

Algebra & Analyza

Jaromir Kligl

February 2025

Contents

I	Analyza	4
1	1. Hodina	4
	1.1 Najdete Prim. Funkci	4
	1.2 Najdete Prim. Funkci	4
	1.3 Vyreste s per partes	4
2	2. Hodina	5
	2.1 S vyuzitim metody substituce, integrujte	5
	2.2 Integrujte s metodou rozkaldu na parcialni zlomky	5
3	3. hodina	6
	3.1 Urcete obsah plochy	6
	3.2 Urcete obsah plochy	6
4	4. hodina	6
	4.1 Urcete objem telesem daneho funkci.	6
	4.2 Urcete hodnotu nevlastniho integralu. Pokud konverguje	6
II	Algebra	7
5	1. Hodina	7
	5.1 Na \mathbb{Z} je dana Operace \circ	7
	5.2 Doplnte tabulku tak aby $G = (\{a,b,c\}; \spadesuit)$	7
	5.3 je $B = \{2k k \in \mathbb{N}_0\}$ podgrupou $(\mathbb{Z}; \oplus)$	7
	5.4 je dana struktura: $(\mathcal{A}; \diamond)$	7
6	2. hodina	8
	6.1 jsou grupoidy $(\mathbb{Z}_2; \oplus)$ a $(\{1, -1\}; \odot)$ izomorfni ?	8
	6.2 jsou grupoidy $(\{a, b, c, \}; \odot)$ a $(\{1, 2, 3\}; \star)$ izomorfni ?	8
	6.3 Je Grupa $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ cyklicka?	8
	6.4 Pro grupu $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ urcete nejmejsi podgrupu	8
	6.5 Urcete vsechny generatory grupy $(\mathbb{Z}_6; \oplus)$	8
	6.6 Jen nasledujici obrazek Cayleho graf?	9
	6.7 Zakreslete Cayleho graf grupy $(\mathbb{Z}_{12}; \oplus)$ s generujici mnozinou $\{2,3\}$	9
	6.8 Na mnozine $A = \{1,2,3,4,5\}$ jsou zadany permutace.	9
	6.9 Pro predchozi mnozinu A urcete:	9

Predmluva

Tento text slouží jako studentská sbírka příkladů. Všechny příklady byly převzaty z hodin Elisky Foltasové. Tento text není oficiální studijní materiál, pokud jsem nějaký příklad přepsal špatně, neberu za to zodpovědnost.

Part I

Analyza

1 1. Hodina

1.1 Najdete Prim. Funkci

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx & \qquad \qquad \qquad \int (x + \frac{1}{x^2})^2 dx \\ \int \frac{x+1}{x-1} dx & \qquad \qquad \int \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x^2 + 5x - 4}{x-2} dx \\ \int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt[3]{x}) dx & \end{aligned}$$

1.2 Najdete Prim. Funkci

$$\begin{aligned} \int (\frac{\sin^2 x}{\cos x}) dx & \qquad \qquad \int \sin^2 x + \cos^2 x dx \\ \int \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx & \qquad \qquad \int \tan^2 x dx \end{aligned}$$

1.3 Vyreste s per partes

$$\begin{aligned} \int \ln x dx & \qquad \qquad \int x^2 \cdot e^x dx \\ \int x \cdot \cos x dx & \qquad \qquad \int x^3 \cdot \ln x dx \\ \int \frac{\ln x}{x} dx & \end{aligned}$$

2 2. Hodina

2.1 S vyuzitim metody substituce, integrujte

$$\begin{array}{ll} \int (5x-1)^3 dx & \int \frac{5x}{(x^2+4)^3} dx \\ \int \sqrt[3]{4x-7} dx & \int \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} dx \\ \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx & \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \\ \int e^{3-2x} dx & \int x \cdot e^{x^2} dx \\ \int e^{1+\sin x} dx & \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \\ \int \cos \frac{x}{4} dx & \int \cot(2x+1) dx \\ \int \sin^3 x \cdot x dx & \end{array}$$

2.2 Integrujte s metodou rozkladu na parcialni zlomky

$$\begin{array}{ll} \int \frac{5}{x^2-9x+14} dx & \int \frac{3x+7}{x^2+2x-15} dx \\ \int \frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4} dx & \int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx \\ \int \frac{3x^2+30x-120}{x^3-5x^2-4x+20} dx & \end{array}$$

3 3. hodina

3.1 Urcete obsah plochy

plocha je ohranicena funkci $y = -x^2 + 4$ a osou x .

3.2 Urcete obsah plochy

ohraniceny funkcema:

1. $f(x) : y = x^2 - x + 1$
2. $g(x) : y = -x^2 + 3x$

4 4. hodina

4.1 Urcete objem telesem daneho funkci.

Za pouziti vzorce:

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

- | | | |
|----|------------------------|----------------------------|
| 1) | $f(x) : \frac{1}{x^3}$ | $a = \frac{1}{2}; b = 1$ |
| 2) | $g(x) : \cos x$ | $a = 0; b = \frac{\pi}{2}$ |

4.2 Urcete hodnotu nevlastniho integralu. Pokud konverguje

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+1}$$
$$\int_{-\infty}^2 e^{2x} dx$$

Part II

Algebra

5 1. Hodina

5.1 Na \mathbb{Z} je dana Operace \circ

$$a \circ b : 3a + 3b$$

Overte:

- a) Asociativitu
- b) Komutativitu
- c) ma (\mathbb{Z}, \circ) neutralni prvek?
- d) na (\mathbb{Z}, \circ) inverze?

5.2 Doplňte tabulku tak aby $G = (\{a,b,c\}; \spadesuit)$

\spadesuit	a	b	c
a	a	c	a
b			b
c			

- 1. G byl grupoid s neutralními prvky
- 2. G byl grupoid s inverzními prvky
- 3. G byla pologrupa
- 4. G byla Grupa

5.3 je $B = \{2k | k \in \mathbb{N}_0\}$ podgrupou $(\mathbb{Z}; \oplus)$

5.4 je dana struktura: $(\mathcal{A}; \diamond)$

$$\diamond : a \diamond b = b$$

O jakou strukturu se jedna?

6 2. hodina

Před řešením si zopakujte znalost pojmu:

- homomorfismus (grupoidu, grup atd.), izomorfismus
- generator grupy
- řád prvku
- Cayleyho graf

6.1 Jsou grupoidy $(\mathbb{Z}_2; \oplus)$ a $(\{1, -1\}; \odot)$ izomorfní ?

6.2 Jsou grupoidy $(\{a, b, c\}; \odot)$ a $(\{1, 2, 3\}; \star)$ izomorfní ?

\odot	a	b	c
a	a	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

\star	1	2	3
1	1	3	2
2	2	3	1
3	3	1	2

6.3 Je Grupa $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ cyklická?

V kladném případě určete její generator a řady všech prvků.

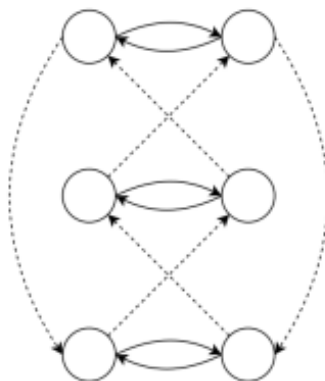
6.4 Pro grupu $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ určete nejmenší podgrupu

- Obsahující prvek 2
- Obsahující prvek 3

6.5 Určete všechny generatory grupy $(\mathbb{Z}_6; \oplus)$

6.6 Jen nasledující obrazek Cayleho graf?

V kladném případě naleznete odpovídající grupu.



6.7 Zakreslete Cayleho graf grupy $(\mathbb{Z}_{12}; \oplus)$ s generující množinou $\{2, 3\}$

6.8 Na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou zadány permutace.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Zapište permutace $\sigma \circ \psi$ a $\psi \circ \sigma$.

6.9 Pro předchozí množinu A určete:

1. jednotku grupy $(S_A; \circ)$, kde S_A je množina všech permutací na A a \circ je operace skalární permutací
2. inverzní prvky k σ a ψ