

1 Tuletis

Tuletis näitab funktsiooni muutumise kiirust. Graakifult vaadates on tuletis mingi funktsiooni puutuja tõus mingis punktis. Tuletist võttes saame me uus funktsiooni mis näitab seda tõusu sõltuvuses x 'ist. Kui meil on funktsioon $f(x)$ siis on selle funktsiooni tuletis $f'(x)$ on deffineeritud järgnevalt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx asemel võib kasutada tähist dx , kui muutus on väga väike

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = dx$$

Seega kui me võtame tuletis funktsioonist $f(x)$, x 'i järgi siis saab seda tähistada järgnevalt

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

Vaatame, kuidas me saame kasutades tuletis deffinitiooni leida lihtsa tuletise funktsioonist $f(x) = x$

$$f'(x) = \frac{(x + dx) - (x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

Kui mõelda selle funktsiooni graafikule siis on see vastus usutav ja loogiline.

1.1 Konstandid

Kui meil on funktsioon $f(x) = a$ siis on see funktsioon konstantne. Graafikul vaadates on tegemist x -teljega paralleelse sirgega, mis läbib y -telge punktis a . Kuna selle funktsiooni tõus igas punnktis on 0, siis on selle funktsiooni tuletis $f'(x) = 0$

Kui meil on funktsioon $f(x) = ag(x)$ siis kasutades tuletise deffinitiooni saame teha järgnevat

$$f'(x) = \frac{ag(x + dx) - ag(x)}{dx} = a \frac{g(x + dx) - g(x)}{dx} = ag'(x)$$

Ehk siis kui meil funktsioon $f(x) = ag(x)$ siis me saame tuua konstanti ette ja võtta tuletist ülejäänud funktsioonist.

1.2 Polünomid

Vaatame lihtsat funktsiooni $f(x) = x^2$ ja võtame sellest funktsioonist tuletist tuletise deffinitiooni abiga

$$f'(x) = \frac{(x + dx)^2 - (x)^2}{dx} = \frac{x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2}{dx} = 2x + dx = 2x$$

Kui $x = 0$ siis see funktsioon fuutub x -telge, seega on loogiline, et tuletis, ehk tõus, on selles punktsi 0. Kui $x = 1$

siis on funktsiooni väärtus 1, aga tõus selles punktis on 2. See funktsioon kahaneb vahemikus $x < 0$ seega on loogiline, et seal on funktsiooni tuletis negatiivne. Vastupidi jällegi juhul kui $x > 0$. Ning mida suuremaks x muutub seda kiiremini hakkab funktsioon muutuma, seega funktsiooni puutuja tõus suureneb.

Vaatame nüüd polünomi üldjuhtu $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \frac{(x + dx)^n - x^n}{dx} = \frac{(x^n + nx^{n-1}dx + \dots + dx^n) - x^n}{dx} = nx^{n-1} + (n(n-1)/2)x^{n-2}dx + \dots + dx^{n-1} = nx^{n-1}$$

Seega $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, ehk kui $f(x) = 2x^3$ siis $f'(x) = 6x^2$.

1.3 Funktsioonide liitmine

Olgu meil funktsioon $f(x) = g(x) + h(x)$ ja vaatame, kuidas leida tuletist $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(g(x + dx) + h(x + dx)) - (g(x) + h(x))}{dx} = \frac{g(x + dx) - g(x)}{dx} + \frac{h(x + dx) - h(x)}{dx} = g'(x) + h'(x)$$

Seega kui funktsioon on funktsioonide summa siis on selle funktsiooni tuletis nende summa liikmete tulemuste summa.

1.4 Funkstioonide korrutamine

Olgu meil funktsioon $f(x) = g(x)h(x)$ ja vaatame, kuidas leida tuletist $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(g(x + dx)h(x + dx)) - (g(x)h(x))}{dx} =$$

Me võime liita ja lahutada murru lugejast sama arvu $g(x)h(x + dx)$ ja me teame, et suvaline funktsioon $k(x + dx) = k(x)$ seega saame

$$= \frac{g(x + dx)h(x + dx) - g(x)h(x + dx) + g(x)h(x + dx) - g(x)h(x)}{dx} = \frac{h(x + dx)(g(x + dx) - g(x)) + g(x)(h(x + dx) - h(x))}{dx} = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Seeda saab lihtsamalt kirjutada. Kui meil on funktsioonid u ja v , mis mõlemad sõltuvad x 'ist, siis $(uv)' = u'v + uv'$.

1.5 Liitfunktsioonid ?

Olgu meil funktsioon $f(x) = g(h(x))$. Näiteks, seega kui $h(x) = x + 1$ ja $g(x) = x^2$ siis $f(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2$. Nüüd vaatame, kuidas sellisest funktsioonist tuletist võtta. Tuletise deffinitioonist saame

$$f'(x) = \frac{g(h(x + dx)) - g(h(x))}{h(x + dx) - h(x)} \cdot \frac{h(x + dx) - h(x)}{dx}$$

Kui me teeme asenduse $h(x) = a$ ja $h(x + dx) = a + da$, siis saame, et

$$f'(x) = \frac{g(a + da) - g(a)}{da} \cdot \frac{h(x + dx) - h(x)}{dx} = \frac{dg(a)}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx}$$

Kuna sellest võib olla raske aru saada teeme läbi ühe näite. Olgu meil funktsioon $f(x) = (x+1)^2$, ja võtame $h(x) = x+1$ ja $g(x) = x^2$ siis $f(x) = g(h(x))$. Me võime teha asenduse $a = h(x)$. Seega tuleb on

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d(x+1)^2}{d(x+1)} \cdot \frac{d(x+1)}{dx} = \frac{da^2}{da} \cdot \frac{d(x+1)}{dx} = \\ &= (2a) \cdot (1+0) = 2(x+1) = 2x+2 \end{aligned}$$

Kuna me oskame nüüd ka teist moodi seda tulemist võtta teeme kontrolliks ka selle läbi

$$((x+1)^2)' = (x^2 + 2x + 1)' = (x^2)' + (2x)' + (1)' = 2x + 2$$

Seega kõik töötab

1.6 Funktsioonide jagamine

Vaatame nüüd jagatist $\frac{u}{v}$ ja leiame selle tulemise.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \left(\frac{1}{v}\right) + u \left(\frac{1}{v}\right)'$$

Kuna $\frac{1}{v}$ on liitfunktsioon siis selle tulemis on

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{d(1/v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{-1}{v^2} \cdot v'$$

Seega on jagatise tulemis

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \left(\frac{1}{v}\right) + u \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

1.7 Sin ja Cos

Siinuse ja Cosiinuse summa abivalemid

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Võtame funktsioonist $f(x) = \sin(x)$ tulemist kasutades tulemise deffinitiooni

$$f'(x) = \frac{\sin(x+dx) - \sin(x)}{dx} =$$

Kuna dx läheneb nullile siis $\cos(dx) = 1$ ja $\sin(dx)/dx = 1$ ja sellest saame, et

$$= \frac{\sin(x) \cos(dx) + \cos(x) \sin(dx) - \sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

Vaatame nüüd juhtu $f(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x+dx) - \cos(x)}{dx} = \\ &= \frac{\cos(x) \cos(dx) - \sin(x) \sin(dx) - \cos(x)}{dx} = -\sin(x) \end{aligned}$$

Kuna me saame konstantid tuletiest välja võtta saame, et $(-\sin(x))' = -\cos(x)$ ja $(-\cos(x))' = \sin(x)$. Kuna ülejäänud trigonomeetrilisi võrrandeid saab nende kahe abil leida, siis piisab nende kahe tuletiest. Leiame näiteks $\tan(x)$ tulemise

$$\begin{aligned} \tan(x)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)' \cos(x) - \cos(x)' \sin(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) \end{aligned}$$