Capítulo 5

Derivación e Integración Numérica

5.1 Introducción

Las técnicas vistas en un curso de cálculo diferencial e integral para hallar la derivada o la integral de una función, no son válidas en general cuando nos enfrentamos en un problema complicado de análisis numérico.

La mayoría piensa que una función $f(x)$ es una expresión de la forma $f(x) = \ldots$ donde $\ldots$ es una expresión que contiene términos de funciones conocidas aplicadas a la variable x. En estos casos, los problemas suelen ser fáciles de tratar ya que conocemos explícitamente la expresión de $f(x)$.

Sin embargo, cuando lidiamos con un problema complejo de análisis numérico, la expresión de $f(x)$ no es conocida. Podemos pensar que $f(x)$ es un programa informático de un número determinado de líneas que tiene la variable x como **input** y nos da un valor $f(x)$ como .

En casos como los descritos anteriormente, no podemos hallar $f'(x)$ ni $\int f(x)\,dx$ usando las técnicas vistas en el curso de cálculo ya que dichas técnicas presuponen que conocemos la expresión explícita de $f(x)$

En estos casos, para hallar la derivada de $f(x)$ en un valor determinado x, $f'(x)$ o para hallar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de $f(x)$ entre dos valores concretos a y b, necesitamos conocer otro tipo de técnicas que vamos a aprender en este capítulo.

Además, el problema es incluso más grave de lo que uno podría pensar:

- en primer lugar, el coste computacional de las técnicas de cálculo para hallar $f'(x)$ o $\int f(x)\,dx$ es elevado y
- en segundo lugar, conocer la expresión explícita de $f(x)$ no garantiza que podamos hallar la derivada o la integral de $f(x)$. No sólo eso, la mayoría de funciones que uno podría pensar no se pueden integrar usando técnicas de cálculo.

Como ejemplo, consideremos la función de la campana de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Para dicha función, no es posible hallar una expresión de una primitiva en términos de funciones conocidas y hay que integrarla usando técnicas numéricas.

5.2 Diferenciación Numérica

Recordemos la definición de derivada de una función $f(x)$ en un valor x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Las dos expresiones anteriores son equivalentes, basta considerar $h = x - x_0$ para pasar de la primera a la segunda.

Una manera sencilla e aproximar $f'(x_0)$ sería considerar el cociente incremental

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

donde h sería un valor pequeño dado que $x_0 + h$ esté cerca de x_0.

5.2.1 Diferencias hacia adelante y hacía atrás

El problema de la fórmula anterior es que no tenemos ninguna expresión del error cometido.

Con el objetivo de resolver dicho problema, vamos a interpolar la función $f(x)$ es un conjunto de putos "cercanos" a x_0 y derivar la expresión obtenida con el hecho de obtener una expresión del error.

Consideremos en primer lugar los puntos x_0 y x_0+h. Si $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en un intervalo que contenga los puntos anteriores, podemos usar la **fórmula de error de interpolación** y escribir que:

$$f(x) = P_{0,1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-(x_0+h))}{2} \cdot f''(\xi(x)),$$

donde $P_{0,1}(x)$ es el polinomio interpolador en los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h), f(x_0+h)$ y $\xi(x) \in \langle x, x_0, x_0+h \rangle$ (mínimo intervalo que contiene los puntos x, x_0 y x_0+h).

El polinomio $P_{0,1}(x)$ usando polinomios de Lagrange es

$$P_{0,1}(x) = f(x_0) \cdot \frac{(x-x_0-h)}{(-h)} + f(x_0+h)\frac{(x-x_0)}{h}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) \cdot \frac{(x-x_0-h)}{(-h)} &+ f(x_0+h)\frac{(x-x_0)}{h} \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-(x_0+h))}{2} \cdot f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

Ahora derivemos esta expresión, así tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-(x_0+h))}{2} \cdot f''(\xi(x))\right] \\ =& \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2} \cdot f''(\xi(x)) \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-(x_0+h))}{2} \cdot D_x[f''(\xi(x))] \end{aligned}$$

El problema de la expresión anterior es el término $D_x[f''(\xi(x))]$ del que no sabemos calcular al no conocer el valor de $\xi(x)$.

Sin embargo, como nos interesa $f'(x_0)$, este término desaparece para $x = x_0$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi(x))$$

Entonces podemos aproximar $f'(x)$ por $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ con un error acotado por $\frac{M|h|}{2}$ donde

$$M = \max_{x \in \langle x_0, x_0+h \rangle} |f''(x)|$$

Si $h > 0$, la fórmula anterior se conoce como **fórmula de diferencias hacia adelante** y si $h < 0$, **fórmula de diferencias hacia atrás.**

Ejemplo 1:

Consideremos la función $f(x) = e^{\sin(x)}$ calcular el valor de la derivada en $x_0 = 0$

Solución

Tomando $h = 0.05$ la aproximación de $f'(x_0) = f'(0)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} f'(0) \approx \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{1.0512491978605 - 1}{0.05} \\ &= 1.02498395721 \end{aligned}$$

El valor "real" de $f'(x)$ vale:

$$f'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

por lo tanto

$$f'(0) = \cos(0) \cdot e^{\sin(0)} = 1$$

El error "real" cometido es

$$|1.02498395721 - 1| = 0.02498395721$$

Para hallar la cota del error. El valor de $f''(x)$ es:

$$f''(x) = e^{\sin(x)} \left(\cos^2(x) - \sin(x)\right)$$

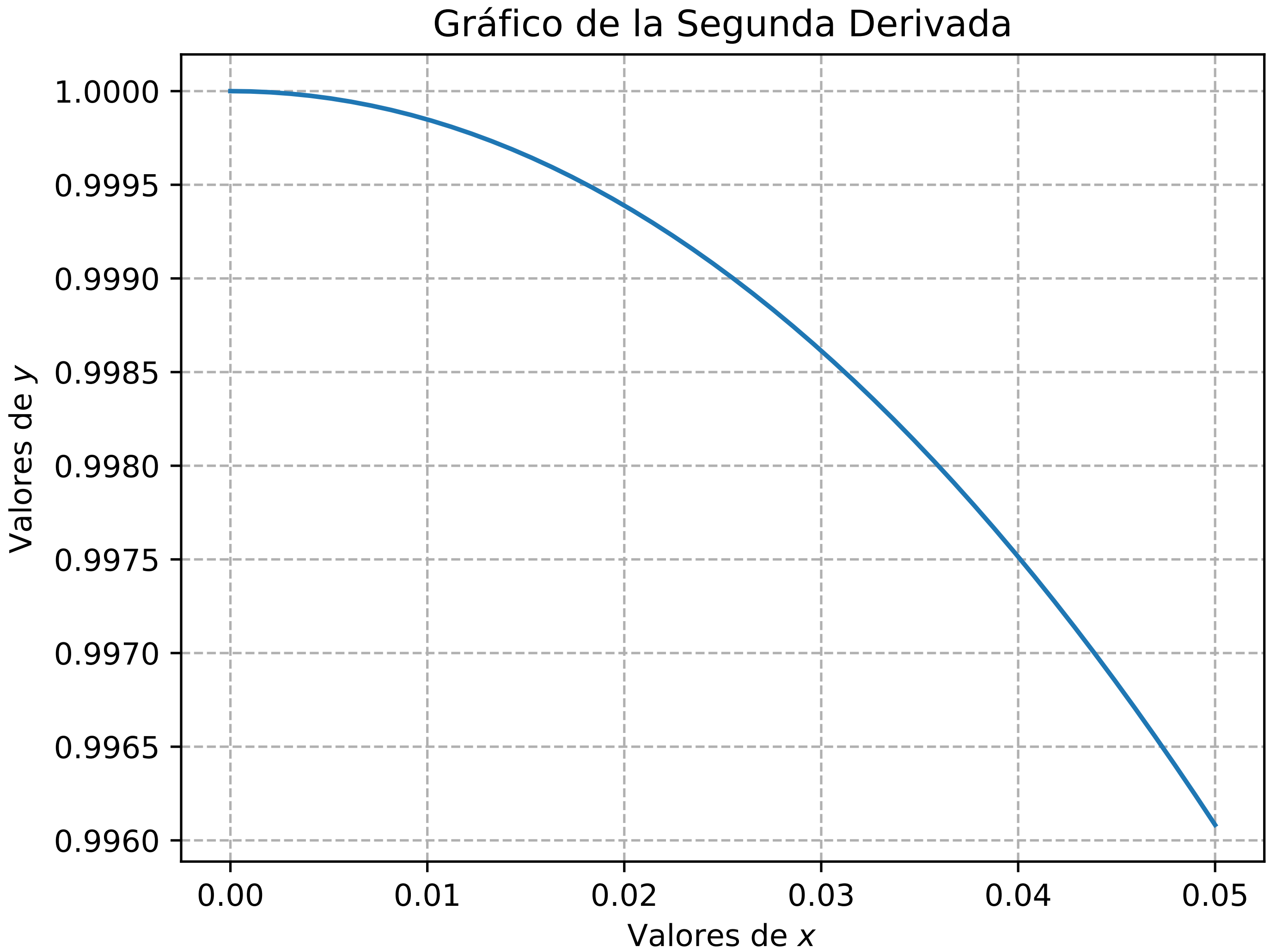

Figura 5.1: Gráfica de la Segunda Derivada

Dicha función está acotada por

$$1 \cdot e^{\sin(0.05)} = 1.102498395721$$

para $x \in [0.05]$. Por tanto el valor de M será $M = 1.102498395721$ y la cota del error será:

$$\frac{M\,|h|}{2} = \frac{1.102498395721 \cdot 0.05}{2} = 0.0262817774094$$

Vemos que la cota es mayor que el error real. Podemos considerarla una buena cota ya que los dos errores son del mismo orden de magnitud.

5.2.2 Fórmula General

Vamos a generalizar el procedimiento anterior.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ números distintos en algún intervalo $[a, b]$ y sea $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en dicho intervalo. Usando la fórmula del error en la interpolación podemos escribir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)(\xi(x))},$$

donde $L_k(x)$ son los polinomios de Lagrange para $k = 0, 1, \ldots, n$ y $\xi(x) \in \langle x_0, \ldots, x_n, x \rangle$.

Si derivamos la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x) + D_x \left[\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)(\xi(x))} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x) + D_x \left[\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \right] \\ &\quad + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \cdot D_x \left[f^{(n+1)(\xi(x))} \right] \end{aligned}$$

Si el punto donde aproximamos la derivada es uno de los nodos x_i, nos "desaparece" el término que "más molesta" y nos queda

$$f'(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} D_x \left[(x-x_0)\ldots(x-x_n) \right]_{x=x_i} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

El valor de $D_x \left[(x-x_0)\ldots(x-x_n) \right]_{x=x_i}$ vale,

$$\begin{aligned} D_x \left[\prod_{k=0}^{n} (x-x_k) \right]_{x=x_i} &= D_x \left[(x-x_i) \prod_{k\neq i} (x-x_k) \right] \\ &= \prod_{k\neq i} (x-x_k) \Big|_{x=x_i} + (x_i - x_i) D_x \left[\prod_{k\neq i} (x-x_k) \Big|_{x=x_i} \right] \\ &= \prod_{k\neq i} (x_i - x_k) \end{aligned}$$

La expresión de $f'(x)$ queda de la forma siguiente:

$$f'(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x_i) + \frac{f^{(n+1)(\xi_i)}}{(n+1)!} \prod_{k\neq i} (x_i - x_k)$$

A la expresión anterior se le conoce como fórmula de $n+1$ puntos para aproximar $f'(x_i)$.

5.2.3 Fórmula de los Tres Puntos

Consideremos el caso particular en que $n = 2$ o tenemos tres puntos x_0, x_1 y x_2.

Los polinomios de Lagrange y sus derivadas son los siguientes:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \Rightarrow L_0'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \Rightarrow L_1'(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \Rightarrow L_2'(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.
\end{aligned}$$

La expresión de $f'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2$ es:

$$\begin{aligned}
f'(x_i) =& f(x_0)\left(\frac{2x_i-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right) + f(x_1)\left(\frac{2x_i-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)\\
&+ f(x_2)\left(\frac{2x_i-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right) + \frac{1}{6}f'''(\xi_i)\prod_{k=0,k\neq i}^{2}(x_i-x_k)
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que los tres puntos están equiespaciados, es decir, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ para un cierto h.

Aplicando la fórmula anterior, tenemos las expresiones siguientes para $f'(x_0), f'(x_1)$ y $f'(x_2)$:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0),\\
f'(x_1) &= \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1),\\
f'(x_2) &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2).
\end{aligned}$$

Aunque aparezcan tres fórmulas en realidad sólo tenemos dos ya que la primera y la última son la misma.

En la primera tenemos una aproximación de $f'(x_0)$ usando los valores $x_0, x_0 + h$ y $x_0 + 2h$ y en la tercera, una aproximación de $f'(x_0 + 2h)$

usando los mismos valores.

Si en la tercera “cambiamos” los papeles de $x_0 + 2h$ por x_0 y consideramos $h < 0$, nos sale la primera:

$$\begin{aligned}\text{Primera fórmula} &\longleftrightarrow \text{ Tercera fórmula}\\ x_0 &\longleftrightarrow x_0 + 2h\\ x_0 + h &\longleftrightarrow x_0 + h\\ x_0 + 2h &\longleftrightarrow x_0\end{aligned}$$

En resumen, tenemos las dos fórmulas siguientes de tres puntos para la aproximación de la derivada:

- Fórmula de los tres puntos respecto al punto medio:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h)\right) - f(x_0-h) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1).$$

  Basta aplicar la segunda expresión anterior cambiando los papeles de $x_0, x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ por $x_0 - h$ y $x_0 + h$

- Fórmula de los tres puntos respecto del punto extremo:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0).$$

  Basta aplicar la primera expresión anterior.

Observación

Siempre que sea posible, hay que aplicar la fórmula respecto del punto medio ya que el error queda reducido a la mitad.

Ejemplo 2:

Si aplicamos la fórmula de los tres puntos respecto del punto medio en el ejemplo anterior con $h = 0.05$ obtenemos la siguiente.

Solución

$$\begin{aligned} f'(0) =& \frac{1}{2h}\left(f(h) - f(-h)\right) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1)\\ =& \frac{1}{0.1}\left(f(0.05) - f(-0.05)\right) - \frac{0.0025}{6} f'''(\xi_1)\\ =& 0.9999995835074 - 4.1666666666667 \times 10^{-4} f'''(\xi_1)\end{aligned}$$

El error cometido real será:

$$|0.9999995835074 - 1| = 0.000000416493$$

y usando que $f'''(x) = e^{\sin(x)}\left(\cos^3(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\cos(x)\right)$, y por tanto,

$$\max_{x\in[-0.05,0.05]} |f'''(x)| \le e^{\sin(0.05)} \cdot 1 = 1.0512491978605$$

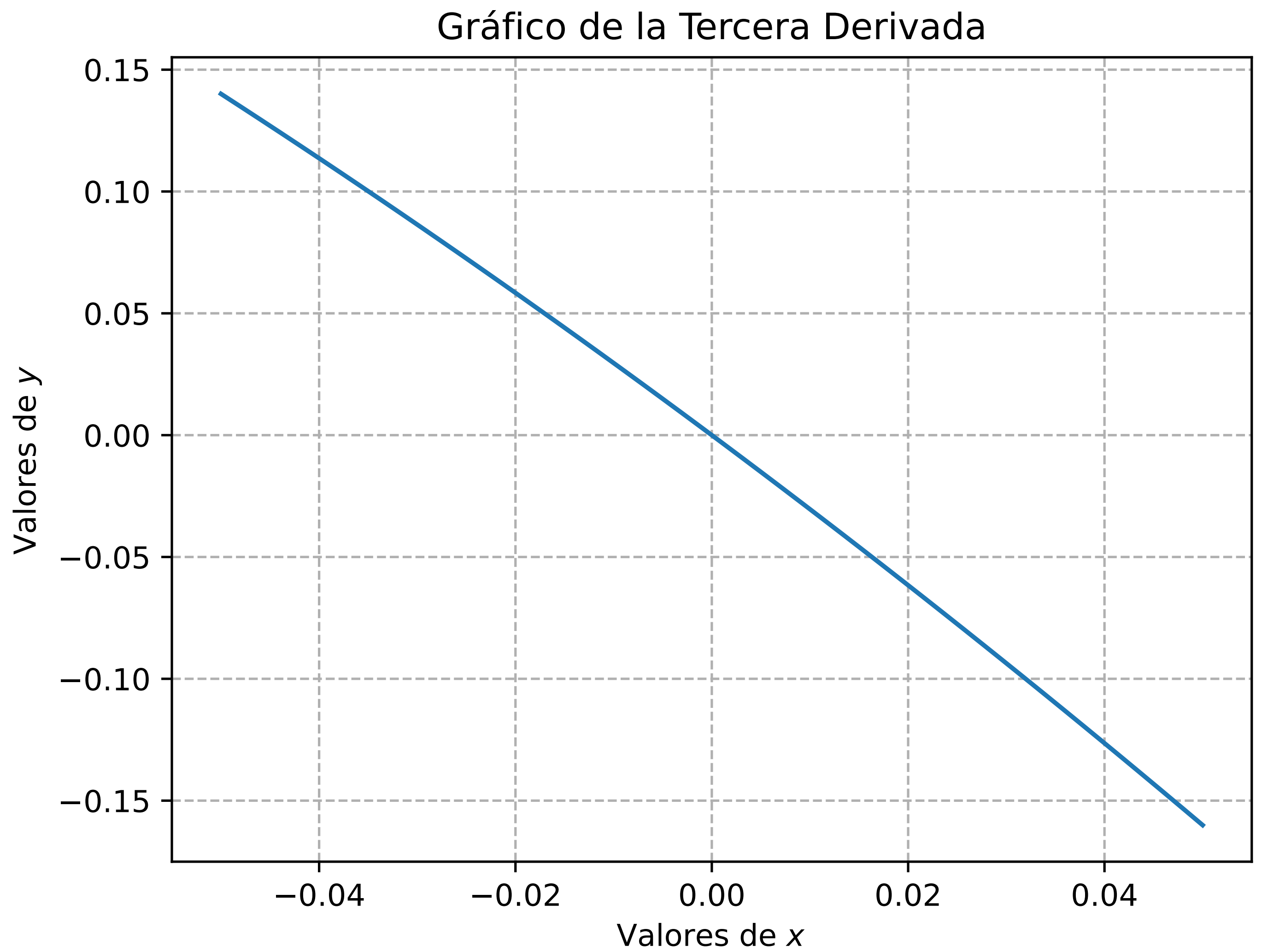

Figura 5.2: Gráfica de la Tercera Derivada

La cota del error para $x \in [-0.05, 0.05]$

$$\begin{aligned}\frac{M\left|h^2\right|}{6} &= \frac{1.0512491978605 \cdot 0.05^2}{6} \\ &= 0.000438020499\end{aligned}$$

5.2.4 Fórmula de los cincos puntos

Si en lugar de usar tres puntos equiespaciados, usamos cinco puntos equiespaciados de la forma x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0+3h, x_0+4h y razonamos de la misma manera, es decir, calculamos el polinomio de interpolación en los puntos anteriores usando polinomios de Lagrange, usamos la fórmula de error de interpolación y la derivamos, obtenemos las siguientes fórmulas de cinco puntos:

- Fórmula de los cinco puntos respecto del punto medio:

  $$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

  donde $\xi \in (x_0-2h, x_0+2h)$

- Fórmula de los cinco puntos respecto del valor extremo:

  $$\begin{aligned} f'(x_0) =& \frac{1}{12h}\left(-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)\right. \\ &+ \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi) \end{aligned}$$

  donde $\xi \in (x_0, x_0+4h)$.

Ejemplo 3:

Si aplicamos la fórmula de los cinco puntos respecto del punto medio en el ejemplo anterior con $h = 0.05$, obtenemos

Solución

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{12h}\left(f(-2h) - 8f(-h) + 8f(h) - f(2h)\right) - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi) \\ &= \frac{1}{0.6}\left(f(-0.1) - 8f(-0.05) + 8f(0.05) - f(0.1)\right) + \frac{0.00000625}{30} f^{(5)}(\xi) \\ &= 1.0000016631945 + 0.000000208333 f^{(5)}(\xi) \end{aligned}$$

El error cometido real será:

$$|1.0000016631945 - 1| = 0.000001663195$$

y usando que

$$f^{(5)}(x) = e^{\sin(x)}\left(\cos^5(x) - 10\cos^3(x) - 10\sin(x)\cos^3(x) + 15\sin^2(x)\cos(x) + 15\sin(x)\,\mathrm{co}\right.$$

, y por tanto

$$\max_{x\in[-0.1,0.1]} \left|f^{(5)}(x)\right| \leq e^{\sin(0.1)} \cdot 9 = 9.4612427807445$$

La cota del error para $x \in [-0.1, 0.1]$ será

$$0.000000208333 \cdot 9.4612427807445 = 0.000001971089$$

5.2.5 Derivación Numérica Usando la Fórmula de Taylor

Otra manera de deducir fórmulas de derivación numérica es usar la fórmula de Taylor.

Vamos a ver cómo se obtiene la fórmula de los cinco puntos respecto del punto medio usando desarrollos de Taylor.

Si desarrollamos por Taylor la función f alrededor de x_0 en los puntos x_0-2h, x_0-h, x_0+h y x_0+2h, obtenemos:

$$\begin{aligned} f\left(x_0-2h\right)=&f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)2h+f''\left(x_0\right)\frac{4h^2}{2}-f'''\left(x_0\right)\frac{8h^3}{6}\\ &+f^{(4)}\left(x_0\right)\frac{16h^4}{24}-f^{(5)}\left(\xi_1\right)\frac{32h^5}{120}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x_0-h\right)=&f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)h+f''\left(x_0\right)\frac{h^2}{2}-f'''\left(x_0\right)\frac{h^3}{6}\\ &+f^{(4)}\left(x_0\right)\frac{h^4}{24}-f^{(5)}\left(\xi_2\right)\frac{h^5}{120}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x_0+h\right)=&f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h+f''\left(x_0\right)\frac{h^2}{2}+f'''\left(x_0\right)\frac{h^3}{6}\\ &+f^{(4)}\left(x_0\right)\frac{h^4}{24}+f^{(5)}\left(\xi_3\right)\frac{h^5}{120}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x_0+2h\right)=&f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)2h+f''\left(x_0\right)\frac{4h^2}{2}+f'''\left(x_0\right)\frac{8h^3}{6}\\ &+f^{(4)}\left(x_0\right)\frac{16h^4}{24}+f^{(5)}\left(\xi_4\right)\frac{32h^5}{120}\end{aligned}$$

Donde $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\in\left(x_0-2h,x_0+2h\right)$.

El siguiente paso es hallar los coeficientes A_1,A_2,A_3,A_4 y A_5 por lo que hay que multiplicar las expresiones de $f\left(x_0-2h\right)$, $f\left(x_0-h\right)$, $f\left(x_0\right)$, $f\left(x_0+h\right)$ y $f\left(x_0+2h\right)$, respectivamente, con el objetivo de eliminar los términos h^0,h^2,h^3 y h^4 y con la finalidad de que nos quede únicamente el término en $hf'\left(x_0\right)$ para obtener una fórmula aproximada de $f'\left(x_0\right)$:

Así tenemos que plantear

$$A_1 \cdot \left(f\left(x_0 - 2h\right) = f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right) 2h + f''\left(x_0\right) \frac{4h^2}{2} - \cdots , \right)$$

$$A_2 \cdot \left(f\left(x_0 - h\right) = f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right) h + f''\left(x_0\right) \frac{h^2}{2} - \cdots \right)$$

$$A_3 \cdot \left(f\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) \right)$$

$$A_4 \cdot \left(f\left(x_0 + h\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) h + f''\left(x_0\right) \frac{h^2}{2} + \cdots \right)$$

$$A_5 \cdot \left(f\left(x_0 + 2h\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) 2h + f''\left(x_0\right) \frac{4h^2}{2} + \cdots \right)$$

- El coeficiente que corresponde a $f\left(x_0\right)$ es: $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$
- El coeficiente que corresponde a $f''\left(x_0\right) h^2$ es: $2A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4 + 2A_5$
- El coeficiente que corresponde a $f'''\left(x_0\right) h^3$ es: $-\frac{4}{3}A_1 - \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{6}A_4 + \frac{4}{3}A_5$
- El coeficiente que corresponde a $f^{(4)}\left(x_0\right) h^4$ es: $\frac{2}{3}A_1 + \frac{1}{24}A_2 + \frac{1}{24}A_4 + \frac{2}{3}A_5$

Entonces para calcular los valores de A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0 & (1) \\ 2A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4 + 2A_5 = 0 & (2) \\ -\frac{4}{3}A_1 - \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{6}A_4 + \frac{4}{3}A_5 = 0 & (3) \\ \frac{2}{3}A_1 + \frac{1}{24}A_2 + \frac{1}{24}A_4 + \frac{2}{3}A_5 = 0 & (4) \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado ya que tiene 4 ecuaciones con 5 incógnitas. Podemos añadir una ecuación extra imponiendo que el coeficiente correspondiente a $hf'\left(x_0\right)$ sea 1:

$$-2A_1 - A_2 + A_4 + 2A_5 = 1$$

Así tenemos

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=0 & (1)\\ 2A_1+\frac{1}{2}A_2+\frac{1}{2}A_4+2A_5=0 & (2)\\ -\frac{4}{3}A_1-\frac{1}{6}A_2+\frac{1}{6}A_4+\frac{4}{3}A_5=0 & (3)\\ \frac{2}{3}A_1+\frac{1}{24}A_2+\frac{1}{24}A_4+\frac{2}{3}A_5=0 & (4)\\ -2A_1-A_2+A_4+2A_5=1 & (5) \end{cases}$$

Las soluciones del sistema anterior son las siguientes:

$$A_1=\frac{1}{12}, A_2=-\frac{2}{3}, A_3=0, A_4=\frac{2}{3}, A_5=-\frac{1}{12}$$

Entonces $A_1\cdot f\left(x_0-2h\right)+A_2\cdot f\left(x_0-h\right)+A_3\cdot f\left(x_0\right)+A_4\cdot f\left(x_0+h\right)+A_5\cdot \left(x_0+2h\right)$ vale:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12}f\left(x_0-2h\right)-\frac{2}{3}f\left(x_0-h\right)+\frac{2}{3}f\left(x_0+h\right)-\frac{1}{12}f\left(x_0-2h\right)\\ =&f'\left(x_0\right)h+\frac{h^5}{120}\left(-\frac{32}{12}f^{(5)}\left(\xi_1\right)+\frac{2}{3}f^{(5)}\left(\xi_2\right)+\frac{2}{3}f^{(5)}\left(\xi_3\right)-\frac{32}{12}f^{(5)}\left(\xi_4\right)\right) \end{aligned}$$

Luego aplicando el Teorema de Bolzano Generalizado podemos reducir el término del error de la forma siguiente:

- Existe un $\xi_{1,4}$ tal que $-\frac{32}{12}f^{(5)}\left(\xi_1\right)-\frac{32}{12}f^{(5)}\left(\xi_4\right)=-\frac{16}{3}f^{(5)}\left(\xi_{1,4}\right)$ (los coeficientes deben tener el mismo signo)
- Existe un $\xi_{2,3}$ tal que $\frac{2}{3}f^{(5)}\left(\xi_2\right)+\frac{2}{3}f^{(5)}\left(\xi_3\right)=\frac{4}{3}f^{(5)}\left(\xi_{2,3}\right)$ (los coeficientes deben tener el mismo signo)

El término del error queda pues:

$$\frac{h^5}{120}\left(-\frac{16}{3}f^{(5)}\left(\xi_{1,4}\right)+\frac{4}{3}f^{(5)}\left(\xi_{2,3}\right)\right)$$

Si hubiésemos usado la fórmula del error de interpolación y los polinomios de Lagrange, hubiésemos visto que el término del error se podría escribir como:

$$-\frac{16}{3}f^{(5)}\left(\xi_{1,4}\right)+\frac{4}{3}f^{(5)}\left(\xi_{2,3}\right)=\left(-\frac{16}{3}+\frac{4}{3}\right)f^{(5)}\left(\xi\right)=-4f^{(5)}\left(\xi\right)$$

En resumen,

$$\frac{1}{12}f\left(x_0-2h\right)-\frac{2}{3}f\left(x_0-h\right)+\frac{2}{3}f\left(x_0+h\right)-\frac{1}{12}f\left(x_0+2h\right)=f'\left(x_0\right)h-\frac{h^5}{120}\cdot 4f^{(5)}\left(\xi\right)$$

de donde despejando $f'(x_0)$ obtenemos la fórmula de derivación de los cinco puntos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{12}f(x_0-2h)-\frac{2}{3}f(x_0-h)+\frac{2}{3}f(x_0+h)-\frac{1}{12}f(x_0+2h)\right)+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) \\ &= \frac{f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{12h}+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) \end{aligned}$$

5.2.6 Derivadas de Orden Superior

La técnica anterior nos permite usar fórmulas numéricas aproximadas para hallar derivadas de orden superior.

Calculemos como ejemplo una aproximación de $f''(x_0)$.

Considerando los mismos puntos anteriores, $x_0 \pm h$ y $x_0 \pm 2h$ y los mismos desarrollos de Taylor anteriores, hemos de calcular unos coeficientes $B_1, B_2, B_3 B_4$ y B_5 por los cuales hay que multiplicar las expresiones de $f(x_0-2h), f(x_0-h), f(x_0), f(x_0+h)$ y $f(x_0+2h)$, respectivamente, y con el fin de eliminar los términos en h^0, h, h^3 y h^4 para que así solo pueda quedar el término en $h^2 f''(x_0)$ para obtener una fórmula aproximada de $f''(x_0)$.

En primer lugar, desarrollamos por Taylor la función f alrededor de x_0 en los puntos x_0-2h, x_0-h, x_0+h y x_0+2h hasta llegar a términos del orden h^6:

- $f(x_0-2h)$

$$\begin{aligned} f(x_0-2h) =& f(x_0)-f'(x_0)2h+f''(x_0)\frac{4h^2}{2}-f'''(x_0)\frac{8h^3}{6} \\ &+f^{(4)}(x_0)\frac{16h^4}{24}-f^{(5)}(x_0)\frac{32h^5}{120}+f^{(6)}(\xi_1)\frac{64h^6}{720} \end{aligned}$$

- $f(x_0-h)$

$$\begin{aligned} f(x_0-h) =& f(x_0)-f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}+f'''(x_3)\frac{h^3}{6} \\ &+f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{24}-f^{(5)}\frac{h^5}{120}+f^{(6)}(\xi_2)\frac{h^6}{720} \end{aligned}$$

- $f(x_0+h)$

$$\begin{aligned} f(x_0+h) =& f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}+f'''(x_0)\frac{h^3}{6} \\ &+f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{24}+f^{(5)}(x_0)+f^{(6)}(\xi_3)\frac{h^6}{720} \end{aligned}$$

- $f(x_0+2h)$

$$\begin{aligned} f(x_0+2h) =& f(x_0)+f'(x_0)2h+f''(x_0)\frac{4h^2}{2}+f'''(x_0)\frac{8h^3}{6} \\ &+f^{(4)}(x_0)\frac{16h^4}{24}+f^{(5)}(x_0)\frac{32h^5}{120}+f^{(6)}(\xi_4)\frac{64h^6}{720} \end{aligned}$$

Luego hacemos

$$B_1\cdot\left(f(x_0-2h)=f(x_0)-f'(x_0)2h+f''(x_0)\frac{4h^2}{2}-f'''(x_0)\frac{8h^3}{6}+\cdots\right)$$

$$B_2\cdot\left(f(x_0+h)=f(x_0)-f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}+f'''(x_3)\frac{h^3}{6}+\cdots\right)$$

$$B_3\cdot(f(x_0)=f(x_0))$$

$$B_4\cdot\left(f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}+f'''(x_0)\frac{h^3}{6}+\cdots\right)$$

$$B_5\cdot\left(f(x_0+2h)=f(x_0)+f'(x_0)2h+f''(x_0)\frac{4h^2}{2}+f'''(x_0)\frac{8h^3}{6}+\cdots\right)$$

- El coeficiente correspondiente a $f(x_0)$ es $B_1+B_2+B_3+B_4+B_5$
- El coeficiente correspondiente a $f'(x_0)h$ es $-2B_1-B_2+B_4+2B_5$
- El coeficiente correspondiente a $f'''(x_0)h^3$ es $-\frac{4}{3}B_1-\frac{1}{6}B_2+\frac{1}{6}B_4+\frac{4}{3}B_5$
- El coeficiente correspondiente a $f^{(4)}(x_0)h^4$ es $\frac{2}{3}B_1+\frac{1}{24}B_2+\frac{1}{24}B_4+\frac{2}{3}B_5$

Así para eliminar todos los términos creamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} B_1+B_2+B_3+B_4+B_5=0 & (1) \\ -2B_1-B_2+B_4+2B_5=0 & (2) \\ -\frac{4}{3}B_1-\frac{1}{6}B_2+\frac{1}{6}B_4+\frac{4}{3}B_5=0 & (3) \\ \frac{2}{3}B_1+\frac{1}{24}B_2+\frac{1}{24}B_4+\frac{2}{3}B_5=0 & (4) \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado ya que tiene 4 ecuaciones con 5 incógnitas. Podemos añadir una ecuación extra imponiendo que el coeficiente correspondiente a $h^2 f''(x_0)$ sea 1

$$2B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_4 + 2B_5 = 1$$

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 0 & (1) \\ -2B_1 - B_2 + B_4 + 2B_5 = 0 & (2) \\ -\frac{4}{3}B_1 - \frac{1}{6}B_2 + \frac{1}{6}B_4 + \frac{4}{3}B_5 = 0 & (3) \\ \frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{24}B_2 + \frac{1}{24}B_4 + \frac{2}{3}B_5 = 0 & (4) \\ 2B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}B_4 + 2B_5 = 1 & (5) \end{cases}$$

Las soluciones del sistema anterior son las siguientes:

$$B_1 = -\frac{1}{12}, B_2 = \frac{4}{3}, B_3 = -\frac{5}{2}, B_4 = \frac{4}{3}, B_5 = -\frac{1}{12}$$

En este caso, observamos que el coeficiente de h^5 también se anula:

$$-\frac{32B_1}{120} - \frac{B_2}{120} + \frac{B_4}{120} + \frac{32B_5}{120} = \frac{1}{1440}(32 - 48 + 48 - 32) = 0$$

Entonces

$$B_1 f(x_0 - 2h) + B_2 f(x_0 - h) + B_3 f(x_0) + B_4 f(x_0 + h) + B_5 f(x_0 + 2h)$$

vale:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{12}f(x_0 - 2h) + \frac{4}{3}f(x_0 - h) - \frac{5}{2}f(x_0) + \frac{4}{3}(x_0 + h) - \frac{1}{12}f(x_0 - 2h) \\ =&f''(x_0)h^2 + \frac{h^6}{720}\left(-\frac{64}{12}f^{(6)}(\xi_1) + \frac{4}{3}f^{(6)}(\xi_2) + \frac{4}{3}f^{(6)}(\xi_3) - \frac{64}{12}f^{(6)}(\xi_4)\right) \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Bolzano Generalizado podemos reducir el término del error de la forma siguiente:

- Existe un $\xi_{1,4}$ tal que $\frac{64}{12}f^{(6)}(\xi_1) + \frac{64}{12}f^{(6)}(\xi_4) = \frac{32}{3}f^{(6)}(\xi_{1,4})$
- Existe un $\xi_{2,3}$ tal que $\frac{4}{3}f^{(6)}(\xi_2) + \frac{4}{3}f^{(6)}(\xi_3) = \frac{8}{3}f^{(6)}(\xi_{2,3})$.

El término del error queda pues:

$$\frac{h^6}{720}\left(\frac{8}{3}f^{(6)}(\xi_{2,3}) - \frac{32}{3}f^{(6)}(\xi_{2,3})\right) = \frac{h^6}{270}\left(f^{(6)}(\xi_{2,3}) - 4f^{(6)}(\xi_{1,4})\right)$$

Así se podemos reescribir la expresión como

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{12}f\left(x_0-2h\right)+\frac{4}{3}f\left(x_0-h\right)-\frac{5}{2}f\left(x_0\right)+\frac{4}{3}\left(x_0+h\right)-\frac{1}{12}f\left(x_0-2h\right)\\
=&f''\left(x_0\right)h^2+\frac{h^6}{270}\left(f^{(6)}\left(\xi_{2,3}\right)-4f^{(6)}\left(\xi_{1,4}\right)\right)
\end{aligned}$$

de donde despejando $f''(x_0)$ obtenemos la fórmula de derivación de segundo orden de los cinco puntos

$$\begin{aligned}
f''\left(x_0\right)=&\frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{12}f\left(x_0-2h\right)+\frac{4}{3}f\left(x_0-h\right)-\frac{5}{2}f\left(x_0\right)+\frac{4}{3}f\left(x_0+h\right)-\frac{1}{12}f\left(x_0+2h\right)\right)\\
&+\frac{h^4}{270}\left(4f^{(6)}\left(\xi_{1,4}\right)-f^{(6)}\left(\xi_{2,3}\right)\right)\\
=&\frac{-f\left(x_0-2h\right)+16f\left(x_0-h\right)-30f\left(x_0\right)+16f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0+2h\right)}{12h^2}\\
&+\frac{h^4}{270}\left(4f^{(6)}\left(\xi_{1,4}\right)-f^{(6)}\left(\xi_{2,3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4:

Vamos a aproximar $f''(0)$ en el ejemplo anterior donde recordemos que $f(x)=e^{\sin(x)}$,considerando $h=0.05$.

Solución

$$\begin{aligned}
f''(0)=&\frac{-f(-2h)+16f(-h)-30f(0)+16f(h)-f(2h)}{12h^2}\\
&+\frac{h^4}{270}\left(4f^{(6)}\left(\xi_1\right)-f^{(6)}\left(\xi_2\right)\right)\\
=&\frac{1}{0.03}\left(-e^{\sin(-0.1)}+16e^{\sin(-0.05)}-30e^{\sin(0)}+16e^{\sin(0.05)}-e^{\sin(0.1)}\right)\\
&+\frac{0.05^4}{270}\left(4f^{(6)}\left(\xi_1\right)-f^{(6)}\left(\xi_2\right)\right)\\
&=1.00000020501+0.000000023148\left(4f^{(6)}\left(\xi_1\right)-f^{(6)}\left(\xi_2\right)\right)
\end{aligned}$$

El valor de $f''(x)$ vale $f''(x)=e^{\sin(x)}\left(\cos^2(x)-\sin(x)\right)$. Por tanto, $f''(0)=1$. Vemos que hemos aproximado $f''(0)$ con un error real de:

$$|1.00000020501-1|=0.00000020501$$

Nuestra cota del error es del orden $\mathcal{O}\left(h^4\right)\approx K\cdot 0.000000023148$, donde K es una constante que depende de la derivada sexta.

5.2.7 Inestabilidad del Error de Redondeo

En todas las aproximaciones anteriores, sólo hemos tenido en cuenta el error de truncamiento o el error que cometemos cuando aproximamos $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ o incluso derivadas superior a partir de interpolar o de desarrollar f usando la fórmula de Taylor pero no hemos tenido en cuenta el error de redondeo.

Es decir, no hemos tenido en cuenta que cuando evaluamos la función f en un cierto punto x, en realidad no obtenemos el valor exacto $f(x)$, si no una aproximación $\tilde{f}(x)$

Por ejemplo, en la fórmula de los tres puntos respecto del punto medio, para aproximar $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$$

donde $\xi_1 \in \langle x_0-h, x_0+h\rangle$, en realidad, cuando evaluamos la aproximación,

$$\frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right)$$

hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{2h}\left(\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)\right)$$

donde $\tilde{f}(x_0+h)$, $\tilde{f}(x_0-h)$ son aproximaciones de $f(x_0+h)$ y $f(x_0-h)$, respectivamente.

Por tanto, podemos escribir,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_0+h) &= f(x_0+h) + e(x_0+h)\\ \tilde{f}(x_0-h) &= f(x_0-h) + e(x_0-h)\end{aligned}$$

donde $e(x_0+h)$ y $e(x_0-h)$ son los errores de redondeo que cometemos al evaluar $f(x_0+h)$ y $f(x_0-h)$, respectivamente.

5.2.8 Error Global Cometido

El error global cometido en la fórmula de los tres puntos respecto del punto medio seria el siguiente:

$$\begin{aligned} & f'(x_0) - \frac{1}{2h}\left(\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)\right) \\ =& \frac{1}{2h}\left(e(x_0+h) + e(x_0-h)\right) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1) \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$ el error máximo cometido al evaluar $f(x_0 \pm h)$ con $|h| \leq h_0$ para un cierto h_0.

Sea

$$M = \max_{x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)} |f'''(x)|$$

Podemos acotar el error global por

$$E = \frac{1}{2h} \cdot 2\epsilon + \frac{h^2}{6} \cdot M = \frac{\epsilon}{h} + \frac{Mh^2}{6}$$

A partir de la expresión anterior, vemos que no tiene sentido considerar h arbitrariamente pequeña ya que, aunque el término $\frac{Mh^2}{6}$ tiende a cero, el término $\frac{\epsilon}{h}$ se hace arbitrariamente grande.

Su tuviésemos conocimiento del comportamiento de la tercera derivada, podríamos calcular el h óptimo para el cual el error sería mínimo pero como trabajamos con cotas, dicho h óptimo sería aproximado y nunca lo podríamos hallar.

5.2.9 Extrapolación de Richardson

Vamos a aprender una técnica que nos permite transformar aproximaciones numéricas de algoritmos con errores de truncamiento relativamente bajos, es decir, de orden $\mathcal{O}\left(h^k\right)$ con k pequeños en algoritmos con errores de truncamiento altos, es, decir, de orden $\mathcal{O}\left(h^{\hat{k}}\right)$ con $\hat{k} > k$.

Dicha técnica se denomina extrapolación de Richardson. Veamos cómo funciona.

Sea $F(h)$ un algortimo que nos da una aproximación numérica de cierta constante C con error de truncamiento h. Es decir:

$$F(h) = C + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots ,$$

donde $k_1, k_2, k_3, \ldots$ son constantes en principio desconocidas donde sí sabemos que $k_1 \neq 0$ ya que como hemos indicado el algoritmo tiene error de truncamiento $\mathcal{O}(h)$.

Si aplicamos el algoritmo a $\frac{h}{2}$, obtenemos:

$$F\left(\frac{h}{2}\right) = C + k_1 \cdot \frac{h}{2} + k_2 \cdot \frac{h^2}{4} + k_3 \cdot \frac{h^3}{8} + \cdots ,$$

Consideremos ahora $2F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)$ como nueva aproximación de la constante C,

$$2F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h) = C - k_2 \cdot \frac{h^2}{2} - k_3 \cdot \frac{3h^3}{4} + \cdots$$

Vemos que el "nuevo" algoritmo $2F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)$ tiene error de truncamiento $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ y por tanto es mejor que el algoritmo inicial $F(h)$ que permite aproximar la constante C.

Sea

$$\begin{aligned} F_0(h) &= F(h) = C + k_1 \cdot h + \cdots , \\ F_1(h) &= 2F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h) = C - k_2 \cdot \frac{h^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

En general, escribimos $F_n(h) = C + k_{n+1}\frac{p_n}{q_m}h^{n+1} + \cdots$, donde $k_{n+1}\frac{p_n}{q_n}$ representaría el coeficiente de término principal.

Para calcular $F_{n+1}(h)$, tenemos que eliminar el término $k_{n+1}\frac{p_n}{q_n}h^{n+1}$. Por tanto, hacemos lo siguiente

$$2^{n+1}F_n\left(\frac{h}{2}\right) - F_n(h) = \left(2^{n+1} - 1\right)C + k_{n+2}\frac{\tilde{p}_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}}h^{n+2} + \cdots$$

Por tanto,

$$F_{n+1}(h)=\frac{2^{n+1}F_n\left(\dfrac{h}{2}\right)-F_n(h)}{2^{n+1}-1}=C+k_{n+2}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}h^{n+1}+\cdots$$

Para calcular aproximaciones de C con errores de truncamiento cada vez más pequeños, hacemos una tabla como la que sigue:

$\mathcal{O}(h)$	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^3)$	$\mathcal{O}(h^4)$
$F_0(h)$			
$F_0\left(\frac{h}{2}\right)$	$F_1(h)=2F_0\left(\frac{h}{2}\right)-F_0(h)$		
$F_0\left(\frac{h}{4}\right)$	$F_1\left(\frac{h}{2}\right)=2F_0\left(\frac{h}{4}\right)-F_0\left(\frac{h}{2}\right)$	$F_2(h)=\dfrac{2^2F_1\left(\frac{h}{2}\right)-F_1(h)}{2^2-1}$	
$F_0\left(\frac{h}{8}\right)$	$F_1\left(\frac{h}{4}\right)=2F_0\left(\frac{h}{8}\right)-F_0\left(\frac{h}{4}\right)$	$F_2\left(\dfrac{h}{2}\right)=\dfrac{2^2F_1\left(\frac{h}{4}\right)-F_1\left(\frac{h}{4}\right)}{2^2-1}$	$F_3(h)=\dfrac{2^3F_2\left(\dfrac{h}{2}\right)-F_2(h)}{2^3-1}$

Ejemplo 5:

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Vamos a hallar una aproximación de $f'(1)$ usando **Extrapolación de Richardson**.

Solución

Usaremos como aproximación de $f'(x_0)$ el cociente incremental $F_0(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ que tiene un error de truncamiento $\mathcal{O}(h)$, ya que consideramos el desarrollo de Taylor de $f(x_0+h)$, obtenemos:

$$F_0(h)=\frac{f(x_0)+hf'(x_0)+\dfrac{h^2}{2}f''(x_0)+\cdots-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(x_0)+\cdots$$

Consideremos, pues $x_0=1$ y $h=0.1$, la tabla de las aproximaciones de la Extrapolación de Richardson vale:

$\mathcal{O}(h)$	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^3)$	$\mathcal{O}(h^4)$
$F_0(h)=-0.4751131221719$			
$F_0\left(\frac{h}{2}\right)=-0.487514863258$	$F_1(h)=-0.4999166043441$		
$F_0\left(\frac{h}{4}\right)=-0.4937519049072$	$F_1\left(\frac{h}{2}\right)=-0.4999889465564$	$F_2(h)=-0.50001306062717$	
$F_0\left(\frac{h}{8}\right)=-0.496875241108$	$F_1\left(\frac{h}{4}\right)=-0.4999985773088$	$F_2\left(\frac{h}{2}\right)=-0.5000017875596$	$F_3(h)=-0.50000017712137$

El valor exacto de $f'(x)$ vale -0.5 ya que:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\Rightarrow f'(1)=\frac{-2}{(1+1)^2}=-0.5$$

Los errores cometidos en las diferentes aproximaciones $F_i(h)$, con $i = 0, 1, 2, 3$ valen:

$$0.0248868778281,\ 0.000083395656,\ 0.000013060627,\ 0.000000177121$$

Observamos que cada vez los errores son más pequeños, lo que indica que las aproximaciones $F_i(h)$ son cada vez mejores a medida que i aumenta.

5.2.10 Extrapolación de Richardson con Exponentes Pares

Suponemos que la aproximación $F(h)$ para calcular C tiene una expresión donde sólo aparecen exponentes pares en el término del error:

$$F_0(h) = F(h) = C + k_1 h^2 + k_2 h^4 + \cdots k_n h^{2n} + \cdots$$

En este caso, las aproximaciones sucesivas usando la extrapolación de Richardson son las siguientes:

$$F_{n+1}(h) = \frac{4^{n+1} F_n\left(\frac{h}{2}\right) - F_n(h)}{4^{n+1} - 1} = C + k_{n+2}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} h^{2(n+2)} + \cdots$$

Ejercicio 1:

Demostrar la expresión anterior

La tabla de las aproximaciones sería en este caso:

$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$	$\mathcal{O}(h^8)$
$F_0(h)$			
$F_0\left(\frac{h}{2}\right)$	$F_1(h) = \frac{4F_0\left(\frac{h}{2}\right) - F_0(h)}{4-1}$		
$F_0\left(\frac{h}{4}\right)$	$F_1\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{4F_0\left(\frac{h}{4}\right) - F_0\left(\frac{h}{2}\right)}{4-1}$	$F_2(h) = \frac{4^2F_1\left(\frac{h}{2}\right) - F_1(h)}{4^2-1}$	
$F_0\left(\frac{h}{8}\right)$	$F_1\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{4F_0\left(\frac{h}{8}\right) - F_0\left(\frac{h}{4}\right)}{4-1}$	$F_2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{4^2F_1\left(\frac{h}{4}\right) - F_1\left(\frac{h}{2}\right)}{4^2-1}$	$F_3(h) = \frac{4^3F_2\left(\frac{h}{2}\right) - F_2(h)}{4^3-1}$

Recordemos del ejemplo anterior que la función era $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Vamos a hallar una aproximación de $f'(1)$ usando Extrapolación de Richardson pero usando como aproximación de $f'(x_0)$ la fórmula de los tres puntos

$$F_0(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

En el término del error de dicha fórmula sólo aparecen exponentes pares $\mathcal{O}\left(h^{2k}\right)$ ya que si consideramos el desarrollo de Taylor de

$$f\left(x_0+h\right) \text{ y } f\left(x_0-h\right)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
F_0\left(h\right) =& \frac{1}{2h}\left(f\left(x_0\right)+hf'\left(x_0\right)+\frac{h^2}{2}f''\left(x_0\right)+\frac{h^3}{6}f'''\left(x_0\right)+\cdots\right.\\
&\left.-\left(f\left(x_0\right)-hf'\left(x_0\right)+\frac{h^2}{2}f''\left(x_0\right)-\frac{h^3}{6}f'''\left(x_0\right)+\cdots\right)\right)\\
&= f'\left(x_0\right)+\frac{h^3}{3}f'''\left(x_0\right)+\cdots
\end{aligned}$$

Se observa que al simplificar con $\dfrac{1}{2h}$ solo aparecerán exponentes pares para las h.

Si consideramos $x_0 = 1$ y $h = 0.1$, la tabla de las aproximaciones de la Extrapolación de Richardson es:

$\mathcal{O}\left(h^2\right)$	$\mathcal{O}\left(h^4\right)$	$\mathcal{O}\left(h^6\right)$	$\mathcal{O}\left(h^8\right)$
$F_0\left(h\right) = -0.49998750031245$			
$F_0\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4999992187512$	$F_1\left(h\right) = -0.50000312489747$		
$F_0\left(\frac{h}{4}\right) = -0.499999951172$	$F_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.50000019531227$	$F_2\left(h\right) = -0.50000000000659$	
$F_0\left(\frac{h}{8}\right) = -0.4999999969484$	$F_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.5000000122072$	$F_2\left(\frac{h}{2}\right) = -0.5$	$F_3\left(h\right) = -0.5$