sea simple, es decir que $f'(x) \neq 0$.

La velocidad de convergencia dependerá de la cota k de la función $g'(x) = \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$ en un entorno de radio δ del cero $\hat{x}$. Dicho valor k en general será desconocido y hallarlo es un problema mucho más difícil que hallar el cero $\hat{x}$.

Por tanto en la práctica, se realiza un gráfico aproximado de la función $f(x)$ y se elige un punto x_0 cerca del valor de corte de la función f con el eje X.

3.5 El Método de la Secante

El método de **Newton-Rapson** es un método muy potente pero tiene un inconveniente: necesitamos conocer la función derivada $f'(x)$.

En muchos problemas de análisis numérico, dicho conocimiento es un *lujo*. Sabemos cómo evaluar la función f pero no hay forma de tener una expresión de la función f'. En estos casos, el **método de Newton-Rapson** no es aplicable.

Para resolver esta dificultad, podemos usar el cociente incremental como una aproximación a $f'(x_{n-1})$

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

si x_{n-2} y x_{n-1} están aproximados, la aproximación anterior tendrá poco error.

Si sustituimos la expresión anterior de $f'(x_{n-1})$ en el método de Newton-Rapson, obtenemos el denominado **Método de la Secante**:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}} = x_{n-1} - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

3.5.1 Pasos del Método

El método de la secante también puede deducirse siguiendo los pasos siguientes:

- Dados los puntos $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, consideremos la recta que pasa por dichos puntos de ecuación:

$$y - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1} - f(x_{n-2}))}{x_{n-1} - x_{n-2}} \cdot (x - x_{n-1})$$

- Hallamos la intersección de dicha recta con el eje X resolviendo $y = 0$ y el punto de intersección será el punto siguiente de la sucesión x_n :

$$y = 0, \Rightarrow x = x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

obteniendo la misma expresión que anteriormente teníamos.

Ejercicio 4:

Crear un *programa* en **Python** que muestre el proceso gráfico del Método de la Secante con la función $f(x) = e^{-x} - \frac{2}{x} + 1$

En el gráfico anterior vemos cómo funciona el método de la secante:

- Hemos considerado $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$. Hallando la recta que pasa por los puntos $(0.5, f(0.5))$ y $(1, f(1))$ y viendo dónde corta el eje de las X,
- Hacemos lo mismo con los puntos $(x_1, f(x_1)) = (1, f(1))$ y $(x_2, f(x_2))$, es decir, hallamos la recta que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(x_2, f(x_2))$ y viendo dónde corta el eje de las X, hallamos el nuevo punto de la sucesión x_3
- Y así sucesivamente, hasta llegar a una aproximación del cero $\hat{x}$

3.5.2 Código de Programa

A continuación se presenta el código desarrollado en Python para aplicar el **Método de la Secante**

```
# Definir la función Secante
def Secante(x_0, x_1, Tol, maxItera, funcion):

    """
    ## ***Función***: Secante
```

```
    - **Descripción:** Calcula el cero de una función
      aplicando el método de la secante
    - **Parámetros:**
        - *x_0:* Valor inicial
        - *x_1:* Valor cercano al inicial
        - *Tol:* Tolerancia aceptada para el cálculo del
          cero
        - *funcion:* Función a la cual queremos calcular
          el cero de la función
    - **Valor de Retorno:**
        - El cero de la función
        - Tabla con la sucesión de términos encontrados
    """

    # Aplicar la fórmula de la secante
    y_0 = funcion(x_0)
    y_1 = funcion(x_1)

    # Definir las sucesiones a estudiar
    x_n = [x_0, x_1]
    f_xn = [np.abs(y_0), np.abs(y_1)]
    d_xn = [1, np.abs(x_1 - x_0)]

    # Crear el ciclo para calcular recursivamente el
      valor de la raíz o cero de la función
    for n in range(2, maxItera):

        x = x_1 - (y_1*(x_1 - x_0)) / (y_1 - y_0)

        # Determinar si la sucesión de terminos ha
          llegado a la convergencia deseada
        if np.abs(x - x_1) <= Tol:

            # Se devuelve el valor del cero
            x_n.append(x)
            f_xn.append(np.abs(funcion(x)))
            d_xn.append(np.abs(x - x_1))
```

```
            s_n = {
                "x_n": x_n,
                "f_xn": f_xn,
                "d_xn": d_xn
            }
            df = pd.DataFrame(s_n)
            return x, df

        # Actualizar los valores de las sucesiones
        x_0 = x_1
        x_1 = x
        y_0 = y_1

        y_1 = funcion(x)

        # Agregar los valores a las sucesiones
        x_n.append(x_1)
        f_xn.append(np.abs(y_1))
        d_xn.append(np.abs(x_1 - x_0))

    s_n = {
            "x_n": x_n,
            "f_xn": f_xn,
            "d_xn": d_xn
        }
    df = pd.DataFrame(s_n)

    print("El algoritmo no alcanzo la convergencia
      deseada con los pasos establecidos")
    return x, df
```

Ejercicio 5:

Aplicar el **Método de la Secante** para calcular la raíz/cero de la función siguiente

$$f\left(x\right) = e^{-x} - \frac{2}{x} + 1$$

con condiciones iniciales $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = 1$

Al aplicar el método podemos observar las sucesiones generadas a través de la siguiente tabla

Raíz: 1.6878939979865044

	x_n	f_xn	d_xn
0	0.500000	2.393469e+00	1.000000
1	1.000000	6.321206e-01	0.500000
2	1.179442	3.882667e-01	0.179442
3	1.465152	1.340033e-01	0.285710
4	1.615728	3.908607e-02	0.150576
5	1.677734	5.287212e-03	0.062006
6	1.687434	2.379934e-04	0.009700
7	1.687891	1.512700e-06	0.000457
8	1.687894	4.353786e-10	0.000003

Figura 3.8: Tabla de datos generados en el **Método de la Secante**

3.6 Método de Regula Falsi

Los métodos de **Newton-Rapson** y de la **Secante** son métodos relativamente rápidos en cuanto a su **convergencia** pero tienen el inconveniente que no tenemos asegurada dicha convergencia.

Recordemos el Teorema donde nos dice si el **cero** es simple $\left(f'\left(\hat{x}\right) \neq 0\right)$, existe un **entorno del cero** $\hat{x}$ tal que para cualquier valor inicial x_0 perteneciente a dicho entorno, el método de **Newton-Rapson** es **convergente**. El problema es que hallar dicho entorno es un problema mucho más difícil que hallar el **cero** en sí.

Por dicho motivo, con la finalidad de asegurar la convergencia de la sucesión $(x_n)_n$ tenemos el método de **Regula Falsi** que usa las ventajas de los métodos de la **bisección** y de la **secante**.

En pocas palabras, el método de **Regula Falsi** supone que hay un cambio de signo entre x_{n-2} y x_{n-1},es decir, $f(x_{n-2}) \cdot f(x_{n-1}) < 0$ y hallar x_n usando el método de la secante. Como x_n estará entre x_{n-2} y x_{n-1} habrá un cambio de signo de f entre x_{n-2} y x_n o entre x_{n-1} y x_n. Dependiendo de dónde esté el cambio de signo, cambia el valor de x_{n-1}.

Más concretamente, el método de **Regula Falsi** consiste en los pasos siguientes: Se dan los pasos desde el paso $n-1$ para pasar al paso n

- Sean x_{n-2} y x_{n-1} tal que $f(x_{n-2}) \cdot f(x_{n-1}) < 0$. No suponemos ningún orden sobre x_{n-2} y x_{n-1}, es decir, podemos tener $x_{n-2} < x_{n-1}$ o $x_{n-1} < x_{n-2}$
- Calculamos x_n según el método de la secante:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

3.6.1 Pasos del Método

- **Caso 1.** Si $f(x_n) \cdot f(x_{n-1}) < 0$, tenemos un cambio de signo de f en el intervalo $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$. En este caso, no hacemos nada y la sucesión quedará $\ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, \ldots$
- **Caso 2.** Si $f(x_n) \cdot f(x_{n-2}) < 0$ tenemos un cambio de signo de f en el intervalo $\langle x_{n-2}, x_n \rangle$. En este caso, cambiamos el orden de x_{n-2} y x_{n-1} y la sucesión quedará $\ldots, x_{n-1}, x_{n-2}, x_n, \ldots$
- Volvemos al paso inicial para hallar x_{n+1}
- Y así sucesivamente

Ejercicio 6:

Crear un *programa* en **Python** que muestre el proceso gráfico del método de **Regula-Falsi** para encontrar el cero de la función $f(x) = e^{-x} + \sin^2(x) - \cos(x)$ con condiciones iniciales $x_0 = 4$ y $x_1 = 6$

El gráfico anterior ilustra el método de **Regula Falsi**.

- Empezamos con $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ donde observamos que hay un cambio de signo de la función f. Más concretamente, $f(x_0) < 0$ y $f(x_1) > 0$
- Hallamos el punto x_2 usando el método de la Secante y vemos que estamos en el Caso 2. La sucesión será por tanto $x_1 = 2, x_0 = 1, x_2 = \ldots$
- Hallamos x_3 usando el método de la secante con los puntos $(x_0 f(x_0)) = (1, f(1))$ y $(x_2, f(x_2))$ y vemos que volvemos a estar en el caso 2. La sucesión serpa por tanto $x_1 = 2$, x_2, $x_0 = 1$, x_3
- Y así sucesivamente.

Observemos que de esta forma $(x_n)_n$ siempre converge hacia el cero $\hat{x}$,hecho que no teníamos asegurado con el método de la **secante.**

3.6.2 Pseudocódigo

1. **Ingresar** x_0, x_1, tol y $maxItera$
2. Iniciar el contador de iteraciones en 2, $n = 2$
3. Calcular el valor de la función f en $x = x_0$, $y_0 = f(x_0)$
4. Calcular el valor de la función f en $x = x_1$, $y_1 = f(x_1)$
5. **Para** $n = 2$ hasta $maxItera$ **repetir**
   a) Calcular el siguiente valor de la sucesión x_n, $x = x_1 - \dfrac{y_1(x_1 - x_0)}{(y_1 - y_0)}$
   b) **Si** $\min(|x - x_1|, |x - x_0|) < tol$. Si el valor x calculado cumple la condición de tolerancia.
      1) **Imprimir** el valor de x
      2) **Finalizar** el algoritmo
   c) Actualizar el valor de y, $y = f(x)$
   d) **Si** $y \cdot y_1 < 0$. Si el cambio de signo esta en el intervalo $\langle x_1, x_2 \rangle$
      1) El nuevo x_0 será el valor antiguo de x_1 , $x_0 = x_1$
      2) El nuevo valor de y_0 será el de y_1, $y_0 = y_1$
      3) El nuevo x_1 será el valor de x, $x_1 = x$
      4) El nuevo valor de y_1 será el valor de y, $y_1 = y$

e) **Imprimir**: El método no alcanzo la convergencia deseada con $maxItera$ iteraciones.

f) **Finalizar**

Este pseudocódigo necesita un poco de explicación respecto al algoritmo que se hemos dados antes.

Básicamente, empezamos con dos valores x_0 y x_1 donde hay un cambio de signo de la f y calculamos el nuevo valor de x.

A continuación, tenemos que redefinir los nuevos x_0 y x_1 dependiendo de dónde esté el cambio de signo:

- Si estamos en el caso 1, es decir, $f(x_1) \cdot f(x) < 0$, basta que definamos el "nuevo" x_0 como x_1 y el "nuevo" x_1 como x y tendremos que volverá a haber un cambio de signo entre x_0 y x_1.

- Si estamos en el caso 2, es decir, $f(x_0) \cdot f(x) < 0$, basta que definamos el "nuevo" x_1 como x y tendremos que volverá a haber un cambio de signo entre x_0 y x_1.

Ejemplo 7:

Vamos a hallar un cero de la función $f(x) = e^{-x} - \dfrac{2}{x} + 1$ con condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ ya que existe un cambio de signo en el intervalo $\langle x_0, x_1 \rangle$: $f(x_0) = f(1) = -0.6321206$, $f(x) = 0.1353353$

Los resultados se muestran en la tabla siguiente

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2	0.1353353	
1	1.8236572	0.0647369	0.1763428
2	1.7471408	0.0295441	0.0765164
3	1.7137801	0.0131725	0.0333607
4	1.6992095	0.0058101	0.0145706
5	1.6928413	0.0025503	0.0063682
6	1.6900572	0.0011171	0.0027841
7	1.6888399	0.0004888	0.0012173
8	1.6883076	0.0002138	0.0005323
9	1.688749	0.0000935	0.0002328

Cuadro 3.1: Cálculo de las sucesiones del método Regula Falsi

3.6.3 Convergencia

Observemos que la convergencia es más lenta que el método de la **secante** debido básicamente a que tenemos que asegurarnos del cambio de signo en el intervalo $\langle x_{n-2}, x_{n-1}\rangle$.

Sin embargo, la convergencia está asegurada siempre, cosa que no podemos decir lo mismo del método de la **secante**.

3.7 Análisis del Error

3.7.1 Orden de Convergencia

Cuando un método numérico consiste en hallar una sucesión $(x_n)_n$ que converge hacia una solución $\hat{x}$,un concepto importante para medir lo rápido que converge es el orden de convergencia de la sucesión:

Definición 4:

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales convergente hacia $\hat{x}$, donde suponemos que $x_n \neq \hat{x}$, para cualquier n. Suponemos que existen constantes $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|} = \lambda$$

Entonces, diremos que $(x_n)_n$ converge hacia $\hat{x}$ con orden α con constante asintótica λ

- Cuando mayor es el orden de α, más rápido converge la sucesión $(x_n)_n$ hacia $\hat{x}$.La idea es que para n grande, podemos aproximar el error en el término $n+1$ en función del error en el término n de la forma siguiente:

  $$|x_{n+1} - \hat{x}| \approx \lambda\, |x_n - \hat{x}|^{\alpha}$$

  Entonces para valores grande de α el error irá disminuyendo muy rápidamente, acercándose la sucesión $(x_n)_n$ a su límite $\hat{x}$ de forma muy rápida.

- Si $\alpha = 1$ y $\lambda \leq 1$, se dice que la sucesión $(x_n)_n$ **converge linealmente.**

- Si $\alpha = 2$, se dice que la sucesión $(x_n)_n$ **converge de forma cuadrática.**

- El **orden de convergencia** de la mayoría de las sucesiones que “tenemos en mente” tienen **convergencia lineal**:

  - $x_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, donde P y Q son dos polinomios del mismo grado en n, donde $\hat{x} = \dfrac{a}{b}$ siendo a y b los coeficientes de mayor grado de P y Q, respectivamente y $\lambda = 1$,
  - $x_n = a^n$, con $a < 1$ donde $\hat{x} = 0$ y $\lambda = \alpha$
  - $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, donde $\hat{x} = e$ y $\lambda = 1$.

- Los casos interesantes son aquellos en los que la sucesión se define por recurrencia como es el caso del Método del Punto Fijo: $x_n = g(x_{n-1})$

3.7.2 Convergencia Lineal

Teorema 5:
Sea $g \in \mathcal{C}[a,b]$ una función **continua** en el intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ para todo valor $x \in [a,b]$. Supongamos ademas que $g \in \mathcal{C}(a,b)$ tiene **derivada continua** en el intervalo (a,b) y que existe una **constante** $k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo valor $x \in (a,b)$. Sea $x_0 \in [a,b]$, definimos la sucesión de forma recurrente $x_n = g(x_{n-1})$ que sabemos que es convergente hacia $\hat{x} \in [a,b]$.

Entonces, si $g'(\hat{x}) \neq 0$, la sucesión anterior $(x_n)_n$ converge de forma lineal hacia $\hat{x}$

Demostración

Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a la función g en el intervalo $\langle x_n, \hat{x}\rangle$,tenemos que existe un valor c_n tal que:

$$\frac{x_{n+1}-\hat{x}}{x_n-\hat{x}} = \frac{g(x_n)-g(\hat{x})}{x_n-\hat{x}} = g'(c_n),$$

donde $c_n \in \langle x_n, \hat{x}\rangle$.

Como g' es continua en (a,b), tenemos que $\lim_{n\to\infty} g'(c_n) = g'(\hat{x})$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \hat{x}$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\hat{x}|}{|x_n-\hat{x}|} = \lim_{n\to\infty} |g'(\hat{x})| \leq k < 1,$$

tal como queríamos demostrar.

3.7.3 Convergencia Cuadrática

El teorema siguiente nos da las condiciones para que el método del punto fijo tenga convergencia cuadrática.

Teorema 6:
Sea $g \in \mathcal{C}[a, b]$ una función **continua** en el intervalo $[a, b]$.

Sea $\hat{x}$ una solución de la ecuación $x = g(x)$ tal que $g'(x) = 0$. Supongamos además que $g \in \mathcal{C}^2(a, b)$ tiene las dos **primeras derivadas continuas** en el intervalo (a, b) y que existe una **constante** M tal que $|g''(x)| < M$ en un intervalo abierto $I \subseteq (a, b)$ tal que $\hat{x} \in I$.

Entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$, la sucesión definida de forma recurrente por $x_n = g(x_{n-1})$ converge en **orden cuadrático** hacia $\hat{x}$.Además, para n suficientemente grande

$$|x_{n+1} - \hat{x}| < \frac{M}{2} \cdot |x_n - \hat{x}|^2$$

Demostración

Como g' es continua y $g'(\hat{x}) = 0$, existe un k un valor real con $0 < k < 1$, y un $\delta > 0$ tal que para todo valor $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$, tenemos que $|g'(x)| \leq k$.

Veamos a continuación que todos los términos de la sucesión $(x_n)_n$, $x_n \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$. Hagamos la prueba por inducción:

- por hipótesis $x_0 \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$. Usando el Teorema de Valor Medio, tenemos que existe un valor $c_n \in \langle x_{n-1}, \hat{x} \rangle \subset (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ tal que:
  $|x_n - \hat{x}| = |g(x_{n-1}) - g(\hat{x})| = |g'(c_n)| \cdot |x_{n-1} - \hat{x}| \leq k \cdot |x_{n-1} - \hat{x}| < |x_{n-1} - \hat{x}| < \delta$
  Por tanto, $x_n \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$, tal como queríamos ver.

- Como la función g'' es continua, tenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} g''(\xi_n) = g''(\hat{x})$ ya que $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \hat{x}$. En resumen,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|} = \frac{|g''(\hat{x})|}{2},$$

  tal como queríamos ver. Por tanto, la sucesión $(x_n)_n$ converge cuadráticamente hacia $\hat{x}$ si $g''(\hat{x}) \neq 0$ y de orden superior si $g''(\hat{x}) = 0$.

- Por último, usando el desarrollo de Taylor de $g(x_n)$, tenemos que:

$$|x_{n+1} - \hat{x}| = |g(x_n) - \hat{x}| = \frac{|g''(\xi_n)|}{2} \cdot |x_n - \hat{x}|^2$$

  , tal como queríamos ver.

3.8 Estudio del tipo de convergencia

Veamos un resumen de la sección.

Sea $\in \mathcal{C}[a,b]$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ tal que tiene las dos primeras derivadas continuas en (a,b). Sea $x_0 \in [a,b]$ y definimos $x_n = g(x_{n-1})$. Supongamos que $(x_n)_n$ es convergente hacia $\hat{x} \in [a,b]$. Entonces:

- Si $g'(\hat{x}) \neq 0$ con $|g'(\hat{x})| < 1$, la sucesión $(x_n)_n$ converge linealmente hacia $\hat{x}$
- Si $g'(x) = 0$ y $g''(\hat{x}) \neq 0$, la sucesión $(x_n)_n$ converge cuadráticamente hacia $\hat{x}$

3.9 Convergencia del método de Newton-Rapson

Veamos en qué condiciones el método de Newton-Rapson converge cuadráticamente hacia el cero:

Teorema 7:
Sea $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$. Sea $\hat{x}$ un cero de la función f, $f(\hat{x}) = 0$ con $f'(\hat{x}) \neq 0$, es decir $\hat{x}$ es un cero simple de f. Entonces la sucesión $(x_n)_n$ generada por el método de Newton-Rapson converge al menos cuadráticamente hacia $\hat{x}$.

Demostración

Recordemos que el método de Newton-Rapson es un caso particular del método del punto fijo usando la siguiente función g:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Para demostrar el teorema anterior, basta ver que $g'(\hat{x}) = 0$ ya que usando el Teorema sobre la convergencia cuadrática tendremos la tesis del problema.

Calculemos $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

Si evaluamos la expresión anterior $x = \hat{x}$ tenemos

$$g'(\hat{x}) = \frac{f(\hat{x}) \cdot f''(x)}{f'(\hat{x})^2} = 0,$$

al ser $\hat{x}$ un cero de f .

3.10 Cálculo aproximado del orden de convergencia

Si nos dan un método iterativo para hallar ceros, como por ejemplo el e la secante o el de **Regula-Falsi**, ¿existe una manera aproximada de calcular el orden de convergencia α del método anterior?

Supongamos que $x_n = g(x_{n-1})$. Si el orden de convergencia es α, tendremos que:

$$|x_{n+1} - \hat{x}| \approx \lambda \cdot |x_n - \hat{x}|^\alpha$$

Tomando logaritmos en la expresión anterior obtenemos:

$$\ln |x_{n+1} - \hat{x}| \approx \ln \lambda + \alpha \ln |x_n - \hat{x}|$$

Vemos por tanto que la sucesión $\ln |x_{n+1} - \hat{x}|$ depende linealmente de la sucesión $\ln |x_n - \hat{x}|$.

Es decir, que si hallamos la recta de regresión de la sucesión $\ln |x_{n+1} - \hat{x}|$ como función de la sucesión $\ln |x_n - \hat{x}|$ la pendiente de dicha recta será aproximadamente el valor del orden de convergencia α

El método anterior tiene un problema: ¡no conocemos el cero $\hat{x}$! Ahora bien, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, podemos aproximar $\hat{x} \approx x_N$ con N valor grande.

Ejemplo 8:

Veamos qué orden de convergencia obtenemos con el método de Newton-Rapson usado anteriormente. La función era $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}\ln x$ con $x_0 = 1$. Tomamos $N = 20$. El valor aproximado de $\hat{x}$ será $\hat{x} \approx x_N = x_{20} = 1.5372017$

La tabla de valores $\ln|x_{n+1} - \hat{x}|$ para $n = 0, 1, 2, 3$ es la siguiente

n	$\ln\|x_n - \hat{x}\|$	$\ln\|x_{n+1} - \hat{x}\|$
0	-0.6213816	-2.1775521
1	-2.1775521	-5.2870239
2	-5.2870239	-11.5035459
3	-11.5035459	-23.9364733

Si calculamos la recta de regresión $\ln|x_{n+1} - \hat{x}|$ en función de $\ln|x_n - \hat{x}|$ obtenemos una pendiente de 1.9995685 confirmando que el método de Newton-Raphson tiene orden de convergencia 2.

Ejemplo 9:

Veamos qué orden de convergencia obtenemos con el método de la secante usado anteriormente. La función era $f(x) = e^{-x} - \frac{2}{x} + 1$ con $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$. Tomamos $N = 10$. El valor aproximado de $\hat{x}$ será $\hat{x} \approx x_N = x_{10} = 1.687894$

La tabla de valores de $\ln|x_n - \hat{x}|$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ es la siguiente

n	$\ln\|x_n - \hat{x}\|$	$\ln\|x_{n+1} - \hat{x}\|$
0	0.172182	-0.3741205
1	-0.3741205	-0.6763848
2	-0.6763848	-1.5017406
3	-1.5017406	-2.628789
4	-2.628789	-4.5893146
5	-4.5893146	-7.6840278

Si calculamos la recta de regresión $\ln|x_{n+1} - \hat{x}|$ en función de $\ln|x_n - \hat{x}|$ obtenemos una pendiente de 1.5844118. De hecho, el método de la secante tiene orden de convergencia $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$