

# Capítulo 1

## Repaso de Cálculo

### 1.1 Introducción

En este capítulo realizaremos un repaso de los siguientes temas de cálculo:

1. Límite de una función en un punto
2. Límite de una sucesión
3. **Continuidad:** Teorema de Bolzano y su versión generalizada
4. **Diferenciabilidad:**
  - a) Teorema de Rolle
  - b) Teorema del valor medio
  - c) Teorema de los valores extremos
  - d) Teorema de Rolle generalizado
  - e) Teorema del valor intermedio
5. Integración
  - a) Teorema del valor medio para integrales
6. Teorema de Taylor

## 1.2 Límites y Continuidad

### 1.2.1 Límite de una función en un punto

#### Definición 1:

Sea  $f$  definida en un conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in D$  diremos que el límite de la función  $f$  es  $L$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , escribiendo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

si dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un valor real  $\delta > 0$  tal que si  $x$  verifica que  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$

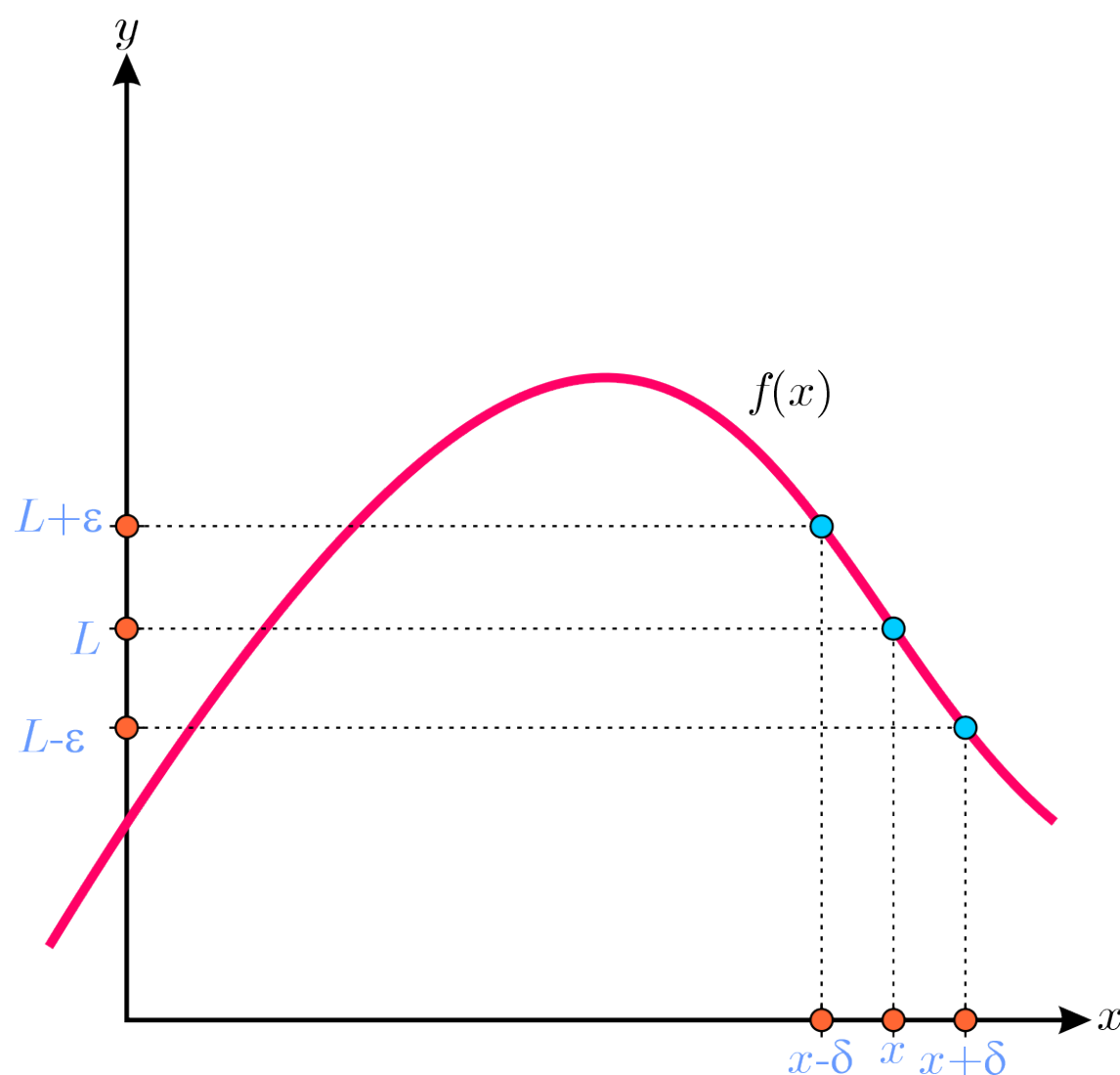


Figura 1.1: Interpretación Gráfica del Límite de una Función en un Punto

## 1.2.2 Continuidad

### Definición 2: Definición de continuidad de una función en un punto

Sea  $f$  definida en un conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in D$ . Diremos que la función es **continua** en el punto  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

En general, una función  $f(x)$  es **continua** en todo el dominio  $D$  si es continua en cualquier punto  $x \in D$ . El conjunto formado por las funciones  $f(x)$  que son continuas en un determinado dominio  $D$  se denota por  $C(D)$

## 1.2.3 Límite de una sucesión

### Definición 3: Definición de Límite de una Sucesión

Sean  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de números reales. Diremos que el límite de la sucesión anterior vale  $x$  y escribiremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

si para todo valor  $\epsilon > 0$ , existe un valor  $n_0$  tal que para todo valor  $n \geq n_0$ , todos los elementos de la sucesión  $x_n$  están en el intervalo  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ , es decir,  $|x_n - x| < \epsilon$

### Ejemplo 1:

Consideremos la sucesión  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ . Tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Sea  $\epsilon > 0$ , tenemos que hallar un valor  $n_0$  tal que si  $n > n_0$ ,  $|x_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$ .

Consideremos como valor  $n_0$  el primer entero que supera  $\frac{1}{\epsilon}$ , es decir  $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ . Así, si  $n \geq n_0$ , se cumplirá que  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ , tal como queríamos ver.

## 1.2.4 Continuidad y límite de sucesiones

### Teorema 1:

Sea  $f$  una función en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in D$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $f$  es continua en  $x_0$ ,
- Si  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de números reales con límite  $x_0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

### Ejemplo 2:

Sea  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , no es continua en  $x_0 = 0$

Para verlo, construiremos dos sucesiones  $x_n$  e  $y_n$ , ambas con  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ . Como debe verificarse que para toda sucesión  $z_n$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(0)$ , llegamos a una contradicción.

Sea  $x_n = \frac{1}{\pi n}$ . La sucesión  $x_n$  cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  pero

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n) = 0 \end{aligned}$$

Sea ahora  $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ . La sucesión  $y_n$  cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pero

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \end{aligned}$$

Se han encontrado dos sucesiones que tienden a cero pero el límite de las imágenes son diferentes, por lo tanto la función no es continua en

$x = 0$ .

### Teorema 2: Teorema de Bolzano

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Entonces existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$

### Teorema 3: Teorema de Bolzano Generalizado

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Sean  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k$  puntos en el intervalo  $[a, b]$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ,  $k$  valores estrictamente positivos con  $\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ . Entonces existe un valor  $x \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  [Envoltura convexa] (mínimo intervalo que contiene los puntos  $x_1, \dots, x_k$ ) tal que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) = \alpha f(x)$$

### Demostración

Consideremos la función  $g(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) - \alpha f(x)$ .

Sea el punto  $x_m$  tal que

$$f(x_m) = \min_{i=1, \dots, k} f(x_i),$$

y  $x_M$  tal que

$$f(x_M) = \max_{i=1, \dots, k} f(x_i)$$

Entonces,

$$g(x_m) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) - \alpha f(x_m) \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_m) - \alpha f(x_m) = 0$$

Si  $g(x_m) = 0$  ya hemos acabado, el punto  $x$  buscado sería  $x = x_m$  ya que, en este caso:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) = \alpha f(x_m)$$

Supongamos que estamos en el otro caso, es decir  $g(x_m) > 0$ .

El valor de  $g(x_M)$  cumple:

$$g(x_M) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) - \alpha f(x_M) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_M) - \alpha f(x_M) = 0$$

Si  $g(x_M) = 0$  ya hemos acabado, el punto  $x$  buscado sería  $x = x_M$  ya que, en este caso:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) = \alpha f(x_M)$$

Supongamos que estamos en el otro caso, es decir  $g(x_M) < 0$ .

Como  $g(x_m) > 0$  y  $g(x_M) < 0$ , aplicando el Teorema de Bolzano a la función  $g(x)$ , tenemos que existe un valor  $x \in \langle x_m, x_M \rangle$  tal que  $g(x) = 0$ , dicho en otras palabras

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) = \alpha f(x)$$

### Observación

Aplicando el Teorema anterior, suponiendo que la función  $f$  es continua y  $x_1$  y  $x_2$  son valores dentro del intervalo de definición de  $f$ , podemos afirmar que existen valores  $x_3$  y  $x_4$  tales que:

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= 2f(x_3), \\ \frac{2}{3}f(x_1) + \frac{5}{4}f(x_2) &= \frac{23}{12}f(x_4) \end{aligned}$$

## 1.3 Derivabilidad

Para definir funciones suaves necesitamos el concepto de diferenciabilidad:

**Definición 4:** Definición de derivada en un punto

Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función real de variable real. Sea  $x_0 \in (a, b)$ . Diremos que  $f$  es derivable en  $x_0$  o que existe la derivada de  $f$  en  $x_0$  cuando existe el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y, en caso en que exista, llamaremos a dicho límite derivada de la función  $f$  en  $x_0$  escrita matemáticamente como  $f'(x_0)$

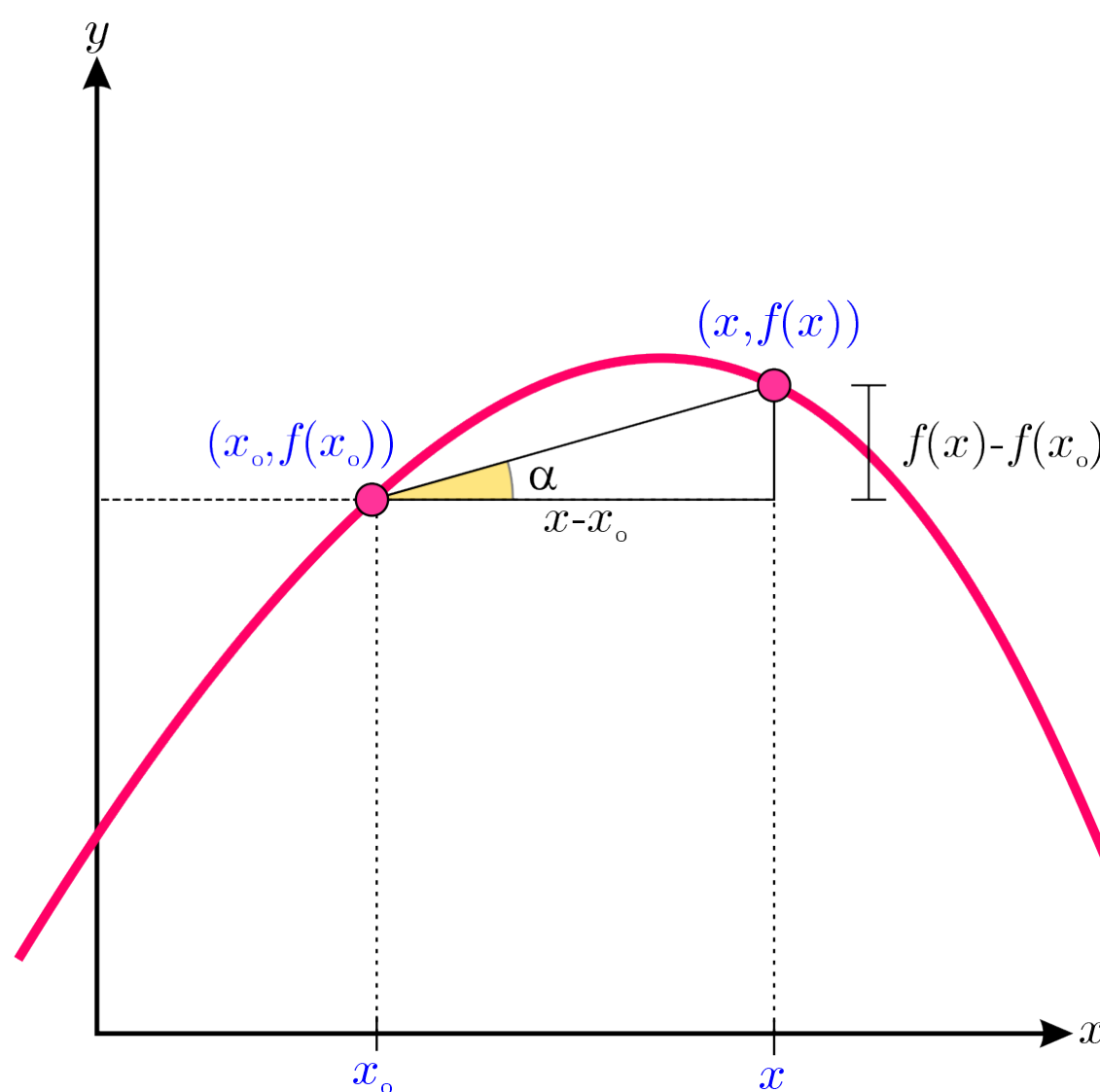


Figura 1.2: Interpretación Gráfica de la Derivada de una Función en un Punto

**1.3.1 Relación de Derivabilidad y Continuidad****Teorema 4:**

Sea  $f$  una función definida en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in D$ . Entonces, si  $f$  es derivable en  $x_0$ ,  $f$  es continua en  $x_0$ .

El conjunto formado por las funciones que son  $n$  veces derivables en

un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$  se denota por  $\mathcal{C}^n(D)$ .

El conjunto formado por las funciones que admiten cualquier derivada en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$  se denota por  $\mathcal{C}^\infty(D)$

### 1.3.2 Teoremas de Rolle y Valor Medio

Los teoremas que vienen a continuación son claves para estimar el error cometido al evaluar funciones reales de variable real.

#### Teorema 5: Teorema de Rolle

Suponga que  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  y  $f$  es derivable en  $(a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

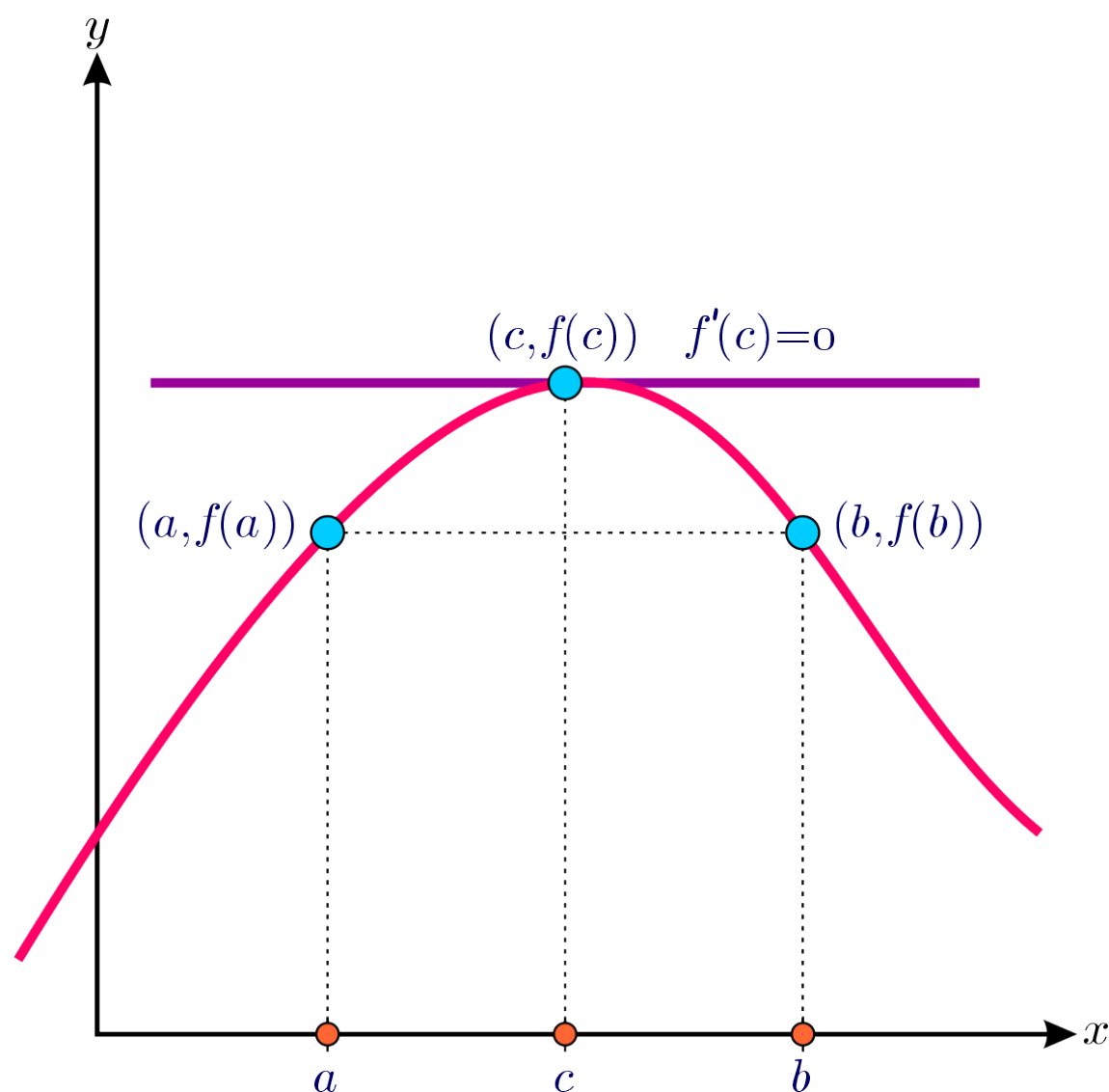


Figura 1.3: Interpretación Gráfica de la Derivada de una Función en un Punto



**Ejemplo 3:**

Consideremos la función  $f(x) = \sin(x)$  definida en el intervalo  $[0, \pi]$ , se tiene que  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Comprobar que se cumple el Teorema de Rolle.

Existe un punto  $c \in (0, \pi)$  tal que  $f'(c) = \cos(c) = 0$ . Este punto  $c$  vale  $c = \frac{\pi}{2}$  ya que  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

**Teorema 6: Teorema del Valor Medio**

Supongamos que  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  y  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Ejemplo 4:**

Consideremos la función  $f(x) = x^2 \sin x$  definida en el intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Aplicar el Teorema del Valor Medio.

Existe un  $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  tal que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}{\pi} = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Usando que  $f'(c) = 2c \sin c + c^2 \cos c = \frac{\pi}{2}$ , el valor de  $c$  será un cero de la ecuación  $2c \sin c + c^2 \cos c - \frac{\pi}{2} = 0$ .

Durante el curso veremos técnicas para hallar soluciones aproximadas de ecuaciones de este tipo. Hay dos valores de  $c$  en el intervalo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  que cumplen con la condición anterior y valen aproximadamente  $c \approx \pm 0.792863$

**1.3.3 Teorema de los Valores Extremos****Teorema 7: Teorema de los Valores Extremos**

Sea  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Entonces existen dos valores  $c_1, c_2 \in [a, b]$  tal que los valores de  $f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  están entre  $f(c_1)$  y  $f(c_2)$ , es decir  $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ , para cualquier  $x \in [a, b]$ . Además, si  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , los valores  $c_1$  y  $c_2$ , o están en los extremos del intervalo, (es decir,  $c_i = a$  o  $c_i = b$ , con  $i = 1, 2$ ), o son extremos relativos de la función  $f$  y, por tanto  $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ .

### 1.3.4 Teorema de Rolle Generalizado

El siguiente teorema se demuestra aplicando sucesivamente el Teorema de Rolle a las funciones  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ :

#### Teorema 8: Teorema de Rolle Generalizado

Sea  $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ . Supongamos que existen  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ,  $n + 1$  puntos distintos en el intervalo  $[a, b]$  con  $f(x_i) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Entonces existe un punto  $c \in (x_0, x_n)$  tal que  $f^{(n)}(c) = 0$ , es decir, la derivada  $n$ -ésima en el punto  $c$  se anula.

#### Demostración

Para demostrar el Teorema de Rolle Generalizado hay que aplicar el Teorema de Rolle a las funciones  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  en el sentido siguiente:

- **Paso 1:** como  $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$ , aplicando el Teorema de Rolle a la función  $f$ , existen  $x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \dots < x_n^{(1)}$ ,  $n$  puntos en los que  $f'(x_i^{(1)}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$
- **Paso 2:** como  $f'(x_1^{(1)}) = f'(x_2^{(1)}) = \dots = f'(x_n^{(1)}) = 0$ , aplicando el Teorema de Rolle a la función  $f'$ , existen  $x_1^{(2)} < x_2^{(2)} < \dots < x_{n-1}^{(2)}$ ,  $n - 1$  puntos en los que  $f''(x_i^{(2)}) = 0$  para  $i = 1, \dots, n - 1$
- Y así sucesivamente hasta llegar al paso  $n, \dots$
- **Paso  $n$ :** como  $f^{(n-1)}(x_1^{(n-1)}) = f^{(n-1)}(x_2^{(n-1)}) = \dots = f^{(n-1)}(x_n^{(n-1)}) = 0$ , aplicando el Teorema de Rolle a la función  $f^{(n-1)}$ , existe un valor  $c = x_1^{(n)}$  tal que  $f^{(n)}(c) = 0$ , tal como queríamos demostrar

**Ejemplo 5:**

Consideremos la función  $f(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ , con  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$  definida en el intervalo  $[x_0, x_3]$ . Aplicar el Teorema de Rolle Generalizado.

Como  $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ , existirá un punto  $c \in (x_0, x_3)$  tal que  $f'''(c) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x^2 - x_1x - x_0x + x_0x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
 &= (x^3 - x_2x^2 - x_1x^2 + x_1x_2x - x_0x^2 + x_0x_2x + x_0x_1x - x_0x_1x_2)(x - x_3) \\
 &= x^4 - x_3x^3 - x_2x^3 + x_2x_3x^2 - x_1x^3 + x_1x_3x^2 \\
 &\quad + x_1x_2x^2 - x_1x_2x_3x - x_0x^3 + x_0x_3x^2 + x_0x_2x^2 - x_0x_2x_3x \\
 &\quad + x_0x_1x^2 - x_0x_1x_3x - x_0x_1x_2x + x_0x_1x_2x_3 \\
 &= x^4 - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)x^3 + \\
 &\quad (x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x^2 \\
 &\quad - (x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3)x \\
 &\quad + x_0x_1x_2x_3
 \end{aligned}$$

calculamos la primera derivada

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 3x^2(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \\
 &\quad + 2x(x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
 &\quad - (x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3)
 \end{aligned}$$

calculamos la segunda derivada

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 12x^2 - 6x(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + \\
 &\quad 2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)
 \end{aligned}$$

calculamos la tercera derivada

$$f'''(x) = 24x - 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$$

Haciendo  $f'''(c) = 0$ , tenemos que el valor de  $c$  vale:

$$c = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{4}$$

### 1.3.5 Teorema del Valor Intermedio

El Teorema del Valor Intermedio nos dice que si una función es continua, dicha función alcanza todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

#### Teorema 9: Teorema del Valor Intermedio

Suponga que  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  y  $k$  es cualquier valor entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = k$

## 1.4 Integración de Riemann

La integral de Riemann se define básicamente para formalizar el cálculo de áreas de funciones:

#### Definición 5: Definición de Integral de Riemann

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función real de variable real. Diremos que la integral de Riemann de la función  $f$  existe en el intervalo  $[a, b]$  si el límite siguiente existe y escribiremos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ ,  $\delta(P) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$  es el llamado diámetro de la partición y  $z_i$  es un valor cualquiera entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$ ,  $z \in [x_{i-1}, x_i]$

Para ver si una función es integrable se definen sumas superiores y las sumas inferiores asociadas a una partición y si el ínfimo de las primeras coincide con el supremo de las segundas, la función es integrable.

#### Teorema 10:

Si una función es continua en un intervalo  $[a, b]$ , es integrable en dicho intervalo

### 1.4.1 Teorema del Valor Medio para Integrales

El Teorema del Valor Medio para Integrales nos transforma la integral del producto de dos funciones en la integral de una sola función. Este Teorema nos será útil cuando tratemos de estimar los errores cometidos en las fórmulas de integración numérica.

#### Teorema 11: Teorema del Valor Medio para Integrales

Supongamos que  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en  $[a, b]$ . Supongamos además que la función  $g(x)$  no cambia su signo en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, existe un valor  $c \in (a, b)$  tal que:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

#### Observación

En el caso en que  $g(x) = 1$  para todo  $x \in [a, b]$ , el teorema anterior es el Teorema Clásico del Valor Medio para Integrales: existe un valor  $c \in (a, b)$  tal que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= f(c) \cdot \int_a^b 1 dx = f(c) \cdot (b - a), \\ &\Rightarrow \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

### 1.4.2 Teorema de Taylor y Polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor nos dan una manera de aproximar una función  $f$  por un polinomio en un entorno de un punto  $x_0$  del dominio de  $f$ .

#### Teorema 12: Teorema de Taylor

Supongamos que  $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$  para un cierto natural  $n$ , tal que  $f^{(n+1)}$  existe en el intervalo  $[a, b]$ . Sea  $x_0 \in [a, b]$ . Para cada  $x \in [a, b]$  existe un valor  $\xi(x)$  entre los valores  $x_0$  y  $x$ ,  $\xi(x) \in \langle x_0, x \rangle$  tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde  $P_n(x)$  es el llamado polinomio de Taylor de grado  $n$  de  $f$  alrededor de  $x = x_0$ :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

con  $f^{(0)} = f$  y el error  $R_n(x)$  se puede expresar como:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

El polinomio  $P_n(x)$  es el llamado polinomio de Taylor para  $f$  de grado  $n$  alrededor de  $x_0$  y  $R_n(x)$  es el término del error, es decir, el error cometido, en la aproximación de  $f(x)$  por  $P_n(x)$  para  $x$  en un entorno de  $x_0$ .

En el caso en que  $x_0 = 0$ , el polinomio de Taylor se llama polinomio de Maclaurin o desarrollo de Maclaurin de la función  $f$  alrededor de  $x_0$ .

### Ejemplo 6: Cálculo de $e$

Vamos a calcular  $e$  con 6 cifras decimales exactas.

Para ello vamos a calcular el polinomio de la función  $f(x) = e^x$  para  $x_0 = 0$ ,  $P_n(x)$  y aproximaciones  $f(1) = e$  por  $P_n(1)$  cometiendo un error menor que 0.000001.

Para calcular el polinomio de Taylor de  $f(x) = e^x$ , se ha de calcular  $f^k(x)$  para cualquier valor  $k$  natural. En este caso, observamos que  $f^{(k)}(x) = e^x$  siempre vale lo mismo. Por tanto:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

ya que  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ .

Seguidamente vamos a calcular el valor de  $n$  que nos asegure que el error cometido para  $x = 1$  usando la expresión anterior  $P_n(1)$  es lugar de  $f(1) = e$  es menor que  $e = 0.000001$ .

Recordemos la expresión de la formular del error

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= |R_n(x)| \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq \max_{c \in \langle 0, x \rangle} |f^{(n+1)}(c)| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

La expresión anterior para  $x = 1$  vale:

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= |R_n(x)| \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \right| \leq \max_{c \in \langle 0, x \rangle} |f^{(n+1)}(c)| \cdot \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \max_{c \in (0,1)} e^c \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{e}{(n+1)!} \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que la función  $f(x) = e^x$  es creciente y por tanto  $\max_{c \in (0,1)} e^c = e^1 = e$ . Vemos que la cota del error depende de  $e$  que es precisamente el valor que queremos calcula.

No sabemos el valor exacto de  $e$  pero podemos usar que es menor que 3, es decir que  $e < 3$ .

La cota anterior será pues:

$$|f(1) - P_n(1)| = |R_n(1)| = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

### Ejercicio 1:

Crear un *programa* en **Python** que calcule el valor  $\exp(1)$  con una precisión de 6 cifras decimales

```
1 # # Ejercicio
2 # Crear un *programa* en **Python** que calcule el valor
   e con una precisión de $6$ cifras decimales
3
4 # Importar las librerías necesarias
5 import math
```

```

6
7 def nError(error):
8     """
9     ## ***Función***: nError
10    — **Descripción:** Determina cuántos pasos necesita la
        serie de **Maclaurin** para encontrar una
        aproximación del valor de  $\exp(1)$  con una *
        Tolerancia* dada
11    — **Parámetros:**
12        — error: El valor del error esperado en la
        aproximación
13    — Valor de Retorno: Cantidad de pasos en la serie
        de MacLaurin
14    """
15
16    # Define el primer valor de la serie de MacLaurin
17    m = 2
18
19    # Incrementa el número de pasos hasta conseguir que el
        error asociado a la serie de MacLaurin sea menor
20    # que el error enviado en el parámetro
21    while (3.0 / math.factorial(m + 1) >= error):
22        m = m + 1
23    return (m)
24
25    # ### Pruebas
26    # Usa la función *nError* para determinar cuántos pasos
        se necesitan en la serie de MacLaurin para
        encontrar una aproximación del valor de  $\exp(1)$  con
        un error de  $1 \times 10^{-6}$ 
27
28    # Probar la función
29    pasos = nError(1e-6)
30    print( "Pasos: ", pasos)

```



El

archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-001-Repaso-de-Calculo\Programas\Calculo-Error-Maclaurin-Exp(1).ipynb*

Así, el valor de  $e$  con 6 cifras decimales exactas será:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}$$

Si calculamos su valor en la calculadora, obtenemos:

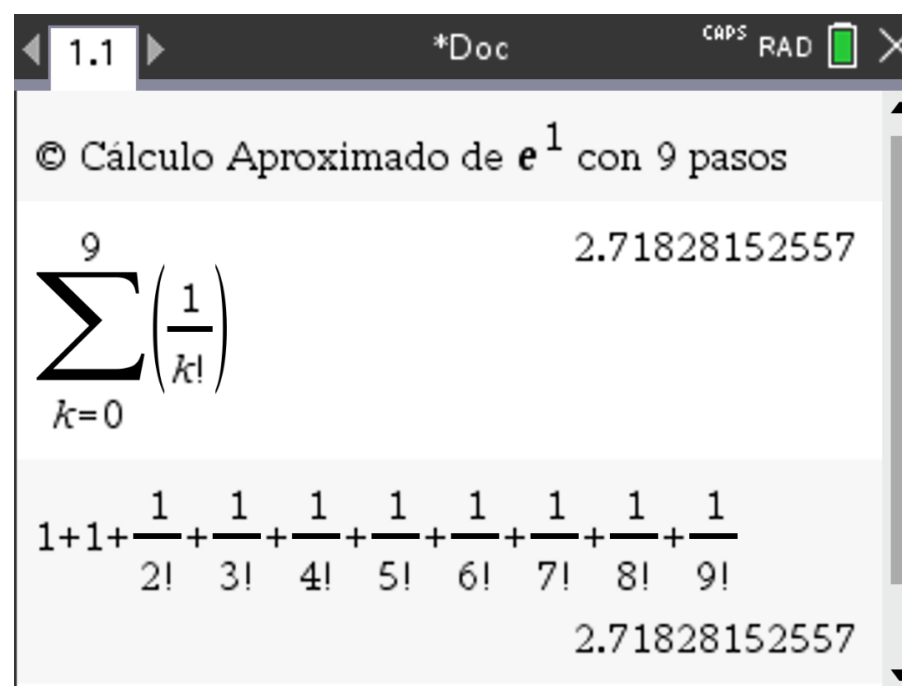


Figura 1.4: Cálculo del valor de  $e$  con 6 cifras decimales exactas

## Ejercicio 2:

Crear un *programa* en **Python** que calcule el valor aproximado de  $\exp(1)$  pasando como argumento la cantidad de pasos en la serie de **Maclaurin**.

```

1 # # Ejercicio
2 # Crear un *programa* en **Python** que calcule el valor
   aproximado de  $\exp(1)$  pasando como
   argumento la cantidad de pasos en la serie de **
   Maclaurin**.
3
4 # Importas las librerías necesarias
5 import math
6
7 # Definir la función expMaclaurin
8 def expMaclaurin(pasos):
9

```

```

10     """
11     ## ***Función:*** expMaclaurin
12     — **Descripción:** Calcula el valor aproximado de $
      \exp(1)$ con n pasos sobre la serie de **Maclaurin**
      **
13     — **Parámetros:**
14         — *pasos:* Cantidad de pasos a calcular en la
      serie de **Maclaurin**
15     — **Valor de Retorno:** Valor aproximado de $\exp
      (1)$
16     """
17
18     # Iniciar la suma en cero (0)
19     serieMaclaurin = 0
20
21     # Crear un ciclo para realizar la aproximación
22     for i in range(0, pasos + 1):
23         serieMaclaurin = serieMaclaurin + 1/math.
24         factorial(i)
25
26     # Devuelve el resultado
27     return serieMaclaurin
28
29 # ### Pruebas
30 #
31 # Probar la función con diferentes pasos: 3, 6, 9 y 20
32
33 # Probar la Función
34 pasos = [3, 6, 9, 20]
35 for i in pasos:
36     eAprox = expMaclaurin(i)
37     print("expMaclaurin(" + str(i) + ") = ", eAprox);

```

## Archivo de Programa

El archivo de programa se encuentra en la ruta: *Unidad-001-Repaso-de-Calculo\Programas\Calculo-Aproximado-Exp(1).ipynb*