Clase 8
Ceros de Funciones de una Variable

8.1 Método de Newton-Rapson

El **Método de Newton-Rapson** es uno de los métodos más conocidos y más **potentes** en el sentido de su **velocidad de convergencia**. Sin embargo, al contrario que el **Método de la Bisección**, su **convergencia** no está **asegurada**.

Veamos gráficamente en que consiste el método de Newton-Rapson

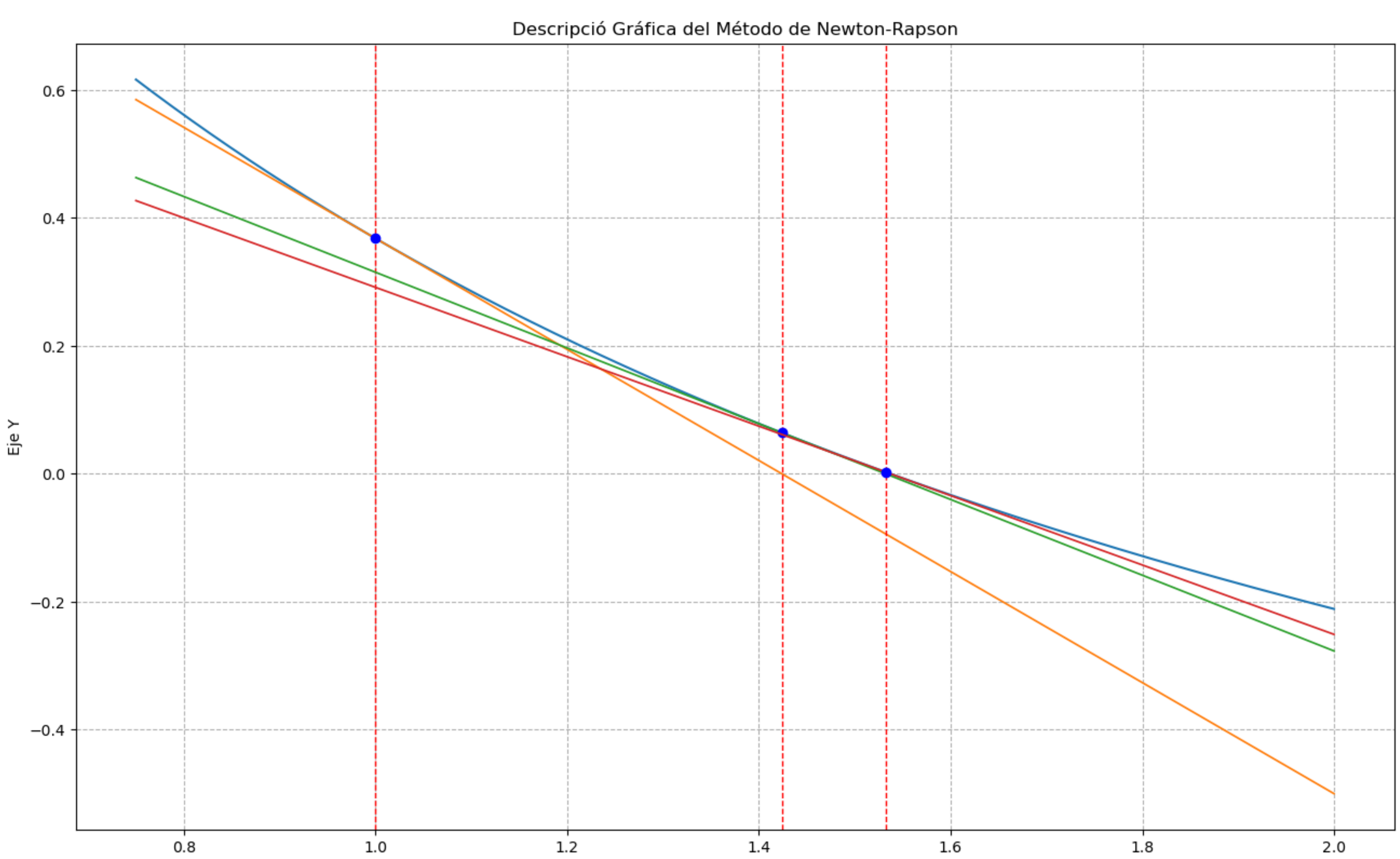

Figura 8.1: Descripción Gráfica del Método de Newton-Rapson

En el gráfico anterior vemos que tratamos de hallar un cero $\hat{x}$ marcado en rojo de la función $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}\ln(x)$.

Para ello, empezamos con el valor inicial $x_0 = 1$. A continuación hallamos la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0)) = \left(1, e^{-1}\right) \approx (1, 0.367879)$.

Seguidamente, miramos dónde corta dicha recta tangente al eje de las X. Dicho punto de corte, será el siguiente elemento de la sucesión x_1.

El paso siguiente es hacer con el punto x_1 lo mismo que hemos hecho con el punto x_0: hallar la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y mirar dónde corta dicha recta tangente al eje de las X para hallar x_2 y así sucesivamente.

De esta forma obtenemos una sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ cuyo límite como puede observarse el gráfico es el cero $\hat{x}$.

Como puede verse en el gráfico, la velocidad de convergencia es muy rápida ya que con dos iteraciones, tenemos un valor x_2 muy próximo al cero $\hat{x}$.

8.1.1 Pasos del método

El método de Newton-Rapson que no da el valor de x_n en función de x_{n-1} se deduce de realizar los pasos siguientes:

- Desarrollamos por Taylor la función f que suponemos de clase $\mathcal{C}^2[a,b]$ en un cierto intervalo de la que queremos hallar el cero en el punto x_{n-1} usando el polinomio de Taylor de grado 1 y usando la expresión del resto de Lagrange:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi(x_{n-1}))}{2}(x - x_{n-1})^2,$$

  donde $\xi(x_{n-1}) \in \langle x, x_{n-1} \rangle$

- Si usamos la aproximación anterior en el cero $\hat{x}$, como $f(\hat{x}) = 0$, tenemos que:

$$0 = f(\hat{x}) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(\hat{x} - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi(x_{n-1}))}{2}(\hat{x} - x_{n-1})^2$$

- Si suponemos que $|\hat{x} - x_{n-1}|$ es pequeño podemos despreciar el término del resto de Lagrange y obtenemos:

$$0 = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}),$$

donde hemos escrito x en lugar de $\hat{x}$ ya que el valor que cumple la condición anterior no es el cero $\hat{x}$ sino un valor aproximado x. Dicho valor aproximado será el siguiente valor de la sucesión x_n

- Si despejamos $x = x_n$ de la ecuación anterior, hallamos la relación buscada:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Observación

Los pasos anteriores equivalen a buscar la recta tangente en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, cuya ecuación es $y = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$, y buscar el corte de dicha recta con el eje X, es decir, resolver $y = 0$, para hallar el punto x_n, tal como comentamos en la introducción del método.

Observación

El método de Newton-Rapson es un caso particular del usar el método del punto fijo, con la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Observemos que el valor x_n se calcula de la forma siguiente en función de la función $g : x_n = g(x_{n-1})$

8.1.2 Código de Programa

A continuación se presenta el código del programa para calcular mediante el método de **Newton-Rapson**

```python
# Definir el método de Newton–Rapson
def NewtonRapson(x_0, tol, max_iteraciones, f, df_dx,
    console=False):

    # Iniciar el contador para las iteraciones
    n = 0

```

```python
    # Crear las sucesiones
    xn_n = []
    f_n = []
    diff_n = []

    # Calculamos el primer valor aproximado de la raíz
    x = x = x_0 - (f(x_0) / df_dx(x_0))

    # Mientras  no lleguemos al número máximo de iteraciones
    # while n <= max_iteraciones:
    while np.abs(x - x_0) >= tol:

        # Actualizamos el valor de x_0
        x_0 = x

        # Calculamos el valor de x_n
        x = x_0 - (f(x_0) / df_dx(x_0))

        # Calcular los valores de las sucesiones
        xn_n.append(x_0)
        f_n.append(np.abs(f(x_0)))
        diff_n.append(np.abs(x - x_0))

    # Crear el dataFrame
    sucesiones = {
        "x_n": xn_n,
        "|f(x_n)|": f_n,
        "|x_n - x_{n-1}|": diff_n
    }
    df = pd.DataFrame(sucesiones)
    return x, df
```

Ejemplo 1:

Hallar el cero de la función $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}\ln(x)$ con valor inicial $x_0 = 1$

Usando que $f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2x}$, los demás valores se hallarán usando la recurrencia siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} - \frac{e^{-x_{n-1}-\frac{1}{2}\ln(x_{n-1})}}{-e^{-x_{n-1}} - \frac{1}{2x_{n-1}}} \\
&= x_{n-1} - \frac{\frac{1}{e^{x_{n-1}}} - \frac{\ln(x_{n-1})}{2}}{-\frac{1}{e^{x_{n-1}}} - \frac{1}{2x_{n-1}}} \\
&= x_{n-1} - \frac{\frac{2-e^{x_{n-1}}\ln(x_{n-1})}{2e^{x_{n-1}}}}{\frac{-2x_{n-1}-e^{x_{n-1}}}{2x_{n-1}e^{x_{n-1}}}} \\
&= x_{n-1} - \frac{2x_{n-1}e^{x_{n-1}}\left(2 - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right)\right)}{2e^{x_{n-1}}\left(-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}}{1} - \frac{x_{n-1}\left(2 - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right)\right)}{-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}\right) - x_{n-1}\left(2 - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right)\right)}{-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}}} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(-2x_{n-1} - e^{x_{n-1}} - 2 + e^{x_{n-1}}\ln\left(x\right)\right)}{-\left(2x_{n-1} + e^{x_{n-1}}\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(2x_{n-1} + e^{x_{n-1}} - e^{x_{n-1}}\ln\left(x_{n-1}\right) + 2\right)}{2x_{n-1} + e^{x_{n-1}}}
\end{aligned}
$$

Usando el programa realizado en Python obtenemos la siguiente tabla. En la imagen se muestran los valores que van tomando las iteraciones dentro del Método de Newton-Rapson

```
Raíz/Cero x =  1.537201702578355
         x_n      |f(x_n)|  |x_n - x_{n-1}|
0  1.423883  6.408337e-02     1.082618e-01
1  1.532145  2.737385e-03     5.046693e-03
2  1.537192  5.453415e-06     1.009420e-05
3  1.537202  2.173273e-11     4.022738e-11
```

Figura 8.2: Tabla de Valores Aplicando **Newton-Rapson**

Observación

- Observamos que con 4 iteraciones hemos llegado a una tolerancia de $\approx 10^{-5}$ si usamos el criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-5}$. Es decir, el método converge muy rápido hacia la solución $\hat{x}$
- El criterio de parada $|x_{n} - x_{n-1}| \leq TOL$ es más "duro" que el criterio de parada $|f(x_n)| \leq TOL$ en el sentido que se necesitan más iteraciones para que se cumpla con la misma tolerancia **TOL,** tal como se puede observar en la tabla anterior.

8.1.3 Convergencia del Método de Newton-Rapson

Ya hemos comentado que no tenemos asegurada la convergencia del método de Newton-Rapson. Sin embargo, el Teorema siguiente nos dice bajo qué condiciones podemos tener convergencia.

Teorema 1:
Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Sea $\hat{x}$ un cero de la función f, $f(\hat{x}) = 0$ con $f'(\hat{x}) \neq 0$, es decir $\hat{x}$ es un cero simple de f. Entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que la sucesión generada por el Método de **Newton-Rapson**, $(x_n)_n$ converge a $\hat{x}$ para todo valor inicial $x_0 \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$

Demostración

Recordemos que el método de Newton-Rapson es un caso particular del Método del Punto Fijo con $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Sea k con $0 < k < 1$. La demostración consistirá en hallar $\delta > 0$ tal que la función g cumple:

- $g(x) \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ para todo $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$
- $|g'(x)| \leq k$

Entonces, usando el Teorema del Punto Fijo, podemos afirmar que la sucesión $(x_n)_n$ converge hacia la solución $\hat{x}$.

Hallemos pues el valor $\delta > 0$. Como f' es continua y $f'(\hat{x}) \neq 0$, existe un valor $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (\hat{x} - \delta_1, \hat{x} + \delta_1) \subseteq [a, b]$

El valor de $g'(x)$ si $x \in (\hat{x} - \delta_1, \hat{x} + \delta_1)$ vale:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) \cdot f^n(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

La expresión anterior tiene sentido ya que $f'(x) \neq 0$ para todo valor de $x \in (\hat{x} - \delta_1, \hat{x} + \delta)$. Además, $g'(\hat{x}) = 0$ ya que $\hat{x}$ es un cero de la función $f : f(\hat{x}) = 0$

Como $g'(x)$ es continua y $g'(\hat{x}) = 0$, para el valor de k existe un valor $\delta > 0$, tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$. Ya tenemos verificada la segunda condición.

Debemos verificar la primera, es decir, se debe verificar que si $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$, $g(x) \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$.

Sea pues un valor $x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$. Entonces, usando el Teorema del Valor Medio, podemos afirmar que existe un valor $c \in \langle x, \hat{x} \rangle \subseteq (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ tal que

$$|g(x) - \hat{x}| = |g(x) - g(\hat{x})| = |g'(c)| \cdot |x - \hat{x}| \leq k \cdot |x - \hat{x}| < |x - \hat{x}| < \delta$$

Como $|g(x) - \hat{x}| < \delta$, tenemos que $g(x) \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ tal como queríamos demostrar.

8.1.4 Convergencia del Método de Newton

El Teorema anterior nos dice que el método de **Newton-Rapson** converge siempre que el cero $\hat{x}$ sea simple, es decir que $f'(x) \neq 0$.

La velocidad de convergencia dependerá de la cota k de la función $g'(x) = \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$ en un entorno de radio δ del cero $\hat{x}$. Dicho valor k en general será desconocido y hallarlo es un problema mucho más difícil que hallar el cero $\hat{x}$.

Por tanto en la práctica, se realiza un gráfico aproximado de la función $f(x)$ y se elige un punto x_0 cerca del valor de corte de la función f con el eje X.