

Algebra & Analyza

Jaromir Kligl

February 2025

Contents

I	Analyza	5
1	1. Hodina	5
	1.1 Najdete Prim. Funkci	5
	1.2 Najdete Prim. Funkci	5
	1.3 Vyreste s per partes	5
2	2. Hodina	6
	2.1 S vyuzitim metody substituce, integrujte	6
	2.2 Integrujte s metodou rozkaldu na parcialni zlomky	6
3	3. hodina	7
	3.1 Urcete obsah plochy	7
	3.2 Urcete obsah plochy	7
4	4. hodina	7
	4.1 Urcete objem telesem daneho funkci.	7
	4.2 Urcete hodnotu nevlastniho integralu. Pokud konverguje	7
II	Algebra	8
5	1. Hodina	8
	5.1 Na \mathbb{Z} je dana Operace \circ	8
	5.2 Doplnite tabulku tak aby $G = (\{a,b,c\}; \spadesuit)$	8
	5.3 je $B = \{2k k \in \mathbb{N}_0\}$ podgrupou $(\mathbb{Z}; \oplus)$	8
	5.4 je dana struktura: $(\mathcal{A}; \diamond)$	8
6	2. hodina	9
	6.1 jsou grupoidy $(\mathbb{Z}_2; \oplus)$ a $(\{1, -1\}; \odot)$ izomorfni ?	9
	6.2 jsou grupoidy $(\{a, b, c, \}; \odot)$ a $(\{1, 2, 3\}; \star)$ izomorfni ?	9
	6.3 Je Grupa $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ cyklicka?	9
	6.4 Pro grupu $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ urcete nejmejsi podgrupu	9
	6.5 Urcete vsechny generatory grupy $(\mathbb{Z}_6; \oplus)$	9
	6.6 Jen nasledujici obrazek Cayleho graf?	10
	6.7 Zakreslete Cayleho graf grupy $(\mathbb{Z}_{12}; \oplus)$ s generujici mnozinou $\{2,3\}$	10
	6.8 Na mnozine $A = \{1,2,3,4,5\}$ jsou zadany permutace.	10
	6.9 Pro predchozi mnozinu A urcete:	10
7	3. hodina	11

8	4. hodina	12
8.1	Na množině $A = \{1, 2, 7\}$ je dána permutace	12
8.2	Pro permutace určete zda	12
8.3	Vyjadřete permutaci jako součin disjunktních cyklů	12
8.4	Na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ nalezněte	12
8.5	Rozhodněte paritu permutace	12
8.6	Pro podgrupu $G = (\{0, 2, 4, 6, 8\}; \oplus)$ grupy $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$	13
8.7	Určete index G z minuleho příkladu.	13
9	5. Hodina	14
9.1	Rozhodněte, zda jsou grupy rozložitelné	14
9.2	Pro grupu (\mathbb{Z}_6, \oplus) ukažte že je rozložitelná.	14
9.3	Rozhodněte zda se jedná o homomorfismus	14
9.4	Nalezněte nějaký homomorfismus	15
9.5	Nalezněte zda jsou dané podgrupy normální	15
9.6	Rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus	15

Predmluva

Tento text slouzi jako studentska sbirka prikladu. Veskere prikaldy byly prevzane z hodin Elisky Foltasove. Tento text neni officialni studijni material, pokud jsem nejaky priklad prepsal spatne, neberu za to zodpovednost.

Part I

Analyza

1 1. Hodina

1.1 Najdete Prim. Funkci

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx & \qquad \qquad \qquad \int (x + \frac{1}{x^2})^2 dx \\ \int \frac{x+1}{x-1} dx & \qquad \qquad \int \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x^2 + 5x - 4}{x-2} dx \\ \int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt[3]{x}) dx & \end{aligned}$$

1.2 Najdete Prim. Funkci

$$\begin{aligned} \int (\frac{\sin^2 x}{\cos x}) dx & \qquad \qquad \int \sin^2 x + \cos^2 x dx \\ \int \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx & \qquad \qquad \int \tan^2 x dx \end{aligned}$$

1.3 Vyreste s per partes

$$\begin{aligned} \int \ln x dx & \qquad \qquad \int x^2 \cdot e^x dx \\ \int x \cdot \cos x dx & \qquad \qquad \int x^3 \cdot \ln x dx \\ \int \frac{\ln x}{x} dx & \end{aligned}$$

2 2. Hodina

2.1 S využitím metody substituce, integrujte

$$\begin{array}{ll} \int (5x-1)^3 dx & \int \frac{5x}{(x^2+4)^3} dx \\ \int \sqrt[3]{4x-7} dx & \int \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} dx \\ \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx & \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \\ \int e^{3-2x} dx & \int x \cdot e^{x^2} dx \\ \int e^{1+\sin x} dx & \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \\ \int \cos \frac{x}{4} dx & \int \cot(2x+1) dx \\ \int \sin^3 x \cdot x dx & \end{array}$$

2.2 Integrujte s metodou rozkladu na parciální zlomky

$$\begin{array}{ll} \int \frac{5}{x^2-9x+14} dx & \int \frac{3x+7}{x^2+2x-15} dx \\ \int \frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4} dx & \int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx \\ \int \frac{3x^2+30x-120}{x^3-5x^2-4x+20} dx & \end{array}$$

3 3. hodina

3.1 Urcete obsah plochy

plocha je ohranicena funkci $y = -x^2 + 4$ a osou x .

3.2 Urcete obsah plochy

ohraniceny funkcema:

1. $f(x) : y = x^2 - x + 1$
2. $g(x) : y = -x^2 + 3x$

4 4. hodina

4.1 Urcete objem telesem daneho funkci.

Za pouziti vzorce:

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

- | | | |
|----|------------------------|----------------------------|
| 1) | $f(x) : \frac{1}{x^3}$ | $a = \frac{1}{2}; b = 1$ |
| 2) | $g(x) : \cos x$ | $a = 0; b = \frac{\pi}{2}$ |

4.2 Urcete hodnotu nevlastniho integralu. Pokud konverguje

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+1}$$
$$\int_{-\infty}^2 e^{2x} dx$$

Part II

Algebra

5 1. Hodina

5.1 Na \mathbb{Z} je dana Operace \circ

$$a \circ b : 3a + 3b$$

Overte:

- a) Asociativitu
- b) Komutativitu
- c) ma (\mathbb{Z}, \circ) neutralni prvek?
- d) na (\mathbb{Z}, \circ) inverze?

5.2 Doplňte tabulku tak aby $G = (\{a,b,c\}; \spadesuit)$

\spadesuit	a	b	c
a	a	c	a
b			b
c			

- 1. G byl grupoid s neutralními prvky
- 2. G byl grupoid s inverzními prvky
- 3. G byla pologrupa
- 4. G byla Grupa

5.3 je $B = \{2k | k \in \mathbb{N}_0\}$ podgrupou $(\mathbb{Z}; \oplus)$

5.4 je dana struktura: $(\mathcal{A}; \diamond)$

$$\diamond : a \diamond b = b$$

O jakou strukturu se jedna?

6 2. hodina

Před řešením si zopakujte znalost pojmu:

- homomorfismus (grupoidu, grup atd.), izomorfismus
- generator grupy
- řád prvku
- Cayleyho graf

6.1 Jsou grupoidy $(\mathbb{Z}_2; \oplus)$ a $(\{1, -1\}; \odot)$ izomorfní ?

6.2 Jsou grupoidy $(\{a, b, c\}; \odot)$ a $(\{1, 2, 3\}; \star)$ izomorfní ?

\odot	a	b	c
a	a	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

\star	1	2	3
1	1	3	2
2	2	3	1
3	3	1	2

6.3 Je Grupa $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ cyklická?

V kladném případě určete její generator a řady všech prvků.

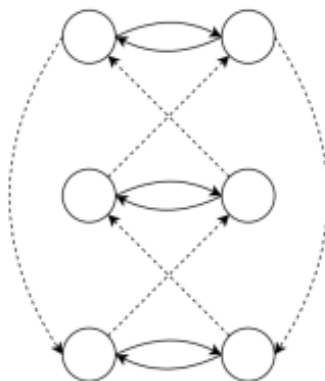
6.4 Pro grupu $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ určete nejmenší podgrupu

- Obsahující prvek 2
- Obsahující prvek 3

6.5 Určete všechny generatory grupy $(\mathbb{Z}_6; \oplus)$

6.6 Jen nasledující obrazek Cayleho graf?

V kladném případě naleznete odpovídající grupu.



6.7 Zakreslete Cayleho graf grupy $(\mathbb{Z}_{12}; \oplus)$ s generující množinou $\{2, 3\}$

6.8 Na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou zadány permutace.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Zapište permutace $\sigma \circ \psi$ a $\psi \circ \sigma$.

6.9 Pro předchozí množinu A určete:

1. jednotku grupy $(S_A; \circ)$, kde S_A je množina všech permutací na A a \circ je operace skalární permutací
2. inverzní prvky k σ a ψ

7 3. hodina

Hodina 2. odpadla takže jsme počítaly příklady z hodiny 2.

8 4. hodina

8.1 Na množině $A = \{1, 2, 7\}$ je dána permutace

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Urcete rozklad A dany σ a zakrteslete ho.

8.2 Pro permutace urcete zda

1. Jde o cyklus?
2. Pokud ano, jeho delku.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

8.3 Vyjadrete permutaci jako soucin disjunktnich cyklu

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

8.4 Na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ naleznete

takove dvojice¹, aby soucin nebyl cyklus.

8.5 Rozhodnete paritu permutace

²

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 8 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

¹Tohle rozlústí socka.

²Z duvodu meho prepisu me uteklo cislo 2 tak jsem ho doplnil, na 2 nejvic pravdepodobne pozice aspon z jednohu prikladu vznikly 2.

8.6 Pro podgrupu $G = (\{0,2,4,6,8\}; \oplus)$ grupy $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$ naleznete leve a prave tridy G .

8.7 Urcete index G z minuleho prikladu.

9 5. Hodina

Pojmy k hodine:

- **Rozložitelná grupa** - izomorfní s direktním součinem svých dvou různých podgrup
- **nerozložitelná grupa** - její řád je mocninou prvočísla
- **Normalní podgrupa H** - levo a pravo třídy jsou shodné:
 $a \cdot H = H \cdot a : \forall a \in G$ ³

9.1 Rozhodnete, zda jsou grupy rozložitelné

1. (\mathbb{Z}_6, \oplus)
2. (\mathbb{Z}_5, \oplus)
3. (\mathbb{Z}_9, \oplus)

9.2 Pro grupu (\mathbb{Z}_6, \oplus) ukažte, že je rozložitelná.

9.3 Rozhodnete, zda se jedná o homomorfismus

(případně izomorfismus)

1. $f_1(x) = x, (\mathbb{Z}, \oplus) \rightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$
2. $f_2(x) = x, (\mathbb{Z}, \oplus) \rightarrow (\mathbb{N}, \oplus)$
3. $f_3(x) = 2x, (\mathbb{Z}_3, \oplus) \rightarrow (\mathbb{Z}_6, \oplus)$
4. $f_4(x) = x, (\mathbb{Z}_3, \oplus) \rightarrow (\mathbb{Z}_6, \oplus)$

³Písmeno G rozluštil vášnivý řešitel Socka

9.4 Naleznete nějaký homomorfismus

ze $(\mathbb{Z}_6, \oplus) \rightarrow (\mathbb{Z}_3, \oplus)$

9.5 Naleznete zda jsou dane podgrupy normalni

- (\mathbb{R}_6, \odot) v $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$,
- $(\{id, (1, 2)\}, \circ)$ v (\mathbb{S}_3, \odot) ,

9.6 Rozhodnete, zda se jedna o homomorfismus

případně určete kernel

1. $f_1(x) = 2x + 1, (\mathbb{Z}, \oplus) \rightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$
2. $f_2(x) = \log |x|, (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$
3. $f_3(x) = |x|, (\mathbb{R}, \oplus) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$
4. $f_4(x) = 2^x, (\mathbb{R}, \oplus) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$