

## 1 Piirdenurk

Ringjoone kaarele toetuv kesknurk on kaks korda suurem samale kaarele toetuvast piirdenurgast ja kaks samale kaarele toetuvat piirdenurka on võrdsed.

**Ülesanne 1.** Tõesta eelolev väide ja Thalese teoreem (Iga kolmnurk, mille küljeks on ümberringjoone diameeter on täisnurkne).

## 2 Kõõlnelinurk

Kõõlnelinurk on nelinurk, mille kõik küljed on sama ringjoone kõõlud

**Ülesanne 2.** Tõesta, et kõõlnelinurga vastasnurkade summa on  $180^\circ$ .

**Ülesanne 3.** Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, mille kõrguste aluspunktid külgedel BC, CA, AB on vastavalt D, E ja F ning mille kõrguste lõikepunkt on H.

- Leia jooniselt kuus kõõlnelinurka.
- Tõesta, et H on kolmnurga DEF siseringjoone keskpunkt.
- Tõesta, et  $\triangle AEF$ ,  $\triangle BFD$  ja  $\triangle CDE$  on kõik sarnased kolmnurgaga  $\triangle ABC$ .
- Tõesta, et punkti H peegeldus üle külje BC asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.
- Olgu külje BC keskpunkt M. Tõesta, et kui H peegeldus üle punkti M on H', siis H' asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.
- Tõesta, et AH' on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter.
- Olgu AH keskpunkt N ning (ABC) keskpunkt O. Tõesta, et ANMO on rööpkülik.
- Tõesta, et ME ja MF on mõlemad (AEHF) puutujad ning sirge, mis läbib punkti A ning on paralleelne küljega BC on sammuti (AEHF) puutuja.

**Ülesanne 4.** Olgu ABCDE kumer viisnurk nii, et BCDE on ruut keskpunktiga O ning  $\angle = 90^\circ$ . Tõesta, et AO poolitab nurka  $\angle BAE$ .

**Ülesanne 5.** (EGMO 2012) Olgu ABC kolmnurk ning O selle ümberringjoone keskpunkt. Punktid D, E ja F asuvad vastavalt lõikudel BC, CA, AB nii, et  $DE \perp CO$  ja  $DF \perp BO$ . Olgu K kolmnurga AFE ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et  $DK \perp BC$ .

**Ülesanne 6.** (Venemaa 1996) Kumera nelinurga ABCD küljel BC valitakse punktid E ja F (E asub B ja F vahel). On teada, et  $\angle BAE = \angle CDF$  ja  $\angle EAF = \angle FDE$ . Tõesta, et  $\angle FAC = \angle EDB$ .

## 3 Puutuja-kõõlu teoreem

Nurk puutuja ja kõõlu vahel on võrdne sellele kõõlule toetuva piirdenurgaga.

**Ülesanne 7.** Tõesta puutuja-kõõlu teoreem

**Ülesanne 8.** (PAMO 2018) Antud on kolmnurk ABC. Küljega AB risti olev sirge läbi tipu A ja küljega BC risti olev sirge läbi tipu B lõikuvad punktis D. Olgu P punkt kolmnurga sisepiirkonnas. Näita, et DAPB on kõõlnelinurk siis ja ainult siis, kui  $\angle BAP = \angle CBP$ .

**Ülesanne 9.** Kaks ringjoont lõikuvad punktides P ja Q. Läbi punkti A, mis asub esimesel ringjoonel, tõmmatakse sirged AP ja AQ. Need sirged lõikavad teist ringjoont vastavalt punktides B ja C (mis ei kattu P ja Q'ga). Tõesta, et läbi A esimesele ringjoonele tõmmatud puutuja on paralleelne sirgega BC.

**Ülesanne 10.** Ringjooned  $S_1$  ja  $S_2$  lõikuvad punktides A ja P.  $S_2$  peal valitakse punkt B nii, et AB on  $S_1$  puutuja. Sirge CD, kus C asub ringjoonel  $S_2$  ja D ringjoonel  $S_1$ , läbib punkti P ja on paralleelne AB'ga. Tõesta, et ABCD on rööpkülik.

**Ülesanne 11.** (PAMO 2016) Kaks ringjoont  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  lõikuvad erinevates punktides M ja N. Nende kahe ringjoone punktide N lähemal olev ühine puutuja puutub ringjoont  $\varphi_1$  punktis P ja  $\varphi_2$  punktis Q. Sirge PN lõikub  $\varphi_2$ 'ga teist korda punktis R. Tõesta, MQ on nurga  $\angle PMR$  poolitaja.

## 4 Punkti potents

Olgu tasandil antud punkt P ja ringjoon c. Läbi punkti P tõmmatakse sirge, mis lõikab ringjoont punktides A ja B (juhul kui sirge on puutuja ühtiva punktid A ja B). Suurust  $|PA| \cdot |PB|$  nimetatakse punkti potentsiks ringjoone c suhtes.

**Ülesanne 12.** Tõesta, et punkti P potents ringjoone c suhtes ei sõltu valitud sirgest.

**Ülesanne 13.** Olgu ringjoone c raadius R ja punkti P kaugus ringjoone keskpunktist d. Tõesta, et punkti P potents ringjoone c suhtes on

- $R^2 - d^2$ , kui P asub ringjoone sees;
- 0, kui P asub ringjoonel;
- $d^2 - R^2$ , kui P asub ringjoonest väljaspool.

**Ülesanne 14.** Tõesta Pythagorase teoreem punkti potentsi abil.

**Ülesanne 15.** (BT 2013 treeningvõistlus) Olgu  $\Gamma_1$  ringjoon keskpunktiga O. Ringjoon  $\Gamma_2$  läbib punkti O ning lõikab ringjoont  $\Gamma_1$  punktides A ja B. Olgu L suvaline O'st erinev punkt ringjoonel  $\Gamma_2$ . Sirged OL ja AB lõikuvad punktis M. Tõesta, et  $|OM| \cdot |OL| = |OA|^2$ .

**Ülesanne 16.** (BT 2008) Olgu ABCD rööpkülik. Ringjoon diameetriga AC lõikab sirget BD punktides P ja Q. Punkti

C läbib sirgega AC ristuv sirge lõikab sirgeid AB ja AD vastavalt punktides X ja Y. Tõesta, et punktid P, Q, X ja Y sauvad ühel ringjoonel.

**Ülesanne 17.** (IMO teine valikvõistlus 2018) Olgu AD teravnurkse kolmnurga ABC kõrgus. Sirgel AD valitakse erinevad punktid E ja F nii, et  $|DE| = |DF|$  ja punkt E on kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Kolmnurga BEF ümberringjoon lõikab lõike BC ja BA teist korda vastavalt punktides K ja M. Kolmnurga CEF ümberringjoon lõikab lõike CB ja CA teist korda vastavalt punktides L ja N. Tõesta, et sirged AD, KM ja LN lõikuvad ühes punktis.

## 5 Radikaaltelg ja radikaalkese

Olgu antud kaks mittekoosentrilist ringjoont  $c_1$  ja  $c_2$ . Punktid, mille potents on mõlema ringjoone suhtes võrdne, moodustavad tasandil sirge. Seda sirget nimetatakse  $c_1$  ja  $c_2$  radikaalteljeks.

**Ülesanne 18.** Tõesta, et radikaaltelg on hästi defineeritud: punktid, mille potents on mõlema ringjoone suhtes võrdne, asuvad tõepoolest kõik ühel sirgel.

**Ülesanne 19.** Tõesta, et lõikuvate ringjoonte radikaaltelg läbib nende ringjoonte lõikepunkte.

**Ülesanne 20.** Tõesta, et kolme ringjoone, mille keskpunkt ei asu ühel sirgel, paarikaupa radikaalteljed lõikuvad kõik ühes punktis. (See punkt on nende kolme ringjoone radikaalkese.) Mis juhtub siis, kui ringjoonte keskpunktid asuvad ühel sirgel.

**Ülesanne 21.** Olgu ABC kolmnurk ning P punkt selle sisepiirkonnas. Oletame, et BC on kolmnurkade ABP ja ACP ümberringjoonte puutuja. Tõest, et AP poolitab BC.

**Ülesanne 22.** Tõesta radikaaltegede kaudu, et kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.

**Ülesanne 23.** (BT 2005) Sirged e ja f ristuvad punktis H. Punktid A ja B asuvad ühel sirgel e ning punktid C ja D asuvad sirgel f, kusjuures punktid A, B, C, D ja H on paarikaupa erinevad. Sirged b ja d läbivad vastavalt punkte B ja D ning on risti sirgega AC. Sirged a ja c läbivad vastavalt punkte A ja C ning on risti sirgega BD. Sirgete a ja b lõikepunkt on X ning c ja d lõikepunkt on Y. Tõesta, et sirge XY läbib punkti H.

**Ülesanne 24.** Nelinurga ABCD külgede AB ja CD pikendused lõikuvad punktid F ning külgede BC ja AD pikendused punktis R. Tõesta, et ringjooned diameetritega AC, BD ja EF omavad ühist radikaaltelge ja et kolmnurkade ABE, CDE, ADF ja BCF ümberringjoonte keskpunktid asuvad sellel radikaalteljel.