Zadania z rachunku prawdopodobieństwa - przetwarzanie języka naturalnego

Zdarzenia niezależne. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi, jeśli:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe. $A, B \subset \Omega$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Wtedy prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie B, nazywamy liczbę:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

Zatem:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B)$$

Jeśli A i B są niezależne, to:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$$

Prawdopodobieństwo całkowite. Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ są parami rozłączne oraz mają prawdopodobieństwa dodatnie, które sumują się do jedynki, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i) \cdot \mathbf{P}(B_i)$$

Prawo Bayesa. $A, B \subset \Omega$, $\mathbf{P}(B) > 0$, $\mathbf{P}(A) > 0$. Wzór Bayesa pozwala nam odwrócić stosunek zależności pomiędzy zdarzeniami – czyli obliczyć $\mathbf{P}(B|A)$, gdy znane jest $\mathbf{P}(A|B)$:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}$$

W szczególności, jeśli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia A zawartego w sumie zdarzeń $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$:

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k) \cdot \mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A|B_1) \cdot \mathbf{P}(B_1) + ... + \mathbf{P}(A|B_n) \cdot \mathbf{P}(B_n)}$$

1. Niech $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{10}$, oraz $\mathbf{P}(A) = 2 \cdot \mathbf{P}(A \setminus B)$. Oblicz $\mathbf{P}(A)$ oraz $\mathbf{P}(B)$.

2. Pokaż, że dla dowolnego ciągu rozłącznych zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n$ zachodzi własność: $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$.

3. Podaj przykład przestrzeni Ω i zdarzeń A i B rozłącznych, ale zależnych.

4. Podaj przykład przestrzeni Ω i zdarzeń A i B niezależnych, ale nie rozłącznych.

5. Pokaż, że jeśli zdarzenia A, B są niezależne, to również zdarzenia A', B' są niezależne.

6. Niech A, B będą zdarzeniami losowymi takimi, że $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $\mathbf{P}(A \cup B)$.

7. Trzy osoby strzelają z łuku do tarczy. Dokładnie jedna osoba trafia w środek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osobą, która trafiła w środek, jest osoba pierwsza, skoro trafiają oni z prawdopodobieństwami odpowiednio: 0.3, 0.8, 0.4.

8. Na loterii mamy 5% losów wygrywających, 20% losów przegrywających oraz 75% losów „Graj dalej!" - pozwalających na wyciągnięcie następnego losu. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

9. Niesymetryczna moneta (z prawdopodobieństwem otrzymania orła równym $p > 0$ jest rzucana wielokrotnie i niezależnie aż do momentu, gdy pierwszy orzeł zostanie zaobserwowany. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwszy orzeł zostanie zaobserwowany po parzystej liczbie rzutów

10. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 5% przypadków (u osoby chorej daje zawsze odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora? Zakładamy, że nic nie wiemy o innych możliwych objawach u badanej osoby.

11. Na rynku mamy dostępne maszyny, z których 70% pochodzi z fabryki A, a 30% z fabryki B. Statystyki mówią, że średnio 2% maszyn produkowanych przez A jest wadliwych oraz 1% maszyn produkowanych przez B jest wadliwych. Oblicz:

    - Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana maszyna jest z fabryki A i jest wadliwa?
    - Jakie jest prawdopodobieństwo, że maszyna jest wadliwa?
    - Jeśli maszyna jest wadliwa, jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi z fabryki A?

12. Pewien wirus obecny jest w 0,05% populacji. Opracowano badanie, który daje wynik dodatni u 90% chorych i u 5% zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pacjent z wynikiem dodatnim jest zdrowy? Czy ma on powody do obaw?

13. W teleturnieju za dwoma z trzech zamkniętych drzwi znajdują się kozy, a za trzecimi drzwiami samochód. Prowadzący grę wie, które drzwi kryją samochód. Gracz wskazuje na jedne z drzwi. prowadzący otwiera jedne z pozostałych odkrywając kozę i następnie pyta gracza, które z zamkniętych drzwi otworzyć (tzn. czy gracz zmienia wybór, czy nie). Jeżeli gracz wskaże na odpowiednie drzwi, wygrywa samochód. Powiedzmy, że gracz wskazał na początku na drzwi nr 1, a prowadzący grę otworzył drzwi nr 3 z kozą. Czy graczowi opłaca się zmienić decyzję i wskazać na drzwi nr 2? Odpowiedź uzasadnić.