Clase 7

Ceros de Funciones de una Variable

7.1 Método del Punto Fijo

El **método del punto fijo** consiste en transformar la ecuación $f(x) = 0$ en la ecuación $x = g(x)$ mediante **operaciones algebraicas "básicas"**.

Entonces el **cero** de la ecuación $f(x) = 0$ se transforma en lo que llamaremos un **punto fijo** de la función $g(x)$:

Definición 1: Definición de Punto Fijo

Sea g una función real de variable real. Diremos que $\hat{x}$ es un punto fijo de la función g si $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Observación

Gráficamente, un **punto fijo** resulta de la intersección de la recta diagonal $y = x$ y de la función $y = g(x)$

La idea es considerar la sucesión definida de forma recurrente como $x_n = g(x_{n-1})$ y ver bajo qué condiciones la sucesión $(x_n)_n$ converge hacia el **punto fijo** $\hat{x}$ de g que recordemos será el **cero** de la función f buscado.

Ejemplo 1:

Para resolver la ecuación anterior $x^3 - x + 1 = 0$, podemos realizar las siguientes transformaciones;

$$
\begin{aligned}
x^3 - x + 1 = 0, &\Rightarrow x = x^3 + 1 = g_1(x) \\
x^3 - x + 1 = 0, &\Rightarrow x^3 = x - 1 \\
&\Rightarrow x = \sqrt[3]{x-1} = g_2(x)
\end{aligned}
$$

Entonces hallar un punto fijo de la función g_1 o g_2 es equivalente a hallar un cero de la función $f(x) = x^3 - x + 1$

Ejercicio 1:

Crear un *programa* en **Python** que grafique las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Programa de Google Colab

Este programa se ha desarrollado usando Google Colab. Para ver el programa haz clic en el logo.

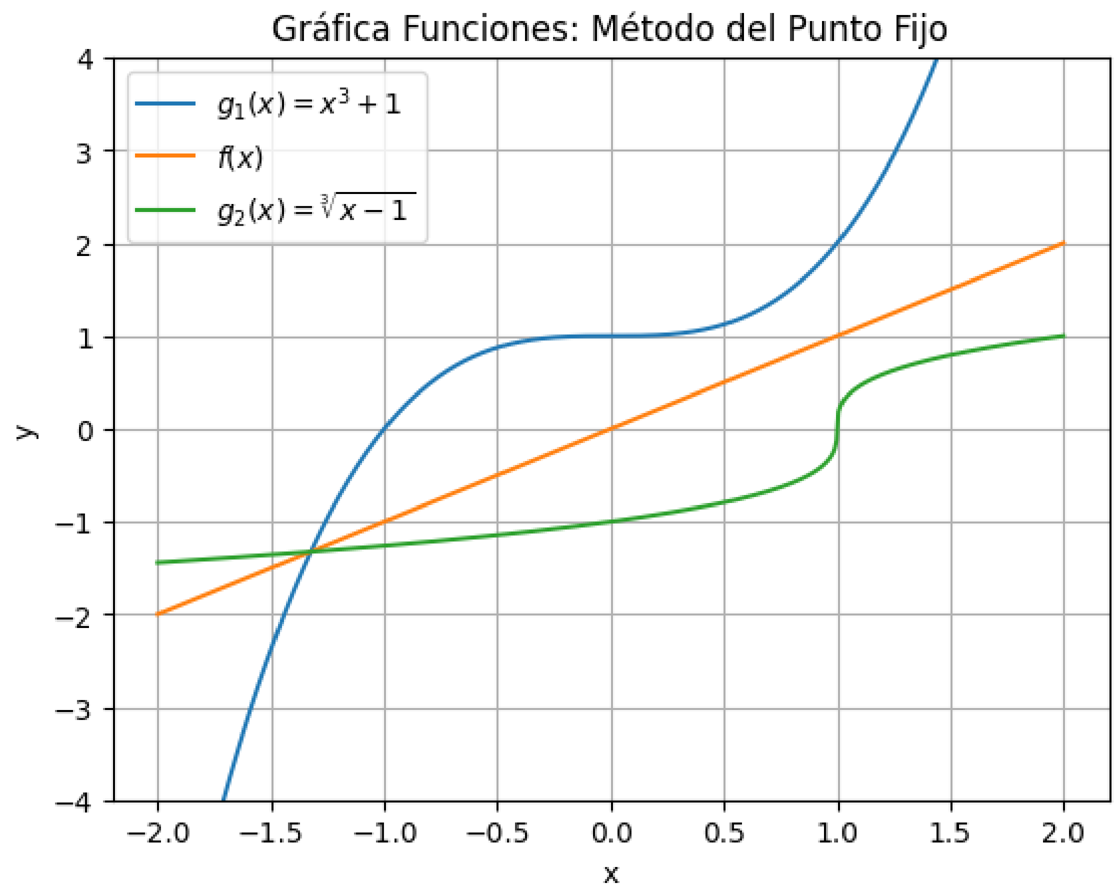

Figura 7.1: Resultado del Gráfico Generado con Python del Ejercicio Anterior

7.1.1 Existencia del Punto Fijo

El teorema siguiente nos dice cuáles son las condiciones de existencia del punto fijo de una función g:

Teorema 1:

- Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$ una función continua dentro un intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ es decir, la función g esta definida de la forma siguiente:

$$g : [a,b] \to [a,b]$$

  Entonces g tiene al menos un **punto fijo** $\hat{x}$ en el intervalo $[a,b]$, es decir, existe $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

- Si además $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tal que existe una constante $k < 1$ con $|g'(x)| \leq k$, para todo valor $x \in (a,b)$. Entonces el punto fijo en el intervalo es único, es decir, existe un único $\hat{x} \in [a,b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$

Demostración

Supongamos que $g\left(x\right) \in \left[a, b\right]$, para todo $x \in \left[a, b\right]$. Consideremos la función $h\left(x\right) = g\left(x\right) - x$.

El valor de $h\left(a\right)$ cumple $h\left(a\right) = g\left(a\right) - a \geq 0$, ya que $g\left(a\right) \geq a$ al cumplirse $g\left(a\right) \in \left[a, b\right]$.

Si $h\left(a\right) = 0$,ya hemos acabado ya que en este caso, $g\left(a\right) = a$ y el punto fijo buscado sería $\hat{x} = a$. Por tanto, suponemos que $h\left(a\right) > 0$.

El valor de $h\left(b\right)$ cumple $h\left(b\right) = g\left(b\right) - b \leq 0$, ya que $g\left(b\right) \leq b$ al cumplirse $g\left(b\right) \in \left[a, b\right]$.

Si $h\left(b\right) = 0$, ya hemos acabado ya que en este caso, $g\left(b\right) = b$ y el punto fijo buscado sería $\hat{x} = b$. Por tanto, suponemos que $h\left(b\right) < 0$.

Por tanto $h\left(a\right) > 0$ y $h\left(b\right) < 0$, y como h es continua, usando el Teorema de Bolzano, existe un valor $\hat{x} \in \left(a, b\right)$ tal que $h\left(\hat{x}\right) = 0$, o lo que es lo mismo, $g\left(\hat{x}\right) = \hat{x}$.

En resumen, siempre existe un valor $\hat{x} \in \left[a, b\right]$ tal que $g\left(\hat{x}\right) = \hat{x}$, tal como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que además $\left|g'\left(x\right)\right| \leq k < 1$, para todo $x \in \left[a, b\right]$. Veamos que el punto fijo $\hat{x}$ es único.

Supongamos que existen dos puntos fijos $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ con $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$. Si aplicamos el teorema del valor medio a la función g tenemos que existe un valor $c \in \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2\right)$ tal que:

$$\hat{x}_2 - \hat{x}_1 = g\left(\hat{x}_2\right) - g\left(\hat{x}_1\right) = g'\left(c\right)\left(\hat{x}_2 - \hat{x}_1\right)$$

Por tanto,

$$\hat{x}_2 - \hat{x}_1 = \left|g\left(\hat{x}_2\right) - g\left(\hat{x}_1\right)\right| = \left|g'\left(c\right)\right|\left(\hat{x}_2 - \hat{x}_1\right) \leq k\left(\hat{x}_2 - \hat{x}_1\right) < \hat{x}_2 - \hat{x}_1$$

Llegamos a una contradicción ya que un número $\hat{x}_2 - \hat{x}_1$ no puede ser menor estrictamente que él mismo. Por tanto, nuestra suposición es falsa y $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, tal como queríamos ver.

Ejemplo

Sigamos con el ejemplo anterior, considerando las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Observando el gráfico de las funciones anteriores se observa que $g_2(x) \in [-2,-1]$ si $x \in [-2,-1]$ ya que:

$$\begin{aligned} & -2 \leq x \leq -1 \\ \Leftrightarrow & -3 \leq x-1 \leq -2 \\ \Leftrightarrow & -2 < -1.442 \approx \sqrt[3]{-3} \leq \sqrt[3]{x-1} \leq \sqrt[3]{-2} \approx -1.26 < -1 \end{aligned}$$

En cambio, con la función $g_1(x) = x^3+1$, no es cierto que $g_1(x) \in [-2,-1]$ si $x \in [-2,-1]$ como puede observarse en el gráfico.

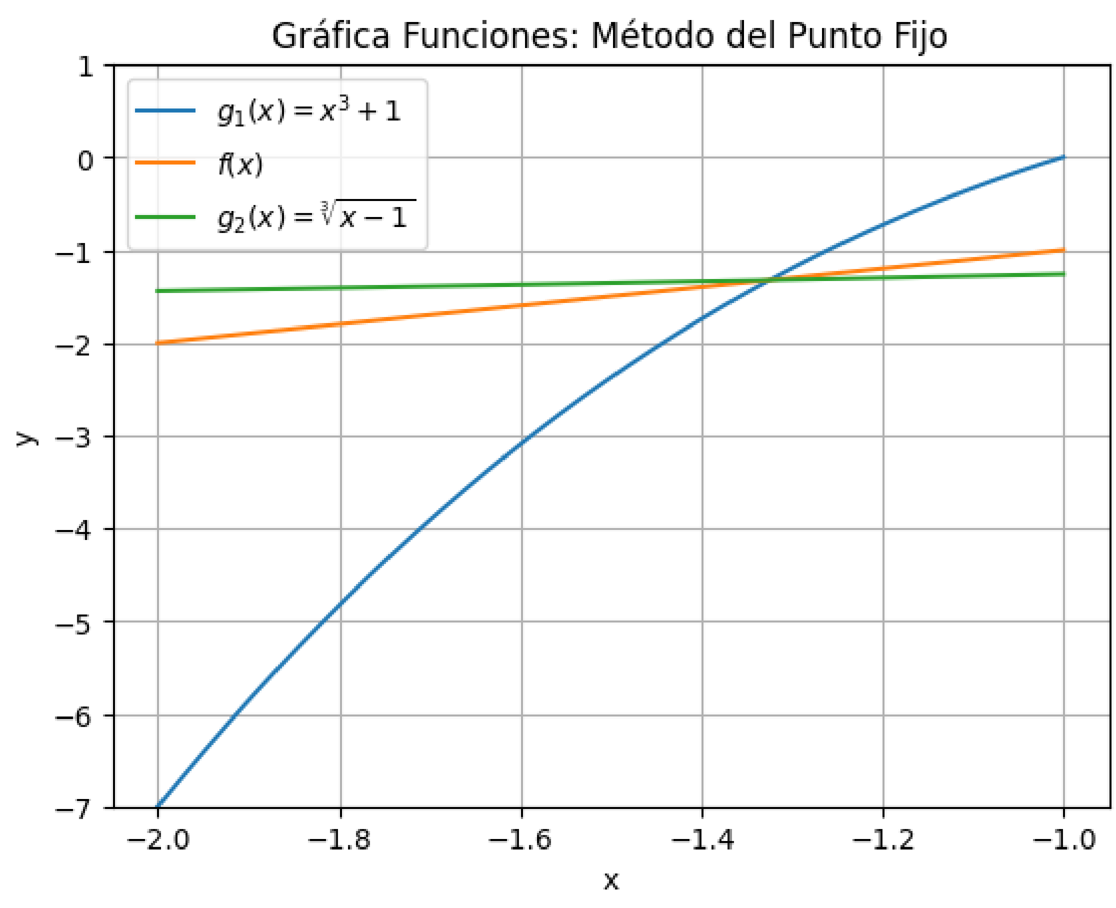

Figura 7.2: Gráfica de las funciones $g_1(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x$ y $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Sólo podemos aplicar el teorema anterior a la función $g_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Veamos si además podemos asegurar su unicidad:

$$g_2'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

si

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$0.16 \approx \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$$

Entonces existe un valor $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$ tal que $|g_2'(x)| \leq k$, para todo $x \in [-2, -1]$. Por tanto, usando el teorema anterior, podemos asegurar que el punto fijo $\hat{x}$ es único.

7.1.2 Teorema del Punto Fijo

Para resolver la ecuación $x = g(x)$ o para hallar un punto fijo de la función g, definimos la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$. El teorema siguiente nos dice bajo que condiciones la sucesión anterior converge hacia el punto fijo $\hat{x} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$.

Teorema 2: Teorema del Punto Fijo

Sea $g \in \mathcal{C}([a,b])$ una función continua dentro del intervalo $[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$. Supongamos, además, que existe $g'(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y que existe una constante k, con $0 < k < 1$, tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [a,b]$. Sea $x_0 \in [a,b]$. Definimos la sucesión $(x_n)_n$ de forma recurrente como $x_n = g(x_{n-1})\,,\ n \geq 1$. Entonces x_n converge hacia el único punto fijo $\hat{x}$ de $g(x)$. Es decir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$,con $g(\hat{x}) = \hat{x}$.

Demostración

Es sencillo ver que si la sucesión $(x_n)_n$ converge, lo hace necesariamente hacia el punto fijo $\hat{x}$ ya que como $x_n = g(x_{n-1})$, tomando límites y usando que la función g es continua, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1})\,, \Rightarrow L = g(L)\,,$$

lo que significa que el límite L de la sucesión $(x_n)_n$ es un punto fijo de la función g y como éste es único, $L = \hat{x}$.

Veamos a continuación que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente. Usando el Teorema del Valor Medio tenemos que existe un valor $c_n \in \langle x_n, \hat{x} \rangle$ tal que:

$$|x_n - \hat{x}| = |g(x_{n-1}) - \hat{x}| = |g'(c_n)| \cdot |x_{n-1} - \hat{x}| \leq k \cdot |x_{n-1} - \hat{x}|$$

Aplicando la desigualdad anterior n veces, tenemos que:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k\,|x_{n-1} - \hat{x}| \leq k^2\,|x_{n-2} - \hat{x}| \leq \cdots \leq k^n\,|x_0 - \hat{x}|$$

Aplicando el criterio del "emparedado" tenemos que

$$0 < \lim_{n\to\infty} |x_n - \hat{x}| \leq \lim_{n\to\infty} k^n\,|x_0 - \hat{x}| = 0$$

ya que $0 < k < 1$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} |x_n - \hat{x}|$, condición que equivale a $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, tal como queríamos demostrar.

7.1.3 Código de Programa

```
# Importar las librerias necesarias
import numpy as np
import pandas as pd

# Definir el método del punto fijo
def PuntoFijo(funcion, x_0, tol, max_iteraciones,
  console=False):

    """
    ## ***Función***: PuntoFijo
    - **Descripción:** Calcula la raíz de una función
      cerca de un punto inicial
    - **Parámetros:**
        - *funcion:* Función que queremos resolver
        - *x_0:* Punto inicial del algoritmo
        - *tol:* Valor máximo de convergencia
        - *max_iteraciones:* Número máximo de
          iteraciones del método
        - *console:* Valor booleano. Permite mostrar
          mensajes de prueba en la consola
    - **Valor de Retorno:** Raíz/Cero de la Función
    """

```

```python
    # Iniciar el valor de las iteraciones en 1
    iteraciones = 1

    # Definir los arreglos de la raíz y el error
    raiz_ = []
    error_ = []

    # Crear un ciclo condicional que genere las iteraciones desde n=1,...,max_iteraciones
    while iteraciones <= max_iteraciones:
        # Calculamos el siguiente término de la sucesión
        x = funcion(x_0)
        raiz_.append(x)
        error_.append(np.abs(x - x_0))

        # Determinamos si el valor de x_n cumple con la condición de la tolerancia permitida
        if np.abs(x - x_0) < tol:
            # Devolver el resultado y finalizar la ejecución
            if console:
                df = pd.DataFrame({"Raices": raiz_, "Errores": error_})
                print(df)
            return x
        else:
            # Incrementamos el valor de la iteración
            iteraciones = iteraciones + 1

            # Actualizamos el valor de x_0
            x_0 = x

    # Si el código llega a este punto quiere decir que no alcanco la convergencia
    print("El método no alcanzo la convergencia deseada")
    return x
```

```python

# ### Ejemplo
#
# Usar el método del punto fijo para calcular el cero de la función $f\left(x\right)=x^{3}-x+1$ en el intervalo donde $x\in\left[-2,-1\right]$

# Definir la función g(x)
def g(x):
    return np.cbrt(x-1)

x = PuntoFijo(g, -1, 1e-5, 20, console=True)
print("Raíz/Cero: ", x)
```

Ejemplo 2:

Usar el método del punto fijo para calcular el cero de la función $f\left(x\right)=x^{3}-x+1$ en el intervalo donde $x\in\left[-2,-1\right]$

Como vimos anteriormente, debemos encontrar una función $g\left(x\right)$ tal que $g\left(x\right)\in\left[-2,-1\right]$, para este ejemplo encontramos

$$\begin{aligned} x^{3}-x+1&=0\\ x^{3}&=x-1\\ \sqrt[3]{x^{3}}&=\sqrt[3]{x-1}\\ x&=\sqrt[3]{x-1}\end{aligned}$$

De tal manera que $g\left(x\right)=\sqrt[3]{x-1}$. Esta función presenta problemas computacionalmente. Python, Pascal y algunas calculadoras no calculan de forma correcta esta función en los números reales. Para resolver este problema vamos a factorizar el menos dentro de la raíz, así

$$g\left(x\right)=-\sqrt[3]{1-x}$$

De esta forma ya podemos calcular el método del punto fijo. Al aplicar el método obtenemos los siguientes datos.

n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$
1	-1.5	1
2	-1.5	0.142791191702547
3	-1.35720880829745	0.0263478494960256
4	-1.33086095880143	0.00497718456907981
5	-1.32588377423235	0.000944410830463038
6	-1.32493936340188	0.000179352109182407
7	-1.3247600112927	$3.40660658153524E-5$
8	-1.32472594522689	$6.47069252313059E-6$
9	-1.32471947453436	$1.22908542810052E-6$
10	-1.32471824544894	$2.33460738963132E-7$

7.1.4 Observaciones

- El método anterior converge más rápidamente que el método de la bisección ya que aproximadamente en cada iteración "ganamos" una cifra significativa del valor $\hat{x}$,es decir, observemos que en la iteración n, existe una constante c_n, $0 < c_n < 10$, tal que

$$|x_n - x_{n-1}| \approx c_n \cdot 10^{n-2}$$

- La velocidad de convergencia de la sucesión x_n será aproximadamente equivalente a la velocidad de convergencia de la sucesión k^n, donde k recordemos que es la constante tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [a,b]$. En el ejemplo que estamos desarrollando, recordemos que k valía: $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$. Por tanto, la sucesión $(x_n)_n$ tendrá una velocidad de convergencia equivalente a la velocidad de convergencia de la sucesión $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$

Ejercicio 2:

Considere la sucesión anterior $(x_n)_n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$. Desarrolle un *programa* en **Python** que grafique esta sucesión para los primeros n valores

Archivo de Programa

El archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-003-Solucion-Ecuaciones-Una-Variable\Programas\Grafica-Sucesiones-de-Velocidad-de-Convergencia.ipynb*

Al graficar esta sucesión tenemos el siguiente resultado

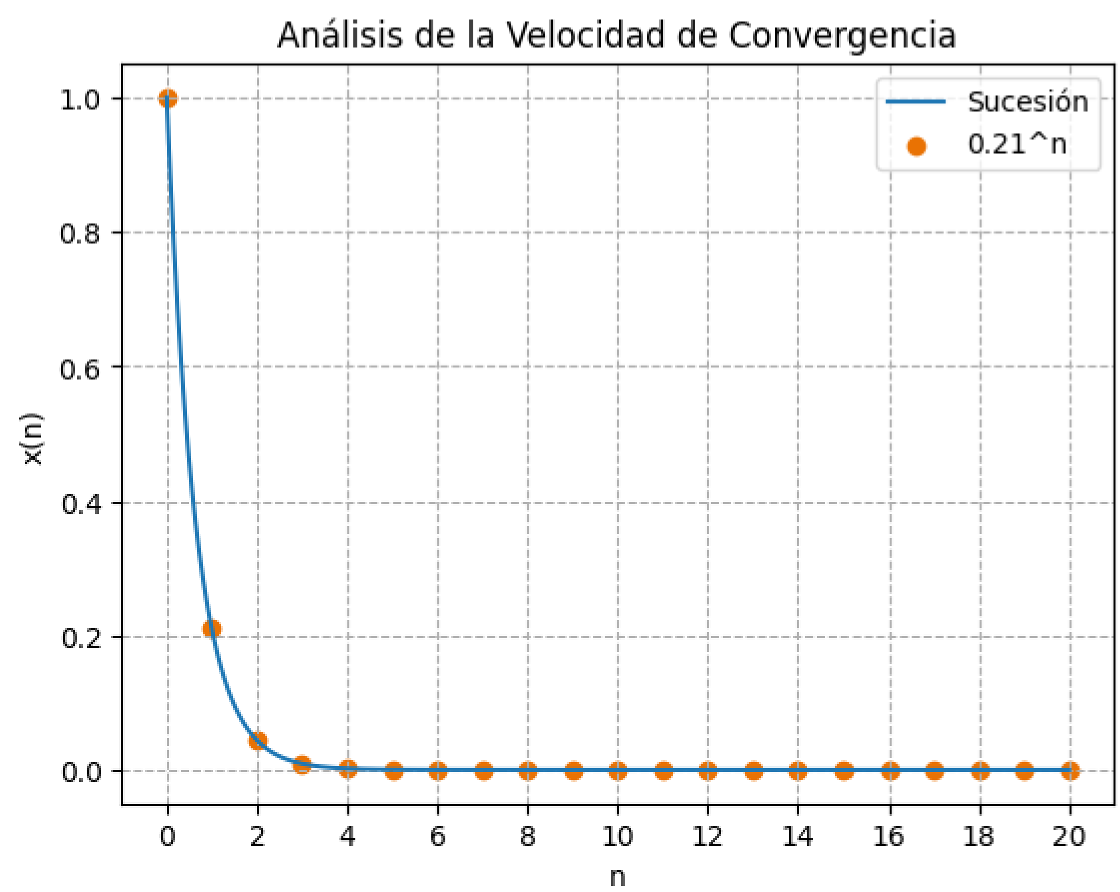

Figura 7.3: Gráfica de la sucesión $(x_n)_n = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^n$

7.1.5 Estimación del Error Cometido

En la demostración del Teorema del Punto Fijo vimos una estimación del error cometido con la aproximación x_n con respecto al punto fijo $\hat{x}$:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot |x_0 - \hat{x}|$$

Dicha estimación no es útil ya que al no conocer $\hat{x}$,tampoco conocemos $|x_0 - \hat{x}|$.

La proposición siguiente nos da una estimación del error $|x_n - \hat{x}|$ en función de los extremos del intervalo $[a, b]$, x_0 y de x_1 que son valores conocidos.

Proposición de la Estimación del Error Cometido

En las condiciones del **Teorema del Punto Fijo**, se cumple:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot \max\{x_0 - a, b - x_0\}, |x_n - \hat{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|$$

para todo $n \geq 1$, si $x_0 \in [a, b]$

Demostración

En la demostración del Teorema del Punto Fijo vimos que:

$$|x_n - \hat{x}| \leq k^n \cdot |\hat{x} - x_0|,$$

pero como $x_0, \hat{x} \in [a, b]$, podemos considerar dos casos:

- $a \leq \hat{x} \leq x_0$. En este caso $|\hat{x} - x_0| \leq x_0 - a \leq \max\{x_0 - a, b - x_0\}$
- $x_0 \leq \hat{x} \leq b$. En este caso $|\hat{x} - x_0| \leq b - x_0 \leq \max\{x_0 - a, b - x_0\}$

Por tanto queda demostrada la primera desigualdad.

Para demostrar la segunda, primero acotamos $|x_{n+1} - x_n|$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &|x_{n+1} - x_n| \\ =&|g(x_n) - g(x_{n-1})| \\ \leq& k \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq k^2 \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq k^n \cdot |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Si $n \geq 1$. Por tanto, si $m > n \geq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq k^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + k^{m-2} \cdot |x_1 - x_0| + \cdots + k^n \cdot |x_1 - x_0| \\ &= k^n \cdot |x_1 - x_0| \left(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}\right) \end{aligned}$$

Como la expresión anterior es cierta para toda $m > n$, haciendo $m \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\hat{x} - x_n| &\leq k^n \cdot |x_1 - x_0| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\ &= k^n \cdot |x_1 - x_0| \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

y ya tenemos demostrada la segunda desigualdad.

Definición 2: Sucesión de Cauchy

Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ se dice que es de **Cauchy** si para todo número real positivo ε (epsilon) existe un número natural **N** tal que para todos los números naturales $m, n > N$, se cumple que:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Definición 3: Serie Geométrica

Una serie **geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. En otras palabras, es una serie donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante llamada razón (generalmente denotada por r). Una serie geométrica se expresa generalmente como:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

donde a es el primer término de la serie, r es la razón común y n es el índice de la suma.

Una serie geométrica converge (es decir, la suma de sus términos tiene un valor finito) si y solo si el valor absoluto de la razón r es menor que uno (1),

$$|r| < 1$$

❍ Si $|r| < 1$, la suma de la serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 3:

Apliquemos las desigualdades anteriores a los datos de nuestro ejemplo.

Considerando la primera desigualdad, el valor de

$$\max\{x_0 - a, b - x_0\}$$

será en nuestro caso:

$$\begin{aligned} \max\{x_0 - a, b - x_0\} &= \max\{-1.5 - (-2), -1 - (-1.5)\} \\ &= \max\{0.5, 0.5\} = 0.5 \end{aligned}$$

Recordemos que $k = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.21$

Veamos,

n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$	$k^n \cdot \|x_n - x_{n-1}\| = 0.5 \cdot k^n$	$\frac{k^n}{1-k} \cdot \|x_1 - x_0\|$
2	-1.50000	0.14279	0.10499	0.03795
3	-1.35721	0.02635	0.02205	0.00797
4	-1.33086	0.00498	0.00463	0.00167
5	-1.32588	0.00094	0.00097	0.00035
6	-1.32494	0.00018	0.00020	0.00007